

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Течение жидкости в трубках с эластичными стенками

А.Н. Волобуев

Рассмотрены физико-математические аспекты процессов течения жидкости по эластичной тонкостенной трубке. Выведены и решены нелинейные дифференциальные уравнения этих процессов. Показана возможность существования автоколебательного (флаттерного) режима течения, а также проведено математическое моделирование уединенной (пульсовой) волны на основе моделей Кортевега–де Фриза и модифицированного нелинейного уравнения Шрёдингера. Обсуждена возможность использования модели тонкостенной эластичной трубки для описания потока крови в крупных кровеносных сосудах.

PACS numbers: 87.45.–k

Содержание

1. Введение (177).
 2. Закон Гука для эластичного трубопровода (177).
 3. Автоколебательный (флаттерный) режим течения в эластичной трубке (178).
 4. Уединенные волны в эластичной трубке на основе модели Кортевега–де Фриза (181).
 5. Моделирование уединенной волны в эластичной трубке на основе нелинейного уравнения Шрёдингера (184).
 6. Использование модели пассивной эластичной трубки для приближенного описания кровеносного сосуда (185).
 7. Заключение (186).
- Список литературы (186).

1. Введение

Движение жидкости по трубкам с тонкими эластичными стенками представляет собой интересную и довольно сложную физическую задачу. Многие исследователи, особенно в области биомеханики кровообращения, начиная с французского ученого Пуазейля, неоднократно обращались к этой задаче [1–3]. Были получены довольно интересные результаты. Наибольшие успехи связаны с изучением влияния реологических свойств жидкости на гидродинамику потока и с использованием различных электрических аналогов, где характеристики потока и эластичных стенок заменяются электрическими параметрами: разностью потенциалов, емкостью, индуктивностью и т.д. [4–6].

В настоящей работе основное внимание уделено двум вопросам:

— связи характера потока жидкости с изменяющейся под действием этого потока геометрией эластичной трубки;

— роли нелинейности уравнений гидродинамики при течении жидкости по эластичным трубкам.

Степень приближения используемой модели пассивной эластичной трубки к реальному кровеносному сосуду будет обсуждена в дальнейшем, здесь же отметим, что при последующем изложении мы будем использовать некоторые геометрические соотношения, характерные для сердечно-сосудистой системы живого организма.

В связи с поставленной задачей в исследуемой гидродинамической модели сделаны существенные упрощения. Во-первых, принято приближение идеальной жидкости, во-вторых, используется безмоментная теория для эластичной трубки.

Течение жидкости по тонкостенным эластичным трубкам можно условно разделить на три относительно самостоятельных гидродинамических явления: перенос объема жидкости по трубке, распространение волны давления (в биомеханике кровообращения ее называют пульсовой волной), скорость которой обычно выше скорости жидкости, и возникновение высокочастотных колебаний вследствие потери устойчивости по типу "поток — стенка" (флаттер). Все эти явления описываются своими уравнениями, следующими из уравнений Навье–Стокса и неразрывности.

В связи с нелинейностью уравнений Навье–Стокса можно сделать заключение, что по крайней мере какие-то из этих трех явлений носят нелинейный характер. Сразу отметим, что нелинейные проблемы турбулентности в данной статье не рассматриваются.

2. Закон Гука для эластичного трубопровода

Для получения замкнутой системы уравнений гидродинамики необходимо задать связь между деформацией эластичной трубки и избыточным давлением внутри нее. В простейшем случае небольших деформаций эта

А.Н. Волобуев. Самарский медицинский университет
443099, Самара, Россия
Тел. (846-2) 66-88-82

Статья поступила 27 января 1994 г.,
после доработки 14 сентября 1994 г.

связь определяется законом Гука. Однако формулировка закона Гука зависит от характера решаемой задачи и должна быть неодинаковой для различных скоростей изменения площади сечения трубки. В случае относительно небольших скоростей потока и изменений площади сечения трубки можно использовать формулу связи избыточного давления в трубке и площади ее сечения в виде

$$P_T = C \frac{\Delta S}{S_0}, \quad (2.1)$$

где $\Delta S = S - S_0$, S — площадь сечения трубки в данном месте, S_0 — площадь сечения трубки при нулевом избыточном давлении P_T , C — эластичность стенок трубки. Из теории тонких оболочек следует, что $C = Eh/d$, где E — эффективный модуль упругости стенки трубки, h — ее толщина, d — средний диаметр трубки.

В случае более значительных изменений площади сечения трубки можно использовать закон Гука в виде [1]

$$dP_T = C \frac{dS}{S}. \quad (2.2)$$

Здесь сохраняется линейная связь изменения избыточного давления от относительной деформации площади сечения трубки, однако зависимость площади от избыточного давления носит нелинейный характер:

$$S = S_0 \exp\left(\frac{P_T}{C}\right). \quad (2.3)$$

В первом порядке разложения в ряд формула (2.3) переходит в (2.1)

Если скорость изменения площади сечения трубки достаточно велика, то в закон Гука должны входить параметры, характеризующие движение жидкости по эластичной трубке. В этом случае закон Гука можно применять в виде [7]

$$P_T = C \frac{\Delta(dV)}{dV}, \quad (2.4)$$

где $dV = SdX$ — элемент объема трубки (рис. 1). Если жидкость неподвижна, то $dV = Sdl$, где dl — неизменяющаяся длина участка трубки. Тогда формула (2.4) переходит в (2.2). Если же жидкость движется, то преобразование носит более сложный характер (см.

рис. 1):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{V_1^* - V^*}{dV} = \left(V^* + \frac{dV^*}{dV} dV - V^* \right) \frac{1}{dV} = \\ &= \frac{dV^*}{dV} = \frac{\partial(uS)}{S \partial x}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ε — относительная деформация элемента объема трубки dV в процессе смещения жидкости вдоль нее на расстояние u , а $V_1^* - V^*$ — изменение элемента объема трубки при этом.

При $S = \text{const}$ формула (2.5) переходит в обычное выражение для относительной деформации в твердом теле: $\varepsilon = \partial u / \partial x$.

Относительно смещения u необходимо сделать следующее замечание. Если в эластичной трубке возникли высокочастотные автоколебания стенки и потока, то на усредненное движение жидкости со скоростью v_0 накладывается колебательное движение со скоростью v_k , и суммарная скорость равна

$$v = v_0 + v_k. \quad (2.6)$$

Величина u — это смещение элемента объема жидкости в процессе продольных колебаний относительно точки, движущейся со скоростью v_0 , так что $v_k = \partial u / \partial t$ (t — время).

Таким образом, из (2.4) следует

$$P_T = C \frac{\partial(uS)}{S \partial x}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.1)–(2.4) и (2.7) связывают избыточное давление с геометрией трубки. Однако, если записывается уравнение колебаний, то необходимо использовать связь между реакцией стенки эластичной трубки и ее геометрией. Реакция стенки трубки P — сила, действующая со стороны единицы площади внутренней поверхности трубки на жидкость. Так как $P = -P_T$, то в формулах (2.1)–(2.4) и (2.7) необходимо учесть знак минус.

