

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вещество в сверхсильном магнитном поле и структура поверхности нейтронных звезд

М. А. Либерман, Б. Йоханссон

Рассматриваются физические свойства атомов, молекул и твердого вещества в сверхсильном магнитном поле ($B \gg 10^9$ Гс) на поверхности нейтронной звезды. В таком магнитном поле электронные оболочки атомов сильно деформированы и вытянуты вдоль линий магнитного поля; энергия связи и энергия ионизации атомов сильно возрастают; существенно изменяется характер межатомного взаимодействия. Свойства вещества на поверхности нейтронной звезды являются определяющими для моделей магнитосферы пульсара. Обсуждается возможность изменения характера эмиссии и граничных условий для электрического поля — от свободной эмиссии в случае молодых пульсаров до полностью запертой эмиссии на поздних стадиях. Такое изменение характера эмиссии может быть связано с образованием сильно связанных полимерных цепочек, состоящих из чередующихся тяжелых и легких атомов, возникающих в результате аккреции легких атомов на поверхности звезды.

PACS numbers: 95.30.-k, 97.60.Jd

Содержание

1. Введение (121).
 - 1.1. Сильное и сверхсильное магнитные поля. 1.2. Пульсары — вращающиеся магнитные нейтронные звезды.
2. Атом водорода в сверхсильном магнитном поле (125).
3. Термы молекулы водорода в сверхсильном магнитном поле (127).
4. Бозе-конденсация и сверхтекучесть водорода в сильном магнитном поле (129).
5. Сверхтекучесть дейтерия в сильном магнитном поле (131).
6. Связанные состояния водорода в сверхсильном магнитном поле (132).
 - 6.1. Молекула водорода в сверхсильном магнитном поле. 6.2. Образование больших полимерных молекул водорода.
7. Тяжелый атом в умеренно сильном магнитном поле. Модель Томаса–Ферми (136).
 - 7.1. Тяжелый атом в умеренно сильном магнитном поле. 7.2. Тяжелый атом в сверхсильном магнитном поле. 7.3. Молекулы. Уравнение состояния.
8. Вещество в сверхсильном магнитном поле (139).
9. Заключение (140).
- Список литературы (141).

М. А. Либерман. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2
Physics Department, University of Uppsala
Box 530, S-75121 Uppsala, Sweden
Tel. (4618) 18 31 02, Fax (4618) 55 49 17
E-mail: mishal@snobben.teknikum.uu.se
B. Johansson. Physics Department, University of Uppsala
Box 530, S-75121 Uppsala, Sweden
Tel. (4618) 18 36 23, Fax (4618) 18 35 24

Статья поступила 21 октября 1994 г.

1. Введение

1.1. Сильное и сверхсильное магнитные поля

Хорошо известны разнообразные проявления действия магнитного поля в различных областях физики. Достаточно сильное магнитное поле может намагничивать кусок металла, изменять электропроводность металла или полупроводника. Сильные магнитные поля необходимы для удержания и термоизоляции термоядерной плазмы. Мы говорим о сильном магнитном поле, если эффект, вызываемый приложенным полем, сильно изменяет свойства вещества, например электропроводность, диффузию и т.п.

Во всех вышеперечисленных случаях неопределенным остается само понятие "сильного" магнитного поля. Критерий сильного или слабого магнитного поля зависит от влияния, оказываемого полем на систему, и определяется параметрами самой системы: плотностью, температурой и т.д. Так, действие магнитного поля на ферромагнетик—это коллективный эффект, зависящий от большого числа: плотности элементарных магнитных моментов в ферромагнетике.

Влияние магнитного поля на электропроводность, теплопроводность, диффузию и другие кинетические коэффициенты определяется малым отклонением от равновесия. Например, степень влияния магнитного поля на транспортные коэффициенты плазмы зависит от отношения частоты столкновения электронов ν_e к ларморовской частоте вращения электрона в магнитном поле

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e c} = 1,76 \cdot 10^7 B.$$

Для плазмы магнитное поле будет сильным, если $\nu_e/\omega_c \ll 1$. Учитывая, что частота столкновений элект-

рона в полностью ионизованной плазме

$$\nu_e = \frac{4\sqrt{2}\pi e^4 Z^2 n_i A}{3\sqrt{m_e} T_e^{3/2}} = 2,85 \cdot 10^{-5} \frac{A}{10} \frac{Z n_i}{T_e^{3/2}},$$

где Z — заряд иона, A — кулоновский логарифм, получаем условие сильного магнитного поля для плазмы в виде

$$B \gg 1,6 \cdot 10^{-12} \frac{A}{10} \frac{Z n}{T_e^{3/2}}.$$

Здесь и далее, если это не оговорено, температура выражается в электрон-вольтах, магнитное поле — в гауссах, плотность — в сантиметрах в минус третьей степени.

Таким образом, для типичных параметров лабораторной термоядерной плазмы, т.е. для $n \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $T \approx 5 \text{ кэВ}$, "сильными" будут магнитные поля порядка 10 кГс, тогда как для космической межзвездной плазмы даже магнитное поле порядка 1 Гс является уже очень сильным.

Заметим, что в рамках классической физики нельзя дать абсолютную классификацию магнитных полей. Такая классификация может быть получена только в квантовой физике. Она следует из сравнения энергии магнитного момента

$$\mu B = \frac{e\hbar}{2m_e c} B$$

с характерной энергией системы или частицы.

Магнитное поле, влияющее на ориентацию спинов электронов или атомов в газе, имеющем температуру T , определяется условием

$$\mu B \gg k_B T, \quad \text{или} \quad B \gg 1,49 \cdot 10^4 T [\text{К}] \text{ Гс}. \quad (1.1)$$

Магнитное поле, в котором энергия магнитного момента μB больше, чем характерная энергия связи атома или молекулы (порядка $Ry \equiv m_e e^4 / 2\hbar^2$), т.е. обладающее индукцией

$$B > B_9 \equiv \frac{m_e^2 e^3 c}{\hbar^3} = 2,35 \cdot 10^9 \text{ Гс}, \quad (1.2)$$

существенно влияет на структуру атомов и молекул и сильно изменяет их энергию связи и энергию ионизации.

Если магнитное поле таково, что радиус электронной орбиты в нижней зоне Ландау $\rho_0 = (\hbar c / eB)^{1/2}$ меньше, чем комптоновская длина волны электрона, или, что то же самое, выполняется условие

$$\mu B > m_e c^2, \quad B > B_{13} \equiv \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \quad (1.3)$$

то существенными становятся релятивистские эффекты.

Магнитное поле $B \gg B_{13}$ сильно влияет на распространение электромагнитных волн в вакууме: вакуум может поляризоваться, а электродинамика в таких магнитных полях становится нелинейной. Релятивистские эффекты в магнитных полях $B \geq 10^{13} \text{ Гс}$, в частности влияние сильного магнитного поля на β -распад и на обратный β -распад, т.е. захват электрона ядром, рассматривались в [1]. Особый интерес представляет влия-

ние такого поля на поток нейтрино, излучаемый нейтронной звездой [2].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением нерелятивистских эффектов и явлений в сверхсильных магнитных полях, типичных для нейтронных звезд, т.е. будем считать, что $B_{13} > B \gg B_9$. Заметим, что $B_{13} = \alpha^{-2} B_9$, где $\alpha = e^2 / \hbar c$ — постоянная тонкой структуры.

В настоящем обзоре мы рассматриваем физические свойства вещества в сверхсильных магнитных полях, типичных для поверхности нейтронных звезд, так что для индукции магнитного поля предполагается выполненным неравенство (1.2). В таком магнитном поле расстояние между уровнями Ландау значительно больше, чем энергия кулоновского взаимодействия электронов с ядром атома. Электронные оболочки атомов при этом полностью перестраиваются, и атомы приобретают форму тонких трубочек, вытянутых вдоль магнитного поля, с электронными спинами, ориентированными строго против магнитного поля.

