

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Восстановление изображений при минимальной априорной информации

В.Ю. Теребиж

*Излагается систематический подход к задаче восстановления размытых и зашумленных изображений, не использующий байесовскую априорную информацию. Учитывается фотонный шум. Искомый объект понимается как многомерная совокупность параметров, для которых должны быть получены эффективные статистические оценки. Основу подхода составляют расширенное понятие допустимой оценки (в смысле теории информации) и принцип Оккама выбора наиболее простого объекта, совместимого с данными наблюдений. Оккамовское оценивание осуществляется путем перехода к главным компонентам инверсной (или максимально правдоподобной) оценки, порождаемым информационной матрицей Фишера. Подход применим ко многим другим обратным задачам.*

PACS numbers: 95.75.-z, 95.75.Pq

## Содержание

1. Введение (143).
2. Постановка задачи (145).
3. Модель детерминированного размывания изображения (147).
  - 3.1. Основные предположения.
  - 3.2. Численные примеры.
  - 3.3. Структура области допустимых оценок.
  - 3.4. Оценка максимального правдоподобия.
  - 3.5. Матрица Фишера и неравенство информации.
4. Критерий случайности изображения (151).
  - 4.1. Формулировка критерия.
  - 4.2. Должно ли правдоподобие быть максимальным?
  - 4.3. Связь с теорией информации Шеннона.
  - 4.4. Численный пример.
  - 4.5. Расстояние Кульбака–Лейблера и структура области допустимых оценок.
  - 4.6. Недостаточность функции правдоподобия.
  - 4.7. Локальность обратной задачи.
5. Информационные ограничения (157).
  - 5.1. Общий вид неравенства информации.
  - 5.2. Оптимальный фильтр Колмогорова–Винера.
  - 5.3. Информация об оригинале для гауссовых ансамблей.
  - 5.4. Численный пример.
6. Оккамовское оценивание (163).
  - 6.1. Главные компоненты.
  - 6.2. Анализ главных компонент оценки максимального правдоподобия.
  - 6.3. Основные черты алгоритма восстановления изображений.
  - 6.4. Численный пример.
7. Сверхразрешение (167).
  - 7.1. Задача Рэлея.
  - 7.2. Восстановление изображений и распознавание образов.
  - 7.3. Аналитические результаты.
  - 7.4. Примеры.

7.5. Моделирование методом Монте-Карло.

## 8. Заключение (174).

Список литературы (175).

*There ain't any explanations. Not of anything.  
All you can do is point at the nature of things.  
Robert Penn Warren. "All the King's Men"*<sup>1</sup>

## 1. Введение

Проблема восстановления изображений заключается в том, чтобы по наблюдаемому размытому изображению  $y_0(x)$ , а также по заданным функции рассеяния точки (ФРТ)  $h(x, x')$  и статистическим свойствам случайного фона  $\xi(x)$  найти по возможности более полные характеристики исходного объекта  $S_0(x)$ . Одномерная модель формирования изображения при некогерентном источнике задается обычно уравнением (см. обзор Фридена [1])

$$y_0(x) = \int_a^b h(x, x') S_0(x') dx' + \xi_0(x), \quad (1.1)$$

где  $\xi_0(x)$  — реализация фона, а искомый объект  $S_0(x)$  предполагается неотрицательным в пределах промежутка  $[a, b]$ :

$$S_0(x) \geq 0. \quad (1.2)$$

Для упрощения записи ниже рассматривается лишь одномерная версия задачи, что никоим образом не ограничивает ее общности.

**В.Ю. Теребиж.** Московский государственный университет, Астрономический институт им. П.К.Штернберга, Крымская лаборатория ГАИШ, 334413, Крым, пос. Научный, Украина  
Тел. (065-54) 713-82, 710-36  
Факс (065-54) 407-04  
E-mail: terebizh@crao.crimea.ua

Статья поступила 20 октября 1994 г.

<sup>1</sup> Не существует никаких объяснений. Ни для чего. В лучшем случае ты можешь сослаться на природу вещей (Роберт Пенн Уоррен. "Вся королевская рать").

Хотя приведенная формулировка задачи не охватывает всех ее аспектов, она достаточно показательна, чтобы отнести проблему восстановления изображений к обширному классу *обратных задач математической физики*. Как свидетельствует само название, в обратных задачах требуется выяснить истинные свойства явлений по их наблюдаемым следствиям. Что же касается конкретной проблемы восстановления изображений, то она, помимо самостоятельного интереса, привлекательна тем, что здесь наиболее остро представлены основные трудности теории обратных задач, и потому полученные в этой области результаты имеют общее значение. Для определенности мы будем говорить почти исключительно о восстановлении изображений.

Неоднократно отмечалось, что всякая задача интерпретации экспериментальных данных по сути дела является обратной. В частности, теория восстановления изображений лежит в основе компьютерной томографии, электронной микроскопии, радиографии, радиолокации, а также ряда разделов оптики и геофизики. Особенно часто обратные задачи возникают в астрономии, до сих пор имеющей дело почти исключительно с интерпретацией пассивного эксперимента.

Первые исследования обратных задач в современном контексте были выполнены в конце XIX века лордом Рэлеем [2], предложившим итерационную процедуру исправления наблюдаемых контуров спектральных линий. Несколько позже А. Шустер [3, 4] ввел *периодограмму* временного ряда в качестве оценки его спектральной плотности. Уже тогда проявились характерные трудности, возникающие при попытках обратить причинно-следственную связь: итерационный процесс Рэля оказался расходящимся, а периодограмма Шустера для сколь угодно длительных рядов имеет чрезвычайно "изрезанный" вид, хорошо знакомый всем исследователям в этой области.

Обратим внимание на тот факт, что в (1.1) и (1.2) не учитывается *фотонный шум*, и потому эти уравнения не вполне адекватно описывают процесс формирования изображений. Неизбежный источник неопределенности в виде фотонного шума важен не только в принципиальном отношении, но играет также особую роль ввиду известной *неустойчивости решений* большинства обратных задач, проявляющейся в том, что почти неразличимым изображениям соответствуют существенно разные оригиналы. Последнее обстоятельство не гарантирует близости решений, полученных с учетом фотонного шума и в пренебрежении им. Как заметил по аналогичному поводу Джон фон Нейманн (J. von Neumann), если пренебречь в уравнениях гидродинамики вязкостью, то они будут описывать свойства "сухой воды" (цитируется по [5]).

Иллюстрируем сказанное простым мысленным экспериментом [6]. Предположим, что искомый объект представляет собой точечный источник интенсивности  $F$ , расположенный в начале координат, ФРТ есть сумма двух симметрично смещенных относительно начала  $\delta$ -функций Дирака, а фон равен нулю. Это означает, что изображение будет иметь вид двойного источника с точечными компонентами. Проблема заключается в следующем. Даже если под  $S_0$  понимать не детерминированную величину — среднее количество отсчетов, а случайную реализацию числа отсчетов, то согласно (1.1) мы всегда должны видеть компоненты *одинаковой ярко-*

*сти*, хотя само значение полной яркости и может флуктуировать. Это предсказание уравнения (1.1) противоречит эксперименту: в действительности наблюдаемая интенсивность каждой компоненты случайно и независимо от интенсивности другой компоненты флуктурует относительно среднего значения  $F/2$  со стандартным отклонением, близким к  $\sqrt{F/2}$ .

Тем не менее и при упрощенной постановке задачи в виде уравнений (1.1) и (1.2) ясна принципиальная трудность ее решения: она заключается в том, что исследователю неизвестна конкретная реализация  $\xi_0(x)$  случайного фона, вошедшая в наблюдаемое изображение. Заданы только статистические свойства фона, в частности, его среднее значение  $\langle \xi(x) \rangle$ , спектр мощности, а возможно, и одномерная плотность распределения. Попытки же использовать в качестве  $\xi_0(x)$  средний фон  $\langle \xi(x) \rangle$  или какую-нибудь типичную реализацию фона не приводят к успеху в связи с упомянутой выше фундаментальной проблемой неустойчивости обратных решений при малом изменении данных.

Неустойчивость решений, в свою очередь, обусловлена недостатком информации относительно объекта, содержащейся в его изображении. Мы имеем в виду "информацию" в точном значении этого термина согласно Шеннону [7, 8]. Чаще всего невозможно в принципе выяснить сколько-нибудь подробно характеристики объекта, породившего наблюдаемую картину. По этой причине понятно стремление исследователей каким-либо образом дополнить реально имеющуюся информацию и получить как следствие более качественное решение.

Априорная информация детерминированного вида относительно искомого объекта  $S_0$  редко выходит за пределы условия его неотрицательности, и потому при решении обратных задач исследователи обычно опираются на априорную информацию стохастического вида в рамках *байесовского* подхода [9, 10]. В общем случае при этом подходе предполагается, что объект  $S_0$ , размытое изображение которого мы анализируем, случайно извлечен из некоторой совокупности объектов с известными свойствами. Так, классический анализ Колмогорова [11] и Винера [12] проблемы фильтрации и предсказания временных рядов исходит из задания объекта как реализации стационарного гауссова случайного процесса с известной ковариационной функцией. Турчин и др. [13] ясно продемонстрировали, что это же предположение по сути дела используется в известных работах Филлиппа [14], Туоми [15, 16] и Тихонова [17, 18]. В методе максимума энтропии [19–22] предполагается, что исходный ансамбль объектов сформирован в соответствии со значением *энтропии* каждого из них. Очевидно, задание исходного ансамбля в значительной степени определяет и получаемое решение обратной задачи. Если же исследователь не располагает априорной информацией того или иного рода, то решение почти всегда имеет характерный "осциллирующий" вид, что и свидетельствует о его неустойчивости.

Использование априорной информации байесовского типа представляется вполне естественным в задаче фильтрации и прогноза временных рядов, для решения которой и предназначалась теория Колмогорова–Винера; предыдущий опыт наблюдателя нередко действительно дает основания утверждать, что ожидаемый сигнал принадлежит ансамблю с вполне определенными

свойствами. Однако наличие подобной информации при восстановлении изображений, да и во многих других обратных задачах, следует рассматривать как исключение из правила. По этой причине обращение к байесовскому подходу в тех случаях, когда исследователь не знает, действительно ли использовался случайный выбор из заданного класса объектов, создает лишь иллюзию получения требуемого решения. Этого заключения трудно избежать уже по той причине, что существуют многие школы "байесианцев", считающие априорно предпочтительными *разные* ансамбли объектов (даже последователи принципа максимума "энтропии" используют для этой функции различные определения).

Таким образом, возникло положение, когда без использования дополнительной информации обратное решение оказывается малопригодным, а подмена отсутствующей информацией относительно объекта некоторыми правдоподобными предположениями приводит ко вполне, казалось бы, приемлемому решению, которое на самом деле обладает большим, и главное — в принципе неизвестным смещением.

Цель настоящего обзора — дать по возможности более простое систематическое описание наметившегося в последние годы пути, приводящего к объективным результатам в области небайесовского подхода к обратным задачам, в том числе и к проблеме восстановления изображений [23–33]. Необходимость выработать единую точку зрения обусловила включение в обзор некоторых классических вопросов наряду с недавно полученными результатами; отдельные результаты являются новыми.

Три следующих положения являются исходными.

1) Неизвестный объект определяется как совокупность параметров, для которых нужно найти статистические оценки минимального рассеивания при заданных результатах наблюдений и априорной информации. Последовательная формулировка обратных задач в рамках теории статистического оценивания позволила выявить ряд важных сторон и, в частности, доказать существование естественного предела точности обратного решения.

2) Использование среднеквадратичной меры  $L_2$  близости изображений при отборе решений, совместимых с данными наблюдений, далеко не исчерпывает всех возможностей исследователя, и здесь потребовались более изощренные методы статистического анализа. Расширение понятия *допустимого* (feasible) решения как статистической оценки, удовлетворяющей жесткому *критерию случайности изображения* (КСИ), позволяет максимально сузить множество возможных решений. Тем не менее, для большинства обратных задач это множество еще остается слишком обширным.

3) При окончательном выборе решения мы учитываем именно обсуждавшийся выше недостаток информации: в области допустимых оценок выбирается решение, которое в определенном смысле является наиболее "простым". Как и следовало ожидать, указанный выбор опирается на *главные компоненты* оценки объекта. В свою очередь главные компоненты порождаются *информационной матрицей Фишера*.

Заметим также, что для выяснения естественных границ эффективности обратного решения полезно расширить априорную информацию о нем до такой степени,

что обратная задача сводится фактически к проблеме проверки статистических гипотез.

В совокупности перечисленные посылки приводят к алгоритму, обеспечивающему устойчивость при решении обратных задач без обращения к иллюзорной информации байесовского типа (конечно, *после* нахождения решения можно интерпретировать его с точки зрения байесовского подхода для *специально подобранного ансамбля*).

Наиболее важный шаг при нахождении устойчивых обратных решений заключается в фактическом использовании условия их максимальной простоты, совместимой с данными наблюдений. По-видимому, впервые в явном виде требование максимальной простоты модели при интерпретации данных высказал В. Оккам (W. Occam) в XIV веке: "Plurality is not to be assumed without necessity"<sup>2</sup>. Поэтому рассматриваемую здесь конкретизацию небайесовского подхода представляется уместным назвать *оккамовской*.

## 2. Постановка задачи

Введем следующие обозначения (рис. 1). Пусть  $S$  — произвольный элемент *пространства объектов*  $\{S\}$ ;  $S_0$  — искомый объект, принадлежащий тому же пространству;  $f(y|S)$  — определяемая моделью формирования изображений условная вероятность получения в *пространстве изображений*  $\{y\}$  заданной совокупности отсчетов при исходном элементе  $S$ ;  $q(S) = \langle Y \rangle$  — среднее изображение, которое соответствует детерминированному размыванию  $S$  и усреднению фона;  $y_0$  — наблюдаемое изображение.

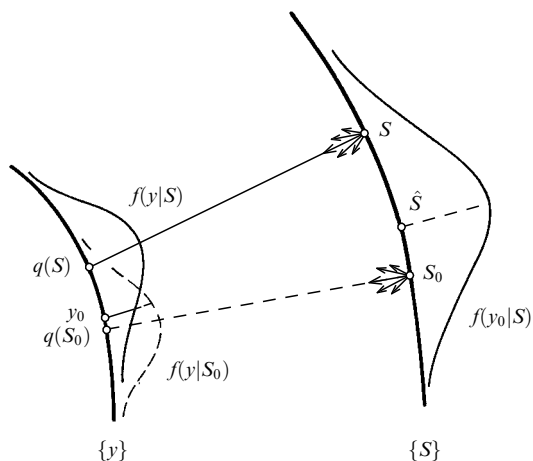


Рис. 1. Схематическое представление модели формирования изображений

Знак  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по вероятностному ансамблю. Элементы пространства объектов  $\{S\}$  представляют собой  $n$ -мерные векторы-столбцы, а элементы пространства изображений  $\{y\}$  — аналогичные  $m$ -мерные векторы (обычно  $m \neq n$ ). Под нормой  $\|x\|$  вектора  $x$  понимается его евклидова длина. Тот факт, что некоторая случайная величина  $\xi$  подчиняется распределению с плотностью  $f(x)$ , записывается для краткости в виде

<sup>2</sup> "Не следует приумножать сущностей сверх надобности".

$\xi \sim f(x)$ . Так,

$$Y \sim f(y|S), \quad Y_0 \sim f(y|S_0), \quad (2.1)$$

и наблюдаемое изображение  $y_0$  является реализацией случайного вектора  $Y_0$ . Для произвольного объекта  $S$  выполняется условие нормировки

$$\sum_y f(y|S) = 1. \quad (2.2)$$

Заметим, что случайная величина  $\xi$  и принимаемое ею значение  $x$  — разные понятия, и смещение их обозначений в физической литературе неоднократно приводило к недоразумениям.

Мы придаем фундаментальное значение дискретному представлению задачи, тогда как непрерывное описание рассматривается как приближение, иногда упрощающее аналитические выкладки.

Для того чтобы сосредоточить внимание на более важных в данном контексте вопросах, ограничимся обсуждением некогерентных источников излучения. При этом роль  $S_0$  обычно играет совокупность *средних* интенсивностей излучения, которые были бы зарегистрированы в отдельных пикселах приемника при идеальной формирующей системе. Неотрицательность отсчетов  $S_0$  в этом случае очевидна. Вместе с тем, часть параметров может описывать структурные свойства объекта, и тогда их неотрицательность не является обязательным условием [34, 35, 25]. В современной экспериментальной практике чаще всего применяется теоретически наиболее эффективный способ регистрации изображений путем счета отдельных фотособытий (см., например, [36–38]). Поэтому компоненты вектора  $y$  в пространстве изображений считаются целочисленными неотрицательными величинами.

В случае линейной модели формирования изображений и некогерентного источника мы имеем

$$q(S) = HS + \gamma, \quad (2.3)$$

где матрица  $H = [h_{jk}]$  с неотрицательными элементами является функцией рассеяния точки, а вектор  $\gamma$  с компонентами  $\gamma_j = \langle \xi_j \rangle \geq 0$  задает среднее значение случайного фона. В условиях, когда время экспозиции значительно превосходит характерное время когерентности излучения, статистика фотособытий может быть с очень хорошей точностью аппроксимирована законом Пуассона [36–38], так что

$$f(y|S) = \prod_{j=1}^m \exp[-q_j(S)] [q_j(S)]^{y_j} \frac{1}{y_j!}. \quad (2.4)$$

Наличие фотонного шума учитывается в рассматриваемой модели самым вероятностным способом ее задания; флуктуации отсчетов не исчезают и при нулевом внешнем фоне  $\gamma$ .

Вообще говоря, некоторые из перечисленных выше требований не являются обязательными, и можно было бы выбрать более общую модель формирования изображения, в частности, учесть нелинейные эффекты и ввести точное распределение Кокса–Мандела [39–41] для статистики фотособытий. Случай, когда информация о статистике фотособытий отсутствует, а также некоторые

другие модели обсуждаются в [25, 27], реалистическая модель регистрации при помощи ПЗС-детектора (CCD), учитывающая его неоднородность, изучена в [42]. Мы, однако, не будем здесь усложнять изложение с тем, чтобы иметь возможность сосредоточить внимание на принципиальных трудностях.

Задача исследователя состоит в том, чтобы на основании наблюдаемого изображения  $y_0$ , априорной информации относительно объекта  $S_0$ , используя заданную модель формирования изображений  $f(y|S)$ , найти такую *оценку*  $S^*(y_0)$ , которая как можно меньше отличалась бы от оригинала  $S_0$ . Поскольку правило оценивания (другими словами — восстановления изображений) должно быть применимым не только к  $y_0$ , но и ко всякому другому изображению  $Y_0$ , порождаемому оригиналом  $S_0$ , оценка  $S^*(Y_0)$  представляет собой случайную величину, а ее качество определяется степенью концентрации плотности распределения  $S^*$  около точки  $S_0$ . В частности, мы хотим иметь оценку с не слишком большими значениями ее систематического отклонения от исходного объекта — *смещения* (bias)

$$b(S_0) = \langle S^*(Y_0) \rangle - S_0 \quad (2.5)$$

— и *дисперсии* (variance) относительно среднего значения. Эти требования можно объединить [43], определив среднеквадратическую меру отклонения компонентом оценки  $S^*(Y_0)$  от самого объекта  $S_0$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{ik}(S_0) &= \langle (S_i^* - S_{0i})(S_k^* - S_{0k}) \rangle, \quad i, k = 1, \dots, n, \\ \Omega(S_0) &= [\Omega_{ik}(S_0)] = \langle (S^* - S_0)(S^* - S_0)^T \rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где символ  $T$  обозначает операцию транспонирования. Матрицу  $\Omega$  называют *матрицей рассеивания* оценки  $S^*$ . Для несмещенных оценок  $\Omega$  совпадает с дисперсионной матрицей  $D$ .

Зададим направление в пространстве объектов единичным вектором  $a$ . Тогда рассеивание оценки  $S^*$  в этом направлении (скалярную величину) можно представить квадратичной формой:

$$\Omega_a = \langle [(S^* - S_0)a]^2 \rangle = \sum_i \sum_k \Omega_{ik} a_i a_k = a^T \Omega a. \quad (2.7)$$

Оценка  $S^*(Y_0)$  называется *эффективной в классе  $K$* , если ее рассеивание в произвольном направлении не превосходит рассеивания любой другой оценки для всех объектов, принадлежащих классу  $K$ . Другими словами, эффективная оценка характеризуется наиболее компактным эллипсоидом рассеивания около любого объекта из  $K$ .

Ссылка на определенный класс объектов важна по той причине, что без указания такого класса введенное Фишером [44] фундаментальное понятие эффективности оценки становится бессодержательным. В самом деле, выбрав в качестве оценки  $S^*$  некоторую *фиксированную* точку  $S_c$  пространства объектов, мы получим недопустимо большое рассеивание для почти всех объектов, отличных от  $S_c$ , но именно для этого объекта рассеивание нашей оценки будет нулевым (стоящие часы один или два раза в сутки бывают точнее любых других часов!). Обычно рассмотрение проводится в классе  $K_b$  оценок с заданным смещением (2.5), в частности, в классе  $K_0$  оценок с нулевым смещением. Несмотря на важность рассматриваемых понятий для правильной постановки

обратной задачи, мы не имеем здесь возможности войти более подробно в их обсуждение. Ясное изложение круга относящихся сюда вопросов дано Боровковым [43].

Очевидно, имеется множество способов оценивания объекта (другими словами, много способов решения обратной задачи), но действительный интерес представляют лишь те оценки, которые либо совпадают с эффективными, либо практически близки к ним. Нахождение таких оценок и составляет цель при решении всякой обратной задачи. Ввиду неизбежной стохастичности описания внешнего и внутреннего шума только формулировка обратных задач в рамках статистической теории оценивания параметров (и тесно связанной с ней теорией принятия решений) отвечает сути проблемы.

Смысл понятия "качество оценки" должен быть указан исследователем в зависимости от специфики той области, к которой относится задача. Определенное выше *рассеивание*  $\Omega$  представляет собой в более общем контексте *условный риск* оценки при квадратичной *функции потерь*. Употребляются и другие определения понятия качества оценки. Так, согласно *минимаксному* подходу, оптимальной считается оценка, для которой самое большое значение рассеивания в пространстве объектов не превосходит максимального значения рассеивания любой другой оценки (образно говоря, при поисках самого маленького солдата мы выбираем подразделение, в котором правофланговый меньше правофланговых во всех остальных подразделениях). Поскольку конкретный выбор не играет решающей роли, мы будем придерживаться простого определения понятия качества, основанного на матрице рассеивания.

Виды априорной информации настолько разнообразны, что нередко их трудно формализовать. Исчерпывающим образом это положение дел описал Торальдо ди Франча [45]: "The observer is always more or less relying on his past experience of what a real object can look like. Moreover, in the great majority of particular cases, he has at his disposal a much larger amount of a priori information about the object than he even realizes. This information, if properly utilized, enables him to rule out some of the different objects which could correspond to the image. He thus may have the illusion that he can extract from the image more information than there is actually contained"<sup>3</sup>.

Часть априорной информации включается в задачу при построении стохастической модели формирования изображения (обычно это условие неотрицательности решения, явный вид ФРТ, средний уровень фона и сведения о статистике событий). Если в распоряжении исследователя имеется дополнительная априорная информация детерминированного или случайного характера, то она должна быть включена в схему на подходящем этапе. Так, сведения о "гладкости" решения могут быть учтены сужением области допустимых оценок. Если 1) объект  $S_0$  составляет элемент вероятностного

ансамбля с плотностью  $w(S)$ , 2) он был неселективно выбран из этого ансамбля и 3) сама плотность  $w(S)$  известна исследователю, то следует обратиться к схеме Байеса оценивания параметров и ввести в рассмотрение двумерную плотность распределения  $f(y, S) = w(S)f(y|S)$ . Мы ограничиваемся здесь обсуждением ситуации, когда априорная информация имеет детерминированный характер. Распространение подхода на случай, когда имеется дополнительная информация стохастического характера, не встречает принципиальных затруднений.

### 3. Модель детерминированного размывания изображения

Сказанное в разделе 1 относительно роли фотонного шума означает, что модель детерминированного размывания интересна, главным образом, в методическом плане: ее анализ послужит основой при дальнейшем обсуждении более реальных моделей формирования изображения. В частности, детерминированная модель позволяет проследить явление неустойчивости в наиболее простых условиях. В этой связи достаточно обратить внимание на широко распространенное заблуждение в том, что неустойчивость не возникает в задачах с конечным (и тем более, малым) числом оцениваемых параметров. Между тем, неустойчивость обратных решений полностью проявляется уже при двух искомым параметрах.

#### 3.1. Основные предположения

Если случайность данных обусловлена лишь фоном  $\xi$ , мы получаем вместо (2.1)–(2.4) модель в виде системы линейных уравнений

$$Y_0 = HS_0 + \xi, \quad (3.1)$$

причем наблюдаемое изображение  $y_0$  является суммой детерминированного члена  $HS_0$  и реализации  $\xi_0$  случайного фона (см. рис. 1):

$$y_0 = HS_0 + \xi_0. \quad (3.2)$$

Матрица  $H$  размером  $m \times n$  предполагается невырожденной, т.е.  $\det H \neq 0$ . Чтобы еще более упростить модель, откажемся на время от условия неотрицательности объекта, изображения и фона, полагая лишь, что  $\langle \xi_j \rangle \equiv 0$ , а отсчеты фона в разных пикселах некоррелированы и обладают одинаковой дисперсией  $\sigma^2$ , которая известна исследователю. Таким образом, случайный фон характеризуется следующей ковариационной матрицей:

$$c_{js} \equiv \langle \xi_j \xi_s \rangle = \sigma^2 \delta_{js}, \quad C = [c_{js}] = \sigma^2 E_m, \quad (3.3)$$

где  $\delta_{js}$  — символ Кронекера, а  $E_m$  — единичная  $m$ -мерная матрица.