3. Автоколебательный (флаттерный) режим течения в эластичной трубке

Для возникновения флаттерного режима течения совсем необязательно наличие волн давления (пульсовых волн). Он может появиться и при неизменном расходе в эластичной трубке, т.е. когда перепад давления на длине трубки постоянен.

Течение жидкости по эластичной трубке принципиально неустойчивый процесс. Любое случайное увеличение скорости жидкости вызывает в соответствии с "эффектом Бернулли" снижение статического давления в ней. Это ведет к уменьшению площади сечения трубки, что еще больше увеличивает скорость потока. Процесс нарастает лавинообразно (положительная обратная связь), что приводит к схлопыванию трубки. Однако необходимость прокачивания определенного объема жидкости раскрывает трубку. Возникают автоколебания по типу неустойчивости "поток-стенка", или флаттер оболочечной моды. Процесс непосредственно не связан с наличием вязкости жидкости, поэтому будем рассматривать возникновение автоколебательного (автоволнового) режима течения в идеальной жидкости, а влияние вязкости учтем в дальнейшем.

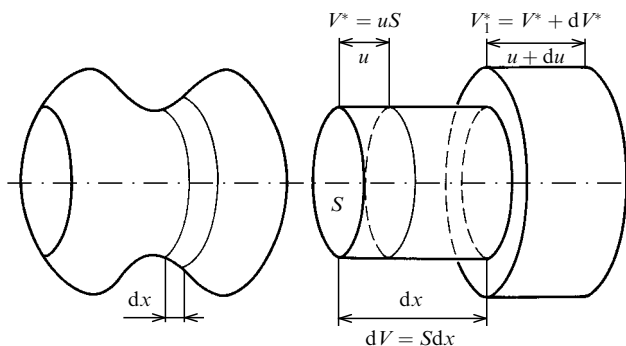


Рис. 1. Деформация элемента объема эластичной трубки dV при перемещении жидкости вдоль нее ($V_1^* - V^*$ — изменение элемента объема трубки при перемещении жидкости)

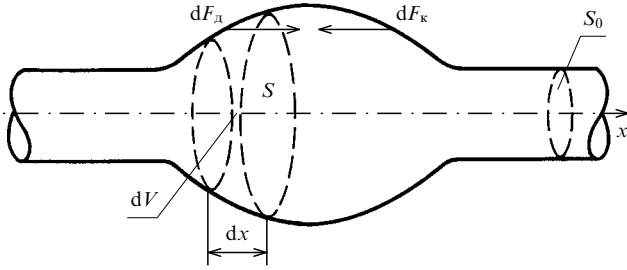


Рис. 2. Схема продольных составляющих сил, действующих на элемент объема dV со стороны диффузорной и конфузорной частей стенок трубки

Выведем уравнение импульса для рассматриваемого процесса. Изменение площади поперечного сечения трубопровода на полуволне возникших колебаний состоит из двух частей: диффузорной и конфузорной (рис. 2). Второй закон Ньютона в проекции на ось x для элемента объема жидкости dV можно записать в виде

$$dF_d + N - (N + dN) - dF_k = \rho dV \frac{dV}{dt}, \quad (3.1)$$

где $dF_d = dF_k = P dS$ — продольные составляющие сил, действующих на элемент объема dV со стороны диффузорной и конфузорной частей стенок трубки (согласно третьему закону Ньютона, они равны между собой), $N = PS$ — продольная составляющая сил давления, обеспечивающая течение жидкости, ρ — ее плотность.

Сила F_d , действующая на элемент объема dV по всей внутренней поверхности диффузорной части, уравновешивается силой F_k , действующей со стороны конфузорной части. Если $dF_k = 0$, т.е. диффузор открытый, уравнение (3.1) приобретает вид

$$-\frac{dP}{dx} = \rho \frac{dV}{dt}. \quad (3.2)$$

Такой же вид имеет уравнение импульса при $S = \text{const}$. Однако в случае существования диффузорной и конфузорной частей симметричной геометрии уравнение импульса (3.1) преобразуется к виду

$$-\frac{\partial(PS)}{S \partial x} = \rho \frac{dV}{dt}. \quad (3.3)$$

Следовательно, в случаях трубки неизменного расширяющегося либо сужающегося сечений можно пользоваться уравнениями Эйлера (3.2). Если же расширение трубки сменяется сужением, то необходимо исходить из (3.3). Подобный вид уравнения используется, например, при решении задачи Жуковского о гидравлическом ударе в упругом трубопроводе [8].

Подставляя в (3.3) закон Гука (2.7) с учетом знака, а также используя (2.6) и учитывая, что $\partial v_0 / \partial t = 0$, получаем

$$C \frac{\partial^2(uS)}{S \partial x^2} = \rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x} \right). \quad (3.4)$$

В случае колебаний небольшой амплитуды нелинейным конвективным слагаемым в правой части (3.4) можно пренебречь [9]. Скорость распространения авто-

волн по трубопроводу определяется как

$$a = \sqrt{\frac{C}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}. \quad (3.5)$$

Используя соотношение $v_k = \partial u / \partial t$, а также (3.5), получим

$$a^2 \frac{\partial^2(uS)}{\partial x^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

т.е. двухпараметрическое волновое уравнение. Второе уравнение, связывающее неизвестные величины u и S — это уравнение неразрывности [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(v_k S)}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

В него входит только колебательная составляющая скорости, так как изменение площади и расхода $Q = vS$ происходит лишь за счет v_k .

Будем искать решение системы уравнений (3.6) и (3.7) методом разделения переменных Фурье. Примем

$$u = F_1(x) \Phi_1(t), \quad S = F_2(x) \Phi_2(t), \\ uS = F_1(x) F_2(x) \Phi_1(t) \Phi_2(t) = F(x) \Phi(t). \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в (3.6) и, сокращая на $\Phi_2(t)$, разделим переменные:

$$\frac{1}{\Phi_1} \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = a^2 \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = -\omega^2 = \text{const}. \quad (3.9)$$

Получаем два уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + \omega^2 \Phi_1 = 0, \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 F = 0, \quad (3.10)$$

решение которых имеет вид

$$\Phi_1(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.11)$$

$$F(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right), \quad (3.12)$$

где ω — циклическая частота колебаний, A_i , φ_i — постоянные интегрирования. Функции $\Phi_2(t)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ найдем из уравнения неразрывности (3.7). Учитывая, что $v_k = \partial u / \partial t$, имеем

$$F_2 \frac{d\Phi_2}{dt} + \Phi_2 \frac{dF_1}{dt} \frac{dF}{dx} = 0. \quad (3.13)$$