Особенность взаимодействия полностью поляризованных и сильно деформированных атомов приводит к появлению вещества с совершенно новыми и необычными свойствами. В зависимости от квантового состояния атома, основного или слабовозбужденного, межатомное взаимодействие либо слабое, так что атомы могут образовывать бозе-конденсат и переходить в сверхтекучее состояние, либо достаточно сильное, так что образуются длинные полимерные молекулярные цепочки и кристаллы с большой энергией связи.

Заметим, что бозе-конденсация, в принципе, возможна для спин-поляризованного водорода [3–5] при выполнении неравенства (1.1). Такие магнитные поля вполне реальны в лабораторных условиях: неравенство (1.1) выполняется для полей порядка нескольких тесла при $T \leq 1 \text{ К}$. Однако при этом газ спин-поляризованных атомов водорода термодинамически неустойчив относительно рекомбинации с образованием молекул водорода в основном состоянии Σ_g^+ , энергия связи которых 4,6 эВ огромна по сравнению с μB . Поэтому бозе-конденсация спин-поляризованного водорода возможна только при достаточно низкой плотности и, следовательно, при очень низкой температуре.

Особый интерес в "земных условиях" представляют экситоны, для которых условие сверхсильного магнитного поля (1.2) принимает вид

$$B \gg B_{\text{ex}} = \frac{m_{\text{eff}}^2 e^3 c}{\varepsilon^2 \hbar^3}. \quad (1.4)$$

При этом значение сверхсильного магнитного поля зависит от свойств полупроводника. Из-за малой приведенной массы m_{eff} и большой диэлектрической проницаемости ε (специально для прямозонных полупроводников) магнитное поле для экситонов становится "сверхсильным" уже при полях порядка тесла. Так, сильное поле для Ge начинается с 0,9 Тл, а для InSb — с 0,2 Тл.

Изменение свойств экситонов в сверхсильном магнитном поле приводит к новым интересным физическим явлениям. Благодаря значительному увеличению энергии связи экситонов в сильном поле и уменьшению взаимодействия между ними экситонная жидкость приобретает свойства почти идеального бозе-газа, так что реальными

становятся бозе-конденсация и сверхтекучесть экситонной жидкости, образование экситонного кристалла и т.п. [6, 7].

В сильном магнитном поле бозе-конденсация экситонов возможна при плотности экситонного газа, в $(B/B_{\text{ex}}) \ln(B/B_{\text{ex}})$ раз большей, чем соответствующая предельная плотность a_0^{-3} бозе-конденсации экситонного газа без магнитного поля, где a_0 — боровский радиус экситона. При еще более высокой плотности экситонного газа, когда перекрытие волновых функций становится существенным, основным состоянием будет электронно-дырочная плазма [101].

Предсказываемые эффекты представляют не только интерес для фундаментальной физики, но и возможность получения полупроводников с новыми необычными свойствами, такими, как сверхпрозрачность, сверхтеплопроводность и т.п. [6, 7].

1.2. Пульсары — вращающиеся магнитные нейтронные звезды

Для любого специалиста, занимающегося физикой магнитных явлений, магнитные поля порядка $10^{12} - 10^{13}$ Гс представляются чем-то совершенно нереальным и относящимся к области фантастики¹. Однако открытие в 1967 г. английскими астрономами из Кембриджа [11, 12] пульсаров — вращающихся магнитных нейтронных звезд, на поверхности которых магнитные поля достигают огромных значений (порядка $10^{12} - 10^{13}$ Гс), сделало исследование свойств вещества в таких гигантских магнитных полях не только чисто академической задачей.

Само по себе открытие пульсаров было настоящим триумфом не только для астрономии, но и для теоретической физики. Возможность существования нейтронных звезд была предсказана [13, 14] задолго до фактического обнаружения первого пульсара. Интересно, что всего за несколько месяцев до того, как Хьюиш с соавторами опубликовали в журнале "Nature" первое сообщение об открытии пульсара, в том же журнале была опубликована статья [15], в которой рассматривалась возможность генерации регулярных импульсов электромагнитного излучения быстро вращающейся намагниченной нейтронной звездой. Таким образом, пульсары фактически впервые появились на кончике пера теоретиков, а уже потом стали реальными объектами.

То, что пульсары — это быстро вращающиеся намагниченные нейтронные звезды, следует из простейших соображений и стало ясно почти сразу после открытия пульсаров [16]. Очевидно также, что, поскольку благодаря вращению сильно намагниченной нейтронной звезды радиусом R с частотой Ω у ее поверхности индуцируется огромное электрическое поле

$$E \approx \frac{1}{c} \Omega R B \approx 10^{12} \text{ В см}^{-1}, \quad (1.5)$$

такая звезда должна иметь протяженную атмосферу.

Действительно, даже если принять для оценки, что в "вакуумном приближении" пульсар излучает магнитно-дипольное излучение, как в вакууме, то для всех известных в настоящее время пульсаров значение ΩB будет

находиться в пределах от 10^{12} до 10^{14} , т.е. электрическая сила, действующая на заряженную частицу на поверхности пульсара с массой порядка массы Солнца $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{33}$ г и радиусом порядка $10^{-5} R_{\odot} \approx 10^6$ см ($R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^{10}$ см), должна быть примерно на семь-восемь порядков больше силы гравитационного притяжения.

Огромные магнитные поля нейтронных звезд (порядка $10^{11} - 10^{13}$ Гс) образуются в процессе эволюции звезд. Согласно теории звездной эволюции нейтронная звезда, представляющая собой заключительную фазу эволюции, возникает в результате коллапса звезды с первоначальной массой вблизи чандрасекаровского предела $1,5 M_{\odot} \leq M \leq 3 M_{\odot}$ после того, как звезда исчерпала свои запасы термоядерной энергии. Такая звезда должна состоять преимущественно из атомов железа, поскольку, начиная с элементов тяжелее ^{56}Fe , термоядерная реакция становится эндотермической [17].

Типичный сценарий образования нейтронной звезды обычно сопровождается вспышкой сверхновой. Самый "знаменитый" пульсар PSR-0531+21 виден в Крабовидной туманности как раз в том месте, где китайские астрономы в 1054 г. наблюдали яркую вспышку сверхновой. Он имеет период вращения $P \approx 0,033$ с. Периоды вращения более тысячи известных к настоящему времени пульсаров составляют от 0,015 до 3,74 с [18].

В результате гравитационного сжатия при огромных плотностях в центре звезды становится энергетически выгодным захват электронов протонами в результате реакции $p + e^- \rightarrow \nu_e + n$. При балансе давления образующейся вырожденной нейтронной жидкости и давления гравитационного поля достигается равновесное состояние звезды, и ее сжатие останавливается.

Простую оценку для массы нейтронной звезды в равновесии можно получить, если приравнять давление сильно вырожденной нейтронной жидкости плотности n в звезде радиусом R , равное

$$P_n = \hbar c n^{4/3} \approx \frac{\hbar c N^{4/3}}{R^4} \quad (1.6)$$

(где N — полное число нейтронов), гравитационному давлению

$$P_g \approx G \frac{M^2}{R^4}. \quad (1.7)$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ дин см² г⁻² — гравитационная постоянная. Масса нейтронной звезды получается равной

$$M_n \approx \frac{1}{m_n^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \approx 1,4 M_{\odot}, \quad (1.8)$$

где m_n — масса нейтрона, $M_{\odot}$ — масса Солнца.

Плотность в центре нейтронной звезды можно оценить как

$$\rho \approx \frac{m_n}{(4\pi/3)(\hbar/m_n c)^3} \approx 10^{16} \text{ г см}^{-3}, \quad (1.9)$$

откуда следует оценка для радиуса нейтронной звезды

$$R_n \approx \left(\frac{M_n}{\rho} \right)^{1/3} \approx 10^{-5} R_{\odot} \approx 10^6 \text{ см}. \quad (1.10)$$

¹ Максимальные импульсные магнитные поля, полученные в лабораторных условиях, составляют 25 МГс для взрывомагнитных генераторов [8] и 40 МГс для пинчующихся плазменных лайнеров [9, 10].