Принципиальное отличие данной задачи от классической *схемы наименьших квадратов* [46, 47] заключается в том, что в последней  $\sigma^2$  считается известной величиной, которую следует оценить наряду с объектом  $S_0$ . При этом  $\xi$  понимается как случайная ошибка измерений, призванная лишь устранить те остаточные несогласованности между моделью и данными, которые не удается объяснить систематическим образом. Напротив, при

<sup>3</sup> "Наблюдатель всегда более или менее полагается на свой прошлый опыт относительно того, как может выглядеть реальный объект. Более того, почти всегда в его распоряжении имеется гораздо больше априорной информации относительно объекта, чем он даже воображает. Эта информация, будучи использованной должным образом, позволяет ему исключить некоторые из различных объектов, которые могли бы отвечать изображению. Поэтому у исследователя может возникнуть иллюзия, что он способен извлечь больше информации из изображения, чем оно содержит в действительности".

восстановлении изображений  $\xi$  представляет собой случайный фон, свойства которого вполне можно изучить в специально поставленных экспериментах. Как мы увидим ниже, это обстоятельство существенным образом влияет на постановку задачи и, разумеется, на получаемые результаты.

### 3.2. Численные примеры

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4, \\ 3x_1 + 8x_2 &= 14, \end{aligned} \quad (3.4)$$

точное решение которой есть вектор  $[2, 1]^T$ . Очевидно, практическая ценность точного решения зависит от его устойчивости к неизбежным малым ошибкам задания коэффициентов и свободных членов системы. Ограничимся обсуждением лишь неточностей последнего рода. Уравнения (3.4) определяют прямые 1 и 2 на рис. 2, перпендикулярные соответственно векторам  $[1, 2]^T$  и  $[3, 8]^T$ . Так как угол между этими векторами мал ( $\approx 6^\circ$ ), то и прямые почти параллельны, а положение точки их пересечения — решения системы уравнений — оказывается весьма чувствительным к возможным неточностям задания правых частей.

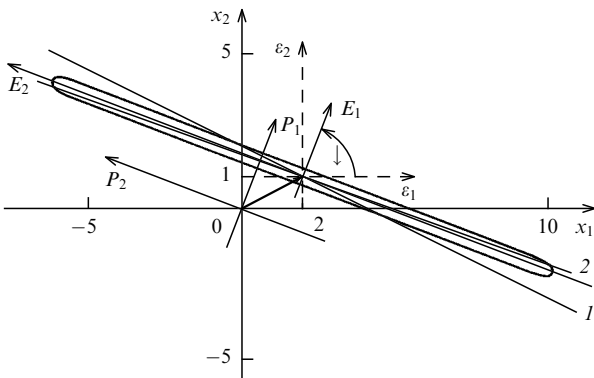


Рис. 2. Графическая интерпретация системы уравнений (3.4)

Для нас основной интерес представляет тот факт, что неточность решения сильно зависит от направления в пространстве объектов  $(x_1, x_2)$ . Действительно, при небольшом относительном смещении прямых точка их пересечения значительно смещается вдоль прямых и мало — в перпендикулярном направлении. Если разложить радиус-вектор решения на две компоненты — вдоль и поперек среднего направления обеих прямых, то станет очевидным, что продольная компонента решения может меняться в очень больших пределах, не нарушая заданной неточности данных. Более строгое рассмотрение, которое мы проведем в разделах 4, 6, показывает, что фиксированной суммарной неточности правых частей системы (3.4) отвечает в пространстве решений эллипс с отношением длин главных осей, равным приблизительно 39. Так, подставляя в (3.4) вместо точного решения  $[2, 1]^T$  существенно отличное от него пробное решение  $[5, 6; -0, 4]^T$ , в качестве свободного члена получим  $[4, 8; 13, 6]^T$ , что достаточно близко к значениям, приведенным в уравнениях (3.4).

Естественного описания неізотропности ошибок можно достичь путем перехода к системам координат  $(E_1, E_2)$  или  $(P_1, P_2)$ , связанным с главными осями упомянутого выше эллипса (решение в последней системе координат и составляют *главные компоненты*).

Известны гораздо более впечатляющие примеры неустойчивости решения обратной задачи при малом изменении данных наблюдений. Моррис [48] построил пример системы уравнений  $y = Hx_0$  при

$$y = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Подстановка вектора  $[2, 36; 0, 18; 0, 65; 1, 21]^T$  вместо  $x_0$  приводит здесь к свободному члену, каждая из компонент которого отличается по модулю от указанных в (3.5) значений лишь примерно на 0,01.

Подобные примеры показывают, что с практической точки зрения решение систем уравнений естественнее отнести не к алгебре, а к статистической теории оценивания параметров.

Мы видим, что попытки решить "эквивалентные с точностью до шума" обратные задачи могут приводить к существенно различающимся решениям уже при нескольких оцениваемых параметрах. Тем более это справедливо для многомерного случая, где "профиль" обратного решения обычно ведет себя крайне нерегулярным образом. Это обусловлено тем обстоятельством, что решение "пытается объяснить" все детали наблюдений, включая статистически незначимые флуктуации шума. И для этого оно имеет возможность "забраться" в далекие области чрезвычайно вытянутой области допустимых решений, не нарушая точности представления наблюдательных данных. В самом деле, поскольку действие оператора  $H$  сильно сглаживает колебания профиля решения, для объяснения даже малых флуктуаций данных приходится вводить огромные колебания в решении.

В ситуациях подобных описанной принято говорить, что система уравнений *плохо обусловлена* [49]. Это свойство системы не является простым следствием малости определителя матрицы  $H$ . Так, определитель системы (3.4) равен 2, а в случае (3.5) мы имеем  $\det H = 1$ . Дело в том, что величина определителя матрицы  $H = [h_1, \dots, h_n]$  зависит не только от степени коллинеарности векторов  $\{h_k\}$ , но и от их длин. Поэтому более верное представление о возможной неустойчивости можно получить путем очевидной нормировки неравенства Адамара [50, 51]. Наконец, как показали Фаддеев и Фаддеева [52, 53], полное описание степени обусловленности системы уравнений дается спектром матрицы  $H^T H$ . Мы вернемся к этому вопросу в следующих разделах.

### 3.3. Структура области допустимых оценок

Пусть  $\Gamma$  — пространство, содержащее все возможные детерминированно размытые изображения (рис. 3). Другими словами,  $\Gamma = \{HS\}$  есть  $H$ -преобразование пространства объектов  $\{S\}$ . В  $\Gamma$  содержится, в частности, и элемент  $HS_0$ . Если  $\{S\}$  включает сравнительно узкий класс функций, то и  $\Gamma$  представляет собой достаточно специальный класс. Например, если  $\{S\}$  содержит лишь

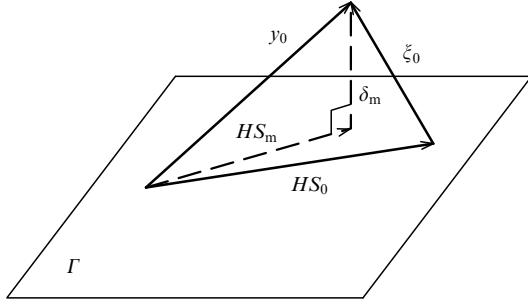


Рис. 3. Нахождение оценки наименьших квадратов  $S_m$

"гладкие" объекты, то  $\Gamma$  состоит из еще более "гладких" функций, так как при размывании высокие пространственные частоты объектов срезаются. Обычно  $\Gamma$  является подпространством всего пространства объектов. Наблюдаемое изображение  $y_0$  получается из  $HS_0$  добавлением реализации случайного фона  $\xi_0$ , которая может не обладать свойствами элементов, содержащихся в  $\Gamma$  (например, быть не "гладкой" или отрицательной). Поэтому  $y_0$ , вообще говоря, не принадлежит  $\Gamma$ .

Выберем в качестве величины, характеризующей приемлемость некоторого пробного объекта  $S$  при объяснении данных  $y_0$ , так называемую *невязку* (ее смысл легко понять из рис. 3):

$$\delta^2(y_0, S) \equiv \|y_0 - HS\|^2 = (y_0 - HS)^T(y_0 - HS). \quad (3.6)$$

Величина  $\delta(y_0, S)$  — расстояние от  $y_0$  до произвольного элемента  $HS$  пространства  $\Gamma$ . В классическом подходе искомой оценкой объекта  $S_0$  считается элемент  $S_m$ , минимизирующий это расстояние:

$$S_m(y_0) = \arg \min_S \delta^2(y_0, S). \quad (3.7)$$

Решение  $S_m$  называют *оценкой наименьших квадратов* (ОНК). Такая постановка задачи выглядит вполне естественно, поскольку исследователь, не зная дисперсии случайной ошибки  $\xi$ , отводит ей как можно меньшую роль при интерпретации данных. Нетрудно найти явное представление ОНК через вектор данных  $y_0$ .

Очевидно, невязка достигает минимума на элементе  $S_m$ , для которого  $HS_m$  совпадает с проекцией  $y_0$  на  $\Gamma$ . Таким образом, мы имеем  $(y_0 - HS_m) \perp \Gamma$ , и для всякого  $S$  выполняется равенство

$$(HS)^T(y_0 - HS_m) = 0. \quad (3.8)$$

Из-за произвольности  $S$  это означает, что оператор  $H^T(y_0 - HS_m)$  — нулевой, т.е.

$$H^T HS_m = H^T y_0. \quad (3.9)$$

Мы пришли к *нормальной системе уравнений Эйлера*, которая характеризуется квадратной матрицей  $H^T H$ . Если последняя не вырождена, то находим окончательно

$$S_m(y_0) = H^+ y_0, \quad H^+ \equiv (H^T H)^{-1} H^T. \quad (3.10)$$

Матрица  $H^+$  называется *псевдообратной* по отношению к  $H$ . Она определяется общим соотношением  $HH^+H = H$  и в случае, когда  $H$  — квадратная невырожденная

матрица совпадает с обратной матрицей  $H^{-1}$ . Поскольку решение  $S_i = H^{-1}y_0$  следует непосредственно из (3.2) при  $\xi_0 \equiv 0$ , оно именуется *инверсным*. Таким образом, ОНК есть обобщение инверсной оценки на случай, когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Если уравнение  $HS = y_0$  имеет решение, то  $S_m$  — вектор с минимальной длиной. Если же решения нет, то  $S_m$  минимизирует сумму квадратов отклонений  $y_0 - HS$ , причем из всех векторов, обладающих этим свойством,  $S_m$  имеет наименьшую длину [54].

Как легко видеть, ОНК почти всегда находится вне пределов положительного гиперквадранта в пространстве объектов. В самом деле, даже при положительности объекта  $S_0$  наблюдаемая реализация изображения  $y_0$  почти наверняка содержит и отрицательные компоненты, обусловленные колебаниями шума. Вместе с тем, нетрудно доказать, что ОНК, будучи распространенной на все множество возможных изображений  $Y_0$ , является несмещенной оценкой, т.е.

$$\langle S_m(Y_0) \rangle = S_0, \quad (3.11)$$

а ее дисперсионная матрица равна

$$D[S_m(Y_0)] = \sigma^2(H^T H)^{-1} = I^{-1}, \quad (3.12)$$

где

$$I \equiv \frac{1}{\sigma^2} H^T H \quad (3.13)$$

— матрица размером  $n \times n$ . Мы увидим ниже, что  $I$  представляет собой конкретное выражение для рассматриваемой задачи известной в статистике *информационной матрицы Фишера* [55].

Важность ОНК для классической схемы определяется тем обстоятельством, что в классе всех линейных несмещенных оценок она обладает минимальной дисперсией, т.е. является *эффективной* в этом классе (теорема Гаусса–Маркова, ее справедливость следует из обсуждаемого далее неравенства информации). Эффективность ОНК сохраняется и для произвольных несмещенных оценок, если дополнительно предположить нормальность фона  $\xi$ . Вместе с тем, сама по себе дисперсия ОНК зачастую неприемлемо велика и для получения надежного решения приходится привлекать априорную информацию.

Из (3.6) и (3.9) нетрудно получить следующее представление для невязки произвольного элемента  $S$ :

$$\delta^2(y_0, S) = \delta^2(y_0, S_m) + (S - S_m)^T H^T H (S - S_m), \quad (3.14)$$

где

$$\delta^2(y_0, S_m) = y_0^T (E_m - P) y_0 \quad (3.15)$$

— невязка ОНК, а  $P \equiv H(H^T H)^{-1} H^T = HH^+$  — оператор ортогонального проецирования на  $\Gamma$ . Поскольку второе слагаемое в правой части (3.14) неотрицательно, мы еще раз убеждаемся, что невязка минимальна при  $S = S_m$ . Очевидно, степень близости некоторой оценки  $S$  к  $S_m$  определяется не самим значением невязки для  $S$ , а нормированной подходящим образом *разностью* невязок для  $S$  и  $S_m$ . Определим поэтому меру качества оценки

$S$  при интерпретации изображения  $y_0$  соотношением

$$\rho_1^2(S, y_0) \equiv \frac{1}{\sigma^2} [\delta^2(y_0, S) - \delta^2(y_0, S_m)]. \quad (3.16)$$

Тогда из (3.13) и (3.14) следует

$$\rho_1^2(S, y_0) = (S - S_m)^T I (S - S_m), \quad (3.17)$$

где  $I$  — матрица Фишера.

Как мы уже говорили, при заданных характеристиках фона  $\xi$  неразумно требовать для искомым оценок  $S$  слишком малых значений  $\rho_1^2(S, y_0)$ : стремление объяснить буквально все, в том числе статистически незначимые флуктуации изображения, лишь усиливает неустойчивость решения. Употребляя точную терминологию, можно сказать, что  $\rho_1^2(S, Y_0)$  есть характеризующая величину  $S$  статистика, и нельзя требовать, чтобы для приемлемых оценок статистика принимала крайние из всех возможных значения. Более уместно определить допустимые оценки условием  $A \leq \rho_1^2(S, y_0) \leq B$ , где постоянные  $A$  и  $B$  ограничивают область наиболее вероятных значений статистики  $\rho_1^2(S, Y_0)$ . В силу соотношения (3.17) мы приходим к неравенству

$$A \leq [S - S_m(y_0)]^T I [S - S_m(y_0)] \leq B, \quad (3.18)$$

которое задает в  $n$ -мерном пространстве объектов область допустимых оценок (ОДО) в виде слоя между двумя эллипсоидальными поверхностями, подобного полой дыне (рис. 4). Как говорилось, центр эллипсоида почти всегда находится вне положительного гиперквadrанта в  $\{S\}$ .

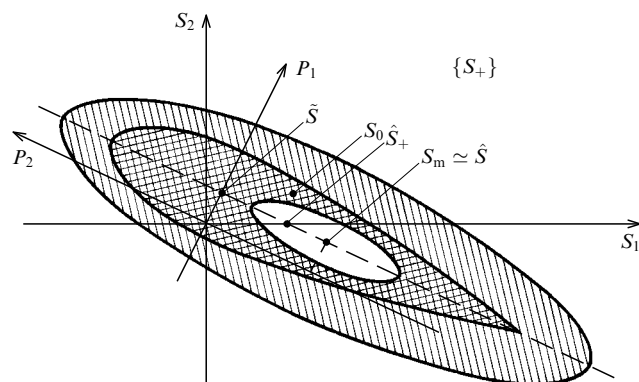


Рис. 4. Область допустимых оценок при использовании расстояния Кульбака–Лейблера (простая штриховка) и полного критерия случайности изображения (двойная штриховка)

Мы выяснили строение ОДО при фиксированном изображении  $y_0$ . Если же говорить об оценках, допустимых для описания всего ансамбля изображений  $Y_0 \sim f(y|S_0)$ , то по аналогии с (3.16) целесообразно ввести расстояние в пространстве объектов соотношением

$$\rho^2(S_0, S) \equiv \frac{1}{\sigma^2} \langle \delta^2(Y_0, S) - \delta^2(Y_0, S_0) \rangle. \quad (3.19)$$

Обращаясь к известным результатам для моментов квадратичных форм [46], нетрудно получить

$$\rho^2(S_0, S) = (S - S_0)^T I (S - S_0). \quad (3.20)$$

Здесь чрезмерная близость к истинному объекту  $S_0$ , разумеется, не является пороком оценки, а потому средняя для всех изображений ОДО определяется неравенством

$$(S - S_0)^T I (S - S_0) \leq C, \quad (3.21)$$

которое задает эллипсоид с центром в  $S_0$ , что вполне понятно ввиду несмещенности ОНК. Постоянная  $C$  определяется принятым уровнем значимости допустимых отклонений.

Главные оси эллипсоидов (3.18) и (3.21) направлены вдоль собственных векторов матрицы  $I$ , а длины полуосей пропорциональны  $\lambda_k^{-1/2}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $\lambda_k$  — собственные числа матрицы  $I$ . Таким образом, форма ОДО определяется собственными векторами и собственными значениями положительно определенной матрицы Фишера  $I$ . Некоторые из  $\lambda_k$  для типичных обратных задач чрезвычайно малы, и тогда ОДО очень сильно растягивается в соответствующих направлениях, принимая нитевидную форму. В этих направлениях велика неточность обратного решения, и именно непомерная вытянутость ОДО свидетельствует о неустойчивости обратной задачи.

Более подробно вид и свойства ОДО, включая условие неотрицательности объекта, мы обсудим в разделах 4, 6.

#### 3.4. Оценка максимального правдоподобия

До сих пор мы не использовали предположений о виде функции распределения фона. Если таковая известна, то наряду с ОНК можно построить другие полезные решения обратной задачи. Основным решением является оценка максимального правдоподобия (ОМП). По определению [56], ОМП — такой объект  $\hat{S}(y_0)$ , для которого вероятность  $f(y_0|S)$  получить наблюдаемое изображение  $y_0$ , рассматриваемая как функция  $S$ , достигает максимума (см. рис. 1):

$$\hat{S}(y_0) = \arg \max_S f(y_0|S). \quad (3.22)$$

Как легко понять, в случае модели с гауссовой плотностью  $f(y|S)$  и при отказе от условия неотрицательности объекта ОНК и ОМП совпадают. Эти оценки остаются близкими и в других практически важных случаях, поэтому можно ожидать, что ОМП, так же как и ОНК, неустойчива вследствие стремления слишком точно объяснить статистически незначимые детали изображения.

#### 3.5. Матрица Фишера и неравенство информации

Расширим предположения (3.3), считая отсчеты фона  $\xi$  нормально распределенными случайными величинами. Тогда плотность распределения вектора  $Y_0$  в (3.1) имеет вид

$$f(y|S_0) = [(2\pi)^m \det C]^{-1/2} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - HS_0)^T C^{-1} (y - HS_0) \right]. \quad (3.23)$$

Отсюда следует

$$-\frac{\partial^2}{\partial S_0^2} \ln f(y|S_0) = H^T C^{-1} H. \quad (3.24)$$



Информационная матрица Фишера, определяемая при сделанных предположениях как среднее значение:

$$I = \left\langle -\frac{\partial^2}{\partial S_0^2} \ln f(Y_0|S_0) \right\rangle, \quad (3.25)$$

совпадает с правой частью (3.24), или в силу (3.3) — с представлением (3.13). Соответственно, обратная матрица Фишера равна  $I^{-1} = \sigma^2(H^T H)^{-1}$ .

В теории оценивания параметров имеется восходящее к Р. Фишеру [55] важное неравенство для дисперсии несмещенных оценок, строгое доказательство которого было затем дано в [57–61]:

$$D(S) \geq I^{-1}. \quad (3.26)$$

Здесь под  $S$  подразумевается произвольная несмещенная оценка, а матричное неравенство  $A \geq B$  означает неотрицательную определенность матрицы  $A - B$ . Чаще всего (3.26) именуется *неравенством Рао–Крамера* или *неравенством информации*; мы остановимся на последнем наименовании. Если для какой-либо оценки выполняется (3.26) со знаком равенства, то будем называть ее *границкой оценкой*. Очевидно, всякая граничная оценка является и эффективной, т.е. ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки, однако во многих случаях граничных оценок не существует, в то время как эффективные оценки по-прежнему представляют для исследователя основной интерес. Вопросы, связанные с неравенством информации, обсуждаются более подробно в разделе 5.

Согласно (3.12) ОНК является граничной в классе несмещенных оценок. Это значит, что бесполезно искать лучшую несмещенную оценку, однако ОНК лежит вне области (3.18), и мы вынуждены либо искать несмещенную оценку с большей дисперсией, либо допустить смещение. Второе предпочтительнее, потому что для смещенной оценки можно добиться меньшего *рассеивания* в смысле (2.6), чем для ОНК. Поскольку понятие качества оценки было определено именно в этом смысле, такой поиск представляется вполне оправданным.

Обычно в качестве смещенной оценки выступает так называемая *гребневая* оценка  $S_r$  (Ridge Estimator) [62, 63], совпадающая с оптимальной оценкой согласно Винеру [12], Филлипсу [14], Туоми [15, 16] и с *регуляризованным* решением согласно Тихонову [17, 18]:

$$S_r = (H^T H + \mu E_n)^{-1} H^T y_0, \quad (3.27)$$

где  $\mu$  — параметр, подбираемый в соответствии с заданным значением невязки. Сравнение (3.27) с (3.10) показывает, что добавка  $\mu E_n$  смещает спектр обратного оператора в положительном направлении, эллипсоид рассеивания становится более округлым, что свидетельствует о возросшей устойчивости задачи. Можно показать [13, 47], что  $S_r$  является байесовской оценкой, соответствующей точному априорному знанию матрицы  $R$  в линейном соотношении  $RS_r + \varphi = 0$ , где  $\varphi$  — случайный вектор с нулевым средним и независимыми компонентами. Поскольку нас интересует случай, когда столь существенной априорной информации об искомом решении у исследователя нет, ограничимся в отношении оценки  $S_r$  краткими замечаниями.

Первое из них связано с теорией Колмогорова–Винера оптимальной фильтрации случайных процессов.

В этой теории явно постулируется принадлежность объекта гауссову ансамблю "сигналов", фона — аналогичному ансамблю "шумов", и множитель Лагранжа  $\mu$  (в обозначениях Тихонова —  $\alpha$ ) равен отношению дисперсий фона и сигнала:  $\mu = \sigma_\xi^2 / \sigma_s^2$ . Таким образом, стабилизирующая роль априорной информации проявляется здесь весьма наглядно.

В подходе Туоми [15, 16] вместо единичной матрицы  $E_n$  в (3.27) входит произвольная неотрицательно определенная матрица  $G$ , соответствующая минимизации скалярной величины  $p \equiv S^T G S$  при заданном значении невязки. При  $G = E_n$  величина  $p = S^T S$  является полной *мощностью* искомой оценки. В общем случае искомое решение совпадает с точкой касания эллипсоида рассеивания и наименьшего централизованного эллипсоида  $S^T G S = \text{const}$ .

Обратим внимание на то, что "регуляризованная" оценка  $S_r$  смещена не только в направлении, которое отвечает наибольшим осям эллипсоида рассеивания, но и в направлении самых малых по величине осей. Последнее обстоятельство весьма нежелательно, ибо не следует ухудшать те комбинации оцениваемых параметров, которые определены с наивысшей точностью (см. раздел 6).

#### 4. Критерий случайности изображения

Основу обсуждающегося подхода составляют две процедуры.

Во-первых, исходя из соображений статистического характера, мы будем сужать ОДО, приближенная форма которой была выяснена в разделе 3. Это достаточно эффективный путь в том смысле, что заметная часть решений, попадающих в эллипсоидальный слой (3.18), не выдерживает более тонких тестов, которым обязано удовлетворять любое приемлемое решение. Тем не менее имеющиеся сейчас статистические критерии недостаточно сжимают ОДО, и на практике остается нежелательная свобода выбора между отличающимися оценками объекта. Окончательный выбор оценки в ОДО проводится в рамках второй из упомянутых выше процедур, исходящей из соображений информационного порядка (разделы 5, 6).

В настоящем разделе рассматриваются возможности, предоставляемые первой процедурой. Мы отказываемся здесь от детерминированной модели формирования данных и считаем  $f(y|S)$  произвольной непатологической функцией. Для наглядности часто используется пуассоновская модель.

##### 4.1. Формулировка критерия

Некоторая оценка  $S$  считалась ранее *допустимой* (feasible), если расстояние (3.16) между ее *средней проекцией*  $q(S)$  на пространство изображений и наблюдаемым изображением  $y_0$  находилось в пределах, рекомендуемых статистикой (см. рис. 1). В общем, это вполне разумное условие, однако понятие невязки (3.6) далеко не исчерпывает все возможные типы различий между двумя изображениями. Так, длинная серия небольших по амплитуде отклонений *одного знака* может дать ничем не выделяющееся значение невязки, хотя исследователь, интуитивно опирающийся на более мощные критерии различия, сочтет пробное изображение, а тем самым и оценку  $S$ , неприемлемыми.