Следовательно, уравнение неразрывности распадается на два уравнения

$$\frac{1}{F_2} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \Theta \quad (3.14)$$

(Θ — постоянная), решения которых с учетом (3.12) имеют вид

$$\Phi_2 = A_2 \exp(-\Theta \Phi_1),$$

$$F_2 = \frac{A_1 \omega}{\Theta a} \cos\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right). \quad (3.15)$$

Функция F_1 находится из условия

$$F_1 = \frac{F}{F_2} = \frac{a \Theta}{\omega} \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right). \quad (3.16)$$

Система функций (3.11), (3.15), (3.16) позволяет получить решение уравнений (3.6), (3.7):

$$S = F_2 \Phi_2 = \frac{A_1 A_2 \omega}{\Theta a} \left| \cos\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \times \exp[-\Theta A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)], \quad (3.17)$$

$$u = F_1 \Phi_1 = \frac{a \Theta A_0}{\omega} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.18)$$

При записи решений уравнений (3.6), (3.7) необходимо учитывать, что эти уравнения обладают слабой нелинейностью. Они линейны относительно каждого из параметров, но содержат их произведения. Указанное обстоятельство налагает некоторые ограничения на результат решения системы уравнений (3.6), (3.7). Площадь эластичной трубки — величина положительная, поэтому необходимо брать абсолютную величину функции $\cos(\omega x/a + \varphi_1)$. Абсолютную величину функции $\tan(\omega x/a + \varphi_1)$ в соответствии с уравнением неразрывности (3.7) нужно использовать и в выражении для перемещения (3.18).

Найдем скорость жидкости и давление в ней:

$$v = v_0 + \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 + a \Theta A_0 \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.19)$$

Давление определим, исходя из соотношения (2.7):

$$P_T = C \frac{\partial(uS)}{S \partial x} = C \frac{\partial(F \Phi)}{F_2 \Phi_2 \partial x} = C \Theta \Phi_1, \quad (3.20)$$

$$P_T = C \Theta A_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Как и следовало ожидать, градиент давления (так как жидкость идеальная) получился равным нулю. Таким образом, в эластичных трубках возможно возникновение автоколебаний площади, скорости и давления. Такие автоколебания, или флаттер, возникают, например, при измерении артериального давления в кровеносных сосудах сфигмоманометром — тоны Короткова.

Если обозначить максимальную относительную деформацию через $\varepsilon_{\max}$ и учесть, что амплитудное значение колебаний давления равно $P_{T \max} = C \varepsilon_{\max}$, то из (3.20) следует $\varepsilon_{\max} = \Theta A_0$.

Зададим следующие граничные условия, исходя из модели измерения артериального давления по методу Короткова (рис. 3): при $x = 0$ имеем $S = S_0$, $u = u_0 = 0$, $v = v_0$, где S_0 , u_0 , v_0 — соответственно площадь сечения, перемещение и скорость жидкости вне манжетки сфигмоманометра. Из (3.19) следует $\varphi_1 = 0$. Принимая начальные условия $u|_{t=0} = u_0 = 0$, $S|_{t=0} = S_0$, из (3.18) получаем

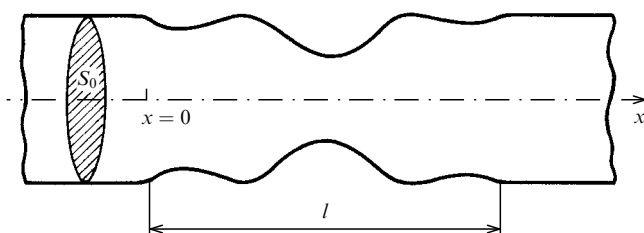


Рис. 3. Возникновение автоколебаний стенок эластичной трубки (к схеме измерения артериального давления крови по методу Короткова. Манжета сфигмоманометра не показана)

$\varphi_0 = 0$, а из (3.17) — $A_1 A_2 \omega / (\Theta a) = S_0$. Следовательно, окончательно решение системы уравнений (3.6), (3.7) при данных начальных и граничных условиях имеет вид

$$u = \varepsilon_{\max} \frac{a}{\omega} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \sin(\omega t),$$

$$v = v_0 + a \varepsilon_{\max} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \cos(\omega t),$$

$$S = S_0 \left| \cos\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \exp[-\varepsilon_{\max} \sin(\omega t)],$$

$$P_T = C \varepsilon_{\max} \sin(\omega t). \quad (3.21)$$

На рис. 4 приведены графики изменения площади сечения эластичной трубки и скорости жидкости в ней в зависимости от ее длины в момент времени, соответствующий $\sin(\omega t) = 0$ и $\cos(\omega t) = 1$, т.е. при $t = 2k\pi/\omega$, где $k = 0, 1, 2, \dots$; графики построены в соответствии с формулами (3.21). Для удобства построения по оси абсцисс отложена величина $\omega x/a$.

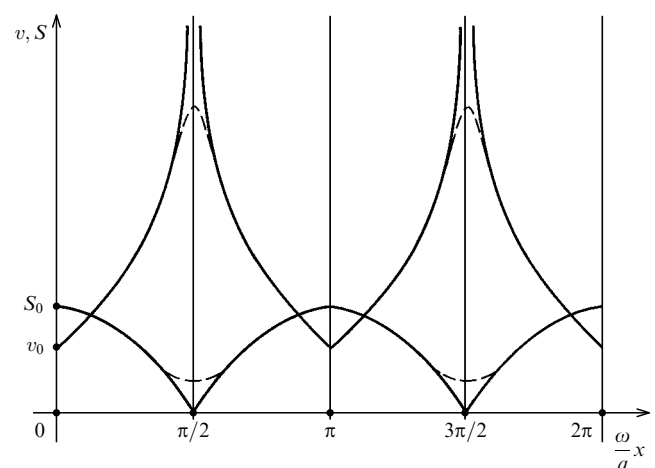


Рис. 4. Расчетные кривые изменения площади сечения эластичной трубки и скорости жидкости по ее длине. Сплошные линии соответствуют идеальной жидкости, штриховые — вязкой

Из рисунка видно, что в моменты схлопывания трубки, там, где $S = 0$, скорость жидкости возрастает до бесконечности. Это связано с тем, что формулы для скорости и площади относятся к невязкой жидкости. Такой же эффект имеет место, например, при рассмотрении вынужденных колебаний, когда амплитуда колебаний в резонансе стремится к бесконечности при отсутствии сопротивления среды. Штриховыми линиями показан реальный ход кривых с учетом вязкости жидкости.

Определим возможные частоты автоколебаний при измерении артериального давления по методу Короткова. Пусть длина манжетки сфигмоманометра равна l . Тогда дополнительное граничное условие будет следующим: при $x = l$ в любой момент времени $v = v_0$. Из (3.21) следует $\omega l/a = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. целое число. Следовательно, частота автоколебаний равна

$$\nu = \frac{ka}{2l} = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}. \quad (3.22)$$

Полученное выражение дает возможность определить эффективный модуль упругости стенки сосуда в живой системе путем измерения частоты тонов Короткова.