При высокой температуре и электропроводности звездной материи начальное магнитное поле звезды сжимается вместе с веществом в процессе коллапса, будучи замороженным в вещество, и растет как

$$B_n \propto B_0 \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^2, \quad (1.11)$$

где B_0 , R_0 и B_n , R_n — начальные и конечные значения магнитного поля и радиуса звезды соответственно. Для типичных значений звездных магнитных полей порядка 10^2 – 10^3 Гс отсюда следует, что магнитное поле пульсара будет порядка 10^{12} – 10^{13} Гс, что удовлетворительно согласуется с наблюдаемыми значениями.

Заметим, что максимальное магнитное поле для нейтронной звезды можно оценить из теоремы вириала, полагая, что для звезды радиусом R магнитная энергия $(B^2/8\pi) \cdot 4\pi R^3/3$ равна гравитационной энергии GM^2/R . Отсюда для максимального магнитного поля нейтронной звезды получаем

$$B_{n\max} \sim 10^{18} \frac{M}{M_n} \left(\frac{R}{R_n} \right)^{-2} \text{ Гс.}$$

Интересно отметить, что ввиду консервативности магнитного поля нет принципиальных ограничений сверху на его максимальное значение (в отличие от электрического поля). Однако поскольку из-за вращения нейтронной звезды индуцируется электрическое поле $E \approx c^{-1} \Omega R B$, то фактически ограничение на значение магнитного поля следует из ограничения сверху на индуцируемое им электрическое поле. Поэтому максимальное магнитное поле, которое может существовать в пульсарах, вероятно, не превышает $B \leq cE_{\max}/\Omega R \sim 10^{15}$ Гс.

Сразу после рождения температура на поверхности нейтронной звезды очень большая, однако звезда быстро остывает из-за интенсивного излучения, так что температура на поверхности даже сравнительно молодых нейтронных звезд должна быть примерно 100 эВ. Для более или менее старых нейтронных звезд (старше миллиона лет) температура поверхности, вероятно, должна быть 10–20 эВ.

Огромные магнитные поля ($B \sim 10^{12}$ Гс $\gg B_0$) существенно деформируют атомы в тонком поверхностном слое нейтронной звезды. Происходит полная перестройка атомных оболочек, и существенно изменяется межатомное взаимодействие. В частности, энергия связи и потенциал ионизации атомов значительно возрастают по сравнению с атомами в обычных земных условиях, так что атомы оказываются неионизованными даже при относительно высокой температуре на поверхности нейтронной звезды.

Существенно изменяются также и свойства вещества на поверхности. Например, атомы водорода, которые довольно сильно взаимодействуют в обычных условиях, образуя молекулу с энергией связи примерно 4,5 эВ, и замерзают, образуя кристалл, при достаточно низкой температуре, становятся слабо взаимодействующими, будучи полностью поляризованными в магнитном поле $B \gg B_0$.

Более того, полностью поляризованный водород становится в определенном смысле похожим на гелий. Газ из полностью поляризованных атомов водорода в

основном состоянии не замерзает вплоть до нулевой температуры и может образовывать бозе-конденсат и переходить в сверхтекучее состояние при низких температурах.

В сверхсильном поле существенно изменяются также свойства тяжелых атомов и свойства вещества. Будучи поляризованными в сильном магнитном поле, атомы в основном состоянии слабо взаимодействуют, так что поверхность нейтронной звезды находится, вероятно, в жидком или газообразном состоянии. Энергия связи для вещества на поверхности звезды сравнима с температурой поверхности и заведомо мала по сравнению с расстояниями между уровнями Ландау: $\mu B \sim \hbar \omega_c \approx 11,7$ кэВ при $B = 10^{12}$ Гс.

Вместе с тем атомы в возбужденном состоянии могут сильно взаимодействовать, образуя молекулы, длинные полимерные цепочки или кристаллические структуры с энергией связи, намного большей, чем энергия связи в обычных молекулах или твердых телах.

Заметим, что влияние магнитного поля на состояние вещества существенно только в тонком поверхностном слое звезды (толщиной примерно 1 м). С увеличением плотности в глубь звезды, когда среднее расстояние между электронами $n_e^{-1/3}$ становится меньше циклотронного радиуса электрона на нижнем уровне Ландау, или, другими словами, при плотностях, когда температура Ферми $\hbar^2 n^{2/3}/m_e$ больше магнитной энергии μB , магнитное поле уже не оказывает существенного влияния на свойства вещества. Значение соответствующей плотности для магнитного поля $B \sim B_{12} \equiv 10^{12}$ Гс составляет примерно 10^6 г см $^{-3}$.

Следует сказать, что полной ясности относительно состояния вещества в сверхсильном магнитном поле на поверхности нейтронной звезды пока нет. Вместе с тем для теории магнитосферы пульсара и понимания природы его излучения крайне важно знание свойств вещества на поверхности звезды. Более того, для моделей магнитосферы они могут быть определяющими.

В самом деле, благодаря вращению намагниченной звезды имеется компонента электрического поля, параллельная магнитному полю, которая способна ускорять электрические заряды до релятивистских энергий. Эти частицы должны заполнять магнитосферу пульсара и быть ответственными за электромагнитное излучение.

В ранних работах [19, 20] предполагалось, что при сильном межатомном взаимодействии на поверхности нейтронной звезды может образоваться вещество, имеющее столь большую энергию связи и работу выхода (превышающую 3 кэВ), что истечение вещества из звезды может быть полностью заперто. В этом случае вблизи поверхности звезды образуется вакуумный зазор, в котором происходит значительное падение электрического потенциала: $\Delta \varphi \sim 10^{12}$ В. Пробой в этом зазоре происходит либо в результате каскадного процесса рождения электрон-позитронных пар [21], либо при рождении пар γ -квантами [22, 23]. Теория магнитосферы пульсара для случая полностью запертого истечения вещества из поверхности звезды подробно рассмотрена в монографии [24].

Однако в последние 10 лет в ряде работ [25–29] было показано, что в действительности для полностью поляризованных в сильном магнитном поле атомов межатомное взаимодействие, а следовательно, энергия связи

и работа выхода ионов не столь велики, как считалось ранее (во всяком случае, меньше 1 кэВ). В этом случае модели, основанные на большой работе выхода и предполагающие полностью запертую эмиссию частиц, становятся по крайней мере несамосогласованными [30–32].

В случае малой работы выхода, возможно, реализуется модель пульсара со "свободной эмиссией", в которой предполагается, что области замкнутых линий магнитного поля заполнены плазмой, а в областях открытых линий магнитного поля истечение частиц близко к предельному, при котором происходит полное экранирование электрического поля в этой области [33, 34]. Не исключено, что и другие процессы, например электрогидродинамическая неустойчивость [35], также влияют на структуру магнитосферы пульсара.

Можно сказать, что в целом структура магнитосферы зависит от того, какой из режимов истечения зарядов реализуется на самом деле. Таким образом, знание физических свойств вещества на поверхности нейтронной звезды в сильном магнитном поле оказывается одной из важнейших проблем для физики пульсаров.

Согласно теории звездной эволюции поверхность нейтронной звезды должна состоять из атомов тяжелых элементов, преимущественно из железа. Вместе с тем с течением времени нейтронные звезды могут приобретать легкие элементы, в основном водород и гелий, в результате аккреции из межзвездного пространства или (в случае двойной звезды) от своего компаньона [36, 37]. При этом тяжелые атомы будут тонуть, а легкие оставаться на поверхности звезды.

Таким образом, можно ожидать, что у "старых" нейтронных звезд в атмосфере и на поверхности будут преобладать водород и гелий при относительно низкой поверхностной температуре (около 10 эВ), а у "молодых" нейтронных звезд поверхность состоит в основном из железа и температура поверхности равна примерно 100 эВ. Следовательно, свойства вещества в сильном магнитном поле представляют интерес как в случае, когда оно состоит из легких атомов, так и в случае тяжелых атомов.