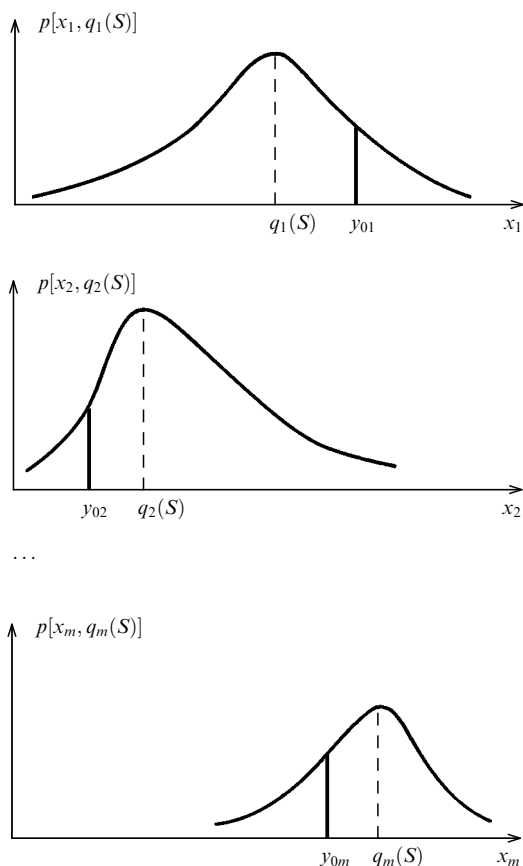


Рис. 5. Плотности распределения интенсивностей в пикселах изображения

По этой причине необходимо явно указать условие, при соблюдении которого считается, что пробная оценка  $S$  удовлетворительно объясняет наблюдаемое изображение. Это условие было сформулировано Веклеровым и Лласером [23, 24] и — в более общем контексте — Теребижем и Бирюковым [29].

Согласно введенной выше терминологии, вектор  $q(S_0) \equiv [q_j(S_0)]$  есть *средняя проекция* объекта  $S_0$  на пространство изображений; тогда само наблюдаемое изображение  $y_0$  можно считать одной из *случайных проекций* объекта  $S_0$ . Понятия проекций применимы не только к объекту  $S_0$ , но и к произвольной его оценке  $S$  (см. рис. 1).

В общем виде *критерий случайности изображения* можно сформулировать следующим образом: *допустимы только такие оценки  $S(y_0)$  неизвестного объекта  $S_0$ , для которых наблюдаемое изображение  $y_0$  статистически неотличимо от ансамбля случайных проекций, порождаемого  $S(y_0)$* . Отсюда следует и более общее определение ОДО: это вся совокупность *допустимых* в указанном выше смысле оценок в пространстве объектов.

Очевидно, в случае рассматривавшейся в разделе 2 конкретной модели формирования изображений мы имеем следующую частную формулировку КСИ: *допустимы только такие оценки  $S(y_0)$  неизвестного объекта  $S_0$ , для которых наблюдаемые отсчеты  $[y_{0j}]$  могут рассматриваться как реализации независимых в совокупности пуассоновских случайных величин со средними значениями, равными соответственно  $[q_j(S)]$* .

С определенной долей условности КСИ можно разделить на два требования: 1) независимости случайных величин, порождающих наблюдаемые отсчеты интенсивностей  $[y_{0j}]$ , причем требуется не просто попарная, но независимость в совокупности и 2) справедливости для этих случайных величин именно распределения Пуассона с вектором средних значений  $[q_j(S)]$ .

Некоторые пояснения КСИ дает рис. 5, на котором условно изображены плотности распределения интенсивности  $p[x_j, q_j(S)]$  в отдельных пикселах изображения для некоторой оценки  $S$  (мы отвлекаемся от дискретности распределения). Допустимая оценка объекта обеспечивает не слишком большое удаление максимумов плотностей  $[p_j]$  от наблюдаемых отсчетов  $[y_{0j}]$ , причем последние могут рассматриваться в качестве многомерной реализации независимых в совокупности пуассоновских случайных величин.

Как мы увидим ниже, столь общее и вполне очевидное требование, которое заключается в КСИ, позволяет найти конкретные меры для существенного повышения устойчивости решений обратных задач. Покажем прежде всего, что в многомерном случае безусловная ОМП почти всегда противоречит КСИ (в разделе 4.6 будет также показано, что сама функция правдоподобия не дает исчерпывающего описания решений, удовлетворяющих КСИ).

#### 4.2. Должно ли правдоподобие быть максимальным?

Со времени введения Фишером [56] принципа максимального правдоподобия в качестве особого метода оценивания параметров (в неявной форме он использовался еще с конца XVIII столетия), ОМП стали не только наиболее популярными, но и наиболее изученными теоретически. При некоторых условиях ОМП совпадают с граничными оценками в смысле неравенства информации. Особенно сильные результаты получены в асимптотической области, когда в распоряжении исследователя имеется много независимых реализаций изучаемой случайной величины.

Следуя Фишеру, принято называть условную плотность  $f(y|S)$  вероятностью, если речь идет о зависимости этой функции от  $y$ , и *правдоподобием*, когда она рассматривается как функция второго аргумента  $S$ . Согласно (2.4) и (3.22), правдоподобие представляет собой произведение частных плотностей распределения

$$p(n, q) = \exp(-q) \frac{q^n}{n!}, \quad (2.4a)$$

а ОМП  $\hat{S}(y)$  находится максимизацией правдоподобия в области  $\{S\}$ , выделенной априорной информацией.

Рисунок 5 наглядно показывает, почему  $f(y_0|S)$  может считаться неплохой мерой близости наблюдаемых отсчетов  $[y_{0j}]$  к соответствующим средним значениям  $[q_j(S)]$ : если такая близость имеет место, то произведение  $L_0 \equiv f(y_0|S)$  значений частных плотностей вероятности, показанных на рис. 5 жирными вертикальными отрезками, не слишком мало по сравнению с величиной  $L_{\max}$ , отвечающей произведению максимальных вероятностей вблизи  $[q_j(S)]$ , условно показанных штриховыми прямыми.

Говоря более строго, при случайности изображения  $Y \sim f(y|S)$  правдоподобие  $L \equiv f(Y|S)$  само представляет собой случайную величину, — как говорят, *статистику*, — наблюдаемое значение  $L_0$  которой позволяет судить о

типичности результатов эксперимента. Понятно, что малые значения  $L_0 \ll L_{\max}$  свидетельствуют о неприемлемости оценки  $S$  ввиду слишком плохой интерпретации данных. Однако, как это обычно и принимается в статистике, слишком большая близость  $L_0$  и  $L_{\max}$  тоже недопустима: маловероятно, что при единственном эксперименте мы получим самое крайнее значение статистики  $L$ . Другими словами, "слишком хорошее" объяснение данных наблюдений противоречит заданным статистическим свойствам случайного фона и наличию фотонного шума.

Стремление ОМП  $\hat{S}$  "объяснить" буквально все детали наблюдаемого изображения, значимы они статистически или нет, и приводит к заметному отличию  $\hat{S}$  от искомой оценки. Условие неотрицательности объекта почти всегда дает расположенную на границе положительного гиперквадранта оценку  $\hat{S}_+$ , отличную от инверсного решения  $S_m \simeq \hat{S}$  (см. рис. 4), однако в типичных обратных задачах  $\hat{S}_+$  все же оказывается неустойчивой оценкой. Поэтому область  $f(y_0|S) > C_1$  с постоянной  $C_1$ , соответствующей заданному уровню значимости  $\alpha_1$ , должна быть исключена из рассмотрения, так же как и область  $f(y_0|S) < C_2$ , отвечающая недостаточно близким к  $S_0$  на уровне значимости  $\alpha_2$  пробным оценкам  $S$ . Фактически мы повторили аргументацию раздела 3 для более общего способа рассуждений, не использующего конкретного вида модели формирования данных.

Неудовлетворительность ОМП характерна для условий, когда явно ощущается недостаток информации относительно объекта; в случае же малого числа оцениваемых параметров и, особенно, выборки данных значительного объема ОМП нередко сохраняет свою привлекательность.

Итак, следует ожидать, что для одной реализации изображения мы получим выборочное значение  $\ln L_0$  вблизи максимума плотности распределения статистики  $\ln L \equiv \ln f(Y|S)$ . Считая эту плотность не слишком асимметричной (в действительности она близка к распределению  $\chi^2$ ), можно утверждать, что выборочное значение  $\ln L_0$  будет находиться вблизи среднего значения  $\langle \ln f(Y|S) \rangle$ . По этой причине естественно ввести, следуя [29], оценки среднего правдоподобия  $\bar{S}(y_0)$ , заданные условием

$$\ln f(y_0|\bar{S}) \simeq \langle \ln f(Y|\bar{S}) \rangle. \quad (4.0)$$

Они составляют в пространстве объектов слой вокруг  $\hat{S}$ , отвечающий уровню значимости  $\alpha \simeq 1/2$ . В следующих разделах мы придадим высказанным соображениям более строгий смысл.

### 4.3. Связь с теорией информации Шеннона

В теории вероятностей известны два определения понятия информации. Первое из них, введенное Эджвортом [64, 65] и Фишером [55], характеризует содержащуюся в случайной выборке информацию о неизвестных детерминированных параметрах. Второе понятие, введенное Шенноном [7, 8] в связи с нуждами теории передачи сообщений, характеризует информацию о реализации одной случайной величины, заключающуюся в реализации стохастически связанной с ней другой случайной величины. Теорией информации принято называть круг понятий, выдвинутых Шенноном. Для того чтобы не путать информацию, определенную по Фишеру  $I$  и

согласно Шеннону, будем обозначать последнюю буквой  $J$ .

Пусть  $\alpha$  — равномерно распределенная на промежутке  $[0, 1]$  случайная величина. Информация  $J$ , содержащаяся в сообщении о том, что реализация  $\alpha$  приняла значение в промежутке  $[x, x + \varepsilon]$ , равна  $-\log_2 \varepsilon$  бит. Эта величина соответствует количеству первых знаков в двоичном представлении  $\alpha$ , которые нужно сообщить для того, чтобы задать ее положение с точностью  $\varepsilon$  (см., например, [66]).

Рассмотрим теперь дискретную случайную величину  $\xi$ , которая может принимать значения  $0, 1, \dots$  с вероятностями  $p(0), p(1), \dots$  соответственно. В сумме эти вероятности составляют, конечно, 1. Разыгрывание случайной величины  $\xi$  можно представить себе как разыгрывание равномерной величины  $\alpha$  на единичном интервале, составленном из отрезков с длинами  $p(0), p(1), \dots$ . Если полученная реализация  $\alpha$  попадает на отрезок  $p(n)$ , то будем считать, что  $\xi$  приняла значение  $n$ . Как было указано выше, при этом мы получаем информацию  $J_n = -\log_2 p(n)$  относительно реализации  $\alpha$ . Это же значение характеризует сведения о сопутствующей реализации  $\xi$ . Среднее значение информации, т.е.

$$\langle J_n \rangle \equiv H(\xi) = - \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \log_2 p(k), \quad (4.1)$$

называется *энтропией* случайной величины  $\xi$  согласно Шеннону. В дальнейшем удобно перейти от двоичных логарифмов к натуральным; соответствующая единица измерения информации называется *нат* (от natural digit). Как легко видеть,  $1 \text{ нат} = \log_2 e \simeq 1,443$  бит.

Произвольное изображение  $Y$  является совокупностью независимых одномерных случайных величин  $[Y_j]$  с частными плотностями  $[f(y_j|S)]$ . Согласно сказанному, с каждой выборочной величиной  $Y_j$  можно связать количество информации

$$J(Y_j|S) = -\ln f(Y_j|S). \quad (4.2)$$

Вследствие взаимной независимости  $[Y_j]$  информация, связанная со всей выборкой  $Y$ , равна

$$J(Y|S) = \sum_{j=1}^m J(Y_j|S) = -\ln \prod_{j=1}^m f(Y_j|S) = -\ln f(Y|S). \quad (4.3)$$

Таким образом, полная информация равна логарифму функции правдоподобия, взятому с обратным знаком. Среднее значение информации есть, по определению, энтропия объекта:

$$H(S) = \langle J(Y|S) \rangle = - \sum_y f(y|S) \ln f(y|S). \quad (4.4)$$

Во избежание недоразумений отметим, что обсуждаемое здесь понятие энтропии не совпадает с таковым в методе максимума энтропии.

Теперь ясно, что аргументы в пользу некоторого среднего, а не максимального правдоподобия эквивалентны тому, что для типичной случайной реализации мы ожидаем не минимального значения информации Шеннона, а только близкого к наиболее вероятному. В частности, оценки среднего правдоподобия  $\bar{S}(y_0)$  совпа-

дают с оценками средней информации, заданными условиями

$$J(y_0|\bar{S}) = H(\bar{S}). \quad (4.5)$$

Выполнения (4.5) следует требовать лишь в пределах естественной статистической флуктуации случайной величины  $J(Y|S)$ , которая, как будет показано ниже, равна  $\sqrt{m}/2$  ( $m$  — число пикселей изображения).

Для наиболее важного на практике случая пуассоновского распределения отсчетов энтропия в одном пикселе изображения может быть представлена в виде

$$H_p(q) = q(1 - \ln q) + \int_0^1 [1 - qx - \exp(-qx)] \frac{dx}{x \ln(1-x)}, \quad (4.6)$$

где  $q(S)$  — среднее значение интенсивности (рис. 6). Суммирование вкладов вида (4.6) по всем пикселям приводит к полному значению энтропии изображения.

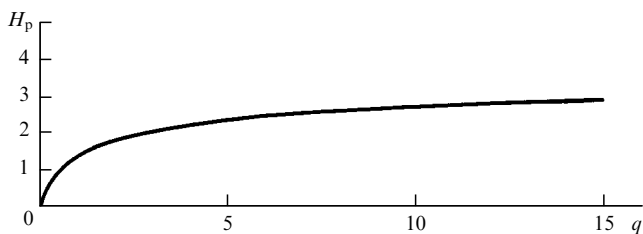


Рис. 6. Зависимость энтропии пуассоновской случайной величины от ее среднего значения

Внеинтегральный член в (4.6) дает асимптотику первого порядка при  $q \rightarrow 0$ . В противоположном случае, когда  $q \gg 1$ , мы получаем известное выражение для энтропии гауссовой случайной величины:  $H_p(q) \simeq \ln \sqrt{2\pi e q}$ . Приведем еще одну важную для приложений асимптотику дисперсии информации Шеннона в случае пуассоновской случайной величины:

$$D(J) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{4q}, \quad q \gg 1. \quad (4.7)$$

Фактически для удовлетворительного выполнения асимптотических соотношений требуется лишь  $q > 2-3$ , так что энтропия изображения протяженностью  $m$  пикселей равна  $H \simeq m \ln \sqrt{2\pi e q}$ , а стандартное отклонение информации примерно равно  $\sqrt{m}/2$ . Доказательство приведенных соотношений можно найти в [29].

Что касается функции распределения информации Шеннона, то нетрудно показать, что в том же приближении  $q_j \gg 1$  величина

$$\theta(Y|S) \equiv m + 2[J(Y|S) - H(S)] \quad (4.8)$$

подчиняется распределению  $\chi^2$  с  $m$  степенями свободы. Согласие формул (4.4) и (4.7) с этим результатом станет вполне очевидным, если учесть [61], что  $\langle \chi_m^2 \rangle = m$ ,  $D(\chi_m^2) = 2m$ .

Таким образом, при восстановлении изображений достижение области оценок средней информации обеспечивается выполнением равенства  $J \simeq H \pm \sqrt{m}/2$ . Более точная формулировка критерия прекращения итераций, опирающаяся на принятый уровень значимости, может

быть указана без труда, поскольку распределение случайной величины  $\theta(Y|S)$  известно. Ниже мы приведем аргументы в пользу точки зрения, что равенство  $J \simeq H$  должно выполняться не только для всего изображения (что достигается сравнительно быстро), но и для отдельных частей изображения с протяженностью порядка ширины ФРТ (локальный принцип средней информации).

В практической работе целесообразно сохранить в выражении  $\ln f(y|S)$  все множители, не зависящие от искомого объекта; при этом мы получаем возможность не только измерять информацию в стандартных единицах, но и сравнивать изображения между собой.

#### 4.4. Численный пример

Рассмотрим модельный объект t8 (рис. 7а) в виде гауссовой плотности со стандартным отклонением  $\sigma_{об} = 2$  пиксела и полной яркостью  $F = 10^4$  событий [29]. На рис. 7б показан результат случайного размывания объекта с гауссовой ФРТ при  $\sigma = 3$  пиксела и последующего добавления случайного пуассоновского фона со средним уровнем  $\gamma = 100$  отсчетов/пиксел (реализация t8\_13). Если мы применим для восстановления метод максимального правдоподобия при неотрицательности объекта в качестве единственной априорной информации о нем, то придем к оценке  $\hat{S}_+$ , показанной на рис. 7в. На рис. 7г и 7д приведены две глобальные оценки средней информации  $\bar{S}$ ; сопоставление их с ОМП свидетельствует о существенном повышении устойчивости решения.

На рис. 8 представлены значения информации и энтропии при восстановлении двух случайных реализаций объекта t8 методами максимального и среднего правдоподобия. В обоих случаях значения информации, вычисленные для самого объекта  $S_0$ , находятся в пределах одного стандартного отклонения от среднего значения — энтропии. При последующем восстановлении значение энтропии оценок изменяется сравнительно мало, поскольку  $H(q)$  — медленно меняющаяся функция (значение энтропии можно было бы вообще зафиксировать ее выборочной величиной). В отличие от энтропии, информация оценок изменяется заметно; от ее конечного значения и зависит результат.

#### 4.5. Расстояние Кульбака–Лейблера и структура области допустимых оценок

Использование в качестве статистики критерия информации Шеннона  $J = -\ln f(Y|S)$  приводит к вполне определенным выводам о строении ОДО, которые мы сейчас кратко и обсудим.

В рамках обычного слабого критерия значимости (Pure Significance Test [67]) рассмотрим нулевую гипотезу о том, что истинный объект  $S_0$  совпадает с близкой к нему оценкой  $S$ , т.е.

$$H_0 : S_0 = S. \quad (4.9)$$

Если в качестве статистики критерия принять  $J(Y|S)$ , то в качестве меры "расстояния" между объектом  $S_0$  и пробной оценкой  $S$  естественно выбрать усредненную по  $f(y|S_0)$  разность информации от этих двух элементов (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \rho_{KL}^2(S_0, S) &\equiv \langle J(Y_0|S) - J(Y_0|S_0) \rangle = \\ &= \sum_y f(y|S_0) \ln \frac{f(y|S_0)}{f(y|S)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

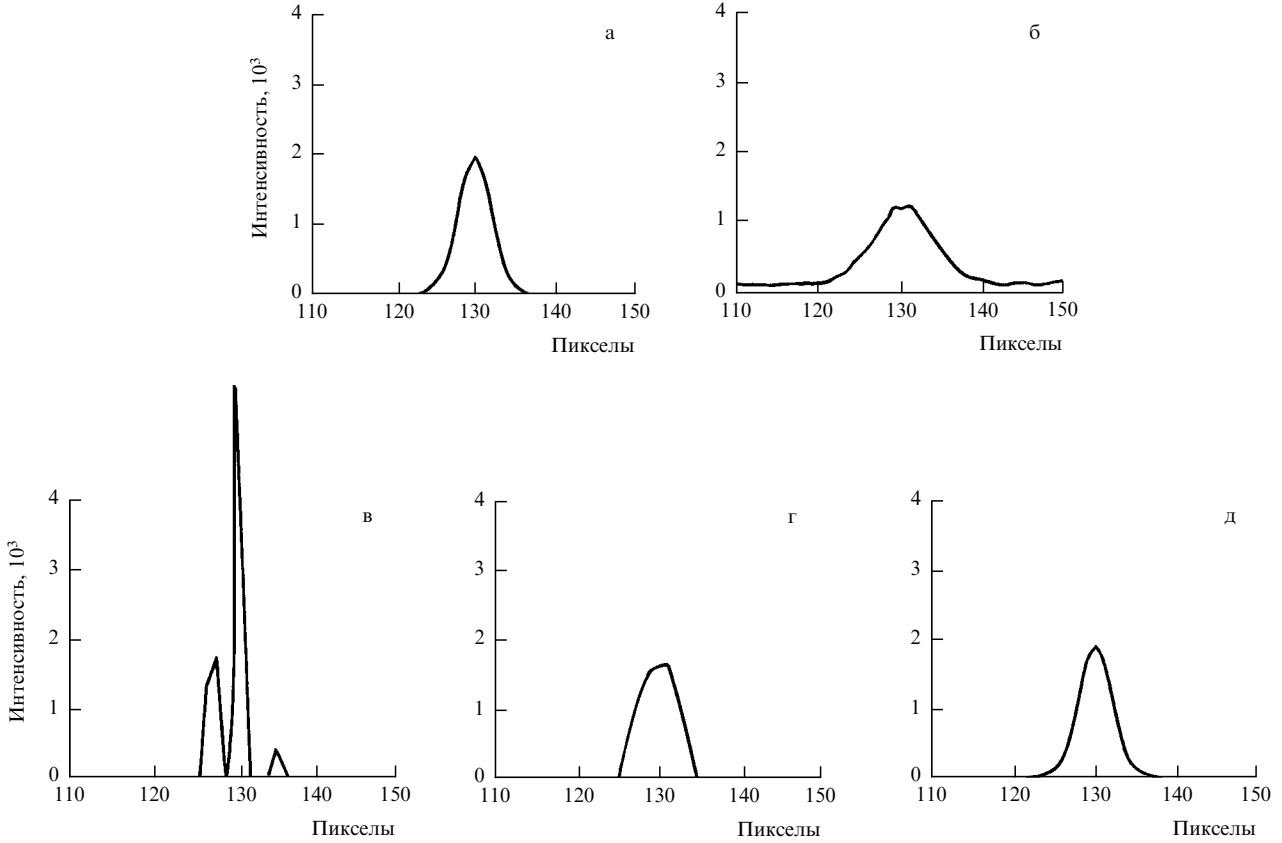


Рис. 7. Гауссов объект (а), его изображение (б), условная ОМП (в) и две оценки средней информации (г, д)

Величина  $\rho_{KL}(S_0, S)$  — введенная Кульбаком и Лейблером [68] информационная мера расстояния между распределениями  $f(y|S_0)$  и  $f(y|S)$ .

Найдем расстояние Кульбака–Лейблера для близких объектов  $S_0$  и  $S$ . Для этого разложим  $J(Y_0|S)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $S_0$ ; с точностью до членов второго порядка по  $\varepsilon \equiv S - S_0$  получаем

$$J(Y_0|S) \simeq J(Y_0|S_0) + g(Y_0|S_0)^T \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T \phi(Y_0|S_0) \varepsilon, \tag{4.11}$$

где компоненты вектора  $g(Y_0|S_0)$  и матрицы  $\phi(Y_0|S_0)$  определяются формулами

$$g_k = \left[ -\frac{\partial}{\partial S_k} \ln f(Y_0|S) \right]_{S=S_0},$$

$$\phi_{ik} = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial S_i \partial S_k} \ln f(Y_0|S) \right]_{S=S_0}, \quad i, k = 1, \dots, n. \tag{4.12}$$

При подстановке (4.11) в (4.10) следует учесть соотношения

$$\langle g(Y|S) \rangle \equiv 0, \tag{4.13}$$

$$\langle \phi(Y|S) \rangle = \langle g(Y|S) g(Y|S)^T \rangle \equiv I(S), \tag{4.14}$$

где  $I(S)$  — информационная матрица Фишера. Первое из них вытекает из условия нормировки (2.2), если продифференцировать его по  $S_k$ , а затем домножить и разделить выражение под знаком суммы на  $f(y|S)$ . Второе равенство получается после несложных преобразований для

интересующего нас случая достаточно "хорошей" плотности распределения (см., например, [43, 69]). В итоге находим

$$\rho_{KL}^2(S_0, S) \simeq \frac{1}{2} \varepsilon^T I(S_0) \varepsilon, \tag{4.15}$$

что отличается от расстояния  $\rho^2(S_0, S)$ , определенного формулой (3.20), наличием множителя 1/2 и, что действительно важно, зависимостью матрицы Фишера от искомого объекта  $S_0$ . Как легко понять, именно последнее обстоятельство отражает наличие в рассматриваемой модели фотонного шума, отсутствующего в модели детерминированного размывания изображений. Этот факт делает задачу восстановления изображений суще-

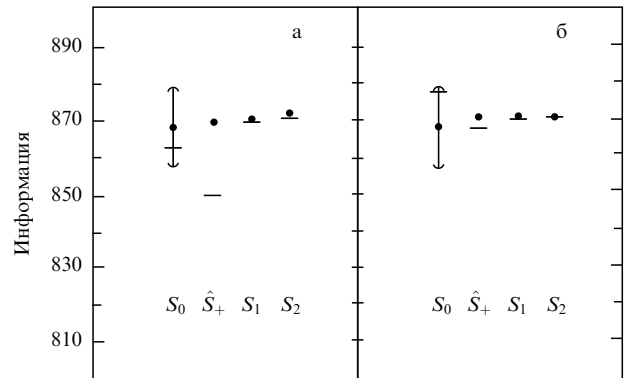


Рис. 8. Изменения информации (—) и энтропии (•) для реализаций t8\_1 (а) и t8\_13 (б), восстановленных различными методами

ственно локальной, как и должно быть на основании простых интуитивных соображений.

Задавая уровень значимости допустимых флуктуаций и соответствующее ему граничное значение расстояния Кульбака–Лейблера допустимых оценок  $S$ , мы приходим к средней ОДО в виде

$$(S - S_0)^T I(S_0)(S - S_0) \leq C. \quad (4.16)$$

Это неравенство, как и (3.21), задает в пространстве объектов эллипсоид с центром в  $S_0$ .