4. Уединенные волны в эластичной трубке на основе модели Кортевега–де Фриза

Рассмотрим процесс распространения уединенной волны на модели тонкостенной эластичной трубки при мгновенной эжекции в нее объема жидкости. Уравнение неразрывности потока в осесимметричной геометрии для этого случая можно записать в виде [10]

$$\frac{\partial(vr)}{\partial x} + \frac{\partial(wr)}{\partial r} = 0, \quad (4.1)$$

где v — продольная, а w — поперечная составляющие скорости жидкости, x и r — продольная и радиальная координаты (рис. 5).

Уравнение импульса запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{\rho(S_0 + S)} \frac{\partial[P(S_0 + S)]}{\partial x}. \quad (4.2)$$

В уравнении (4.2) S_0 — площадь сечения эластичной трубки при отсутствии уединенной волны и S — дополнительная площадь, возникающая при растяжении трубки вследствие прохождения волны. Принято также, что вихрей в потоке не образуется, т.е. $\text{curl } \mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости.

Решение системы (4.1), (4.2) будем искать, используя потенциал скоростей $\varphi = \varphi(x, r, t)$:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (4.3)$$

Введем безразмерные переменные:

$$x = M_x x^*, \quad r = M_r r^*, \quad S = M_S S^*, \quad P = M_P P^*, \\ \varphi = M_\varphi \varphi^*, \quad t = M_t t^*, \quad v = M_v v^*. \quad (4.4)$$

Пусть $S_{\max}/S = \varepsilon$, где $S_{\max}$ — максимальное значение дополнительной площади S в уединенной волне. Примем масштабы, исходя из реального соотношения размеров функционирующих сосудов организма, т.е. считаем амплитуду уединенной (пульсовой) волны значительно меньше ее диаметра:

$$M_S = \varepsilon S_0 = S_{\max}, \quad M_x = \sqrt{\frac{S_0}{\varepsilon}}, \quad M_r = \sqrt{S_0}.$$

Разложим потенциал скоростей в ряд по степеням r^* :

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} r^{*n} \varphi_n^*(x^*, t^*). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.1) с использованием (4.3), (4.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r^* , имеем

$$\varphi_{n+2}^* = -\frac{\varepsilon}{(n+2)^2} \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial x^{*2}}. \quad (4.6)$$

Из условия симметрии модели течения при $r^* = 0$ на оси потока получим $w = 0$ и $\partial \varphi^* / \partial r^* = 0$. Используя (4.5), имеем $\varphi_1^* = 0$, а также, учитывая (4.6), найдем $\varphi_{2n+1}^* = 0$. Кроме того, если φ_0^* — безразмерный потенциал скоростей на оси потока, то

$$\varphi^* = \varphi_0^* - r^{*2} \frac{\varepsilon}{2^2} \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial x^{*2}} + r^{*4} \frac{\varepsilon^2}{2^2 \cdot 4^2} \frac{\partial^4 \varphi_0^*}{\partial x^{*4}} - \dots \quad (4.7)$$

Найдем разложение уравнения импульса (4.2) в безразмерной форме. Для этого выберем масштабы из условий

$$\frac{M_\varphi M_t}{S_0} = \frac{M_P M_t}{\rho M_\varphi} = 1. \quad (4.8)$$

Вводя в рассмотрение безразмерную скорость на оси потока $v_0^* = \partial \varphi_0^* / \partial x^*$, выполняя несложные, но довольно громоздкие преобразования с использованием (4.7) и пренебрегая слагаемыми порядка ε^2 и выше, получим

$$\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[S^* \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{v_0^{*2}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial P^* S^*}{\partial x^*} - \frac{r^{*2}}{2^2} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^* \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \quad (4.9)$$

При выводе (4.9) учтено, что

$$v^2 + w^2 = \frac{M_\varphi^2}{S_0} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right)^2 \right] = \frac{M_\varphi^2}{S_0} \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2,$$

так как $(\partial \varphi^* / \partial r^*)^2 \sim \varepsilon^2$.

Рассмотрим уравнение (4.9) на внутренней поверхности эластичной трубки. Безразмерный радиус трубки есть $r_0^* = r_0 / M_r = r_0 / \sqrt{S_0}$. В невозмущенном состоянии $r_0^* = 1/\sqrt{\pi}$. Если амплитуда уединенной волны мала, т.е. $\varepsilon = S_{\max}/S_0 \ll 1$, то можно считать $r^* \approx r_0^*$. Кроме того, необходимо учесть, что масштаб времени движения

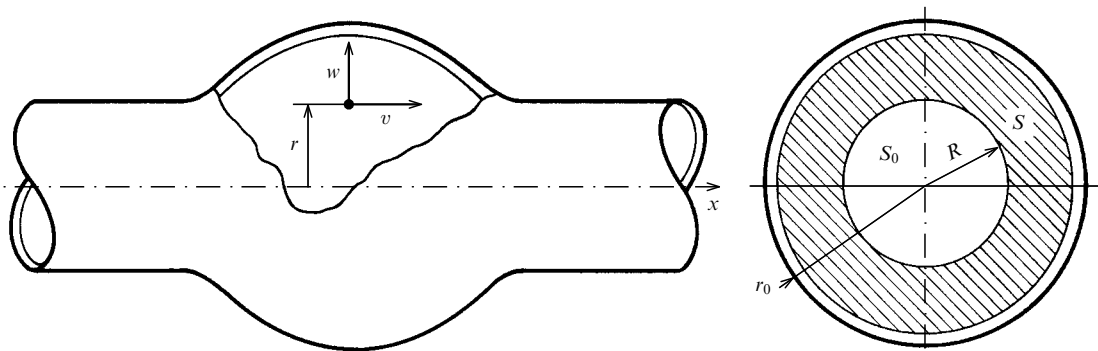


Рис. 5. Схема распространения уединенной волны в эластичной трубке (пульсовой волны)

крови существенно отличается от масштаба времени распространения пульсовой волны. Поэтому, для корректного описания процесса распространения уединенной пульсовой волны необходимо ввести "медленное время" [11]

$$\tau = \frac{\varepsilon}{8\pi} t^*,$$

где коэффициент $1/8\pi$ принят для удобства дальнейших преобразований. Учитывая, что $v_0^* = v_0^*(t^*, \tau)$, вместо $\partial v_0^*/\partial t^*$ получаем

$$\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau},$$

следовательно, из (4.9) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[\frac{1}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau} + S^* \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + v_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} + \right. \\ \left. + \frac{\partial P^* S^*}{\partial x^*} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