Возможно также, что для некоторых пульсаров реализуется переходный сценарий: модель магнитосферы со свободной эмиссией в начале жизни пульсара и модель с запертой эмиссией для старого пульсара, если энергия связи решетки из чередующихся тяжелых и легких атомов достаточно велика.

2. Атом водорода в сверхсильном магнитном поле

Задача об атоме водорода в сверхсильном магнитном поле впервые рассматривалась в связи с поведением водородоподобных экситонов (так называемых экситонов Ванье–Мотта) в полупроводниках в сильном магнитном поле [38–40]. В случае водородоподобных экситонов в полупроводнике "сверхсильное" магнитное поле не столь велико из-за малой эффективной приведенной массы электрона и большой диэлектрической проницаемости полупроводника. Так, для экситонов в InSb магнитному полю $B_9 = 2,35 \cdot 10^9$ Гс соответствует поле с индукцией 2 кГс, вполне доступное в лабораторных условиях.

Даже простейшая задача об атоме водорода в однородном магнитном поле не имеет точного аналитиче-

ского решения, поскольку из-за разной симметрии членов с магнитным полем и кулоновского потенциала переменные в уравнении Шрёдингера не разделяются. Уже в области слабых магнитных полей (линейный эффект Зеемана) и, особенно, в области промежуточных значений магнитного поля (квадратичный эффект Зеемана) не существует решений, позволяющих даже классифицировать энергетические состояния атома в магнитном поле, и не ясен вопрос о пересечении энергетических термов. Обзор этой важнейшей из нерешенных проблем атомной физики можно найти в [102].

В случае сверхсильного магнитного поля легко найти асимптотическое решение, которое, однако, можно получить лишь с логарифмической точностью (см. также [41], с. 112, задачи 1–3).

В сверхсильном магнитном поле $B \gg B_9$ расстояние между уровнями Ландау $\hbar\omega_c$ становится значительно больше энергии кулоновского взаимодействия, что эквивалентно условию

$$\frac{e^2}{a_0} \ll \hbar\omega_c, \quad (2.1)$$

где $a_0 \equiv \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус. При этом электрон находится на нижнем, нулевом, уровне Ландау, а атом деформируется, приобретая форму тонкой трубочки, вытянутой вдоль магнитного поля, с радиусом порядка $\rho_0 = (\hbar c/eB)^{1/2} \ll a_0$ и длиной $L < a_0$.

Оценку для энергии основного состояния атома водорода можно получить из рассмотрения простой модели. Будем считать, что в основном состоянии энергия атома складывается из кинетической энергии движения вдоль магнитного поля (ось z) с импульсом $p_z \approx \hbar/L$ и потенциальной энергии однородно заряженной трубочки с радиусом ρ_0 и длиной L :

$$\mathcal{E} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e L^2} - \frac{e^2}{L} \ln \frac{L}{\rho_0}. \quad (2.2)$$

Минимизируя (2.2), с логарифмической точностью получаем

$$L \approx a_0 \ln^{-1} \frac{a_0}{\rho_0}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{E} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \ln^2 \frac{a_0}{\rho_0}. \quad (2.4)$$

Формально более строгое решение задачи можно получить, используя так называемое адиабатическое приближение. Будем рассматривать кулоновское взаимодействие электрона с ядром как малое возмущение для движения электрона в однородном магнитном поле. Уравнение Шрёдингера для атома водорода в магнитном поле имеет вид

$$\left[\frac{1}{2} \left(-i\hat{\nabla} + \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \hat{\sigma} \mathbf{B} \right] \Psi = E\Psi. \quad (2.5)$$

Для удобства будем пользоваться здесь атомными единицами: $e = m_e = \hbar = c = 1$; магнитное поле выражается, соответственно, в единицах $B_9 = 2,35 \cdot 10^9$ Гс.

Направим ось z вдоль магнитного поля и выберем обычную калибровку для векторного потенциала $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$. В первом приближении по $1/B \ll 1$ волно-

вая функция электрона может быть представлена в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi_{n\rho,m}(\rho, \varphi) f_v(z), \quad (2.6)$$

где

$$\psi_{n\rho,m}(\rho, \varphi) = \frac{\exp(im\varphi)}{\sqrt{2\pi}} \rho_0^{-1-|m|} \left[\frac{(|m| + n_\rho)!}{2^{|m|} n_\rho! |m|!} \right]^{1/2} \times \\ \times \rho^{|m|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\rho_0^2}\right) P_{n_\rho,m}\left(\frac{\rho^2}{2\rho_0^2}\right) \quad (2.7)$$

— волновая функция свободного поперечного движения электрона в магнитном поле [41], а $f_v(z)$ есть решение уравнения Шрёдингера, получающегося усреднением уравнения (2.5) по функциям $\psi_{n\rho,m}(\rho, \varphi)$. Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярная координата в плоскости xy , φ — угловая координата, $P_{n,m}(x)$ — обобщенный полином Лагерра. Заметим, что в атомных единицах радиус нижней орбиты Ландау $\rho_0 = 1/\sqrt{B}$.

Состоянию с наименьшей энергией отвечает нижний уровень Ландау при $n_\rho = m = 0$. Соответствующее уравнение для $f_v(z)$ имеет вид

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + U(z) \right] f_v = \mathcal{E} f_v, \quad (2.8)$$

где энергия связи

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B - E,$$

а потенциал

$$U(z) = -\frac{1}{\rho_0^2} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\rho_0^2}\right). \quad (2.9)$$

Для приближенного решения уравнения (2.8) потенциал (2.9) можно аппроксимировать выражением [42]

$$U(z) \approx -\frac{1}{a + |z|} + \frac{A}{(a + |z|)^2}, \quad (2.10)$$

где параметры a и A зависят от магнитного поля и квантовых чисел задачи n_ρ и m . При этом задача сводится к одномерному уравнению Шрёдингера с потенциалом $U(z)$, переходящим в одномерный кулоновский потенциал на расстояниях, больших по сравнению с "размерами" атома, т.е. при $z \approx 1 \gg 1/\sqrt{B}$.

Решение уравнения (2.8) с потенциалом (2.10), описывающее основное состояние, $f(z) \equiv f_{v=0}(z)$ выражается через функции Уиттекера:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} W_{\alpha, 1/2} \left[\frac{2}{\alpha} (z + \rho_0) \right], \quad (2.11)$$

где индекс α в (10) является аналогом главного квантового числа в задаче об атоме водорода, т.е.

$$\mathcal{E} \sim -\frac{1}{2\alpha^2}. \quad (2.12)$$

Можно легко получить асимптотическое выражение для энергии основного состояния. Для $\ln B \gg 1$ с логарифмической точностью $\alpha \approx 1/\ln B$ и из (2.12) следует выражение (2.4) для энергии связи основного состояния:

$$\mathcal{E} \sim -\frac{1}{2} \ln^2 B. \quad (2.13)$$

Отметим, что решение задачи для энергии связи водорода в сильном поле является асимптотическим и получено всего лишь с логарифмической точностью. Формула (2.13) дает лишь главный член в разложении, причем требуется не только $B \rightarrow \infty$, но и $\ln B \rightarrow \infty$.

Таким образом, для магнитных полей $B = 10^{12}$ Гс, типичных для нейтронных звезд, выражение (2.13) обеспечивает правильные значения энергии основного состояния только по порядку величины. Многие авторы использовали различные приближенные методы [39, 43–46], позволяющие получить (при $B \gg 1$) значение энергии водорода с точностью, приемлемой для сравнения с наблюдениями. Однако если методы вычислений так или иначе базируются на приближенной задаче об одномерном движении в модифицированном кулоновском поле, точность приближенных формул оказывается не лучше 20 %.

Поскольку проблема представляет большой интерес для астрофизики, детальные численные расчеты спектра водорода в сильном магнитном поле были выполнены в [47–51]; см. также обзор приближенных и численных методов в [52].