Поскольку искомый объект  $S_0$  остается неизвестным, неравенство (4.16) представляет, главным образом, теоретический интерес. На практике мы опираемся на сведения о *выборочной* ОДО, соответствующей наблюдаемому изображению  $y_0$ . Нетрудно показать, что выборочная ОДО определяется в данном случае неравенствами, аналогичными (3.18):

$$A \leq (S - \hat{S})^T \phi(y_0, \hat{S})(S - \hat{S}) \leq B, \quad (4.17)$$

где  $\hat{S}(y_0)$  — оценка, отвечающая безусловному максимуму функции правдоподобия (см. рис. 4), а постоянные  $A$  и  $B$  задаются уровнями значимости допустимых флуктуаций. При выводе (4.17) нужно исходить из определения расстояния между  $\hat{S}$  и  $S$  при фиксированном изображении  $y_0$  согласно формуле:

$$\rho^2(\hat{S}, S|y_0) \equiv J(y_0|S) - J(y_0|\hat{S}) = \ln \frac{f(y_0|\hat{S})}{f(y_0|S)}, \quad (4.18)$$

произвести разложение типа (4.11) в окрестности  $\hat{S}(y_0)$  и учесть, что в точке максимума  $g(y|\hat{S}) = 0$ . Матрицу  $\phi[y_0, \hat{S}(y_0)]$  с элементами

$$\phi_{ik}[y_0, \hat{S}(y_0)] = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial S_i \partial S_k} \ln f(y_0|S) \right]_{S=\hat{S}} \quad (4.19)$$

можно рассматривать как выборочную матрицу Фишера для данного изображения.

В случае пуассоновской модели формирования изображений, заданной плотностью (2.4), матрица Фишера имеет вид [27]

$$I_{ik}(S) = \sum_{j=1}^m \frac{h_{ji} h_{jk}}{q_j(S)}, \quad I(S) = H^T Q(S)^{-1} H, \quad (4.20)$$

где

$$Q(S) \equiv \text{diag} [q_1(S), \dots, q_m(S)] \quad (4.21)$$

— квадратная матрица, на главной диагонали которой расположены  $q_j(S)$ , а остальные элементы равны нулю. Как уже подчеркивалось выше, специфика обратных задач заключается в том, что далеким объектам соответствуют мало отличающиеся изображения. По этой причине мы можем с приемлемой точностью заменить в (4.20) средние значения  $q_j(S_0)$  реально наблюдаемыми отсчетами  $y_{0j}$ , так что

$$I_{ik}(S_0) \simeq \sum_{j=1}^m \frac{h_{ji} h_{jk}}{y_{0j}}. \quad (4.22)$$

Поскольку ОМП  $\hat{S}(Y_0)$  является в среднем допустимой оценкой, исходя из (4.16) мы можем ожидать, что  $\hat{S}(Y_0)$  распределена приблизительно нормально с дисперсионной матрицей  $I^{-1}(S_0)$ . В самом деле, заменим

приближенно в слагаемом второго порядка разложения (4.11) случайную матрицу  $\phi(Y_0|S_0)$  ее средним значением  $I(S_0)$  и продифференцируем полученное равенство по  $\varepsilon \equiv S - S_0$ . Учитывая определение ОМП и соотношение

$$\frac{\partial}{\partial a} a^T A a = 2 A a, \quad (4.22a)$$

справедливое для произвольного вектора  $a$  и симметричной матрицы  $A$  [54], находим

$$\hat{S}(Y_0) - S_0 \simeq -I^{-1}(S_0) g(Y_0|S_0). \quad (4.23)$$

Из (4.14) и (4.23) следует

$$D[\hat{S}(Y_0)] = \langle [\hat{S}(Y_0) - S_0][\hat{S}(Y_0) - S_0]^T \rangle = I^{-1}(S_0). \quad (4.24)$$

Последнее соотношение повторяет (3.12) для более общей модели формирования данных.

#### 4.6. Недостаточность функции правдоподобия

Как и следовало ожидать, при использовании гауссовой аппроксимации функции правдоподобия мы пришли к ОДО, которая локально имеет ту же форму эллипсоидального слоя, что и при использовании невязки в качестве меры расстояния между оценками (раздел 3). Обращаться к высшим порядкам разложения функции правдоподобия не имеет смысла, так как оба вида метрики — и (3.16), и (4.18) — недостаточны для полного описания возможных различий между случайными изображениями, которые порождаются сравниваемыми объектами.

Предположим, например, что исходный объект  $S_0$  представляет собой протяженный источник с плоским распределением яркости, а среднее значение фона не меняется в пределах формата. Если в случайно размытом изображении  $y_0$  переместить в соседние пиксели группу наибольших отсчетов со всего поля зрения, то полученная картина  $y'_0$  будет иметь ту же вероятность, что и действительное изображение  $y_0$ . Ясно, однако, что эквивалентные с точки зрения правдоподобия изображения  $y_0$  и  $y'_0$  нельзя считать действительно эквивалентными, поскольку локальное возрастание яркости статистически значимого размера в  $y'_0$  приходится интерпретировать соответствующим пиком в распределении яркости объекта.

Таким образом, вместо функции правдоподобия (или наряду с ней) при решении обратных задач желательно опираться на какую-либо некоммутативную статистику, принимающую во внимание плавные систематические отклонения сравниваемых изображений. Аналогичная потребность давно ощущается в классическом анализе данных [69], но используемые при этом статистики большей частью имеют искусственный вид. Эта же проблема возникает в стохастической динамике и при изучении качества датчиков псевдослучайных чисел.

Естественного выбора статистики критерия можно было бы добиться, противопоставив нулевой гипотезе (4.9) достаточно мощную альтернативу, однако при этом будет внесена субъективность, обусловленная выбором альтернативы. По этой причине при сопоставлении изображений мы используем пока ряд известных статистических критериев типа перечисленных в [70], которые основаны на изучении выборочного распределения длин серий, спектра мощности, равномерности одно- и двумерной выборочных плотностей распределения специ-

ально преобразованных отсчетов и пр. В совокупности эти тесты проверяют целый ряд альтернатив, не конкретизируя их явно. Практика показывает, что соответствующее сжатие ОДО вполне заметно, особенно при восстановлении объектов с интенсивным высокочастотным "хвостом" в спектре мощности, т.е. с резкими деталями в распределении яркости.

Здесь нецелесообразно входить в подробное рассмотрение соответствующих технически довольно громоздких вопросов [29, 31], тем более, что пока не найдено простой и эффективной статистики, естественно обобщающей правдоподобие. По сути дела сейчас используется некоторая частная реализация КСИ, включающая набор из нескольких взаимно дополняющих друг друга тестов. Вопрос о существовании единственной *генеральной статистики*, позволяющей наиболее эффективным образом проверить неслучайность данной конечной последовательности чисел, остается открытым.

Весьма привлекательным в этом плане представляется понятие *сложности* (энтропии)  $K_v$  последовательности длины  $v$ , введенное Колмогоровым [71, 72] (см. также [73–77]). Фактически критерий случайности изображения требует максимальной величины колмогоровской сложности изображения, порожденного пробным объектом (после стандартного "равномеризирующего" преобразования данных). Стало быть, при выборе  $v$  фрагментов изображения ОДО задается условием  $K_v(y_0|S) \simeq v$  с обычной оговоркой относительно принятого уровня значимости. Теоретические и модельные исследования в этом направлении имели бы большое значение.

#### 4.7. Локальность обратной задачи

Поскольку полная ширина ФРТ  $W \simeq 2\Delta$  конечна, "объектно-независимыми" фрагментами изображения можно считать его участки протяженностью порядка  $W$  пикселей. Если на каждом участке длиной  $\Delta$  расположить несколько отсчетов (примерно 2; конкретное значение зависит от вида ФРТ), то известная *теорема отсчетов* гарантирует сохранение всей информации относительно объекта, содержащейся в изображении. Вопросы, связанные с дискретизацией изображения, мы рассмотрим подробнее в разделе 7, а пока достаточно предположить, что минимальные фрагменты изображения выбраны так, что они обеспечивают выполнение условий теоремы отсчетов.

Очевидно, что предыдущий анализ можно в равной степени отнести как ко всему изображению, так и к отдельным его фрагментам. Так, мы вправе добиваться статистической близости информации  $J(y_0|S)$  и энтропии  $H(S)$  в отдельных областях изображения. Однако статистическая значимость локальных отклонений зависит от протяженности всего изображения, а потому и качество восстановления картины также определяется ее протяженностью.

В самом деле, предположим, что в поле зрения находится размытое изображение тесной двойной звезды. Если оно охватывает существенную часть всего формата изображения, то наблюдаемое отклонение от белого шума имеет высокую значимость, и требуется значительная работа по восстановлению, которая может во многом прояснить двойственность объекта. Допустим теперь, что поле зрения гораздо больше изображения звезды. Тогда в пределах всего формата воз-

можны флуктуации, размеры и амплитуда которых сравнимы с изображением звезды, и адекватный статистический анализ может вообще не потребовать восстановления изображения. По существу эти же аргументы издавна используются в технике [78] и астрономии, например, при оценивании предельной звездной величины для данных условий наблюдения.

Сказанное подразумевает, что в случае восстановления изображения большого формата следует задать общий уровень значимости допустимого отклонения, а затем добиваться того, чтобы функция распределения локальных отклонений находилась в согласии с заданным уровнем значимости. Вместе с тем, часто наблюдатель обладает априорной информацией о месте расположения отдельных объектов в пределах поля зрения, или интересуется конкретной небольшой областью. Тогда уровень значимости следует задать локально, и ожидаемое качество восстановления будет выше. Алгоритмическая реализация этого подхода обсуждается в [31].

## 5. Информационные ограничения

Основная причина неустойчивости решений обратных задач стала ясна достаточно давно (см., например, [14, 51, 79]): исследователь просто не обладает нужной информацией для того, чтобы выиснить вид оригинала с желаемой точностью. Однако правильного диагноза еще недостаточно для эффективного лечения — требуется и количественное описание ситуации. Отчасти оно может быть получено в рамках теории информации Шеннона, соответствующие выводы которой рассматриваются в разделах 5.2–5.4. Однако сначала нам необходимо более подробно обсудить следствия из неравенства для информации Фишера, которое было бегло затронуто в разделе 3.5.

### 5.1. Общий вид неравенства информации

Соотношение (3.26) относится к произвольным *несмещенным* оценкам, т.е. оценкам, которые в среднем совпадают с оригиналом. Не оспаривая важности несмещенных оценок, мы привели в разделе 3.5 аргументы в пользу той точки зрения, что в задачах многомерного оценивания с помощью подходящего смещения можно добиться меньшей величины *рассеивания* оценки (2.7), т.е. выбранной меры качества решения обратной задачи. Рассмотрим поэтому общий вид неравенства информации для произвольной оценки  $S^*(Y)$  из класса  $K_b$  с некоторым вектором смещения  $b(S)$ , заданным формулой (2.5). В качестве оригинала мы рассматриваем сейчас произвольный элемент  $S$  пространства объектов.

Пусть  $f(y|S)$  — зависящая от  $n$  неизвестных параметров  $S_1, \dots, S_n$  плотность распределения  $m$ -мерного вектора данных  $Y$ , а

$$I_{ik}(S) \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial S_i} \ln f(Y|S) \frac{\partial}{\partial S_k} \ln f(Y|S) \right\rangle \quad (5.1)$$

— элементы симметричной матрицы Фишера  $I = [I_{ik}]$ ;  $i, k = 1, \dots, n$ . В интересующих нас случаях плотность  $f$  удовлетворяет условиям регулярности [43], позволяющим преобразовать исходное определение (5.1) к знаменитому по (3.25) виду

$$I_{ik}(S) = \left\langle -\frac{\partial^2}{\partial S_i \partial S_k} \ln f(Y|S) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Пусть далее  $B(S)$  — квадратная матрица с компонентами

$$B_{ik}(S) \equiv \frac{\partial}{\partial S_k} b_i(S), \quad (5.3)$$

матрица рассеивания  $\Omega(S)$  оценки  $S^*$  определена соотношением (2.6) и матрица  $\omega$  размером  $n \times n$  задана следующим образом:

$$\omega(S) \equiv [E_n + B(S)] I^{-1}(S) [E_n + B(S)]^T + b(S)b(S)^T. \quad (5.4)$$

Тогда для всякой принадлежащей классу  $K_b$  оценки  $S^*$  объекта  $S$  справедливо *неравенство информации*:

$$\Omega(S) \geq \omega(S), \quad (5.5)$$

где матричное неравенство эквивалентно неотрицательной определенности матрицы  $\Omega - \omega$ . Геометрический смысл неравенства (5.5) состоит в том, что  $n$ -мерный эллипсоид рассеивания любой оценки ни в одном направлении не проникает внутрь эллипсоида, задаваемого матрицей  $\omega$ . Для несмещенных оценок  $b(S) \equiv 0$ ,  $\omega(S) = I^{-1}(S)$ , а  $\Omega(S)$  совпадает с дисперсионной матрицей  $D[S^*]$ , так что (5.5) принимает вид (3.26). Неравенство информации является следствием известного *неравенства Коши–Буняковского–Шварца*, записанного в матричной форме [43].

Для среднеквадратического рассеивания отдельных компонент оценки  $S_k^*$  около истинных значений  $S_k$  имеем из (5.5)

$$\Omega_{kk}(S) = \langle (S_k^* - S_k)^2 \rangle \geq \omega_{kk}(S). \quad (5.6)$$

Как уже говорилось, задача исследователя — найти такую оценку  $S^*$ , которая имеет по возможности малые значения диагональных элементов  $\Omega_{kk}$  матрицы рассеивания. Абсолютные значения недиагональных элементов этой матрицы характеризуют степень линейной зависимости между компонентами оценки; очевидно, что при сильной зависимости информативность отдельных компонент снижается (см. раздел 6).

Достижение нижней границы неравенства информации возможно в том и только в том случае, когда плотность распределения  $f(y|S)$  принадлежит к так называемому *экспоненциальному семейству*:

$$\ln f(y|S) = \sum_{i=1}^n S_i^*(y) \varphi_i(S) + \psi(S) + \chi(y), \quad (5.7)$$

где  $\psi(S)$  и  $\chi(y)$  — некоторые скалярные функции, а вектор  $\varphi(S)$  имеет матрицу производных вида

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S_k} \varphi_i(S) \right] = I(S) [E_n + B(S)]^{-1}. \quad (5.8)$$

Если представление (5.7) справедливо, то  $S^*(Y)$  — единственная граничная и, следовательно, эффективная оценка объекта  $S$ .

Для пуассоновской модели из (2.4) следует

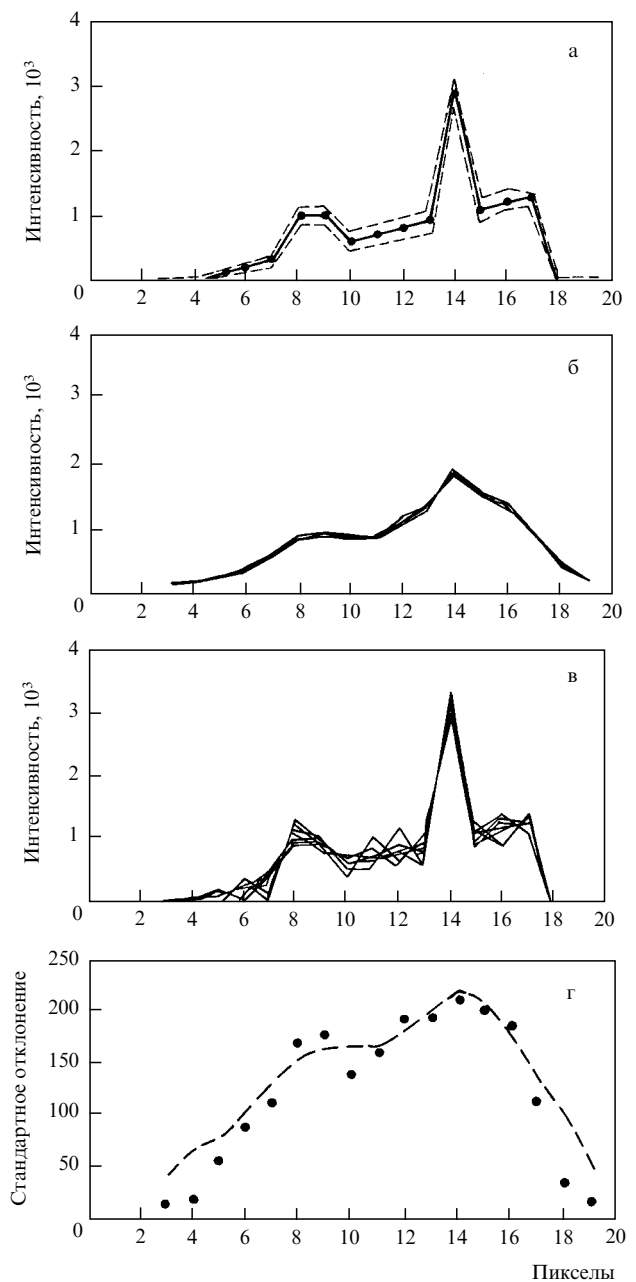
$$\ln f(y|S) = \sum_{j=1}^m y_j \ln q_j(S) - \sum_{j=1}^m q_j(S) - \sum_{j=1}^m \ln y_j!, \quad (5.9)$$

и в общем случае, когда  $m \neq n$ , первое слагаемое в (5.9) не обладает требуемой формой для отнесения плотности к экспоненциальному семейству. Это означает, что для

пуассоновской модели формирования изображений не существует граничной оценки.

Сам по себе этот факт, обусловленный только выбором модели формирования изображения, не вносит принципиальных трудностей в задачу: как мы подчеркивали в разделе 2, она заключается в нахождении *эффективной оценки* независимо от того, существует ли граничная оценка. Кроме того, с практической точки зрения эффективная оценка может быть близка к границе, задаваемой неравенством информации.

На рис. 9 приведены реализации Монте-Карло для модельного объекта Igon. Протяженности объекта и его изображения составляют соответственно  $n = 17$  и  $m = 21$  пикселей, яркость объекта  $F = 12200$  событий. В соответ-



**Рис. 9.** Объект Igon (а, сплошная линия), примеры его размытых (б) и восстановленных (в) изображений. Точки на фрагменте а — средняя оценка объекта, штриховые линии — коридор ошибок индивидуальной оценки ( $\pm\sigma$ ). Точки и штриховая линия на фрагменте г отвечают реальной и теоретически предельной точностям восстановления



ствии с распределением Пуассона были реализованы 100 случайно размытых изображений объекта, к каждому из которых был затем добавлен равномерный пуассоновский фон с общей средней яркостью 2100 событий. Каждое из полученных изображений восстанавливалось методом максимума правдоподобия при условии неотрицательности объекта в качестве единственной априорной информации о нем (в данном случае неустойчивость ОМП не проявляется по причинам, которые будут обсуждаться в разделе 6).

Как и во всяком методе решения обратной задачи, результаты восстановления отдельных реализаций изображения отличаются друг от друга; мы только хотели бы, чтобы полученные оценки объекта были как можно меньше систематически смещены относительно истинного объекта и имели как можно меньшее рассеивание около него. Смещение (рис. 9а) оказывается в данном случае намного меньшим стандартного отклонения ансамбля оценок. На рис. 9г сопоставляются реальное рассеивание оценок яркости в отдельных пикселах и минимальное рассеивание, диктуемое неравенством информации (мы полагали в первом приближении истинную оценку несмещенной). Как видно, для рассматриваемых условий коридор ошибок восстановления методом максимума правдоподобия близок к теоретически наиболее узкому такому коридору. Таким образом, в данном случае в качестве эффективной оценки можно принять условную ОМП  $\hat{S}_+$ .

На практике ситуация часто бывает сложнее из-за более резко выраженной неустойчивости, которая проявляется в чрезвычайно сильной вытянутости ОДО. Как мы говорили, последнее обстоятельство связано с малостью некоторых собственных значений матрицы Фишера  $I(S_0)$ , так что соответствующие диагональные элементы обратной матрицы  $I^{-1}$  в неравенстве информации очень велики. Если нас интересуют в этих условиях лишь несмещенные оценки объекта, то неравенство информации устанавливает нижнюю границу их дисперсии на приемлемо высоком уровне. Единственный способ уменьшить рассеивание — обратиться к оценкам из класса  $K_b$  с таким смещением  $b(S)$ , что множители  $[E_n + B(S)]$  в (5.4) компенсируют  $I^{-1}$ . Это еще не гарантирует, что эффективная оценка действительно приблизится к теоретической нижней границе, но хотя бы оставляет возможность получить практически приемлемое решение. Трудность, однако, состоит в том, что исследователь, изучающий конкретное изображение, не может указать наперед нужный ему класс смещения.

Пример из раздела 2 со стоящими часами достаточно ясно показывает, что нельзя обойтись без задания определенного класса, в котором разыскиваются оценки объекта. Вместе с тем, сказанное выше заставляет искать возможности более продуктивно указать нетривиальный такой класс, не обращаясь к фиксированному классу смещения оценок. Связанные с заданием такого класса вопросы нуждаются в дальнейшем изучении.

## 5.2. Оптимальный фильтр Колмогорова–Винера

Введенное Шенноном [7, 8] понятие информации относится к двум реализациям связанных между собой случайных величин или случайных процессов. Поскольку в классическом подходе к обратным задачам объект  $S_0$  не является элементом вероятностного ансамбля, мы не можем непосредственно найти инфор-

мацию Шеннона об  $S_0$ , содержащуюся в случайной реализации его изображения  $y_0$ . По этой причине и конкретный метод восстановления изображения не может опираться на какое-либо представление информации Шеннона. Однако при обсуждении *типичной* ситуации, возникающей при решении обратных задач некоторого класса, представляется вполне уместным ввести соответствующий вероятностный ансамбль и анализировать решение в рамках байесовского подхода. Следствия этой точки зрения обсуждаются в разделах 5.2–5.4.

В качестве вероятностного ансамбля объектов (*сигналов*, по принятой в радиофизике терминологии), свойства которого предполагаются известными исследователю, рассмотрим, как обычно, гауссов стационарный процесс  $s(x)$  на бесконечно большом интервале со спектральной плотностью  $g_s(f)$ , где  $f$  — пространственная частота. Аддитивный фон  $\xi(x)$  принадлежит аналогичному ансамблю шумов со спектральной плотностью  $g_\xi(f)$ . Пренебрежем фотонным шумом и допустим для упрощения выкладок, что средние значения сигнала и фона равны нулю, а ФРТ зависит только от разности координат (т.е., как говорят, *пространственно-инвариантна*). Тогда изображение

$$y(x) = \int h(x - x') s(x') dx' + \xi(x) \quad (5.10)$$

также принадлежит ансамблю гауссовых стационарных случайных функций. Здесь и ниже бесконечные пределы интегрирования не указываются.

Как уже говорилось во Введении, трудность обращения (5.10) связана с тем обстоятельством, что конкретная реализация аддитивного шума неизвестна. Используем прописные буквы для обозначения трансформант Фурье  $\mathcal{F}$  произвольных функций, так что, например,  $\mathcal{F}[s(x)] \equiv S(f)$ . Тогда модель (5.10) в терминах преобразования Фурье может быть записана следующим образом:

$$Y(f) = H(f) S(f) + \Xi(f), \quad (5.11)$$

где  $H(f) \equiv \mathcal{F}[h(x)]$  — *оптическая передаточная функция* (ОПФ). Всякая оптическая система имеет граничную частоту  $f_c$ , выше которой ОПФ равна тождественно нулю [80]. Это значит, что детали картины с размерами, меньшими  $\simeq f_c^{-1}$ , не передаются с помощью электромагнитного излучения — они, как говорят, "срезаются" системой формирования изображения. В противоположность этому, спектр мощности шума  $g_\xi(f)$  обычно простирается далеко за частоту среза в области высоких частот. Как видно из (5.11), в этих условиях изображение содержит очень мало информации о высокочастотном "хвосте" сигнала  $S(f)$ , который просто "тонет" в шуме. Другими словами, вид  $S(f)$  в области частот вблизи  $f_c$  можно было бы варьировать в широких пределах, практически не меняя изображения. Таким образом, неустойчивость обратного решения чаще всего связана с неконтролируемостью в нем высокочастотных колебаний распределения интенсивности.

Если в качестве близкой к оригиналу оценки рассмотреть решение (5.10) при  $\xi(x) \equiv 0$ , то, как отмечалось в разделе 3, мы получим *инверсную оценку*  $s_i(x) = \mathcal{F}^{-1}[R_i(f) Y(f)]$ , где введен *инверсный фильтр*

$$R_i(f) \equiv [H(f)]^{-1}. \quad (5.12)$$

Поскольку при нулевом шуме все флуктуации изображения приписываются объекту, трудно ожидать высокого качества инверсного решения. И действительно, вследствие малости  $|H(f)|$  на высоких частотах фильтр (5.12) неоправданно усиливает амплитуды случайных флуктуаций, неизбежно присутствующих в изображении.

Задача фильтрации шума и одновременной деконволюции сигнала ставится согласно Колмогорову [11] и Винеру [12] следующим образом. Требуется найти такой *линейный* фильтр  $r_w(x)$ , применение которого к экспериментальным данным в форме

$$s_w(x) = \int r_w(x - x') y(x') dx' \quad (5.13)$$

дает оценку сигнала  $s_w(x)$ , наиболее близкую к сигналу  $s(x)$  в смысле среднеквадратического отклонения:

$$e_w^2 \equiv \langle [s_w(x) - s(x)]^2 \rangle = \min. \quad (5.14)$$

В рассматриваемом случае задача легко решается (см., например, [81]). Оказывается, *частотная характеристика* оптимального *фильтра Винера*  $\mathcal{F}[r_w(x)] \equiv R_w(f)$  имеет вид

$$R_w(f) = \frac{H(-f)}{|H(f)|^2 + g_\xi(f)/g_s(f)} \equiv \Phi_w(f) R_i(f), \quad (5.15)$$

где введен фактор

$$\Phi_w(f) = \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + g_\xi(f)/g_s(f)}. \quad (5.16)$$

Именно быстрое убывание  $\Phi_w(f)$  на высоких частотах препятствует усилению осцилляций, характерных для инверсной фильтрации. Подчеркнем, что появление фактора  $\Phi_w(f)$  обусловлено имеющейся априорной информацией о свойствах ансамблей, к которым принадлежит сигнал и шум.