При не очень быстрых изменениях площади сечения эластичной трубки в процессе распространения уединенной волны можно связать избыточное давление в трубке и ее площадь сечения S , исходя из формулы (2.1):

$$P = C \frac{S}{S_0}. \quad (4.11)$$

В (4.11) индекс t для удобства опущен и вместо обозначения приращения ΔS в данном разделе для дополнительной площади использовано обозначение S (см. (4.2)). В безразмерной форме закон Гука имеет вид

$$P^* = \frac{CM_S}{S_0 M_P} S^* = \frac{C\varepsilon}{M_P} S^* = S^*. \quad (4.12)$$

В (4.12) масштаб давления выбран в виде $M_P = C\varepsilon$. Подставляя это выражение в (4.10), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial S^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[\frac{1}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau} + v_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} + S^* \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + 2 \frac{\partial S^*}{\partial x^*} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

В уравнении (4.13) можно разделить переменные, вводя новые независимые переменные

$$r_- = x^* - t^*, \quad l_+ = x^* + t^*. \quad (4.14)$$

Будем искать решения уравнения (4.13) в виде

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{3}{4\pi} [f(r_-; \tau) + g(l_+; \tau)], \\ v_0^* &= \frac{3}{4\pi} [f(r_-; \tau) - g(l_+; \tau)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.13), после несложных, но громоздких преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r_-} + \frac{\partial^3 f}{\partial r_-^3} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{\partial g}{\partial \tau} + 6g \frac{\partial g}{\partial l_+} + \frac{\partial^3 g}{\partial l_+^3} \right) \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так как слагаемые в круглых скобках включают различные зависимые и независимые переменные, то (4.16) представляет собой фактически сумму двух независимых уравнений Кортевега–де Фриза, причем первое слагаемое описывает уединенную волну, распространяющуюся вправо, а второе — влево. Эти волны пространственно разделены и не влияют друг на друга:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r_-} + \frac{\partial^3 f}{\partial r_-^3} &= 0, \\ -\frac{\partial g}{\partial \tau} + 6g \frac{\partial g}{\partial l_+} + \frac{\partial^3 g}{\partial l_+^3} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Уединенные волны, описываемые уравнениями Кортевега–де Фриза, являются солитонами, т.е. они обладают некоторыми свойствами, присущими частицам [11].

Уединенная волна g , распространяющаяся влево, для сердечно-сосудистой системы физического смысла не имеет. Отсутствие функции g в формулах (4.15) указывает на подобие характеров скорости и площади сечения эластичной трубки, что справедливо при распространении пульсовой волны в кровеносном сосуде — там, где начинается движение крови, возрастает и площадь сосуда. Таким образом, решение уравнения (4.13) в первом порядке по ε не подчиняется "эффекту Бернулли", заключающемуся в том, что при увеличении скорости жидкости статическое давление падает. Наоборот, с ростом давления возрастают площадь сечения эластичной трубки и скорость жидкости.

Решение уравнения (4.17) для f имеет вид [11]

$$f = \frac{2k^{*2}}{\cosh^2[k^*(r_- - 4k^{*2}\tau - r_{-0})]}, \quad (4.18)$$

где $2k^{*2}$ — амплитуда уединенной волны, r_{-0} — постоянная величина. Переходя к переменным x^* и t^* , находим

$$f = \frac{2k^{*2}}{\cosh^2[k^*(x^* - t^* - k^{*2}\varepsilon t^*/2\pi - r_{-0})]}. \quad (4.19)$$

Решение (4.19), согласно формулам (4.15), справедливо как для v_0^* , так и для S^* . Рассмотрим сначала уединенную волну площади S^* . Безразмерная амплитуда волны определяется как

$$2k^{*2} = f_{\max} = \frac{4\pi}{3} S_{\max}^* = \frac{4\pi}{3} \frac{S_{\max}}{M_S} = \frac{4\pi}{3}. \quad (4.20)$$

Следовательно, безразмерное волновое число есть $k^* = \sqrt{2\pi/3}$, а суммарная площадь сечения уединенной волны равна

$$S_s = S_0 + S = S_0 +$$

$$+ S_{\max} \left\{ \cosh \left[\sqrt{\frac{2\pi S_{\max}}{3S_0^2}} \left(x - x_0 - a \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right) t \right) \right] \right\}^{-2}, \quad (4.21)$$

где $a = M_x/M_t$. Из (4.21) следует, что волна движется со скоростью

$$a_s = a \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right). \quad (4.22)$$

Рассмотрим уединенную волну скорости. Амплитуда волны есть

$$2k^{*2} = f_{\max} = \frac{4\pi}{3} v_{0\max}^* = \frac{4\pi}{3} \frac{v_{0\max}}{M_v},$$

где $v_{0\max}$ — максимальная скорость на оси потока. Следовательно,

$$v_0 = v_{0\max} \left\{ \cosh \left[\sqrt{\frac{2\pi S_{\max}}{3S_0^2}} \left(x - x_0 - a \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right) t \right) \right] \right\}^{-2}. \quad (4.23)$$

Можно отметить, что формула (4.23) определяет зависимость продольной скорости жидкости на оси потока от координаты x . Однако в уединенной волне за счет местного увеличения диаметра эластичной трубки существует и распределение скоростей идеальной жидкости по сечению, которое в первом порядке по ε можно найти из формулы (4.7). Учитывая (4.3), получаем

$$v^* = v_0^* - r^{*2} \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial x^{*2}}. \quad (4.24)$$

Из (4.24) видно, что профиль скорости имеет параболическую форму. Кроме того, на стенках трубы для идеальной жидкости имеет место ее скольжение со скоростью $v_{\text{ст}}$, которую можно вычислить, используя условие $r = r_0$, где $r_0(x)$ — меняющийся по координате x внутренний радиус области с волновым движением. Переходя к размерным переменным, получим

$$v = v_0 - \frac{r_0^2}{4} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}.$$

Вычислим дополнительный объем жидкости, которую вбирает в себя уединенная волна (рис. 6), принимая $x_0 = 0$ за начало координат. Для аорты этот объем

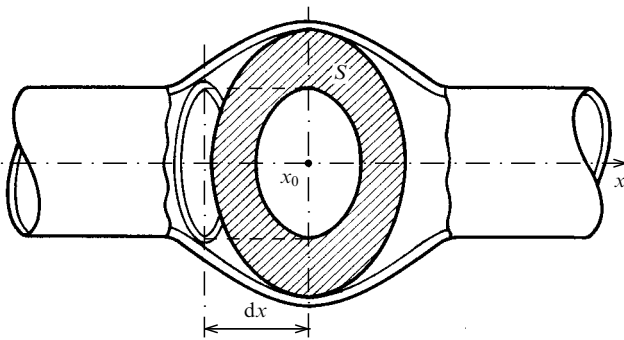


Рис. 6. К расчету дополнительного объема жидкости $V_{\text{уд}}$, которую вбирает в себя уединенная волна