На рис. 1 показана энергия связи основного состояния атома водорода как функция магнитного поля для низшего уровня Ландау $n_\rho = 0$ при значениях проекций орбитального момента $m = 0, 1, 2, 3$. Для магнитного поля $B = 10^{12}$ Гс, типичного для нейтронной звезды, потенциал ионизации водорода составляет примерно 160 эВ.

В основном состоянии спин электрона жестко фиксирован, будучи направленным против поля. Энергия, необходимая для переворота спина, очень велика. Например, для магнитного поля $B = 10^{12}$ Гс она составляет $\mu B \approx 11,6$ кэВ. Возбужденные состояния в дискретном спектре получаются как решения уравнения Шрёдингера (2.8) в одномерном кулоновском поле и соответствуют волновым функциям, имеющим нули при конечных z . (Волновая функция основного состояния не имеет нулей по z .)

Спектр возбужденных состояний водорода в сильном магнитном поле более или менее аналогичен спектру обычного атома водорода. С логарифмической точностью (порядка $1/\ln B$) энергетические уровни даются

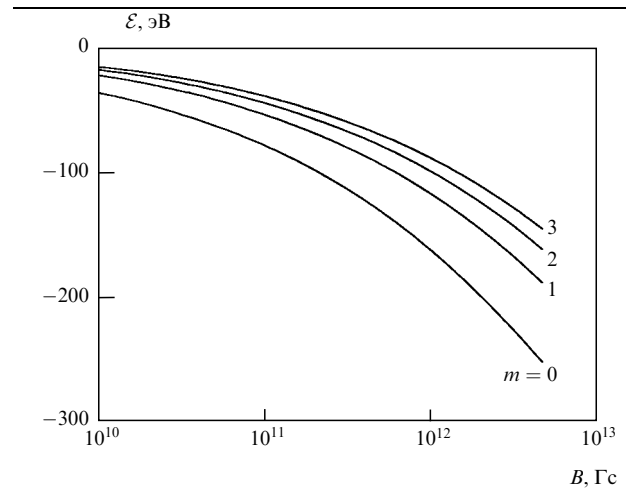


Рис. 1. Энергия связи основного ($m = 0$) и возбужденных ($m = 1, 2, 3$) состояний атома водорода в зависимости от магнитного поля

выражением $\mathcal{E}_n \approx -1/2n^2$. Эти возбужденные состояния находятся вблизи потолка дискретного спектра, а энергия связи в них мало отличается от энергии связи обычного водорода (13,6 эВ). Полное решение задачи о спектре водорода в произвольном магнитном поле требует довольно громоздких вычислений [50, 51, 53–56].

Для водорода в сверхсильном магнитном поле полный набор квантовых чисел состоит из проекции спина s_z , номера уровня Ландау n_ρ , числа узлов v волновой функции $f_v(z)$ и проекции орбитального момента m . Первые два квантовых числа в основном состоянии при $B \gg 1$ фиксированы. При $B \gg 1$ проекция спина $s_z = -1/2$ и можно ограничиться рассмотрением только нижнего уровня Ландау $n_\rho = 0$. Тогда радиальная часть волновой функции

$$\psi_{n_\rho, m}(\rho, \varphi) = \frac{\exp(im\varphi)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^{|m|}} \rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{|m|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\rho_0^2}\right). \quad (2.14)$$

В отличие от свободного движения электрона в магнитном поле, для которого энергия не зависит от проекции углового момента, здесь энергия основного состояния слабо зависит от m [19, 57, 58] и в дискретном спектре имеются возбуждения, соответствующие разным значениям циклотронного радиуса $\rho_m = \sqrt{2m+1} \rho_0$. Соответствующие значения энергии связи получаются из (2.4) заменой $\rho_0 \rightarrow \rho_m$, так что

$$\mathcal{E}_{n_\rho=0, m} \approx -\frac{1}{2} \ln^2 \frac{B}{\sqrt{2m+1}}. \quad (2.15)$$

Напомним еще раз, что аналитические выражения для энергии являются асимптотическими формулами, полученными с логарифмической точностью, т.е. по крайней мере при $\ln B \gg 1$. Поэтому они дают правильные значения для энергии связи только по порядку величины. Из (2.15) следует, что для $m \gg 1$ расстояние между уровнями m и $m+1$ приблизительно составляет

$$\Delta \mathcal{E}_{m, m+1} \approx \frac{1}{2m+1} \ln \frac{B}{\sqrt{2m+1}} \ll \ln^2 B. \quad (2.16)$$

В заключение этого раздела заметим также, что для водородоподобного атома с зарядом ядра Z задача сводится к задаче об атоме водорода, поскольку [57, 59]

$$E(Z, B) = Z^2 E\left(1, \frac{B}{Z^2}\right).$$

3. Термы молекулы водорода в сверхсильном магнитном поле

Межатомное взаимодействие в сверхсильном магнитном поле с возможностью образования молекул и связанных состояний является одной из наиболее интересных проблем, особенно для физики пульсаров. Простейшая задача — это молекула водорода в сверхсильном поле.

Напомним, что в отсутствие магнитного поля два атома водорода в основном состоянии образуют систему, имеющую два молекулярных термина: синглетный $^1\Sigma$ и триплетный $^3\Sigma$ [41]. На больших расстояниях основной вклад в межатомное взаимодействие дают

силы ван-дер-ваальсова притяжения, в то время как на расстояниях, сравнимых с размером атома, определяющим является обменное взаимодействие.

Основным будет терм $^1\Sigma$, в то время как терм $^3\Sigma$ лежит выше, поскольку для $^3\Sigma$ координатная часть волновой функции двух электронов антисимметрична в силу принципа Паули и обращается в нуль в плоскости симметрии молекулы.

Другими словами, антисимметричная волновая функция соответствует распределению электронной плотности с электронами, локализованными возле своих ядер, и эффективному отталкиванию атомов, так что потенциал межатомного взаимодействия для термина $^3\Sigma$ монотонно возрастает при сближении атомов.

Напротив, перекрытие волновых функций для термина $^1\Sigma$ дает в потенциале глубокую яму, соответствующую образованию молекулы водорода при расстоянии между ядрами порядка a_0 с энергией связи 4,5 эВ.

Ситуация совершенно изменяется в сверхсильном магнитном поле. Будучи сильно деформированными и вытянутыми вдоль магнитного поля, атомы взаимодействуют на больших расстояниях как квадруполь. Наиболее существенное отличие состоит в том, что основным состоянием теперь будет терм $^3\Sigma$, поскольку атомы в $^3\Sigma$ находятся по энергии ниже на величину порядка $\mu B \gg R\gamma$.

Межатомное взаимодействие в синглетном и триплетном терминах $^1\Sigma$ и $^3\Sigma$ молекулы водорода в сверхсильном магнитном поле можно вычислить с логарифмической точностью [60, 61]. Уравнение Шрёдингера для двух атомов водорода (в атомных единицах) имеет вид

$$\left[\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{A}}_1)^2 + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}_2 + \hat{\mathbf{A}}_2)^2 - \sum_i \frac{1}{R_{1i}} - \sum_i \frac{1}{R_{2i}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 \mathbf{B} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_2 \mathbf{B} \right] \Psi = E \Psi. \quad (3.1)$$

Здесь R — расстояние между ядрами атомов 1 и 2, R_{1i} и R_{2i} — расстояния от i -го электрона до ядер 1 и 2 соответственно, r_{12} — расстояние между электронами.

Выбирая обычную калибровку для вектор-потенциала $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$, уравнение (3.1) можно представить в виде

$$\left[\mathcal{H}(1, 2) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 \mathbf{B} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_2 \mathbf{B} \right] \Psi = E \Psi, \quad (3.2)$$

где

$$\mathcal{H}(1, 2) = -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{1}{2} \mathbf{B} [\mathbf{r}_1 \times \nabla_1] - \frac{1}{2} \mathbf{B} [\mathbf{r}_2 \times \nabla_2] - \sum_i \frac{1}{R_{1i}} - \sum_i \frac{1}{R_{2i}} + \frac{1}{R} + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{8\rho_0^4}. \quad (3.3)$$

Здесь ось z направлена вдоль магнитного поля, атомы в плоскости xz имеют координаты

$$x_{1,2} = \mp a = \mp \frac{R}{2} \cos \theta, \quad z_{1,2} = \mp b = \mp \frac{R}{2} \sin \theta \quad (3.4)$$

(θ — угол между осью молекулы и направлением поля), $\rho_1^2 = y_1^2 + (b + x_1)^2$ и $\rho_2^2 = y_2^2 + (b - x_2)^2$ — полярные координаты электронов 1 и 2 в плоскости xy .