Как нетрудно показать, если использовать в (5.13) вместо винеровского произвольный линейный фильтр  $r(x)$ , то спектр мощности полученного решения  $s_r(x)$  будет равен

$$g_r(f) = |R(f)|^2 \left[ |H(f)|^2 g_s(f) + g_\xi(f) \right], \quad (5.17)$$

а дисперсия  $s_r(x)$ , как обычно, равна интегралу от этого выражения по всем частотам. Подставляя сюда (5.15), получаем спектр мощности оптимальной оценки:

$$g_w(f) = \Phi_w(f) g_s(f). \quad (5.18)$$

Поскольку  $\Phi_w(f) \leq 1$ , дисперсия винеровского решения меньше истинной дисперсии сигнала

$$\sigma_s^2 = \int g_s(f) df, \quad (5.18a)$$

т.е. оптимальный фильтр сильно сглаживает оценку. Разница дисперсий  $e_w^2 \equiv \sigma_s^2 - \sigma_w^2$  равна среднеквадратической ошибке при использовании фильтра Винера. Мы имеем

$$e_w^2 = \int [1 - \Phi_w(f)] g_s(f) df = \int \frac{g_\xi(f)}{|H(f)|^2 + g_\xi(f)/g_s(f)} df. \quad (5.19)$$

Знание спектров мощности сигнала и шума есть та цена, которую приходится платить в рассматриваемой версии байесовского подхода за получение устойчивой оценки объекта и ее ошибки. Как видно из (5.15), устойчивость обусловлена присутствием в знаменателе отношения  $g_\xi(f)/g_s(f)$ , которое не позволяет оптимальному фильтру приблизиться на высоких частотах к резко возрастающему инверсному фильтру  $R_i(f)$ . Если вычисление ошибки фильтрации не является обязательным, то достаточно знать только отношение спектральных плотностей шума и сигнала, а не каждую из этих функций в отдельности. В методе Филлипса [14] и Тихонова [17, 18] предполагается, что сигнал и шум принадлежат гауссовым ансамблям с пропорциональными спектральными плотностями, так что  $g_\xi(f)/g_s(f) \equiv \mu = \text{const}$ . Неизвестный параметр  $\mu$ , называемый обычно *параметром регуляризации*, подбирается так, чтобы полученное решение порождало сглаженное изображение, согласующееся в смысле среднеквадратического отклонения с данными наблюдений.

Выражение (5.15) для фильтра Винера нетрудно найти и путем непосредственной максимизации апостериорной плотности вероятности в рамках стандартного байесовского способа рассуждений.

Вновь обращаясь к (5.17), заметим, что требование  $g_r(f) = g_s(f)$ , т.е. равенства спектров мощности сигнала и его линейной оценки, приводит к впервые описанному Коулом [82] *гомоморфному фильтру* с частотной характеристикой

$$|R_h(f)| = \left[ |H(f)|^2 + \frac{g_\xi(f)}{g_s(f)} \right]^{-1/2}, \quad (5.20)$$

т.е.  $\Phi_h(f) = \sqrt{\Phi_w(f)}$ . Этот фильтр используют в тех случаях, когда требуется лучшее восстановление высоких пространственных частот, чем это допускается фильтром Винера.

### 5.3. Информация об оригинале для гауссовых ансамблей

Теория информации Шеннона позволяет по-новому взглянуть на основные понятия, используемые при построении оптимального фильтра.

Согласно Пинскеру [83], средняя информация о реализации гауссова процесса  $s(x)$  единичной длины, содержащаяся в единичном же отрезке реализации стационарно связанного с ним гауссова процесса  $y(x)$ , равна

$$J(y, s) = J(s, y) = -\frac{1}{2} \int \ln \left[ 1 - \frac{|g_{ys}(f)|^2}{g_y(f)g_s(f)} \right] df, \quad (5.21)$$

где  $g_{ys}(f)$  — взаимная спектральная плотность процессов, а  $g_y(f)$  и  $g_s(f)$  — их частные спектральные плотности. Здесь и ниже используются натуральные логарифмы, так что информация измеряется в единицах нат/см. Как известно, для модели (5.10) упомянутые спектральные плотности имеют вид

$$\begin{aligned} g_y(f) &= |H(f)|^2 g_s(f) + g_\xi(f), \\ g_{ys}(f) &= H(f) g_s(f). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Подставляя (5.22) в (5.21), мы приходим к выражению

$$J(y, s) = \frac{1}{2} \int \ln \left[ 1 + |H(f)|^2 \frac{g_s(f)}{g_\xi(f)} \right] df, \quad (5.23)$$

полученному Фелжеттом и Линфутом [84] при анализе оптических изображений.

Учтем еще то обстоятельство, что всякая оптическая система имеет граничную частоту  $f_c$ , выше которой ОПФ тождественно равна нулю [80]. Выбирая в качестве характерной протяженности картины ширину ФРТ  $\Delta \equiv f_c^{-1}$ , получаем для средней взаимной информации участков сигнала и изображения длины  $\Delta$  следующее выражение:

$$J_\Delta(y, s) = \frac{1}{2} \int_{-f_c}^{f_c} \ln \left[ 1 + |H(f)|^2 \frac{g_s(f)}{g_\xi(f)} \right] \frac{df}{f_c}. \quad (5.24)$$

Обращаясь к общей формуле (5.21), нетрудно получить и аналогичное (5.23) выражение для средней взаимной информации между изображением и фоном:

$$J(y, \xi) = \frac{1}{2} \int \ln \left[ 1 + \frac{g_\xi(f)}{|H(f)|^2 g_s(f)} \right] df. \quad (5.25)$$

Для реальных систем эта информация бесконечно велика. Если ограничиться диапазоном пространственных частот  $|f| \leq f_c$  и участками изображения и фона шириной  $\Delta$ , то

$$J_\Delta(y, \xi) = \frac{1}{2} \int_{-f_c}^{f_c} \ln \left[ 1 + \frac{g_\xi(f)}{|H(f)|^2 g_s(f)} \right] \frac{df}{f_c}. \quad (5.26)$$

Согласно (5.23) взаимная информация участков изображения и объекта представляется в виде интеграла по пространственной частоте от некоторой функции  $J_f(y, s)$ , которую можно трактовать как соответствующую *спектральную плотность информации*. Весьма показательно, что в типичных условиях функция  $J_f(y, s)$  быстро убывает с ростом частоты. Напротив, аналогичная спектральная плотность информации между изображением и шумом  $J_f(y, \xi)$  в (5.25) быстро растет с увеличением частоты, так что существует зависящее от отношения сигнала к шуму критическое значение частоты  $f_*$ , выше которого информация о сигнале "тонет" в не представляющей интереса информации о фоне. Именно по этой причине трудно оценить реальность высокочастотных осцилляций в распределении яркости объекта, которые столь характерны для явления неустойчивости.

Приведенные выше выражения недостаточны для дальнейшего анализа, поскольку они позволяют найти взаимную информацию лишь между конечными участками изображения и сигнала, в то время как нам нужно оценить значения яркости объекта в отдельных точках. Требуется ввести понятие *средней информации о частном значении сигнала  $s(x)$ , содержащейся во всем изображении  $y(x)$* . Обозначим эту величину через  $J[y, s(x)]$ . В модели (5.10) она может быть найдена следующим образом.

Пусть  $y(x)$  — произвольный гауссов стационарный процесс на, может быть, бесконечном интервале,  $\zeta$  — некоторая связанная с процессом  $y(x)$  гауссова случайная величина с дисперсией  $\sigma_\zeta^2$ , а  $\varepsilon_{\min}^2$  — наименьшая средне-

квадратичная ошибка линейной аппроксимации  $\zeta$  посредством процесса  $y(x)$ . Тогда, как показали Гельфанд и Яглом [85], средняя взаимная информация между  $\zeta$  и процессом  $y(x)$  равна

$$J(y, \zeta) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_\zeta^2}{\varepsilon_{\min}^2} \right). \quad (5.27)$$

Применим этот общий результат к модели (5.10). Рассмотрим в качестве процесса  $y(x)$  изображение, а в качестве  $\zeta$  — значение сигнала в произвольной точке  $s(x)$ . При этом  $\sigma_\zeta^2 = \sigma_s^2$ , а минимальная ошибка линейной аппроксимации достигается на фильтре Колмогорова–Винера и равна  $\varepsilon_W^2$ . В результате информация о частном значении объекта, содержащаяся в его размытом и зашумленном изображении, представляется в виде

$$J(y, s(x)) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_s^2}{\varepsilon_W^2} \right), \quad (5.28)$$

где  $\sigma_s^2 = \int g_s(f) df$ , а  $\varepsilon_W^2$  задана формулой (5.19). Нетрудно показать, что величина  $J(y, s(x))$  неотрицательна.

Можно дать более наглядное представление информации  $J(y, s(x))$ , если приравнять ее известному выражению  $-(1/2) \ln(1 - \rho^2)$  для средней взаимной информации между двумя гауссовыми случайными величинами с коэффициентом корреляции  $\rho$ . Следующий из этого определения *коэффициент корреляции  $\rho(y, s(x))$  между стационарным гауссовым случайным процессом  $y$  и частным значением  $s(x)$  другого аналогичного процесса* представляется с помощью (5.19) и (5.28) в виде

$$\rho^2(y, s(x)) = 1 - \int \frac{g_s(f) df}{1 + |H(f)|^2 g_s(f)/g_\xi(f)} \times \left[ \int g_s(f) df \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

Введенное выше понятие средней информации о частном значении оригинала, содержащейся в его размытом изображении, позволяет дать новую интерпретацию оптимального фильтра Колмогорова–Винера. Поставим перед собой задачу найти такой линейный фильтр типа (5.13) с ядром  $r(x - x')$ , чтобы полученная с его помощью оценка объекта  $s_r(x)$  имела ту же информацию о частном значении оригинала  $s(x)$ , что и все изображение  $y$ , т.е. чтобы выполнялось равенство

$$J(s_r(x), s(x)) = J(y, s(x)). \quad (5.30)$$

Оказывается [86], искомый фильтр совпадает с фильтром Колмогорова–Винера, причем это условие является необходимым и достаточным. Таким образом, оптимальный фильтр "собирает" в точечную оценку всю имеющуюся в изображении информацию о соответствующем значении оригинала.

#### 5.4. Численный пример

Проиллюстрируем найденные выше соотношения достаточно типичным примером, когда корреляционная функция сигнала имеет вид экспоненты, так что соответствующая спектральная плотность равна

$$g_s(f) = \frac{g_s(0)}{1 + (f/f_s)^2}, \quad g_s(0) = \frac{\sigma_s^2}{\pi f_s}, \quad (5.31)$$

где  $f_s$  — характерная частота сигнала. Пусть фон представляет собой белый шум, т.е.  $g_\xi(f) = \text{const}$ , а ФРТ имеет дифракционный вид:

$$h(x) = \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2\left(\frac{x}{\Delta}\right), \quad (5.32)$$

где функция  $\text{sinc}(t)$  определена соотношением

$$\text{sinc}(t) \equiv \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \quad (5.33)$$

Ширина ФРТ  $\Delta$  равна в данном случае расстоянию от центрального максимума до первого нуля  $h(x)$ . Соответствующая ОПФ — "треугольная" функция:

$$H(f) = \begin{cases} 1 - |f|/f_c, & |f| \leq f_c, \\ 0, & |f| > f_c, \end{cases} \quad (5.34)$$

где  $f_c \equiv \Delta^{-1}$  — частота среза системы формирования изображения. Между прочим, выражение (5.32) с неплохой точностью описывает известное решение Эйри [87] для изображения точечного источника в идеальной оптической системе с круговой апертурой, а, как показал О'Нейл [88, 89], точная ОПФ этой системы мало отличается от описываемой выражением (5.34).

Введем безразмерные параметры, в качестве которых примем отношение частоты среза к типичной частоте сигнала и отношение сигнала к шуму при нулевой частоте:

$$a = \frac{f_c}{f_s}, \quad \mu = \frac{g_s(0)}{g_\xi}. \quad (5.35)$$

Тогда формулы (5.24), (5.26) и (5.29) принимают следующий вид:

$$J_\Delta(y, s) = \int_0^1 \ln \left[ 1 + \frac{\mu(1-x)^2}{1+a^2x^2} \right] dx, \quad (5.36)$$

$$J_\Delta(y, \xi) = \int_0^1 \ln \left[ 1 + \frac{1+a^2x^2}{\mu(1-x)^2} \right] dx, \quad (5.37)$$

$$\rho^2(y, s(x)) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctan a - \frac{a}{R} \left[ \arctan \left( \frac{a^2}{R} \right) + \arctan \left( \frac{\mu}{R} \right) \right] \right\}, \quad (5.38)$$

$$R = \sqrt{\mu + (1+\mu)a^2}.$$

Из рис. 10 видно, что информация о сигнале  $J_\Delta(y, s)$  возрастает с увеличением отношения сигнала к шуму приблизительно как  $\log \mu$  при всех значениях частоты среза. В то же время информация о фоне  $J_\Delta(y, \xi)$  доминирует при низких значениях отношения сигнала к шуму, так что в этой области восстановление объекта сильно затруднено. Подчеркнем, что на этот раз речь идет об интегральной информации, относящейся ко всем частотам ниже частоты среза  $f_c$ .

Функция  $\rho(\mu)$ , рассчитанная по (5.38), представлена на рис. 11. Мы видим, что коэффициент корреляции между изображением и частным отсчетом объекта достигает

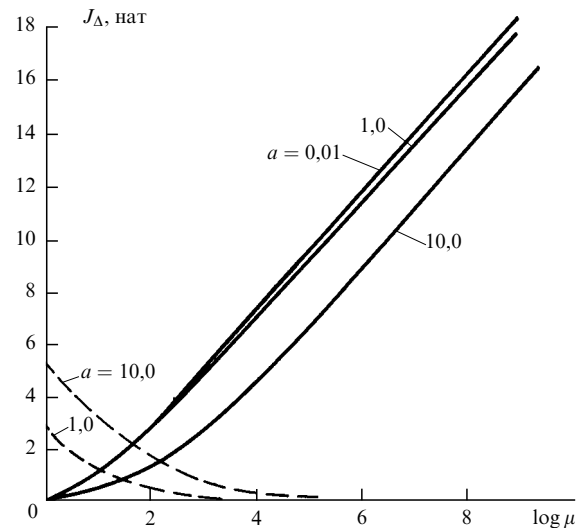


Рис. 10. Информация о сигнале (сплошная линия) и фоне (штриховая) как функции отношения сигнала к шуму. Указаны значения параметра  $a$

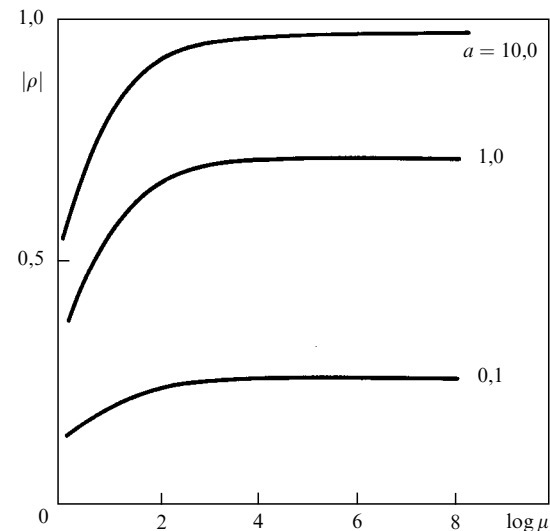


Рис. 11. Коэффициент корреляции между изображением и частным значением оригинала как функция отношения сигнала к шуму. Указаны значения параметра  $a$

заметной величины лишь в тех случаях, когда характерный диапазон частот сигнала расположен внутри полосы пропускания системы (т.е. при  $a > 1$ ). На практике обычно имеет место как раз противоположный случай: система формирования изображения срезает существенную часть спектра мощности сигнала, и потому информация об отдельной точке объекта, содержащаяся во всем изображении, весьма мала.

Сказанное однозначно ведет к заключению, что в общем случае восстановлению подлежат не отдельные отсчеты оригинала, а только некоторые их комбинации — *функционалы объекта*, относительно которых мы имеем достаточно полную информацию. Эти функционалы должны быть по возможности независимы друг от друга, чтобы оценка каждого следующего функционала добавляла больше новой информации об оригинале. Такими свойствами обладают *главные компоненты*, введенные в общем статистическом контексте Хотеллин-

гом [90]. Мы, однако, не будем обсуждать соответствующий подход в рамках байесовской схемы, а предпочтем использовать его в следующем разделе, когда вернемся к анализу классической схемы с детерминированным искомым объектом.

## 6. Оккамовское оценивание

Неоднократно подчеркивалось (см., например, [91]), что создаваемая исследователем модель всякого физического явления принципиально неоднозначна, а выбор одной из согласующихся с данными наблюдений моделей основан на критериях простоты и предсказательной силы. Первый из этих критериев, сформулированный явным образом еще Оккамом, мы и попытаемся ниже применить к решению обратных задач в том духе, как это делается при построении физических моделей.

В предыдущем разделе было выяснено, что наблюдаемое изображение обычно содержит слишком мало информации, чтобы можно было надеяться восстановить с нужной точностью распределение интенсивности объекта в отдельных точках. Имеющаяся информация позволяет оценить лишь некоторые функции отдельных отсчетов; так, при заданном среднем фоне вполне возможно независимо от вида ФРТ оценить полную яркость объекта. Естественно ожидать, что существуют и другие аналогичные полной яркости функции, точнее, *функционалы объекта*, в получении оценок которых и состоит решение обратной задачи. Устойчивость последней означает, что совокупность функционалов дает достаточно полное представление о локальных свойствах объекта. Чаще же всего мы имеем дело с неустойчивой обратной задачей, и тогда совокупность доступных разумному оцениванию функционалов становится настолько узкой, что с ней согласуется обширное множество возможных объектов разной степени сложности, расположенных в ОДО.

Очевидно, описываемую совокупность функционалов можно задать многими способами. Мы могли бы, например, оценивать не само распределение яркости объекта, а соответствующие ему компоненты Фурье. Та часть компонент Фурье, которая оценивается с наименьшими ошибками, содержит основную информацию относительно объекта, и потому, согласно критерию простоты, лишь эту часть следовало бы учитывать при построении его оценки.

При всей привлекательности этого подхода нужно сказать, что использование здесь преобразования Фурье представляется во многом искусственным. С еще большим успехом мы могли бы выбрать систему коэффициентов Хаара (А. Нааг), которая позволяет дать не только локальное, но и равномерно сходящееся описание объекта, или остановиться на некоторой иной системе функционалов. Недостаток всякой наперед заданной системы типа обобщенных коэффициентов Фурье заключается в том, что она не приспособлена к конкретному объекту; иначе говоря, собственные функции оператора, порождающего данную систему (например, синусоиды), не учитывают естественным образом свойства конкретного распределения яркости.

Между тем, сама структура ОДО, а именно, ее чрезвычайная вытянутость в некоторых направлениях, указывает на естественный способ выбора функционалов для каждого конкретного случая. Как нетрудно понять, в

рамках линейного описания основными функционалами являются такие линейные комбинации точечных отсчетов, которые оцениваются с наивысшей точностью, т.е. изменяются поперек вытянутости ОДО. Оказывается, эти комбинации представляют собой часть так называемых *главных компонент* (principal components) инверсной оценки объекта, причем порождаются главные компоненты выборочной информационной матрицей Фишера. Последний шаг в нахождении обратного решения опирается на принцип Оккама. Этот шаг состоит в том, чтобы сохранить минимальное количество главных компонент, достаточное для удовлетворительного статистического описания данных наблюдений в контексте *критерия случайности изображения*.

Обратимся к формальному изложению описанной программы согласно [27, 30, 31].

### 6.1. Главные компоненты

Пусть  $\xi$  —  $n$ -мерный случайный вектор с известными средним значением  $a$  и дисперсионной матрицей  $\Omega = \langle (\xi - a)(\xi - a)^T \rangle$ . Задача заключается в том, чтобы найти линейно связанный с  $\xi$  случайный вектор

$$\eta \equiv [\eta_1, \dots, \eta_r]^T = A\xi, \quad r \leq n, \quad (6.1)$$

такой, что линейная комбинация

$$\tilde{\xi} = B + C\eta \quad (6.2)$$

дает наилучшую в среднеквадратическом смысле аппроксимацию исходного случайного вектора. Последнее означает, что величина

$$\rho^2(\xi, \tilde{\xi}) \equiv \langle \|\xi - \tilde{\xi}\|^2 \rangle \quad (6.3)$$

минимальна. Таким образом, разыскивается явное представление матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$  через характеристики  $n$ -мерной случайной величины  $\xi$ . В общем случае указанные матрицы имеют размеры  $r \times n$ ,  $n \times 1$  и  $n \times r$  соответственно.

Смысл введенных Хотеллингом [90] *главных компонент*  $\eta_1, \dots, \eta_r$  заключается в том, что при  $r < n$  мы можем добиться хорошей аппроксимации  $\xi$  вида (6.2) через более простую величину  $\eta$ , которая, стало быть, содержит основную статистическую информацию, заключенную в  $\xi$ . В общем случае такая возможность обусловлена тем обстоятельством, что компоненты  $\xi$  коррелируют друг с другом, и потому вся совокупность компонент  $\xi$  содержит меньше информации, чем это имело бы место при их независимости. Напротив, главные компоненты представляют собой статистически некоррелированные линейные комбинации компонент  $\xi$ , поэтому при выборе надлежащего числа главных компонент мы получаем возможность сделать более компактную заключенную в  $\xi$  информацию. Особенно эффективно использование главных компонент в случае, когда  $\xi$  подчиняется гауссову или близкому к нему распределению: при этом некоррелированность главных компонент влечет за собой и их независимость. Если же  $r = n$ , то формулы (6.1) и (6.2) дают точное представление произвольной  $n$ -мерной случайной величины  $\xi$  через систему некоррелированных случайных величин  $\eta$  той же размерности.

Дисперсионная матрица  $\Omega$  представляет собой положительно определенную симметричную матрицу с дей-

ствительными компонентами. Как известно, при этих условиях ее собственные значения  $\mu_k$  положительны, а собственные векторы  $V_k$ , относящиеся к разным собственным значениям, ортогональны. После нормировки собственных векторов мы имеем

$$\Omega V_k = \mu_k V_k, \quad (6.4)$$

$$V_i^T V_k = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (6.5)$$

Перенумеруем для удобства собственные значения в порядке их убывания, так что  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$ , а также введем квадратные  $n \times n$ -матрицы

$$V = [V_1, \dots, V_n], \quad M = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_n] \quad (6.6)$$

и их "укороченные" варианты

$$V_* = [V_1, \dots, V_r], \quad M_* = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_r], \quad r \leq n. \quad (6.6a)$$

Столбцами матриц  $V$  и  $V_*$  являются собственные векторы  $\Omega$ , отличными от нуля элементами  $M$  и  $M_*$  — собственные значения  $\Omega$ , расположенные на главных диагоналях этих матриц.

Решение поставленной выше задачи, восходящее к [92–94], можно найти в монографии Бриллинджера [95]. Экстремальные значения искомым матриц имеют вид

$$A = V_*^T, \quad B = (E_n - V_* V_*^T)a, \quad C = V_*, \quad (6.7)$$

где  $E_n$  — единичная  $n$ -мерная матрица. Это означает, что искомое линейное преобразование  $\xi$  к главным компонентам  $\eta$  и наилучшая линейная аппроксимация  $\tilde{\xi}$  следующим образом выражаются через собственные векторы  $\Omega$ :

$$\eta = V_*^T \xi, \quad \langle \eta \rangle \equiv b = V_*^T a, \quad (6.8a)$$

$$\tilde{\xi} = a + V_* (\eta - b). \quad (6.8b)$$

При этом достигается минимальное значение неточности аппроксимации (6.3), равное суммарному "хвосту" собственных значений:

$$\rho_{\min}^2 = \sum_{k=r+1}^n \mu_k. \quad (6.9)$$

Из (6.8a) следует

$$D(\eta) \equiv \langle (\eta - b)(\eta - b)^T \rangle = M_*, \quad (6.10)$$

т.е. дисперсии главных компонент равны собственным числам дисперсионной матрицы, а их ковариации равны нулю.

Для того чтобы яснее представить себе геометрический смысл главных компонент, рассмотрим случай  $r = n$  и предположим, что  $\xi$  подчиняется многомерному гауссову распределению:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Omega)$ . Тогда линии постоянной плотности вероятности образуют эллипсоиды

$$(x - a)^T \Omega^{-1} (x - a) = \text{const}. \quad (6.11)$$

Матрица  $V$  является ортогональной, т.е.  $V^{-1} = V^T$ , и потому прямое и обратное линейные преобразования

$$x = Vy, \quad y = V^T x \quad (6.12)$$

описывают повороты системы координат. Пользуясь свойством (6.5) ортонормированности собственных век-

торов  $V_k$  и вытекающим из (6.4) равенством  $\Omega^{-1} V = VM^{-1}$ , нетрудно показать, что преобразование (6.12) приводит уравнение (6.11) к виду

$$(y - b)^T M^{-1} (y - b) = \text{const}, \quad (6.13)$$

или вследствие диагональности  $M$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(y_k - b_k)^2}{\mu_k} = \text{const}. \quad (6.14)$$

Последние уравнения описывают тот же эллипсоид (6.11) в евклидовой системе координат  $y_1, \dots, y_n$ , оси которой параллельны главным осям эллипсоида, причем длина  $k$ -й оси эллипсоида пропорциональна  $\sqrt{\mu_k}$ . Это значит, что  $\eta \sim \mathcal{N}(b, M)$ , а компоненты этого вектора независимы друг от друга. Вся описанная операция представляет собой стандартное приведение квадратичной формы (6.11) к главным осям.