можно отождествить с ударным объемом крови. Интегрируя (4.21) при $t = 0$, имеем

$$V_{\text{уд}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{S_{\max}}{\cosh^2(kx)} dx = \frac{2S_{\max}}{k} \tanh(kx) \Big|_0^{\infty} = \frac{2S_{\max}}{k}.$$

Следовательно, $k = 2S_{\max}/V_{\text{уд}}$. Таким образом, форма уединенной волны (рис. 7) имеет вид

$$S_s = S_0 + \frac{S_{\max}}{\cosh^2[2(S_{\max}/V_{\text{уд}})(x - a_s t)]}. \quad (4.25)$$

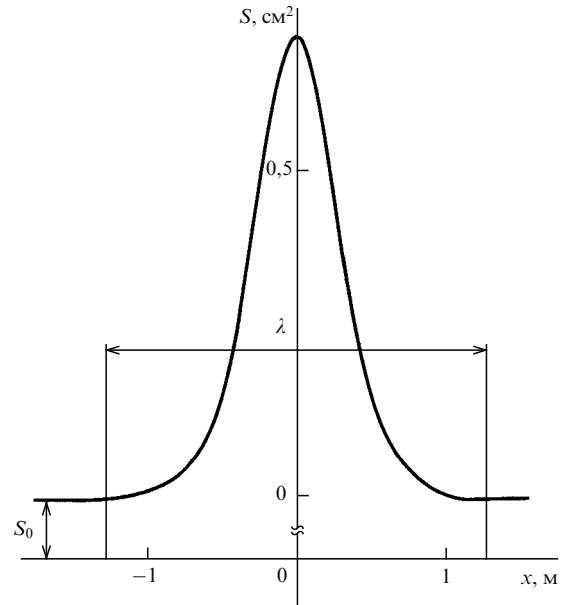


Рис. 7. Изменение площади сечения эластичной трубки по ее длине при распространении уединенной волны

Длину уединенной волны, для артерии — пульсовой волны, определим из условия $k = 2S_{\max}/V_{\text{уд}} = 2\pi/\lambda$. Следовательно, $\lambda = \pi V_{\text{уд}}/S_{\max}$. Принимая для человека $V_{\text{уд}} = 60 \text{ см}^3$, а $S_{\max} = 0,7 \text{ см}^2$, получим $\lambda = 2,7 \text{ м}$, что соответствует известным экспериментальным результатам [1].

Согласно (4.11) выражение для волны давления полностью аналогично выражению для площади поперечного сечения эластичной трубки, изменяющейся в процессе распространения уединенной волны:

$$P = \frac{P_{\max}}{\cosh^2[2(S_{\max}/V_{\text{уд}})(x - a_s t)]}, \quad (4.26)$$

где $P_{\max} = CS_{\max}/S_0$.

Найдем окончательно скорость распространения волны давления — пульсовой волны. Из уравнения (4.8), используя равенство $M_P = C\varepsilon$, получаем $M_\varphi = \sqrt{C\varepsilon S_0/\rho}$. Кроме того, из (4.8) следует, что $M_t = S_0/M_\varphi = \sqrt{\rho S_0/(C\varepsilon)}$. Учитывая, что

$$a = \frac{M_x}{M_t} = \frac{\sqrt{S_0/\varepsilon}}{\sqrt{\rho S_0/(C\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{C}{\rho}},$$

из (4.22) находим

$$a_s = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right) = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \left(1 + \frac{P_{\max}}{3C} \right). \quad (4.27)$$

В главном порядке при $S_{\max} = 0$ выражение (4.27) совпадает с приближенной формулой Моэнса–Кортевега для скорости пульсовой волны [1], если принять, что $C = Eh/d$ — эластичность стенок кровеносных артерий, E — модуль упругости материала стенок, h — их толщина, d — средний диаметр сосуда.

В заключение раздела найдем дисперсионное соотношение для уединенной волны, исходя из определения

групповой скорости

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = a_s = a \left(1 + \frac{S_{\text{max}}}{3S_0} \right),$$

где ω — циклическая частота колебаний. Имея в виду, что волновое число равно $k = (2\pi S_{\text{max}}/3S_0^2)^{1/2}$, и учитывая, что $\omega = 0$ при $k = 0$, получим

$$\omega = a \left(k + \frac{S_0}{6\pi} k^3 \right). \quad (4.28)$$

5. Моделирование уединенной волны в эластичной трубке на основе нелинейного уравнения Шрёдингера

Рассмотрим уравнение импульса в виде (3.3). Будем считать поперечную составляющую скорости w малой. Тогда уравнение импульса будет следующим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(PS)}{\partial x} = 0. \quad (5.1)$$

Уравнение неразрывности запишем в виде (3.7), при этом разделять скорость на колебательную и основную, как в (2.6), не будем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(vS)}{\partial x} = 0. \quad (5.2)$$

Связь между избыточным давлением внутри эластичной трубки и площадью ее сечения зададим по аналогии с (2.2):

$$P_{\text{т}} = C \frac{\Delta S}{S}. \quad (5.3)$$

В (5.3) дифференциал площади dS заменен приращением $\Delta S = S - S_0$ для удобства использования закона Гука в уравнении импульса (5.1).

Решение системы уравнений (5.1), (5.2) будем искать, используя комплексный потенциал скоростей $\varphi = \varphi(x, t)$. Разложим его в ряд по малому параметру λ по аналогии с тем, как это делается в квантовой механике при переходе от уравнения Шрёдингера к уравнению Гамильтона–Якоби [12]:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\lambda}{i} \varphi_1 + \left(\frac{\lambda}{i} \right)^2 \varphi_2 + \dots, \quad (5.4)$$

где i — мнимая единица. Перейдем к функции Φ с помощью формулы

$$\Phi = \exp \left(\frac{i}{\lambda} \varphi \right). \quad (5.5)$$

Используя первые два члена разложения (5.4), получим

$$\Phi = |\Phi| \exp \left(\frac{i}{\lambda} \varphi_0 \right). \quad (5.6)$$

Здесь $|\Phi| = \exp(\varphi_1)$ — модуль функции Φ ; $V = \partial \varphi_0 / \partial x$ — скорость жидкости в трубке, так как φ_0 с точностью до λ^2 — действительная часть потенциала скоростей.

Примем $|\Phi| = \sqrt{S/S_0}$, тогда, используя (5.3), можно написать

$$PS = -C(S - S_0) = -CS_0(|\Phi|^2 - 1). \quad (5.7)$$

Знак минус в (5.7), как указывалось в разделе 2, отражает известный факт, что в уравнение импульса (второй закон Ньютона) для получения уравнения колебаний нужно подставить внутреннюю реакцию упругого элемента, в данном случае стенки трубки, которая равна внутреннему избыточному давлению с обратным знаком.