Обозначая координатные части симметричной (s) и антисимметричной (a) волновых функций для синглетного и триплетного термов Ψ_s и Ψ_a соответственно и

принимая во внимание, что для $^1\Sigma$ суммарный спин $S = 0$, а основное состояние для $^3\Sigma$ в сверхсильном поле соответствует проекции суммарного спина $S = -1$, запишем уравнения для Ψ_s и Ψ_a :

$$\mathcal{H}(1, 2)\Psi_s = E_s\Psi_s, \quad (3.5)$$

$$\left[\mathcal{H}(1, 2) - \frac{1}{r_0^2}\right]\Psi_a = E_a\Psi_a. \quad (3.6)$$

Уравнения для Ψ_s и Ψ_a удобно переписать в единой форме, введя $E_{s1} = E_s - 1/\rho_0^2$. Тогда

$$\left[\mathcal{H}(1, 2) - \frac{1}{\rho_0^2}\right]\Psi_{s,a} = E_{s1,a}\Psi_{s,a}. \quad (3.7)$$

Для разности энергий синглетного и триплетного термов за счет обменного взаимодействия можно получить асимптотически точное выражение, используя метод, изложенный в [62, 63]. Для этого рассмотрим функции $\Psi_1 = (\Psi_s + \Psi_a)/2$ и $\Psi_2 = (\Psi_s - \Psi_a)/2$, соответствующие состояниям, в которых каждый электрон при больших R локализован возле своего собственного атомного ядра.

Функции Ψ_1 и Ψ_2 ищем в виде произведения волновых функций двух атомов водорода:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{1}{2\pi\alpha\rho_0^2}\chi_1 \exp\left(-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4\rho_0^2}\right) \times \\ & \times W_{\alpha, 1/2}\left[\frac{2}{\alpha}(a + z_1 + \rho_0)\right] W_{\alpha, 1/2}\left[\frac{2}{\alpha}(a - z_1 + \rho_0)\right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где χ_1 — медленно меняющаяся функция по сравнению с экспонентой в (3.8).

С точностью до членов первого порядка по $\alpha \ll 1$ уравнение для χ_1 имеет вид

$$\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{2}{R_{12}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R}\right]\chi_1 = 0. \quad (3.9)$$

(Аналогичное уравнение для χ_2 получается заменой $1 \leftrightarrow 2$.)

Расщепление энергии синглетного и триплетного термов выражается через интеграл от произведения $\Psi_1\Psi_2$ по гиперповерхности $S(z_1 = z_2)$ в пространстве $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ [62, 63]:

$$E_{s1} - E_a = 2 \oint_{S(z_1=z_2)} (\Psi_2\nabla_1\Psi_1 - \Psi_1\nabla_1\Psi_2) ds. \quad (3.10)$$

Используя решения уравнения (3.9) [60] и вычисляя интеграл (3.10), находим для обменной части энергии расщепления термов следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta E = (E_s - B) - E_a = \\ = -\frac{2R\ln^2 B}{\cos^2 \theta} \left[2\cos \theta \ln B + \frac{1}{2}RB\sin^2 \theta \right] \times \\ \times \exp\left\{-R\left[2\cos \theta \ln B + \frac{1}{4}RB\sin^2 \theta\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

На расстояниях, больших по сравнению с размерами атома вдоль поля ($r \gg 1/\ln B$), взаимодействие атомов квадруполь-квадрупольное. Имея в виду, что квадрупольный момент атома при $\alpha \approx 1/\ln B \ll 1$ равен $Q = 2\langle z^2 \rangle \approx \alpha^2/2$, получаем для потенциала квадруполь-

квадрупольного взаимодействия

$$U_{qq} = \frac{9}{8} \frac{1}{\ln^4 B} \frac{1}{R^5} P_4(\cos \theta), \quad (3.12)$$

где

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{8}(35\cos^4 \theta - 30\cos^2 \theta + 1)$$

— полином Лежандра четвертой степени.

Формулы (3.11) и (3.12) дают выражения для потенциалов межатомного взаимодействия двух атомов водорода в основном состоянии в сверхсильном магнитном поле для синглетного и триплетного термов:

$$U_S = -\frac{1}{2}\Delta E + B + U_{qq}, \quad (3.13)$$

$$U_T = \frac{1}{2}\Delta E + U_{qq}. \quad (3.14)$$

Для квадруполь-квадрупольного взаимодействия отрицательный минимум по энергии достигается при $\theta \approx 49^\circ$.

Заметим, что обменная энергия расщепления термов при $r \rightarrow \infty$, за вычетом разности энергий $\Delta U = B$, становится экспоненциально малой по сравнению со степенным убыванием квадруполь-квадрупольного взаимодействия. Таким образом, разность в энергиях U_S и U_T определяется в целом магнитным полем $B \gg 1$, а глубина ямы для потенциалов U_S и U_T при $R \leq 1$ — в основном обменным взаимодействием.

Потенциалы взаимодействия двух атомов водорода в сильном магнитном поле ($B = 100 B_0 = 2,35 \cdot 10^{11}$ Гс) для синглетного и триплетного термов показаны на рис. 2. В основном состоянии, которое соответствует

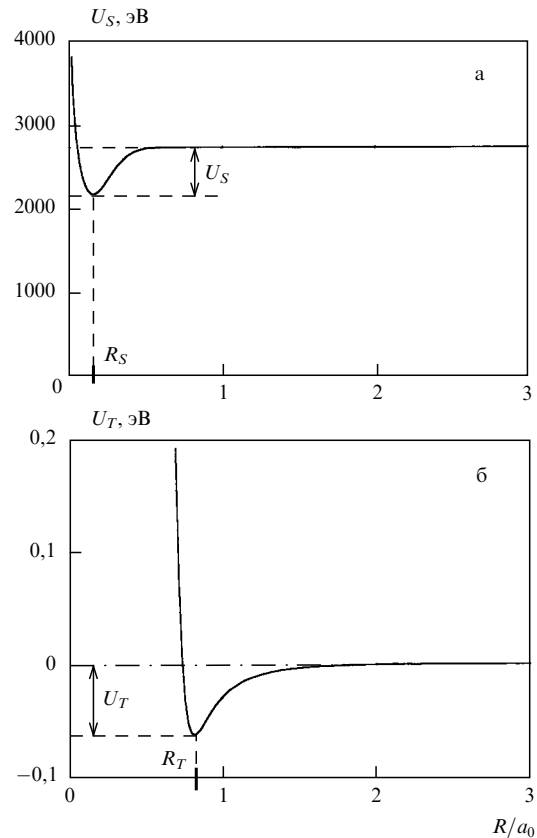


Рис. 2. Потенциалы межатомного взаимодействия водорода в синглетном (а) и триплетном (б) термах в магнитном поле $B = 100 B_0 = 2,35 \cdot 10^{11}$ Гс

триплетному терму, взаимодействие между атомами водорода очень слабое: глубина потенциальной ямы меньше 0,1 эВ. В то же время глубина ямы в синглетном терме равна примерно 500 эВ. Однако разность энергий между синглетным и триплетным термами при $B = 100 B_9$ составляет $\Delta E \approx \mu B \approx 2,7$ кэВ.

С ростом магнитного поля глубина потенциальной ямы для синглетного и триплетного термов растет, а положения минимумов (размеры молекул) R_S и R_T уменьшаются. В магнитных полях столь больших, что размер молекулы становится порядка размера атома ($B \gg 1000 B_9$), различие между синглетным и триплетным состояниями, по-видимому, становится несущественным и выгодным будет образование молекул (рис. 3).