Случаю  $r < n$ , представляющему для нас основной интерес, вместо чистого вращения  $x = Vy$  соответствует преобразование координат  $x = V_0 y$ , где матрица  $V_0$  отличается от  $V$  тем, что собственные векторы  $V_{r+1}, \dots, V_n$ , отвечающие наименьшим собственным значениям  $\mu_{r+1}, \dots, \mu_n$ , заменены нулевыми векторами. Как легко видеть,  $V_0$  — уже не ортогональная матрица, и преобразование  $x = V_0 y$  эквивалентно двум операциям: повороту системы координат  $x = Vy$  и последующему проецированию вдоль осей  $y_{r+1}, \dots, y_n$  на подпространство  $(y_1, \dots, y_r)$ . Таким образом, изоденсы главных компонент  $\eta$  суть  $r$ -мерные эллипсоиды

$$\sum_{k=1}^r \frac{(y_k - b_k)^2}{\mu_k} = \text{const}, \quad (6.15)$$

отличные от эллипсоидов (6.14). Естественно, вернуться к последним путем обратного поворота системы координат нельзя, и потому (6.8b) включает в себя основанную на знании среднего значения  $\langle \xi \rangle = a$  операцию смещения вдоль тех направлений, по которым происходило проецирование. Вследствие потери некоторой части информации о  $\xi$  при нелинейной операции проецирования, величина  $\tilde{\xi}$  в (6.8b) уже не равна для  $r < n$  исходной величине  $\xi$ , однако она дает наилучшее в среднеквадратическом смысле приближение к ней.

Поясним процесс нахождения главных компонент простейшим примером решения системы уравнений (3.4). Если записать соответствующую задачу оценивания в виде (3.2), то матрица Фишера будет, согласно (3.13), пропорциональна  $H^T H$ , т.е.

$$I \propto \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 68 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Собственные значения и собственные векторы  $I$  приближенно равны

$$\lambda_1 = 77,949, \quad \lambda_2 = 0,051, \\ V_1 = \begin{bmatrix} 0,357 \\ 0,934 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -0,934 \\ 0,357 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

а соответствующие главные компоненты решения суть компоненты вектора  $P = V^T X$ , т.е.

$$P_1 = 0,357x_1 + 0,934x_2, \\ P_2 = -0,934x_1 + 0,357x_2. \quad (6.18)$$

Как уже было сказано в разделе 3.2, точности оценивания  $P_1$  и  $P_2$  различны: отношение стандартных отклонений (полуосей эллипса допустимых решений на рис. 2) равно

$$\frac{\sigma(P_2)}{\sigma(P_1)} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \simeq 38,974. \quad (6.18a)$$

Поскольку точности оценивания главных компонент различаются существенно, мы можем ограничиться в решении обратной задачи указанием лишь оценки  $P_1$ , ибо нахождение еще и оценки  $P_2$  почти не добавляет информации о решении.

## 6.2. Анализ главных компонент оценки максимального правдоподобия

Вернемся к обсуждению операции восстановления случайно размытого изображения. Отвлекаясь пока от условия неотрицательности объекта  $S_0$ , рассмотрим в качестве изучавшейся выше случайной величины  $\xi$  оценку максимального правдоподобия  $\hat{S}$  (см. рис. 4). В принципе, она содержит всю доступную информацию об  $S_0$ , однако эта информация, подобно капле меда в бочке дегтя, почти полностью скрыта несущественными деталями поведения ОМП. Так, отдельные компоненты инверсного решения столь сильно коррелируют между собой, что для уяснения сути дела к полученному распределению яркости нужно прилагать дисперсионную матрицу оценок компонент со всеми ее недиагональными членами. Наша задача заключается в том, чтобы выделить реальную информацию относительно объекта при минимальных ее потерях.

Сказанное в предыдущем пункте ясно указывает на естественный способ действий: если мы ограничиваемся линейным анализом оценки  $\hat{S}$ , то следует найти ее главные компоненты. Согласно (4.24), дисперсионная матрица  $\hat{S}$  приближенно равна обратной матрице Фишера:

$$\Omega \simeq I^{-1}(S_0). \quad (6.19)$$

Примем во внимание то, что собственные векторы всякой неособенной матрицы  $I$  и обратной к ней матрицы  $I^{-1}$  совпадают, а собственные числа  $I$ , которые мы обозначим через  $[\lambda_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , равны обратным значениям собственных чисел  $I^{-1}$ . Согласно (6.19), для последних имеем  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$ ; собственные числа  $I$  также удобно нумеровать в порядке их убывания, так что

$$\lambda_1 = \mu_n^{-1}, \dots, \lambda_n = \mu_1^{-1}, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0, \\ IV_k = \lambda_k V_k, \quad (6.20)$$

где порядок нумерации собственных векторов поставлен теперь в соответствие собственным числам  $\lambda_k$ . Случай, когда некоторые собственные числа  $I$  совпадают, не вносит принципиальных изменений; поскольку на практике он встречается исключительно редко, мы не будем его обсуждать.

Обратим внимание на существенные различия точек зрения на главные компоненты в применяемом здесь и стандартном подходах. При решении типичных статистических задач многомерная случайная величина  $\xi$  описывает совокупность данных для некоторого множества объектов, а главные компоненты, отвечающие

наибольшим собственным числам дисперсионной матрицы  $\Omega$ , охватывают основную часть статистической информации, заключенной в  $\xi$ . При решении же обратных задач в качестве  $\xi$  выступает какая-либо статистическая оценка объекта, скажем,  $\hat{S}$ , а ее дисперсионная матрица  $\Omega$  характеризует *неточности* оценивания отдельных компонент  $S_0$ . Очевидно, те главные компоненты  $\hat{S}$ , дисперсия которых относительно велика, содержат мало информации об искомом объекте. Поэтому в обратных задачах нас интересуют главные компоненты, отвечающие наименьшим собственным числам  $\Omega$ , т.е. наибольшим собственным числам  $[\lambda_k]$  информационной матрицы Фишера  $I(S_0)$ . Для краткости мы будем называть их *старшими* главными компонентами  $\hat{S}$ . Они соответствуют проецированию на пространство главных компонент исходного эллипсоида рассеивания не поперек, а вдоль направлений его вытянутости (см. рис. 4).

Второе принципиальное отличие обсуждающейся схемы от используемой в типичных статистических исследованиях связано с тем, что мы не знаем среднего значения  $a$  исходного вектора  $\xi$ , или — в контексте восстановления изображений — истинного объекта  $S_0$ . Поэтому соотношение (6.8б) не может быть использовано для аппроксимации  $\hat{S}$  путем обратного сдвига допустимой области из пространства главных компонент вдоль направлений проецирования, да такой аппроксимации в рассматриваемом случае и не требуется. В самом деле, весь смысл обращения к принципу Оккама заключается в том, чтобы выбрать наиболее "простую" оценку объекта, совместимую с данными наблюдений, причем понятие простоты конкретизировано здесь вполне однозначно: *наиболее простой считается оценка с минимальным количеством старших главных компонент*. Именно на данном этапе мы вводим в разыскиваемую оценку смещение, стабилизирующая роль которого отмечалась в разделе 3.

В результате проецирования исходной ОДО в направлениях с наибольшими дисперсиями инверсного решения мы приходим к новой, значительно более "округлой" ОДО. Это говорит о том, что компоненты смещенной и сглаженной оценки  $\tilde{S}$  значительно меньше, чем компоненты  $\hat{S}$ , коррелированы между собой, и потому каждая из компонент  $\tilde{S}$  вносит существенную долю информации об искомом объекте. Восстановленное распределение яркости становится информативным само по себе, без дополнительного задания всех членов дисперсионной матрицы оценки, и только теперь мы можем считать задачу восстановления изображения выполненной.

Чтобы не усложнять обсуждение, мы отвлеклись выше от условия неотрицательности оценки, которое само по себе стабилизирует решение [96]. Это условие можно включить в рассмотрение (см. рис. 4), заменив в нем безусловную оценку  $\hat{S}$  ее условным аналогом  $\hat{S}_+$  — оценкой максимального правдоподобия в области  $S \geq 0$ . В типичных обратных задачах оценка  $\hat{S}_+$  лишь немногим более устойчива по сравнению с ОМП, и потому к ней в равной мере относятся все приведенные выше соображения. Итак, пара преобразований, связывающих оценку  $\hat{S}_+(y_0)$  и ее упрощенную версию  $\tilde{S}(y_0)$  имеет вид

$$P(y_0) = V_*^T \hat{S}_+(y_0), \quad (6.21a)$$

$$\tilde{S}(y_0) = V_* P(y_0), \quad (6.21б)$$

где  $P = [P_1, \dots, P_r]^T$  — вектор главных компонент ( $r \leq n$ ), а  $V_*$  — матрица размером  $n \times r$ , столбцами которой являются собственные векторы  $V_k$  информационной матрицы Фишера  $I(S_0)$ , отвечающие  $r$  наибольшим ее собственным значениям  $[\lambda_k]$ . Оба преобразования (6.21) можно объединить в одно:

$$\tilde{S}(y_0) = \mathcal{D}\hat{S}_+(y_0), \quad \mathcal{D} \equiv V_*V_*^T, \quad (6.22)$$

где  $\mathcal{D}$  — симметричная квадратная матрица размером  $n \times n$ .

Оценка  $\hat{S}_+(y_0)$  находится минимизацией информации (4.3) в области положительного гиперквадранта  $\{S\}$ . Соответствующие численные методы изложены, в частности, Бертсекасом [97]. Для нахождения собственных векторов  $I$  в первом приближении можно использовать представления (4.19) или (4.22). Последнее из них кажется более надежным, однако окончательный вывод должен основываться на специальном исследовании. После нахождения стабильной оценки объекта  $\tilde{S}(y_0)$  можно уточнить систему собственных векторов и собственных чисел матрицы Фишера.

Конечно, на опыте мы получаем лишь выборочный спектр матрицы  $I$ , отличный, вообще говоря, от ее истинного спектра, и соответственно выборочные главные компоненты. К счастью, выборочные характеристики дисперсионной матрицы обладают всеми традиционными свойствами "хороших" оценок: состоятельностью, асимптотическими эффективностью и нормальностью [69, 98].

Определяющее спектр  $I$  уравнение  $IV = VA$ , где  $A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ , можно переписать в силу ортогональности  $V$  в виде

$$I = VAV^T, \quad (6.23)$$

выражающем известную *спектральную теорему*. Существует много численных методов, позволяющих дать спектральное представление произвольной симметричной матрицы. Эффективен метод *разложения по сингулярным значениям* (Singular Value Decomposition), предложенный Отеном [99]; его алгоритм приведен, в частности, в [100, 101].

Отметим связь изложенного подхода с известным в теории вероятностей *разложением Карунена–Лозва* [102] стационарного случайного процесса  $\zeta(t)$  в ряд по системе собственных функций его автоковариационной функции  $\psi(\tau)$ . Подобно главным компонентам, коэффициенты  $[\xi_k]$  этого разложения являются некоррелированными случайными величинами, позволяющими добиться максимальной в рамках линейного подхода компактизации информации [103]. Как легко видеть, в случае восстановления изображений переход к главным компонентам эквивалентен обобщению разложения Карунена–Лозва на случай нестационарного процесса, включающего в себя дополнительный источник шума — фотонный шум (что отражается зависимостью информационной матрицы от искомого объекта  $S_0$ ).

По тем же причинам описываемый подход может рассматриваться как обобщение известного *метода псевдообращения* системы линейных уравнений (см. [100, 101]), примененного для восстановления изображений в [104–108]. Формальные отличия обусловлены тем фактом, что мы используем спектральное представление не

ФРТ, а зависящей от объекта выборочной матрицы Фишера.

### 6.3. Основные черты алгоритма восстановления изображений

Применяемый нами алгоритм опирается на связанную с соотношениями (6.21) и (6.22), но более сложную процедуру.

Дело в том, что эллипсоидальность ОДО, и, как следствие, — возможность обойтись при ее описании лишь матрицей Фишера, обусловлены принятием функции правдоподобия  $L$  в качестве статистики для проверки допустимости оценок. Как показано в разделе 4, близкого к среднему значения  $L(y_0|S)$  еще недостаточно, чтобы считать  $S$  допустимой оценкой; критерий случайности изображений требует более глубокого статистического изучения соответствия порождаемых оценкой  $S$  и наблюдаемого изображений. Истинная область допустимых оценок, удовлетворяющих всем требованиям КСИ, составляет лишь часть эллипсоидальной ОДО (см. рис. 4). Изучение модельных примеров показывает, что для достижения качественного восстановления недостаточно войти в эллипсоидальную ОДО. Вместе с тем, последняя вполне правильно передает общую форму истинной ОДО, и главное — направления ее чрезмерной вытянутости. Поэтому разумно использовать информационную матрицу Фишера лишь для нахождения этих направлений и формирования соответствующего пространства главных компонент, а остающуюся неопределенность оценки устранять путем глубокого исследования в рамках КСИ статистических свойств порождаемого ею ансамбля изображений.

Приведенные соображения вместе с обсуждавшимся в разделе 4 локальным подходом и адекватным выбором размеров пикселей в пространствах изображений и объектов (см. раздел 7) дают общее описание принципов, на которых основан алгоритм восстановления изображений. Разумеется, отдельные детали этого алгоритма задаются неоднозначно, как и его численная реализация. Поскольку еще предстоит работа по оптимизации алгоритма, мы не будем здесь вдаваться в детали, отсылая к более подробному описанию [31].

Вполне очевидно, что те же принципы справедливы и для многих других задач, связанных с обращением информации.

### 6.4. Численный пример

Для того чтобы более ясно увидеть особенности обсуждаемой проблемы, рассмотрим пример, когда объект включает в себя как низкочастотную, так и высокочастотную составляющие (рис. 12а).

Случайно размытое изображение (рис. 12б) было вычислено с дифракционной ФРТ (5.32) при  $\Delta = 7$  пикс. для случая равномерного пуассоновского фона со средним значением  $\gamma_j \equiv 100$  отсчетов/пиксел. ОМП с учетом неотрицательности объекта  $\hat{S}_+$  представлена на рис. 12в; мы видим типичное проявление неустойчивости, когда гладкая составляющая объекта сильно искажена случайными осцилляциями. Наконец, на рис. 12г приведено обсуждавшееся выше решение  $\tilde{S}$  в его простейшей форме, когда оптимизировался весь объект как целое.

Любопытно посмотреть, какими собственными числами информационной матрицы  $I$  пришлось пренебречь в рассматриваемом примере. Вся совокупность  $[\lambda_k]$



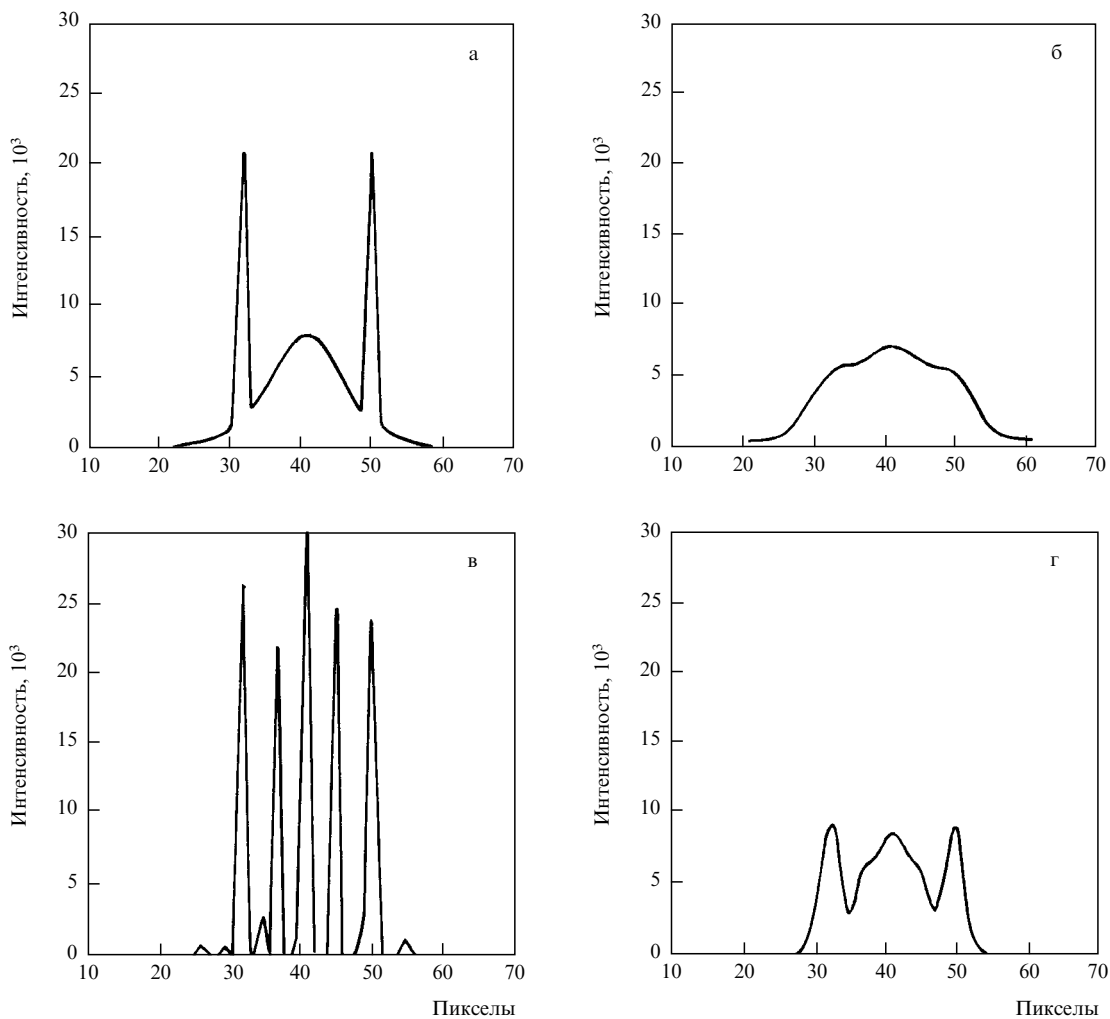


Рис. 12. Модельный объект (а), его изображение (б), условная оценка максимума правдоподобия (в) и байесовская оценка (г)

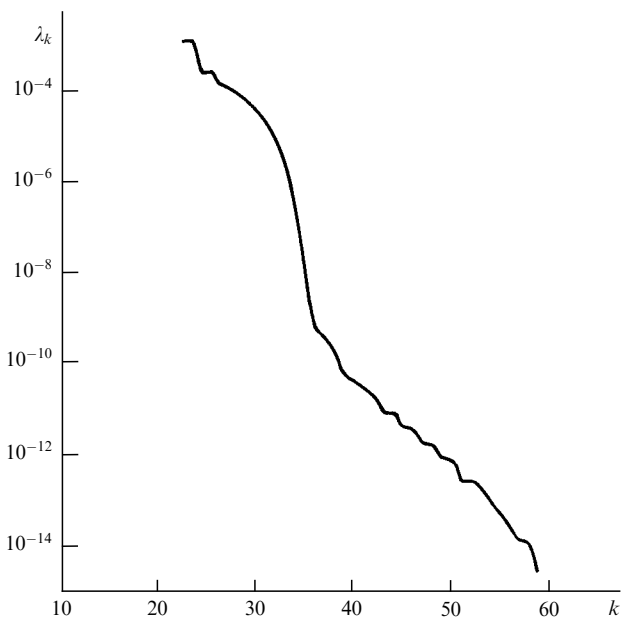


Рис. 13. Собственные числа матрицы Фишера для примера, показанного на рис. 12

представлена на рис. 13; как и для любой неустойчивой задачи, она охватывает огромный диапазон — в данном случае 12 порядков величины! Обычно протяженность этого диапазона характеризуется значением *показателя обусловленности* (condition number)  $C \equiv \sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}}$ , которое для неустойчивых задач велико. Главные компоненты истинного объекта и его оценок показаны на рис. 14. Мы снова видим типичный высокочастотный шум ОМП, который, однако, полностью подавлен в устойчивой оценке  $\tilde{S}$  после 40-й главной компоненты. Соответствующее обращение в пространство объектов и показано на рис. 12г. Еще более точного восстановления можно добиться в рамках локального подхода.

### 7. Сверхразрешение

В самом термине *восстановление изображений* содержится предположение, что в процессе обработки данных видимость резких деталей улучшается, т.е. при восстановлении мы продвигаемся в область высоких пространственных частот. В этой связи возникает целый ряд вопросов. Прежде всего хотелось бы знать, от каких факторов зависит степень восстановления мелких деталей, существует ли естественный предел достижимого разрешения и чему равен этот предел в типичных условиях, если он действительно существует.

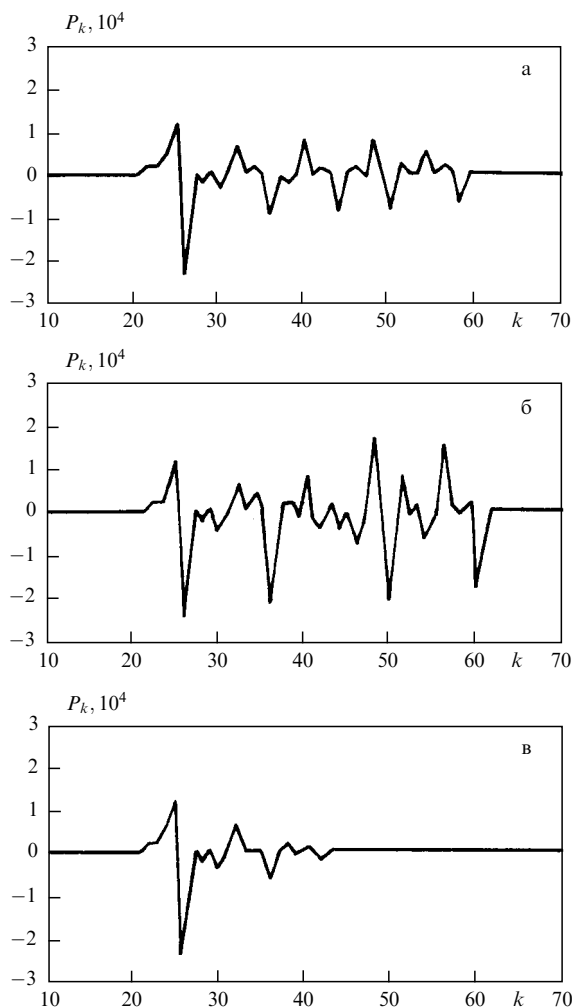


Рис. 14. Главные компоненты объекта (а) и двух его оценок (б, в), представленных соответственно на рис. 12а, в, г

Ясно, что степень продвижения в область высоких пространственных частот зависит главным образом от имеющейся априорной информации относительно объекта и лишь во вторую очередь — от его формы, отношения сигнала к шуму, вида ФРТ и прочих факторов. По этой причине для нахождения предельных соотношений мы предполагаем в данном разделе заданной столь обширную априорную информацию, что задача восстановления изображений сводится фактически к задаче распознавания образов. Конечно, и в такой постановке обратная задача представляет значительный самостоятельный интерес. Так, удастся получить простые аналитические выражения, характеризующие определенную подходящим образом "разрешающую силу" для обычных на практике условий наблюдения. Если же исследователь не обладает столь значительной априорной информацией, то предельные соотношения позволяют правильно оценить теоретические возможности как при разработке аппаратуры, так и при интерпретации данных.

### 7.1. Задача Рэлея

Опыт показывает, что принятое в какой-либо области исследований определение разрешающей силы не всегда оказывается удовлетворительным при других условиях. Классическое определение разрешения, предложенное

лордом Рэлеем, исходит из рассмотрения ситуации, когда наблюдатель пытается определить, порождено ли наблюдаемое размытое изображение одиночным точечным объектом или двойным объектом с точечными компонентами той же суммарной яркости. Задачу в такой постановке мы будем называть *проблемой Рэлея в узком смысле*, в то время как различение объектов произвольной формы будем относить к *проблеме Рэлея в широком смысле*. Для первой из этих задач *рэлеевский предел разрешения* фактически считается равным выбранной подходящим образом ширине ФРТ  $\Delta$ . Если качество изображения ограничено лишь дифракцией излучения на апертуре системы формирования изображений диаметром  $D$ , то *рэлеевский предел совпадает с дифракционным пределом*

$$\Delta_d \approx \frac{\lambda}{D}, \quad (7.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны излучения, а  $\Delta_d$  измеряется в радианах.

Условный характер данного определения был ясен уже самому Рэлею, который указывал ([2], с. 420), что "The rule is convenient on account of its simplicity; and it is sufficiently accurate in view of the necessary uncertainty as to what is meant by resolution"<sup>4</sup>. В самом деле, если бы оба вида шума — фотонный и внешний — полностью отсутствовали, то удалось бы разделить сколь угодно близкие источники; для этого, например, можно разложить наблюдаемое изображение в ряд Тэйлора и проследить достаточно высокие члены ряда. Еще более наглядным представляется использование с этой целью разложения Фурье, где двойственность проявляется в виде глубоких минимумов спектра мощности для гармоник с "неподходящими" частотами. Присутствие шума, обусловленного как внешним фоном, так и квантовой природой света, принципиально усложняет задачу ввиду неустойчивости обратных решений. Тем не менее разделение источника с минимальным расстоянием между точечными компонентами  $\rho_{\min}$ , меньшим ширины ФРТ  $\Delta$ , возможно и при наличии шума, если использовать методы восстановления изображений (рис. 15). Сказанное не умаляет значения критерия Рэлея; нужно лишь иметь в виду ограниченность области его применения. Так, использование критерия Рэлея представляется вполне уместным при визуальном анализе данных.