С учетом (5.7) последний член в уравнении (5.1) принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(PS)}{S \partial x} = -2a^2 \frac{\partial(\ln |\Phi|)}{\partial x} = -2a^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad (5.8)$$

где $a = \sqrt{C/\rho}$ — скорость распространения волны давления по эластичному трубопроводу, а $\varphi_1 = \ln |\Phi|$.

Используя потенциал скоростей, уравнение импульса (5.1) можно однократно проинтегрировать. Тогда система уравнений (5.1) и (5.2) примет вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - 2a^2 \varphi_1 = O(\lambda^2), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial |\Phi|^2}{\partial t} + \frac{\partial(v|\Phi|^2)}{\partial x} = 0. \quad (5.10)$$

Постоянная интегрирования в (5.9) принята равной нулю. Это можно сделать при соответствующем выборе начального уровня потенциала φ_0 [9].

Покажем далее, что система (5.9), (5.10) эквивалентна нелинейному уравнению Шрёдингера

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2a^2}{\lambda} \varphi_1 \Phi. \quad (5.11)$$

Учитывая в соответствии с (5.5), что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i}{\lambda} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \Phi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{i}{\lambda} \Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (5.12)$$

после разделения действительной и мнимой частей в (5.11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 - 2a^2 \varphi_1 = \\ = \frac{\lambda^2}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right] = O(\lambda^2), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) полностью эквивалентно (5.10), если учесть, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{2|\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|^2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2|\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|^2}{\partial x}.$$

В уравнении (5.13), как и в разложении (5.4), мы ограничились членами, линейными относительно малого параметра λ . Таким образом, уравнения (5.13), (5.14), а следовательно, и (5.11) полностью эквивалентны системе (5.9) и (5.10).

Запишем нелинейное уравнение Шрёдингера в виде

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{a}{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\omega \Phi \ln |\Phi|, \quad (5.15)$$

где $\omega = 2a^2/\lambda$ — циклическая частота, $k = 2a/\lambda$ — волновое число. Решение уравнения (5.15) будем искать, следуя [13], в виде

$$\Phi = f(kx - \omega t) \exp[i(rx - \delta t)], \quad (5.16)$$

где постоянные r и δ , а также функция $f(kx - \omega t)$ пока неизвестны. Учитывая (5.6), можно сделать вывод, что $|\Phi| = f(kx - \omega t)$. Подставляя (5.16) в (5.15), получим

$$ak \frac{d^2 f}{d\xi^2} + i \frac{df}{d\xi} (-\omega + 2ar) + f \left(\delta - \frac{ar^2}{k} \right) + \omega f \ln f = 0. \quad (5.17)$$

В уравнении (5.17) дифференцирование проводится по переменной $\xi = kx - \omega t$, а так как функция $f = |\Phi|$ представляет собой действительную величину, то уравнение (5.17) не должно иметь мнимых членов. Примем $r = \omega/(2a)$ и, учитывая, что $\omega = ak$, получим

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + f \left(\frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{4} \right) + f \ln f = 0. \quad (5.18)$$

Впервые подобное уравнение было рассмотрено в работе [14], посвященной расчету вихревых структур в идеальной жидкости.

Решение уравнения (5.18) ищем в виде

$$f = C_1 \exp \left[\frac{C_2}{2} (kx - \omega t)^2 \right], \quad (5.19)$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины. Подставив (5.19) в (5.18), находим

$$C_2 + \left(\frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{4} \right) + \ln C_1 + (kx - \omega t)^2 \left(C_2^2 + \frac{C_2}{2} \right) = 0. \quad (5.20)$$

Последний член в (5.20) не должен зависеть от координаты x и времени t , т.е. $C_2 = -1/2$, тогда $C_1 = \exp(3/4 - \delta/\omega)$. Следовательно,

$$f = |\Phi| = \exp \left(\frac{3}{4} - \frac{\delta}{\omega} \right) \exp \left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{4} \right]. \quad (5.21)$$

Учитывая, что площадь сечения равна $S = S_0 |\Phi|^2$, а также имея в виду граничное условие $S|_{x \rightarrow \pm \infty} = S_0$, окончательно найдем форму уединенной волны, распространяющейся по эластичному трубопроводу:

$$S = S_0 + \Delta S_a \exp \left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right], \quad (5.22)$$

где ΔS_a соответствует максимальному значению дополнительной площади в (5.3) и представляется как

$$\Delta S_a = S_0 \exp \left(\frac{3}{2} - \frac{2\delta}{\omega} \right).$$

Здесь δ — величина, связанная с характеристикой материала эластичного трубопровода. При больших δ , что характерно для жестких трубок, значение ΔS_a стремится к нулю. Малые величины δ соответствуют эластичному трубопроводу.

Значение избыточного давления в трубке определим, используя (5.3):

$$P_\tau = C \frac{S - S_0}{S} = C \frac{\Delta S_a}{S} \exp \left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right].$$

Учитывая, что $P_{\max} = C \Delta S_a / S$ — максимальное избыточное давление в уединенной волне, окончательно найдем в виде

$$P_\tau = P_{\max} \exp \left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right]. \quad (5.23)$$

Таким образом, из (5.22) и (5.23) следует, что законы изменения площади сечения эластичного трубопровода и давления подобны друг другу. Форма уединенной волны соответствует кривой Гаусса.

На рис. 8 показано различие между формой уединенной волны, описываемой моделью Кортевега–де Фриза и кривой Гаусса.

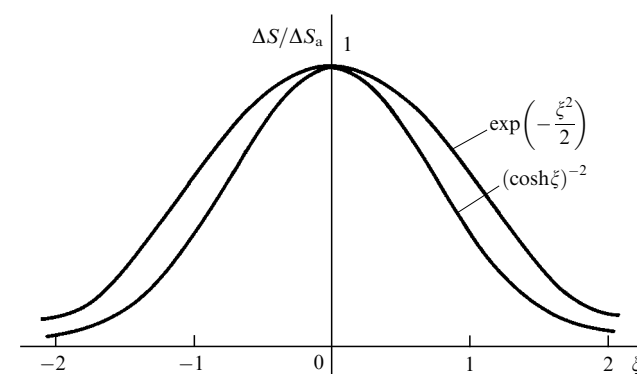


Рис. 8. Различие между формами уединенных волн, описываемых моделью Кортевега–де Фриза и нелинейным уравнением Шрёдингера ($\xi = kx - \omega t$)

6. Использование модели пассивной эластичной трубки для приближенного описания кровеносного сосуда

Исследования, посвященные теоретическим аспектам течения крови по венам и артериям организма имеют давнюю историю. В основном они развиваются по двум направлениям: первое — наиболее обширное физиологическое направление, в котором теоретическое осмысление проблемы опирается на богатейший экспериментальный материал (см., например, [15, 16]); другое — значительно более узкое биофизическое направление, главной задачей которого является приближенный расчет потока крови в сосудах [1, 2]. Между этими двумя направлениями нет четкой границы, и во многих исследованиях используются сразу оба пути (см., например, [3, 17]).