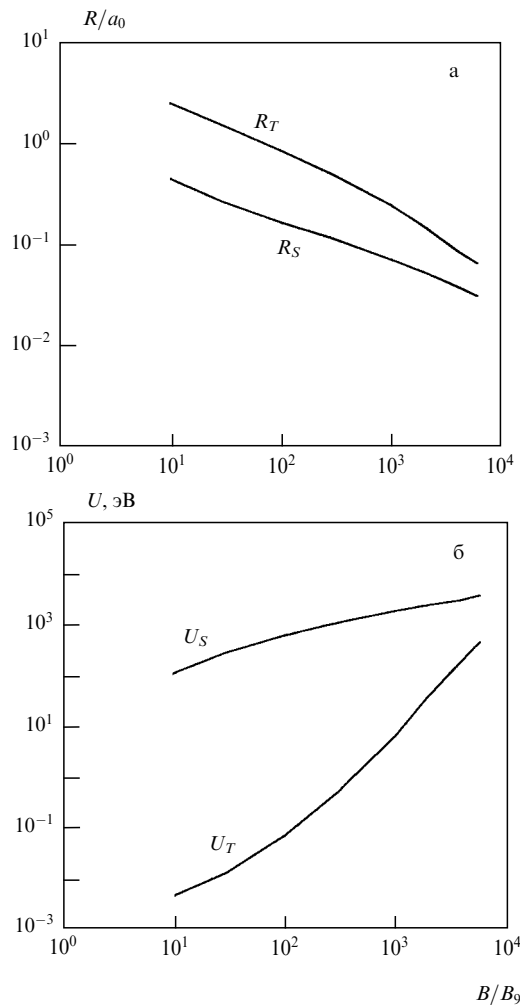


Рис. 3. Размер молекулы (а) и глубина потенциальной ямы (б) для синглетного (R_S , U_S) и триплетного (R_T , U_T) термов молекулы водорода в зависимости от магнитного поля (в единицах $B_9 = 2,35 \cdot 10^9$ Гс)

Для промежуточных значений магнитного поля синглетные и триплетные термы в основных состояниях молекулы водорода исследовались численно при произвольной ориентации магнитного поля по отношению к оси молекулы [64]. Результаты численных расчетов качественно хорошо согласуются с аналитическими решениями (3.13), (3.14).

4. Бозе-конденсация и сверхтекучесть водорода в сильном магнитном поле

Термы молекулы водорода дают потенциал парного межатомного взаимодействия, которым можно ограничиться для газа низкой плотности, т.е. при $R_0 n^{1/3} \ll 1$, где R_0 — характерный масштаб межатомного взаимодействия (положение минимума в потенциале парного взаимодействия), n — плотность газа. Поскольку размеры атомов уменьшаются с ростом магнитного поля, то условие "разреженного" газа в сверхсильных полях оказывается выполненным даже для сравнительно высокой плотности: например, для $B = 10^{12}$ Гс условие $R_0 n^{1/3} \ll 1$ выполняется вплоть до $n \leq 10^{29}$ см⁻³.

Малая глубина потенциальной ямы в основном состоянии триплетного терма и, следовательно, слабое межатомное взаимодействие приводят к замечательным изменениям свойств водородного газа в сверхсильном магнитном поле. В частности, взаимодействие между атомами настолько слабое, что водород, как и гелий, не замерзает даже при нулевой температуре, может образовывать бозе-конденсат и испытывает фазовый переход в сверхтекучее состояние при достаточно низкой температуре²: при $T \leq \hbar^2 n^{2/3} / M$ [65].

Действительно, энергия нулевых колебаний атома водорода $\hbar^2 n^{2/3} / M$ (где M — масса атома) равна примерно 0,5–5 эВ при плотности $n = 10^{27} - 10^{28}$ см⁻³. Энергия межатомного взаимодействия в основном состоянии порядка глубины потенциальной ямы в триплетном терме $U_0 = 10^{-2} - 10^{-1}$ эВ при $B = 10^{11} - 10^{12}$ Гс, а энергия связи электрона в атоме больше или порядка 100 эВ.

Потенциал парного взаимодействия между атомами водорода в сильном магнитном поле можно представить как

$$U(R, \theta) = \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{R^2}{2R_0^2}\right) + U_0 \exp \frac{R}{R_0} P_4(\cos \theta), \quad (4.1)$$

где R — расстояние от центра масс до ядра атома, а U_0 и R_0 — глубина и эффективный размер потенциальной ямы, которые зависят от значения магнитного поля и могут быть приближенно записаны в виде

$$R_0 \approx \frac{7,9}{\sqrt{B}},$$

$$|U_0| \approx 2,33 \ln^2 B \left(10,34 \frac{\ln B}{\sqrt{B}} + 41,6 \right) \times$$

$$\times \exp\left(-10,34 \frac{\ln B}{\sqrt{B}} - 8,92\right) - 3,66 \cdot 10^{-5} \frac{B^{5/2}}{\ln^4 B}.$$

Ввиду большой энергии связи электронов в атомах водорода и слабого межатомного взаимодействия газ из атомов водорода можно рассматривать как слабо-неидеальный бозе-газ бесструктурных частиц. Свойства

² Возможность сверхтекучести водорода на поверхности нейтронной звезды вряд ли существенно сказывается на свойствах звезды и магнитосферы пульсара. Существенным является малая энергия межатомной связи. Другое дело — экситоны в полупроводнике, находящемся в сильном магнитном поле, где ввиду малой массы экситона и большой диэлектрической проницаемости возможна бозе-конденсация экситонов и переход в сверхтекучее состояние при доступных в лаборатории магнитных полях (порядка нескольких тесла) и при комнатной температуре [6, 7].

такого газа при температуре, меньшей температуры перехода в бозе-конденсат, определяются нормальной и аномальной функциями Грина [66, 67]:

$$G_N(p) = \left[i\omega + \frac{k^2}{2m} - \mu + A(-p) \right] \times \\ \times \left\{ \left[i\omega + \frac{k^2}{2m} - \mu + A(-p) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[i\omega - \frac{k^2}{2m} + \mu - A(p) \right] + |B(p)|^2 \right\}^{-1}, \quad (4.2)$$

$$G_A(p) = -B(p) \left\{ \left[i\omega + \frac{k^2}{2m} - \mu + A(-p) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[i\omega - \frac{k^2}{2m} + \mu - A(p) \right] + |B(p)|^2 \right\}^{-1}, \quad (4.3)$$

где $p = (\mathbf{k}, \omega)$, $\omega \equiv \omega_s = 2\pi s T$ (s — целое число), μ — химический потенциал, $A(p)$ и $B(p)$ — неприводимые собственно-энергетические функции [68].

Суммирование диаграмм, дающих основной вклад в собственно-энергетические функции $A(p)$ и $B(p)$, можно выразить через амплитуду рассеяния в импульсном представлении:

$$\frac{4\pi}{m} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \times \\ \times \frac{U(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) \dots U(\mathbf{k}_n - \mathbf{k})}{[(k^2 - k_1^2)/m + i\delta] \dots [(k^2 - k_n^2)/m + i\delta]}, \quad (4.4)$$

где $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ — фурье-представление потенциала (4.1).