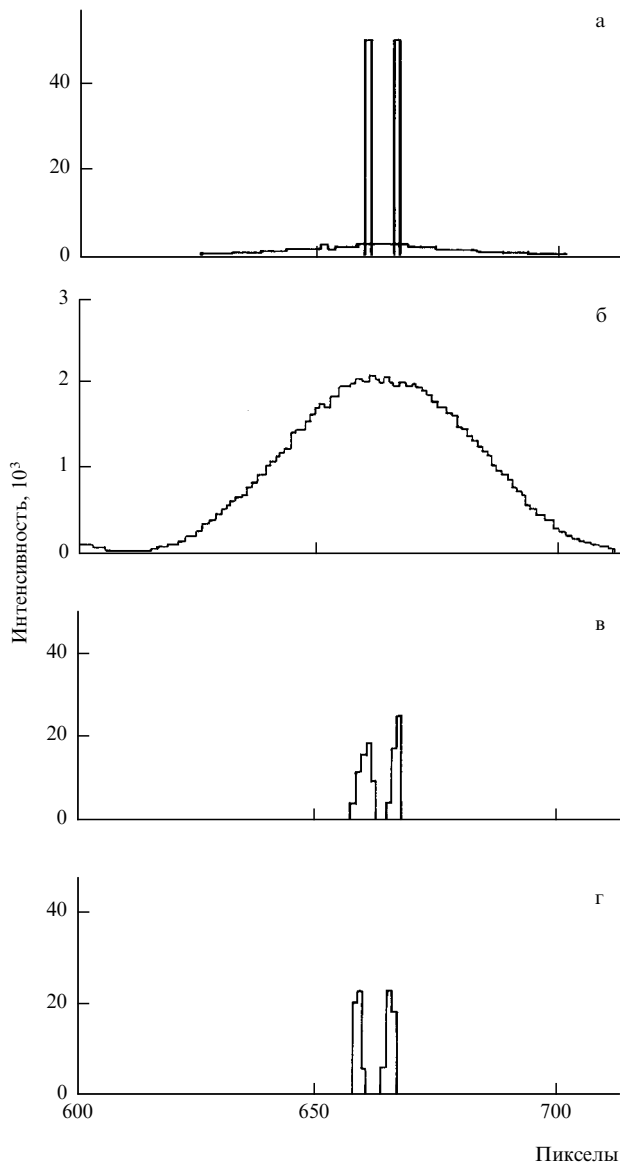
Введем для удобства безразмерный *параметр разрешения*

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\rho_{\min}}{\Delta} \quad (7.2)$$

и будем говорить о *сверхразрешении*, если достигаются значения  $\mathcal{R} < 1$ . Разумеется, одного лишь параметра недостаточно для описания всех сторон проблемы предельного разрешения, тем более проблемы Рэлея в широком смысле. Соответствующие понятия будут введены далее по ходу дела.

В случае детерминированного размывания явление сверхразрешения было обнаружено Шелкуновым [109] и затем детально исследовано в [110–119, 45]. Превосходное описание ранних исследований дано в обзоре

<sup>4</sup> "Данное правило удобно вследствие его простоты, и оно вполне точно ввиду неизбежной неопределенности относительно того, что понимается под разрешением".



**Рис. 15.** а — Двойной объект с точечными компонентами равной яркости и одно из его размытых изображений (пологая кривая); б — изображение двойного объекта в увеличенном масштабе; в, г — примеры восстановленных изображений

Раутиана [112]. Последующее изложение основано на работах [26, 28, 120], в первой из которых задача решена для объектов произвольной формы в рамках общей теории Неймана–Пирсона проверки статистических гипотез, во второй рассматривается обобщение результатов с учетом фотонного шума и в третьей описаны модельные численные эксперименты, которые дополняют аналитическое рассмотрение. Близкий подход исследовали ранее Козлов [114], Харрис [115, 116] и Снайдер (см. [119]). Мы не будем здесь останавливаться на перечислении достаточно очевидных приложений задачи о предельном разрешении к практическим проблемам оптики, электронной микроскопии, томографии и т.д.

## 7.2. Восстановление изображений и распознавание образов

Как бы ни было определено понятие предельной разрешающей силы, в постановке Рэля речь идет о сравнении

двух или нескольких альтернативных объектов, одному из которых должно быть отдано предпочтение на основании априорной информации и наблюдаемой реализации изображения. В таких случаях принято говорить о *распознавании образов*, тогда как при почти полном отсутствии априорной информации о виде порождающего изображение объекта мы говорим о *восстановлении изображений*. Граница между этими понятиями не вполне однозначна, однако это не может привести к недоразумениям. Суть дела заключается в том, что классификация объекта предполагает оценивание одного или нескольких параметров, описывающих подразделение объектов на классы, тогда как построение распределения яркости в объекте требует оценивания весьма большого количества параметров, в качестве которых принимаются, например, значения интенсивности в отдельных пикселах.

Очевидно, при наличии шума вопрос обнаружения данного объекта не может быть решен в детерминированной постановке: при одном и том же значении отношения сигнала к шуму  $S/N$  и любом критерии выбора мы будем отдавать предпочтение то одной, то другой альтернативе в зависимости от конкретной реализации шума. Задача по необходимости является статистической, и мы будем рассматривать ее с точки зрения теории проверки статистических гипотез, развитой Нейманом и Пирсоном (см. [67, 69]).

Рассмотрим основной случай, когда возможны два альтернативных вида объектов:  $S_0$  и  $S_1$  (скажем, одиночная звезда и двойная звезда той же яркости с заданным расстоянием между компонентами). Пусть  $q_0 = [q_{0j}]$  и  $q_1 = [q_{1j}]$  — отвечающие объектам средние распределения яркости типа (2.3), а  $y = [y_j]$  — наблюдаемое изображение неизвестного объекта. Естественно, возможны две гипотезы о природе объекта  $S$ , порождающего изображение:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : S &= S_0, \\ \mathcal{H}_1 : S &= S_1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Нужно построить решающее правило (критерий) для выбора одной из гипотез при данном изображении  $y$  и оценить его качество, т.е. связанные с его применением ошибки. Наиболее общая формулировка критерия выбора заключается в следующем: если  $y$  принадлежит некоторой *критической области*  $w$  в  $m$ -мерном пространстве изображений, то принимается гипотеза  $\mathcal{H}_1$ , а в случае, когда  $y$  находится вне критической области, принимается гипотеза  $\mathcal{H}_0$ . Таким образом, задача сводится к определению оптимальной в некотором смысле критической области  $w$  на основании имеющейся информации о фоне, системе формирования изображений и о самих объектах.

При любом выборе  $w$  возможны ошибки двух видов: 1) гипотеза  $\mathcal{H}_0$  будет отвергнута в случае, когда изображение порождено объектом  $S_0$ ; 2) гипотеза  $\mathcal{H}_0$  будет принята в случае, когда изображение порождено объектом  $S_1$ . Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно вероятности ошибок первого и второго рода, т.е.

$$\alpha = \Pr(\mathcal{H}_1|S_0), \quad \beta = \Pr(\mathcal{H}_0|S_1). \quad (7.4)$$

Обычно величину  $\alpha$  называют *уровнем значимости* критерия, а  $1 - \beta$  — его *мощностью*.

Подход Неймана–Пирсона к проблеме проверки гипотез исходит из того, что сначала следует задать уровень значимости  $\alpha$ , а затем искать такую критическую область  $w_\alpha$ , для которой вероятность ошибки второго рода  $\beta$  минимальна (т.е. мощность критерия  $1 - \beta$  максимальна). Выбор  $\alpha$  учитывает относительную важность двух типов ошибок. Так, если мы формируем выборку квазаров ( $S_0$ ) в поле звезд ( $S_1$ ), то  $\alpha$  — вероятность потери квазара, и для получения по возможности более полной выборки мы должны задать сравнительно небольшое значение  $\alpha$ , скажем,  $\alpha = 0,1$ . При слишком малом значении  $\alpha$  выборка охватит почти все квазары, однако в нее попадет чересчур много звезд. Сходные соображения обычно ведут к тому, что исследователь заинтересован в минимизации  $\beta$  при фиксированном значении  $\alpha$ , т.е. имеет место постановка задачи в смысле Неймана–Пирсона. Соответствующая область  $w_\alpha$  называется *наилучшей критической областью*, а полученный на ее основании критерий выбора будет *наиболее мощным* (теоретически неулучшаемым).

Очевидно, что наличие информации о сравнительно небольшом классе объектов заданного вида при распознавании образов облегчает решение обратной задачи по сравнению с прямым восстановлением изображений, когда задано лишь условие неотрицательности оригинала. По этой причине наиболее высокая разрешающая сила, полученная в рамках теории распознавания образов, должна рассматриваться как верхний предел разрешающей силы, достижимой при наиболее эффективном восстановлении изображений. Таким образом, обращаясь к теории проверки гипотез, мы не только получаем результаты, представляющие самостоятельный интерес, но и выясняем предельные возможности теории обратных задач.

### 7.3. Аналитические результаты

Отсылая читателя за доказательствами к [26, 28], приведем здесь явные выражения для предельного разрешения при сопоставлении двух типов объектов произвольной формы. Для распределения Пуассона используется гауссово приближение с равными средним значением и дисперсией; для близких объектов мы полагаем  $\ln(q_{1j}/q_{0j}) \simeq (q_{1j} - q_{0j})/q_{0j}$ .

В решение задачи естественным образом входит "расстояние"  $\kappa(S_0, S_1)$  между альтернативными объектами, заданное соотношением

$$\kappa(S_0, S_1) = \left[ \sum_{j=1}^m \frac{(q_{1j} - q_{0j})^2}{q_{0j}} \right]^{1/2}. \quad (7.5)$$

Пусть, как и выше,  $Y$  — случайный вектор, реализацией которого является наблюдаемое изображение  $y$ . При справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$  статистика

$$\tau(Y, S_0, S_1) = \kappa^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{(Y_j - q_{0j})(q_{1j} - q_{0j})}{q_{0j}} \quad (7.6)$$

подчиняется стандартному распределению Гаусса с нулевым средним и единичной дисперсией, т.е.  $\tau|_{\mathcal{H}_0} \sim \Phi(z)$ , где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (7.7)$$

Отсюда следует, что наилучшая критическая область  $w_\alpha$  задается условием

$$\tau(y, S_0, S_1) \geq z_\alpha, \quad (7.8)$$

где  $z_\alpha$  — *квантиль* нормального распределения порядка  $1 - \alpha$ , т.е. корень уравнения

$$\Phi(z) = 1 - \alpha. \quad (7.9)$$

При выполнении неравенства (7.8) принимается гипотеза  $\mathcal{H}_1$ , а при справедливости противоположного неравенства — гипотеза  $\mathcal{H}_0$ . В дальнейшем мы увидим, что единственным существенным параметром, входящим в (7.8), является отношение сигнала к шуму  $\psi$ .

Смысл выражения (7.6) достаточно прозрачен: оно напоминает по структуре формулу для коэффициента корреляции двух случайных величин. Если разности  $y_j - q_{0j}$  чаще имеют тот же знак, что и  $q_{1j} - q_{0j}$ , то сумма в (7.6) будет велика, и неравенство (7.8) требует отклонения гипотезы  $\mathcal{H}_0$ . Но корреляция знаков указанных разностей как раз и означает, что объект  $S_1$  предпочтительнее  $S_0$  при объяснении изображения  $y$ .

Как было сказано, минимальное значение вероятности ошибки второго рода отвечает выбору наилучшей критической области; это минимальное значение равно

$$\beta = \Phi[z_\alpha - \kappa(S_0, S_1)]. \quad (7.10)$$

Приведенные формулы дают полное решение задачи о двоичном выборе объекта, так что при заданных  $\alpha$ ,  $\kappa(S_0, S_1)$  и  $\psi$  можно наиболее эффективным образом выполнить выбор одной из альтернатив, а затем и оценить допускаемую при этом вероятность ошибки второго рода. Однако при выяснении предельного разрешения в данных условиях нас скорее интересует минимальное расстояние  $\kappa(S_0, S_1)$ , которое еще можно обнаружить при фиксированных значениях надежности и  $\psi$ . Соответствующее выражение получается непосредственным обращением (7.10) с учетом уравнения (7.9) и соотношения  $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ :

$$\kappa(S_0, S_1) = z_\alpha + z_\beta. \quad (7.11)$$

Формула (7.11) является искомой; она позволяет вычислить минимальное на фиксированном уровне надежности ( $\alpha, \beta$ ) расстояние  $\kappa(S_0, S_1)$  для альтернативных объектов произвольной формы и заданной модели формирования изображения.

Для более ясного понимания приведенных соотношений полезно рассмотреть их непрерывный аналог, полагая для простоты фон равномерным ( $\gamma_j \equiv \gamma = \text{const}$ ). Пусть  $f_c$  — граничная частота системы формирования изображения, так что ОПФ системы  $H(f) \equiv 0$  при  $|f| > f_c$ , а  $\Delta = f_c^{-1}$  — характерная ширина ФРТ. Обозначим через  $F$  полную яркость каждого из сравниваемых объектов и через  $\psi$  — отношение сигнала к шуму в участке изображения порядка ширины ФРТ:

$$\psi = \frac{F}{\sqrt{\gamma\Delta}}. \quad (7.12)$$

Пользуясь теоремой Парсеваля, находим из (7.5)

$$\kappa(S_0, S_1) = \psi \left[ \int_{-f_c}^{f_c} |H(f)|^2 \left| \frac{\delta S(f)}{F} \right|^2 \frac{df}{f_c} \right]^{1/2}, \quad (7.13)$$

где  $\delta S(f)$  — разность трансформант Фурье распределений яркости в рассматриваемых объектах. Подставляя (7.13) в (7.11), мы приходим к общему соотношению

$$\left[ \int_{-f_c}^{f_c} |H(f)|^2 \left| \frac{\delta S(f)}{F} \right|^2 \frac{df}{f_c} \right]^{1/2} = \frac{z_\alpha + z_\beta}{\psi}. \quad (7.14)$$

Функционал в левой части этого равенства характеризует меру близости двух сравниваемых объектов; в простых случаях он зависит лишь от одного параметра — заданного подходящим образом *предельного разрешения*  $\mathcal{R}$  типа (7.2). Показательно, что все внешние условия, определяющие разрешение, группируются в виде комбинации

$$t \equiv \frac{z_\alpha + z_\beta}{\psi}. \quad (7.15)$$

Это означает [26], что *предельное разрешение зависит не от многих отдельных величин, описывающих условия наблюдения (яркости объекта, уровня фона, ширины ФРТ, надежности отождествления и пр.), а лишь от их комбинации* (7.15). Обратим также внимание на то, что вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  входят в (7.15) симметричным образом.

#### 7.4. Примеры

Как это обычно бывает, аналитическое исследование простых частных случаев позволяет выявить закономерности общего характера; почти всегда эти случаи представляют и самостоятельный интерес.

**7.4.1. Смещение произвольного объекта.** Предположим, что различие сравниваемых объектов может заключаться лишь в смещении одного из них относительно другого на расстояние  $\rho$ , так что  $S_1(x) = S_0(x - \rho)$ . Тогда из (7.2) и (7.14) при  $\psi \gg 1$  следует

$$\mathcal{R} \propto \frac{z_\alpha + z_\beta}{\psi}, \quad (7.16)$$

где константа пропорциональности — величина порядка единицы, зависящая от вида ФРТ и распределения яркости в объекте  $S_0$ . Обратим внимание на то обстоятельство, что предельно малый обнаружимый сдвиг обратно пропорционален первой степени отношения сигнала к шуму (рис. 16).

**7.4.2. Разделение источника с точечными компонентами.** Рассмотрим проблему Рэля в узком смысле для объекта с точечными компонентами равной яркости  $F/2$ , изучаемого при помощи прибора с дифракционной ФРТ вида (5.32). Тогда предельное разрешение в долях ширины ФРТ равно

$$\mathcal{R} \simeq \left( \frac{z_\alpha + z_\beta}{\psi} \right)^{5/8}, \quad (7.17)$$

где более точное по сравнению с (7.12) определение отношения сигнала к шуму включает и фотонный шум:

$$\psi = \frac{F}{\sqrt{F + 2\gamma\Delta}}. \quad (7.18)$$

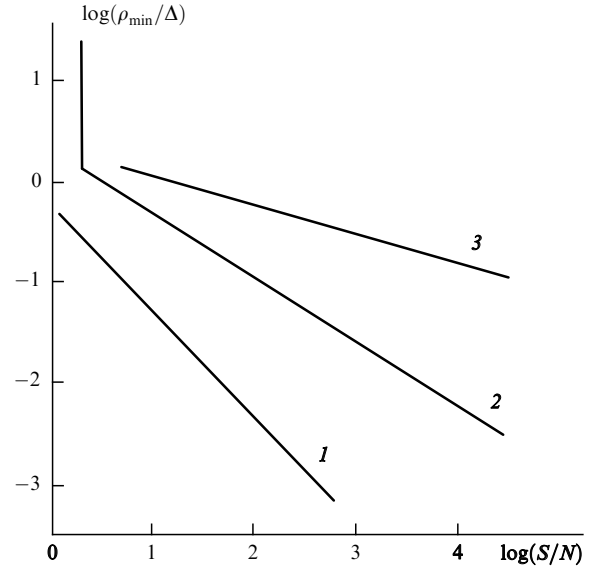


Рис. 16. Схематическое представление зависимости между предельным разрешением  $\rho_{\min}$  в единицах ширины ФРТ  $\Delta$  и отношением сигнала к шуму: 1 — сдвиг объекта, 2 — разделение двойного источника при одиночном точечном объекте в качестве альтернативы, 3 — то же, что и 2, при гауссовом альтернативном объекте

Как видно из (7.17), зависимость  $\mathcal{R}$  от  $\psi$  близка в данном случае к  $\psi^{-1/2}$ . На практике нередко значения  $\psi$  порядка  $10^4 - 10^6$ , так что в этих условиях можно ожидать разрешения, превосходящего предел Рэля в  $10^2 - 10^3$  раз (см. рис. 16). Реальность таких значений подтверждается описываемыми ниже модельными экспериментами и практическими результатами.

**7.4.3. Двойной источник с точечными компонентами и гауссов объект.** Пусть альтернативными объектами являются двойная звезда с разделением компонент  $\rho$  и объект с непрерывным распределением яркости, описываемым законом Гаусса при  $\sigma = \rho/2$ . Полные яркости объектов предполагаются равными. Тогда из (7.14) следует

$$\mathcal{R} \simeq \left( \frac{z_\alpha + z_\beta}{\psi} \right)^{1/4}. \quad (7.19)$$

Уменьшение показателя степени по сравнению с (7.16) и (7.17) говорит о том, что в данном случае невозможно достичь столь высокого разрешения, как при оценке сдвига объекта или при сопоставлении точечных источников (см. рис. 16). Заметим, что в случае нулевого фона мы имеем  $\psi = \sqrt{F}$  и из (7.19) следует  $\mathcal{R} \propto F^{-1/8}$ . Последнее соотношение было независимо получено Люси [121] путем сопоставления четвертых моментов наблюдаемых изображений альтернативных источников.

#### 7.5. Моделирование методом Монте-Карло

Для проверки теории, а также для более глубокого изучения некоторых ее сторон, не поддающихся пока аналитическому анализу (в частности, вида функции распределения статистических оценок), приходится обращаться к численному моделированию процесса формирования изображения и последующего его восстановления. Мы рассмотрим здесь часть результатов [120] для случая классической задачи Рэля.

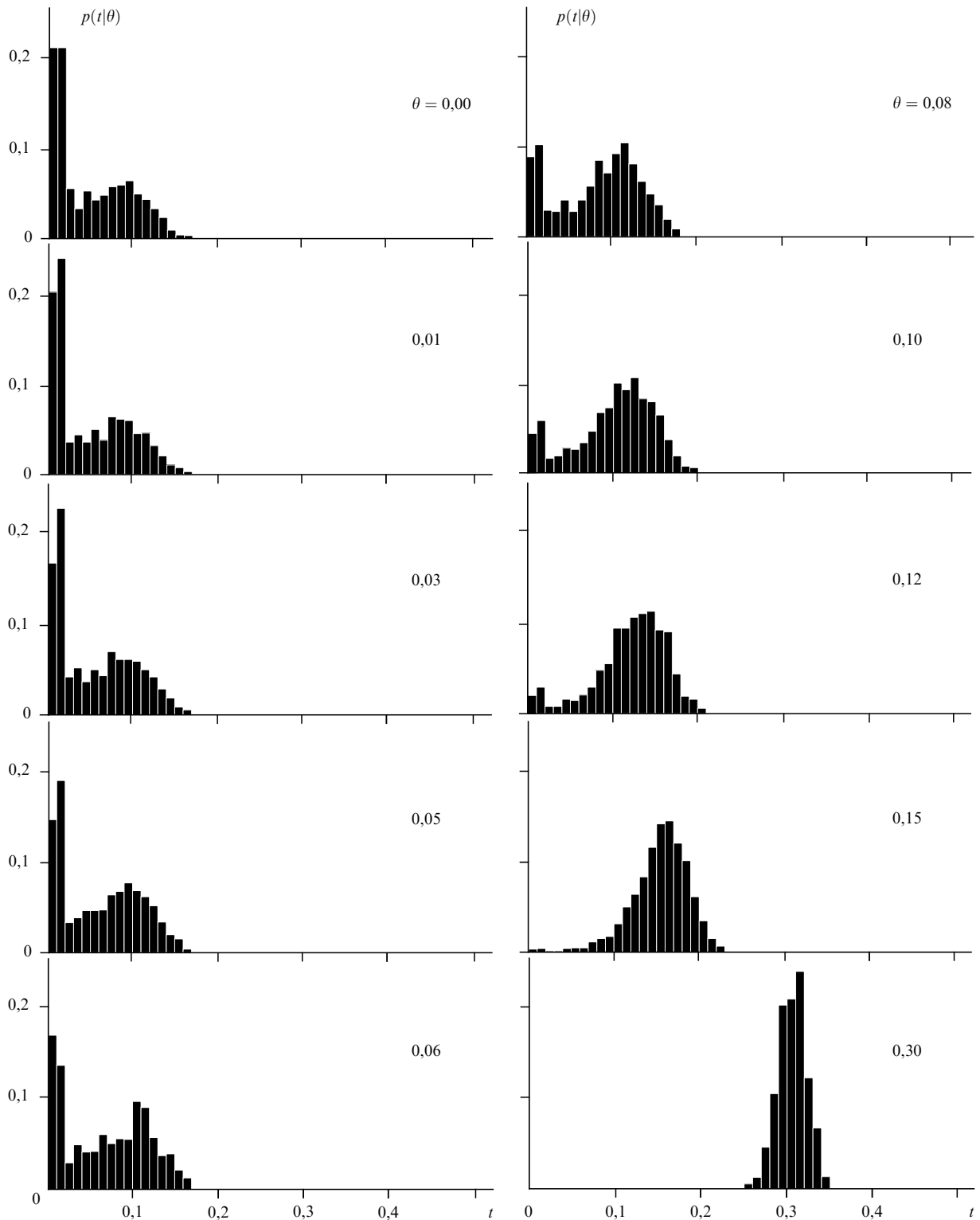


Рис. 17. Выборочные плотности распределения оценки  $\hat{t}$  в зависимости от истинного разделения компонент  $\theta$

Предполагалась заданной следующая информация: 1) случайно размытое и зашумленное изображение было порождено объектом, состоящим из двух некогерентных точечных источников равной яркости; 2) заданы общая яркость объекта  $F$  и средний уровень равномерного фона  $\gamma$ ; 3) флуктуации числа отсчетов подчиняются распределению Пуассона; 4) ФРТ  $h(x - x')$  имеет дифракционный вид (5.32). На основании априорной информации и наблюдаемой реализации изображения нужно по

возможности точнее оценить расстояние между компонентами двойного источника (оно может быть и нулевым).

Обозначим координаты компонент через  $x_1$  и  $x_2$ , а посредством  $\theta = |x_1 - x_2|/\Delta$  — истинное значение их относительного разделения. В ходе численного моделирования каждая из компонент независимо одна от другой случайно размывалась "фотон за фотоном", и затем к размытому изображению добавлялась случайная реали-

зация фона. Очевидно, результирующее изображение подчиняется многомерному распределению Пуассона (2.4) при средних значениях отсчетов

$$q_j = \frac{F}{2} [h(j - x_1) + h(j - x_2)] + \gamma_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (7.20)$$

Далее находятся оценки  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$  координат компонент и, наконец, оценка относительного их разделения  $\hat{\theta} = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|/\Delta$ . С целью построения выборочных плотностей распределения  $p(t|\theta)$  оценок  $\hat{\theta}$  описанные процедуры повторялись десятки–сотни тысяч раз для каждого из значений  $\theta$ .

Заметим, что здесь рассматривается более общая модель по сравнению с обсуждавшейся в разделах 7.2–7.4, где нужно было выбрать один из только двух типов альтернативных объектов. В то же время настоящая модель представляется и более приближенной к условиям практики, поскольку точное расстояние между компонентами очень редко известно заранее.