Движение крови по кровеносному сосуду в живом организме сложное явление, прежде всего связанное с процессами регуляции кровотока. Эта регуляция носит многоуровневый характер: саморегуляция, нейрорефлекторная автономная регуляция, центральный нейрорефлекторный контроль, гуморальная регуляция и т.д. [18]. Поэтому представление кровеносного сосуда как пассивного эластичного трубопровода довольно далеко от реальности.

Вторая важная особенность кровотока заключается в том, что кровь является неньютоновской структурированной вязкопластической жидкостью [6]. Использование уравнений для идеальной жидкости также не приближает вышеприведенное моделирование к действительности.

Вследствие этого необходимо сразу же отметить, что предложенные биомеханические модели движения крови по крупным кровеносным сосудам могут описать лишь некоторые явления, наблюдаемые в сердечно-сосудистой системе. Рассмотрим некоторые из них.

В разделе 3 показано, что в пассивном эластичном трубопроводе может наблюдаться автоколебательный режим течения. Действительно, при некоторых условиях в сосудах живого организма могут развиваться подобные явления. Например, авторы работы [19] наблюдали относительно высокочастотные колебания до 10 Гц в коронарных артериях лошади, которые накладывались на пульсовую волну. Подобное явление наблюдалось и в аорте собаки при нарушении механизмов регуляции кровотока [7]. Но, по-видимому, наиболее распространенным проявлением автоколебательного режима течения в сосудах являются высокочастотные колебания, возникающие в артериях при измерении артериального давления по методу Короткова. В разделе 3 приведено биомеханическое решение именно этой задачи. Анализ изменения частоты тонов Короткова дает возможность оценить изменение модуля упругости сосудистой стенки в живом организме.

Другое важное явление гемодинамики — возникновение пульсовой волны. Результаты моделирования, приведенные в разделах 4 и 5, показывают, что это явление целиком объясняется нелинейным характером уравнений гидродинамики, которые позволяют получить решение в виде уединенных волн. Так как главную роль при описании пульсовой волны играет первый порядок разложения уравнений гидродинамики, то "эффект Бернулли", связанный с нулевым порядком, не является определяющим при пульсовом движении крови по сосудам. То, что давление в сосуде, его площадь сечения и скорость крови изменяются, в общем, синхронно — известная физиологическая закономерность.

7. Заключение

Несмотря на ограничения представленных биомеханических моделей течения крови по крупным сосудам, они позволяют объяснить некоторые известные физиологические явления: возникновение высокочастотных колебаний в сосудах, особенности распространения пульсовой волны, связанные с нелинейным характером уравнений гидродинамики.

При моделировании потока идеальной жидкости в эластичном трубопроводе необходимо использовать модифицированное уравнение Эйлера, по-видимому, впервые предложенное Жуковским в виде (3.3).

Существование автоколебательного режима течения в пассивных эластичных трубопроводах и, как следствие, повышение гидра-

лического сопротивления при этом предъявляют дополнительные требования к сосудистым протезам, которые должны быть изготовлены из достаточно жесткого материала. При этом свидетельством автоколебательного режима течения могут быть различные акустические явления: журчание, шум и т.п.

При конструировании устройств, в которых могут использоваться тонкостенные эластичные трубопроводы, например пульсирующих насосов в биотехнологии, аппаратов искусственного кровообращения, необходимо учитывать резонансные явления в потоке, приводящие к схлопыванию трубопроводов. При этом возможно возникновение отраженных волн, которые могут привести к нарушению работы устройств.

Нелинейное моделирование уединенной волны в эластичном трубопроводе подтверждает предположение о том, что особенностью нелинейных процессов является возникновение новых качественных признаков при очень малых количественных изменениях параметров модели. Иллюстрацией этого может служить сравнение моделирования пульсовой волны с помощью модели Кортвега-де Фриза в разделе 4 и нелинейного уравнения Шрёдингера в разделе 5. Использование закона Гука в виде (5.3) в отличие от (2.1) привело к тому, что получена недиспергирующая уединенная волна, распространяющаяся со скоростью, не зависящей от избыточного давления в эластичном трубопроводе.

Список литературы

1. Педли Т *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов* (М.: Мир, 1983)
2. Бранков Г *Основы биомеханики* (М.: Мир, 1981)
3. Каро К, Педли Т, Шротер Р, Сид У *Механика кровообращения* (М.: Мир, 1981)
4. Лайтфут Э *Явления переноса в живых системах* (М.: Мир, 1977)
5. Владимиров Ю А, Рошупкин Д И, Потапенко А Я, Деев А И *Биофизика* (М.: Медицина, 1983) с. 152, 171
6. Левтов В А, Регирер С А, Шадрина Н Х *Реология крови* (М.: Медицина, 1982)
7. Волобуев А Н, Пирогов В П, Кошев В И, Петров Е С *Биофизика* 33 675 (1988)
8. Будак Б М, Самарский А А, Тихонов А Н *Сборник задач по математической физике* (М.: Наука, 1980) с. 161
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) с. 36, 55
10. Шлихтинг Г *Теория пограничного слоя* (М.: Наука, 1974) с. 227
11. Абловиц М, Сигур Х *Солитоны, метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987) с. 316
12. Левич В Г, Вдовин Ю А, Мямлин В А *Курс теоретической физики* (М.: Физматгиз, 1962) т. 2, с. 364
13. Узизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977) с. 575
14. Капцов О В *ЖЭТФ* 98 532 (1990)
15. Рашмер Р *Динамика сердечно-сосудистой системы* (М.: Медицина, 1981)
16. Фолков В, Нил Э *Кровообращение* (М.: Медицина, 1976)
17. Джонсон П *Периферическое кровообращение* (М.: Медицина, 1982)
18. Конради Г П *Регуляция сосудистого тонуса* (Л.: Наука, 1973) с. 38, 158, 168
19. Nerem R M et al. *Fluid Dynamic Aspects of Arterial Disease in Proc. of a Specialists Meeting* (Columbus, Ohio, 1974)

A FLOW OF FLUID IN THE ELASTIC-WALL TUBES

A.N. Volobuev

Samara Medical University, 443099, Samara, Russia
Tel. (7-846-2) 66-8882

Physico-mathematical aspects of blood flow along the elastic blood vessels are examined. Nonlinear differential equations describing processes occurring in such flow are derived and solved. It is shown that an auto-oscillatory (flutter) regime can arise in such flow. A mathematical model is derived for a solitary (pulse) wave which is based on the Korteweg-de Fries models and a modified nonlinear Schrödinger equation. The feasibility of applying the thin-walled elastic tube model to the description of the flow of blood in veins and arteries is discussed.

PACS numbers: 87.45.-k

Bibliography — 19 references

Received 27 January 1994, revised 14 September 1994