Для того чтобы обеспечить сохранение высокочастотной информации об оригинале, а в данном случае, чтобы просто была возможность, если это потребует, вынести оценки координат компонент за пределы одного пиксела, следует предусмотреть достаточно малый размер пиксела в пространстве объектов  $p_o$ . В противоположность этому, ввиду известной *теоремы отсчетов* нет смысла принимать размер пиксела в пространстве изображений  $p_i$  намного меньшим ширины ФРТ  $\Delta$ . Точное соотношение между  $p_i$  и  $p_o$  зависит от величины отношения сигнала к шуму. В самом деле, соотношение (7.17) предсказывает, что наименьшее обнаружимое разделение компонент примерно в  $\sqrt{\psi}$  раз меньше  $\Delta$ , и потому примерно во столько же раз меньшим  $\Delta$  следует выбрать и  $p_o$ .

Оценки положений компонент были получены при помощи метода максимума правдоподобия. Мы говорили в разделах 3, 4, что многомерные ОМП неустойчивы, однако в данном случае нужно оценить всего два параметра, так что есть основания ожидать эффективности ОМП. Это согласуется и с результатами пробных расчетов.

На рис. 17 представлены результаты моделирования для случая, когда  $F = 10^4$  соб.;  $\Delta = 100$  пикс.,  $\gamma_j \equiv 10$  соб./пикс. Столь большая ширина ФРТ была выбрана из-за обсуждавшейся выше опасности неоправданно загрузить результаты восстановления. Сначала расчеты проводились при  $p_i = p_o = \Delta/100$  (контрольные вычисления со вдвое более тонкой дискретизацией не меняют результатов).

Как и следовало ожидать, в случае широких пар вычисленные оценки  $\hat{\theta}$  тесно группируются вокруг истинных значений  $\theta$ . По мере уменьшения разделения компонент  $\theta$  дисперсия оценок  $\hat{\theta}$  возрастает и становятся все более частыми случаи, когда вообще объект принимается за одиночный. Пик выборочного распределения  $p(t|\theta)$  при  $t = 0$  обусловлен неравноценностью выводов при слишком компактных и слишком разреженных реализациях изображения. После достижения некоторого критического значения  $\theta \approx 0,06 - 0,08$  плотность  $p(t|\theta)$  уже практически не меняется, так что восстановление вида объекта, порождающего наблюдаемое изображение, становится невозможным. Это означает, что

указанное значение  $\theta$  следует рассматривать как предельное в данных условиях. Более ясно наличие предела видно на рис. 18, где показано изменение среднего значения  $\langle \hat{\theta} \rangle$  по мере сближения компонент. Модельное значение предельного разрешения хорошо согласуется с теоретическим пределом (7.17).

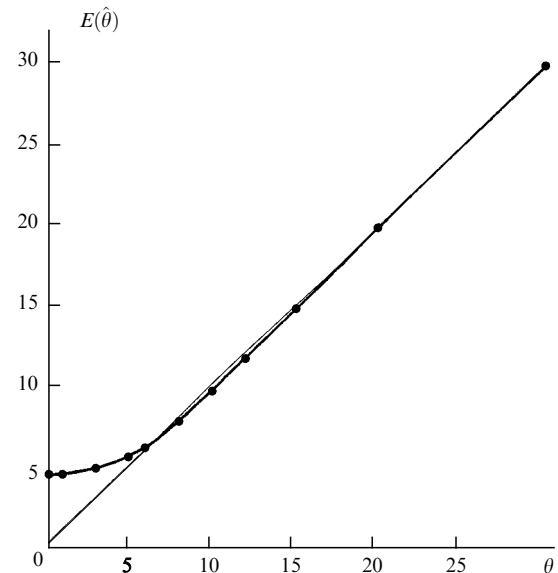


Рис. 18. Соотношение между выборочным средним  $\langle \hat{\theta} \rangle$  и истинным  $\theta$  разделением компонент

Как уже говорилось, в силу *теоремы отсчетов* Ла Валле Пуссена–Котельникова–Шеннона (см. [122, 123, 7, 8]) выбор малых пиксела изображения  $p_i = 0,01\Delta$  является неоправданным. Согласно этой теореме, для сохранения всей информации о детерминированной функции с предельной частотой в спектре  $f_c$  нужно обеспечить частоту отсчетов, равную по крайней мере  $2f_c$ . В рассматриваемом случае  $f_c = \Delta^{-1}$ , и мы должны расположить на "радиусе" ФРТ  $\Delta$  не менее двух отсчетов. Стохастическая природа изображения и неточность отсчетов сильно затрудняют аналитический подход, так что в ходе проводимых численных экспериментов мы имели хорошую возможность выяснить требуемое соотношение между оптимальными размерами пиксела изображения и шириной ФРТ.

На рис. 19 представлены выборочные плотности распределения  $\hat{\theta}$  при  $F = 10^4$  событий, истинном разделении компонент  $\theta = 0, 10$  и ряде значений отношения  $p_i/\Delta$ . Мы видим, что при  $p_i/\Delta \leq 0,5$ , т.е. при выполнении требования теоремы отсчетов, точность восстановления изменяется сравнительно мало, тогда как в случае слишком грубых пиксела изображения, когда  $p_i/\Delta > 0,5$ , она быстро уменьшается с увеличением размеров пиксела изображения.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что с уменьшением расстояния между компонентами переход от надежного обнаружения двойственности объекта к полной неопределенности происходит сравнительно быстро: он занимает лишь около 10 % ширины ФРТ. По этой причине можно надеяться на получение полезных результатов в достаточно обширной области разрешений между пределом Рэля и границей, задаваемой соотношением (7.17).

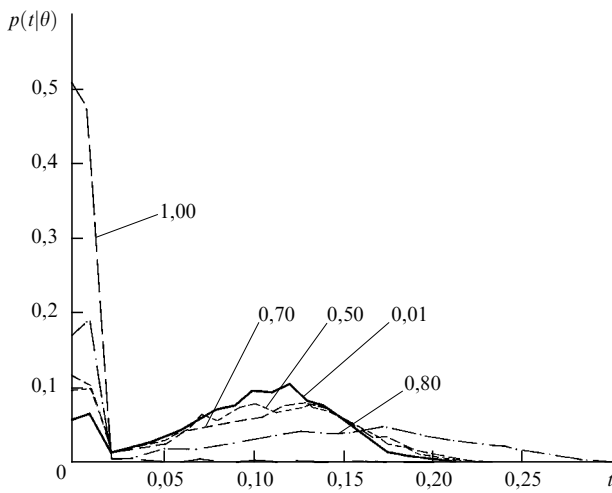


Рис. 19. Выборочные плотности распределения оценки  $\hat{\theta}$  для  $\theta = 0, 10$  и ряда значений отношения  $p_i/\Delta$

## 8. Заключение

Необходимость каким-либо образом устранить лишнюю информацию, содержащуюся в инверсном решении, ощущалась достаточно давно. Так, Снайдер с сотрудниками [124, 125] предлагают сглаживать оценку максимального правдоподобия, а Минц и Прилепский [32], Пинья и Пуэттер [33] изначально вводят в пространстве объектов грубую структуру, отвечающую усреднению объекта по специально подобранным областям. Оба пути ведут в нужном направлении; проблема, однако, заключается в том, чтобы избежать соображений субъективного характера при выборе сглаживающего ядра или крупнозернистой структуры. Кроме того, этот выбор нужно сделать не раз навсегда, а в зависимости от изучаемого объекта. Переход к главным компонентам выборочной матрицы Фишера (т.е. порожденной конкретным объектом) как раз и играет роль *бритвы Оккама* при выделении полезной информации. Можно показать, в частности, что этот переход эквивалентен рассмотрению ассоциированной обратной задачи с более грубой ФРТ, зависящей от объекта.

Таким образом, информационная матрица Фишера играет фундаментальную роль во всех обратных задачах независимо от того, имеем ли мы дело с решением системы уравнений, с томографической задачей или восстановлением изображений.

С другой стороны, существенное различие дисперсий главных компонент оценки оригинала естественным образом задает в пространстве объектов неравноценность решений, которая может рассматриваться как некоторая аналогия априорной плотности  $w(S)$ , привлекаемой в байесовском подходе, однако на этот раз указанная неравноценность объективно обусловлена условиями задачи.

В случае детерминированного сглаживания и тёплицевой (Тёплитц) ФРТ собственные значения матрицы  $I$  совпадают с энергетическим спектром Фурье  $h(x)$ , а соответствующие собственные векторы равны  $\exp(i \cdot 2\pi f x)$ , где  $f$  — пространственная частота. При этом главные компоненты инверсной оценки суть наибольшие по абсолютной величине оценки коэффициентов Фурье. На первый взгляд может показаться, что для получения устойчивой оценки объекта в общем случае

мы просто обрезаем при восстановлении высокочастотный хвост его спектра мощности. Действительный смысл предлагаемой процедуры далеко выходит за указанные границы.

Во-первых, учитывается неизбежный фотонный шум изображения, делающий задачу восстановления принципиально локальной (как это и понятно интуитивно: яркие части объекта должны восстанавливаться с более высокой точностью). Формально это свойство проявляется в том, что ФРТ "взвешивается" фактором  $\sqrt{Q(S)}$ . Во-вторых, вместо устранения высокочастотного хвоста спектра мощности производится оптимальное статистическое оценивание главных компонент, причем сохраняются не обязательно компоненты, отвечающие низким пространственным частотам, но те из них, которые имеют наибольший статистический вес. Наконец, вместо единых для всех объектов тригонометрических функций естественным образом появляются собственные векторы  $I$ , характеризующие конкретную задачу.

В связи с проблемой дискретизации в пространстве объектов [126, 28, 127] заметим, что введение главных компонент автоматически сохраняет лишь действительно имеющуюся информацию даже в том случае, когда выбраны чрезмерно мелкие пиксели.

При поисках оптимального решения в области допустимых оценок типа той, двумерная версия которой условно изображена на рис. 4, полезно иметь в виду некоторые противоречащие интуиции эффекты многомерия (см., например, [128]). Так, при числе измерений  $n \gg 1$  сколь угодно тонкий "поверхностный слой" гиперболы радиуса  $r$  охватывает почти весь ее объем  $V_n(r)$ . В самом деле, мы имеем

$$\frac{V_n[(1-\varepsilon)r]}{V_n(r)} = (1-\varepsilon)^n \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Поэтому нежелательные для нас районы ОДО, занятые неустойчивыми оценками, гораздо более обширны, чем это могло бы показаться из рассмотрения двумерной картины.

Поскольку задачи интерпретации экспериментальных данных относятся к числу обратных задач, трудности при обращении информации встречаются повсеместно. Избежать их удастся лишь в том случае, когда выбрана слишком грубая модель, для которой слабо проявляется неустойчивость обратного решения. Если же попытаться извлечь из данных содержащуюся в них информацию, проблема почти всегда усложняется, и мы вынуждены обращаться к введенным выше понятиям.

Приложения обсуждаемого подхода к проблеме компенсации атмосферных искажений изображения, а также к восстановлению обычных и томографических изображений можно найти в [127, 129].

В последние годы в области численного анализа данных наблюдается столь значительный прогресс как в отношении создания более совершенных алгоритмов вычислений, так и в отношении аппаратных средств, что соответствующая сторона проблемы восстановления изображений заслуживает отдельного рассмотрения.

### Благодарности

Автор признателен за полезное обсуждение затронутых вопросов В.В. Бирюкову (МГУ), Е. Веклерову (E. Veklerov, Lawrence Berkeley Laboratory, University of Califor-



nia), Р.Е. Гершбергу (Крымская астрофизическая обсерватория), Д.Л. Снайдеру (D.L. Snyder, Electronic Systems and Signals Research Laboratory, Washington University), О.К. Чербуниной и Ю.Г. Чербунину (МГУ).

## Список литературы

- Frieden B R, in *Picture Processing and Digital Filtering* (Ed. T S Huang) (Berlin: Springer, 1979) p. 179
- Lord Rayleigh (Strutt J W) *Scientific Papers* Vol. 1 (New York: Dover, 1964)
- Schuster A *Terrest. Magn.* **3** 13 (1898)
- Schuster A *Proc. Roy. Soc.* **77** 136 (1906)
- Feynman R P, Leighton R B, Sands M *The Feynman Lectures in Physics* Vol. 2, Ch. 40 (Reading: Addison-Wesley, 1964); Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* (М.: Мир, 1966)
- Terebizh V Yu *Proc. 3rd ESO/ST-ECF Data Analysis Workshop* (Eds P J Grosbol, R H Warmels) (Garching: ESO Conf. and Workshop Proc. No. 38, 1991)
- Shannon C *Bell Syst. Techn. J.* **27** 379, 623 (1948)
- Shannon C *Proc. IRE* **37** 10 (1949)
- Bayes T *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances* (1763) (Reprint: *Biometrika* **45** 293 (1958))
- Zacks S *The Theory of Statistical Inference* (New York: Wiley, 1971); Закс С *Теория статистических выводов* (М.: Мир, 1975)
- Колмогоров А Н *Изв. АН СССР, сер. мат.* **5** 3 (1941)
- Wiener N *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications* (MIT NDRC Report, 1942; Reprinted MIT Press, 1949)
- Турчин В Ф, Козлов В П, Малкевич М С *УФН* **102** 345 (1970)
- Phillips D L *J. Assoc. Comput. Mach.* **9** 84 (1962)
- Twomey S *J. Assoc. Comp. Mach.* **10** 97 (1963)
- Twomey S *J. Franklin Inst.* **279** 95 (1965)
- Тихонов А Н *ДАН СССР* **151** 501 (1963)
- Тихонов А Н *ДАН СССР* **153** 49 (1963)
- Jaynes E T *Phys. Rev.* **106** 620 (1957)
- Jaynes E T *Phys. Rev.* **108** 171 (1957)
- Burg J P *Paper presented at 37th Ann. Soc. of Expl. Geoph. Meet.* (Oklahoma City: Stanford Univ. Geoph. Dep., 1967)
- Frieden B R *J. Opt. Soc. Amer.* **62** 511 (1972)
- Veklerov E, Llacer J *IEEE Trans. MI* **6** 313 (1987)
- Llacer J, Veklerov E *IEEE Trans. MI* **8** 186 (1989)
- Теребиж В Ю *Астрофизика* **32** 327 (1990)
- Теребиж В Ю *Астрофизика* **33** 409 (1990)
- Terebizh V Yu *Astron. and Astrophys. Trans.* **1** 3 (1991)
- Terebizh V Yu *Astron. and Astrophys.* **270** 543 (1993)
- Terebizh V Yu, Biryukov V V *Astron. and Astrophys. Trans.* **6** (37) (1994)
- Теребиж В Ю, Бiryukov В В *Доклады РАН* (в печати)
- Terebizh V Yu, Biryukov V V *Astron. and Space Sci.* **218** 65 (1994)
- Милиц М Я, Прилепский Е Д *Опт. и спектр.* **75** 696 (1993)
- Piña R K, Puetter R C *PASP* **105** 630 (1993)
- Helstrom C W *J. Opt. Soc. Amer.* **59** 164 (1969)
- Helstrom C W *J. Opt. Soc. Amer.* **60** 659 (1970)
- Mehta C L, in *Progress in Optics* Vol. 8 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1970) p. 373
- Troup G G, in *Progress in Quantum Electronics* Vol. 2 (Eds J H Sanders, S Stenholm) (1972) p. 1
- Теребиж В Ю *Анализ временных рядов в астрофизике* (М.: Наука, 1992)
- Cox D R *J. Roy. Statist. Soc. B* **17** 129 (1955)
- Mandel L *Proc. Phys. Soc. (London)* **72** 1037 (1958)
- Mandel L *Proc. Phys. Soc. (London)* **74** 233 (1959)
- Snyder D L, Hammoud A M, White R L *J. Opt. Soc. Amer. A* **10** 1014 (1993)
- Боровков А А *Математическая статистика* (М.: Наука, 1984)
- Fisher R A *Phil. Trans. A* **222** 309 (1921)
- Torraldo di Francia G *J. Opt. Soc. Amer.* **45** 497 (1955)
- Seber G A F *Linear Regression Analysis* (New York: Wiley, 1977); Себер Дж *Линейный регрессионный анализ* (М.: Мир, 1980)
- Ермаков С М, Жигляевский А А *Математическая теория оптимального эксперимента* (М.: Наука, 1987)
- Morris J *Phil. Mag.* **37** (7) 106 (1946)
- Bertero M, in *Inverse Problems* (Ed. G Talenti) (Berlin: Springer, 1986) p. 52
- Booth A D *Numerical Methods* (London: Butterworths, 1955); Бут Э *Численные методы* (М.: Физматгиз, 1959)
- Lanczos C *Applied Analysis* (New York: Prentice Hall, 1956); Ланцош К *Практические методы прикладного анализа* (М.: Физматгиз, 1961)
- Фаддеев Д К *Труды МИАН СССР* **53** 387 (1959)
- Фаддеев Д К, Фаддеева В Н *ЖВМФ* **1** 412 (1961)
- Bard Y *Nonlinear Parameter Estimation* (New York: Academic Press, 1974); Бард Й *Нелинейное оценивание параметров* (М.: Статистика, 1979)
- Fisher R A *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **222** 309 (1922)
- Fisher R A *Messenger of Mathematics* **41** 150 (1912)
- Aitken A C, Silverstone H *Proc. Roy. Soc. Edin. A* **61** 186 (1942)
- Frechet M *Rev. Inst. Int. Statist.* **182** (1943)
- Darmois G *Rev. Inst. Int. Statist. B* **9** (1945)
- Rao C R *Bull. Calcutta Math. Soc.* **37** 81 (1945)
- Cramer H *Mathematical Methods of Statistics* (New York: Princeton Univ. Press, 1946); Крамер Г *Математические методы статистики* (М.: Мир, 1975)
- Hoerl A E, Kennard R W *Technometrics* **12** 55 (1970)
- Hoerl A E, Kennard R W *Technometrics* **12** 69 (1970)
- Edgeworth E Y *J. Roy. Stat. Soc.* **71** 381, 499, 651 (1908)
- Edgeworth E Y *J. Roy. Stat. Soc.* **72** 81 (1909)
- Wiener N *Cybernetics* (New York: M.I.T. Press and Wiley, 1961); Винер Н *Кибернетика* (М.: Наука, 1983)
- Cox D R, Hinkley D V *Theoretical Statistics* (New York: Chapman and Hall, 1974); Кокс Д, Хинкли Д *Теоретическая статистика* (М.: Мир, 1978)
- Kullback S, Leibler R A *Ann. Math. Statist.* **22** 79 (1951)
- Kendall M G, Stuart A *The Advanced Theory of Statistics* Vol. 2, 3 (London: Griffin, 1969); Кендалл М, Стюарт А *Статистические выводы и связи* (М.: Наука, 1973)
- Большев Л Н, Смирнов Н В *Таблицы математической статистики* (М.: Наука, 1965)
- Колмогоров А Н *Проблемы передачи информации* **1** 3 (1965)
- Колмогоров А Н *Проблемы передачи информации* **5** 3 (1969)
- Von Mises R *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (Berlin: Springer, 1928)
- Solomonoff R *Information and Control* **7** 1 (1964)
- Martin-Löf P *Information and Control* **9** 602 (1966)
- Звонкин А К, Левин Л А *Усп. мат. наук* **25** (6) 85 (1970)
- Ford J *Physics Today* **36** 40 (1983)
- Rose A *Vision: Human and Electronic* (New York: Plenum Press, 1973); Роуз А *Зрение человека и электронное зрение* (М.: Мир, 1977)
- Bershad N J *J. Opt. Soc. Amer.* **59** 157 (1969)
- Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1964); Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
- Davenport W B, Root W L *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise* (New York: McGraw-Hill, 1958); Давенпорт В, Рут В *Введение в теорию случайных сигналов и шумов* (М.: ИЛ, 1960)
- Cole E R *Ph. D. Dissertation* (Salt Lake City: Dept. of Electrical Eng., Univ. of Utah, 1973)
- Пинскер М С *ДАН СССР* **99** 213 (1956)
- Fellgett P B, Linfoot E H *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **247** 369 (1955)
- Гельфанд И М, Яглом А М *Усп. мат. наук* **12** 3 (1957)
- Теребиж В Ю *Астрофизика* (в печати)
- Airy G B *Trans. Cambr. Phil. Soc.* **5** 283 (1835)
- O'Neill E L *J. Opt. Soc. Amer.* **46** 285, 1096 (1956)
- O'Neill E L *Introduction to Statistical Optics* (Reading: Addison-Wesley, 1963); О'Нейл Э *Введение в статистическую оптику* (М.: Мир, 1966)
- Hotelling H *J. Educ. Psych.* **24** 417, 498 (1933)
- Einstein A, Infeld L *The Evolution of Physics* (New York: Simon and Schuster, 1942); Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 4 (М.: Наука, 1967) с. 357

92. Kramer H P, Mathews M V *IRE Trans. Inf. Theory* **IT-2** 41 (1956)
93. Rao C R *Sankhya A* **26** 329 (1964)
94. Rao C R *Linear Statistical Inference and Its Applications* (New York: Wiley, 1965); Рао С *Линейные статистические методы и их применения* (М.: Наука, 1968)
95. Brillinger D R *Time Series Analysis* (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975); Бриллинджер Д *Временные ряды* (М.: Мир, 1980)
96. Biraud Y *Astron. Astrophys.* **1** 124 (1969)
97. Bertsekas D P *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods* (New York: Academic Press, 1982); Бертсекас Д *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа* (М.: Радио и связь, 1987)
98. Айвазян С А и др. *Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности* (М.: Фин. и стат., 1989)
99. Autonne L *Ann. Univ. Lion* **38** 1 (1915)
100. Lawson C L, Hanson R J *Solving Least Squares Problems* (New Jersey: Prentice-Hall, 1974); Лоусон Ч, Хенсон Р *Численное решение задач методом наименьших квадратов* (М.: Наука, 1986)
101. Press W H et al. *Numerical Recipes* (London: Cambridge Univ. Press, 1986)
102. Loeve M *Probability Theory* (New York: Van Nostrand, 1963); Лоэв М *Теория вероятностей* (М.: ИЛ, 1962)
103. Jain A K *Fundamentals of Digital Image Processing* (New Jersey: Prentice-Hall, 1989)
104. Andrews H C, Patterson C L *Amer. Math. Monthly* **1** 1 (1975)
105. Andrews H C, Patterson C L *IEEE Trans. Comp. C* **25** 140 (1976)
106. Huang T S, Narendra P M *Appl. Opt.* **14** 2213 (1975)
107. Andrews H C, Patterson C L *IEEE Trans. Ac. ASSP* **24** 26 (1976)
108. Pratt W K *Digital Image Processing* (New York: Wiley, 1978); Прэтт У *Цифровая обработка изображений* (М.: Мир, 1982)
109. Schelkunoff S A *Bell Syst. Tech. J.* **22** 80 (1943)
110. Горелик Г С *ДАИ СССР* **83** 549 (1952)
111. Toraldo di Francia G J. *Opt. Soc. Amer.* **59** 799 (1969)
112. Раутиан С Г *УФН* **66** 475 (1958)
113. Wolter H, in *Progress in Optics* Vol. 1 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1961) p. 155
114. Козлов В П *Опт. и спектроск.* **16** 501 (1964)
115. Harris J L J. *Opt. Soc. Amer.* **54** 606 (1964)
116. Harris J L J. *Opt. Soc. Amer.* **54** 931 (1964)
117. Frieden B R J. *Opt. Soc. Amer.* **57** 1013 (1967)
118. Rushforth C K, Harris R W J. *Opt. Soc. Amer.* **58** 539 (1968)
119. Snyder D L, Miller M I *Random Point Processes in Time and Space* (Berlin: Springer, 1991)
120. Terebizh V Yu, Cherbunina O K *Astron. and Astrophys. Trans.* (in press)
121. Lucy L *Astron. J.* **104** 1260 (1992)
122. Колмогоров А Н, Тихомиров В М *Усп. мат. наук* **14** (2) 3 (1959)
123. Котельников В А *Материалы к I Всесоюз. съезду по вопр. техн. реконстр. дела связи и разв. слаботочной пром.* (М., 1933)
124. Snyder D L, Miller M I *IEEE Trans. NS* **32** 3864 (1985)
125. Snyder D L et al. *IEEE Trans. MI* **6** 228 (1987)
126. Snyder D L, in *The Restoration of HST Images and Spectra, Proc. Workshop STScI* (Eds R L White, R J Allen) (Baltimore: NASA, 1990) p. 56
127. Terebizh V Yu *Astron. and Astrophys. Trans.* **3** 251 (1993)
128. Nicolis J S *Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach* (Berlin: Springer, 1986); Николис Дж *Динамика иерархических систем* (М.: Мир, 1989)
129. Теребиж В Ю, Чербунина О К, Чербуниин Ю Г *Астрофизика* **34** 419 (1991)

## IMAGE RESTORATION UNDER MINIMUM OF A PRIORI INFORMATION

V. Yu. Terebizh

Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute

334413, Nauchny, Crimea, Ukraine

Tel. (06554) 71382, 71036

Fax (06554) 40704

E-mail: terebizh@crao.crimea.ua

A consistent systematic approach to the problem of image restoration of blurred and noisy images is presented without the use of Bayesian *a priori* information. Photon noise is taken into account. The unknown object is treated as a multidimensional set of parameters for which effective statistical estimates have to be obtained. The proposed approach is based on an extended notion of an admissible estimate (in the sense of information theory) and Occam's rule of choosing the simplest object which is consistent with the observations. Occam's razor is implemented by transformation to the principal components of the inverse (or most likely) estimate that are generated by Fisher's information matrix. The proposed approach can also be applied to many other inverse problems.

PACS numbers: 95.75.-z, 95.75.Pq

Bibliography — 129 references

Received 20 October 1994