При вычислении (4.4) основной вклад дает область интегрирования с $k \gg 1/R_0$, т.е. изотропная часть импульсного представления потенциала $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \approx V_0$. Таким образом, с точностью до малых членов порядка $\rho_0/R_0 \ll 1$ из (4.4) следует

$$\frac{4\pi}{m} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \approx V_0 + U_A(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.5)$$

где V_0 и U_A — изотропная и анизотропная части $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Можно показать [65], что в борновском приближении (при $k \ll 1/\rho_0$)

$$V_0 \approx 4\pi\rho_0^2 = \frac{4\pi}{B} = \text{const.} \quad (4.6)$$

Для анизотропной части потенциала с учетом (4.1) имеем

$$U_A(\mathbf{k}) = U_0 \int \exp \left[-i\mathbf{k}\mathbf{R} - \frac{R}{R_0} \right] P_4(\cos \theta) d^3r, \quad (4.7)$$

откуда после простых вычислений получаем

$$U_A(\mathbf{k}) = 4\pi U_0 R_0^7 k^4 J(kR_0) P_4(\cos \theta), \quad (4.8)$$

где функция $J(kR_0)$ выражается через сферические функции Бесселя четвертого порядка j_4 :

$$J(kR_0) = \frac{1}{(kR_0)^4} \int_0^\infty j_4(kR_0 x) e^{-x} x^2 dx. \quad (4.9)$$

Обозначая символом n полную плотность атомов, n_0 — плотность частиц в конденсате и n_p — плотность

надконденсатных частиц, получаем выражения для собственно-энергетических функций через импульсное представление амплитуды рассеяния:

$$A(\mathbf{k}) \approx n[2V_0 + U_A(\mathbf{k})], \quad (4.10)$$

$$B(\mathbf{k}) \approx n[V_0 + U_A(\mathbf{k})]. \quad (4.11)$$

Используя соотношение Гугенгольца–Пайнса для химического потенциала $\mu = A(0) - B(0)$, плотность частиц в конденсате можно записать в виде

$$n_0 = \frac{\mu}{V_0} - 2n_p. \quad (4.12)$$

Плотность надконденсатных частиц можно представить как

$$n_p = -\frac{T}{V} \sum_{p, \varepsilon \rightarrow 0} \exp(i\omega\varepsilon) G^0(p) = \frac{\zeta(3/2)}{(2\pi)^{3/2}} (mT)^{3/2}, \quad (4.13)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана ($\zeta(3/2) = 2,612$),

$$G^0(p) = \frac{1}{i\omega - k^2/2m + \mu} \quad (4.14)$$

— невозмущенная функция Грина.

Выше критической температуры бозе-конденсации существует только нормальная функция Грина $G(p)$. Учитывая, что выше критической температуры $n_0 = 0$, получаем

$$G(p) = \frac{1}{i\omega - (k^2/2m - \mu) - A(k)}, \quad (4.15)$$

где $A(k)$ определено выражением (4.10).

Спектр элементарных возбуждений определяется полюсами функции Грина, так что с учетом соотношений (4.10) и (4.11) для $A(k)$ и $B(k)$ находим

$$E(k) = \left\{ \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) A(k) + A^2(k) - B^2(k) \right\}^{1/2}. \quad (4.16)$$

Используя выражение для химического потенциала μ и явный вид $A(k)$ и $B(k)$, получаем

$$E(k) = \left\{ \left[\frac{k^2}{2m} + \right. \right. \\ \left. + n \cdot 4\pi U_0 R_0^7 k^4 J_0(kR_0) P_4(\cos \theta) + n_0 V_0 \right]^2 - \\ \left. - [n \cdot 4\pi U_0 R_0^7 k^4 J_0(kR_0) P_4(\cos \theta) + n_0 V_0]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) для $E(k)$ представляет собой боголюбовский спектр возбуждений, удовлетворяющий критерию Ландау для сверхтекучести. Можно показать, что, хотя выражение (4.17) содержит сильную зависимость от углов в соответствии с сильной анизотропией в магнитном поле ($B \gg 1$), для малых импульсов имеется линейная фононная ветвь, причем при $k \rightarrow 0$ она не зависит от углов:

$$E(k \rightarrow 0) \approx k \sqrt{\frac{4\pi n_0}{mB}}. \quad (4.18)$$

Таким образом, скорость звука в сверхтекучей фазе

$$u_s \approx \sqrt{\frac{4\pi n_0}{mB}}. \quad (4.19)$$

Температура перехода в бозе-конденсат определяется из условия, что в точке перехода при ($T = T_c$) плотность частиц вне конденсата n_p должна быть равна полной плотности частиц n . Плотность n_p выражается через нормальную функцию Грина. Выше температуры перехода имеем

$$n_p = -\frac{T}{V} \sum_{p, \varepsilon \rightarrow 0} \exp(i\omega\varepsilon) G(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\exp[E(k)/T] - 1}. \quad (4.20)$$

Подставляя в (4.20) выражение для $E(k)$, находим

$$n_p = \frac{\zeta(3/2)}{(2\pi)^{3/2}} (mT)^{3/2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} m^{3/2} T \times \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}}{1 - \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}} - \sqrt{\varepsilon_1 - n_0 V_0} \right], \quad (4.21)$$

где $\varepsilon_1 = 1/(2mR_0)$, $\varepsilon_2^{-1} = (256\pi/49)m^2 n U_0 R_0^7$. Полагая в (4.21) $n_1 = n$, $n_0 = 0$, получаем уравнение для критической температуры перехода в сверхтекучее состояние.

Зависимость $T_c(n)$ для трех значений магнитного поля B (10^1 , 10^2 , 10^3 а.е.) показана на рис. 4. Как и следовало ожидать, критическая температура для водо-

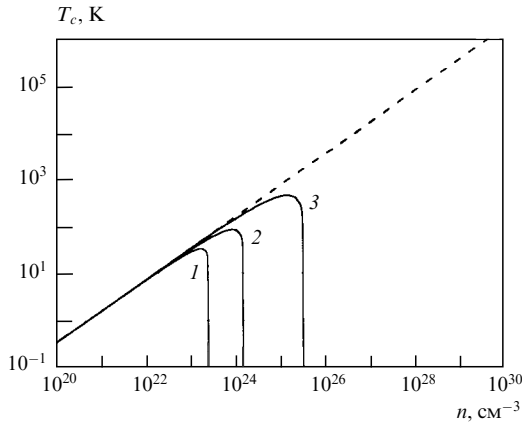


Рис. 4. Критическая температура перехода водорода в сверхтекучее состояние в зависимости от плотности атомов для трех значений B (в а.е.): (1) 10 , (2) 10^2 , (3) 10^3

рода в сильном поле практически совпадает с температурой бозе-конденсации для идеального бозе-газа. Основное отличие состоит в том, что для каждого данного значения B имеется критическая плотность $n = n_c$, такая, что при $n \rightarrow n_c$ критическая температура обращается в нуль, что обусловлено появлением сильного взаимодействия при достаточно малом межатомном расстоянии.

5. Сверхтекучесть дейтерия в сильном магнитном поле

Атомы дейтерия в сверхсильном магнитном поле в основном состоянии образуют ферми-газ с анизотропным слабым взаимодействием, потенциал которого

определяется формулой (4.1). Естественно предположить, что, так же как и для ^3He , дейтерий в сильном магнитном поле может переходить в сверхтекучее состояние при низкой температуре [69]. В отличие от ^3He , обладающего изотропным парным взаимодействием, но анизотропной сверхтекучей фазой [70, 71], само парное взаимодействие в случае дейтерия анизотропно.

Вычисление свойств дейтерия при низкой температуре естественно производить, воспользовавшись результатами теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [71]. В БКШ-модели уравнение для параметра порядка Δ_k при нулевой температуре имеет вид

$$\Delta_k = - \sum_{k'} \frac{U_{kk'} \Delta_{k'}}{2(\varepsilon_k^2 + |\Delta_{k'}|^2)^{1/2}}, \quad (5.1)$$

где $U_{kk'}$ — фурье-представление потенциала парного взаимодействия, ε_k — энергия элементарных одночастичных возбуждений.

Поскольку в сильном магнитном поле дейтерий полностью поляризован и спины всех атомов направлены против магнитного поля, то в разложении по сферическим гармоникам вблизи поверхности Ферми могут присутствовать только гармоники, соответствующие нечетному угловому моменту:

$$U_{kk'} = b_0 Y_{10}^*(\Omega') Y_{30}(\Omega) + b_0 Y_{30}^*(\Omega') Y_{10}(\Omega) - b_1 Y_{11}^*(\Omega') Y_{31}(\Omega) - b_1 Y_{31}^*(\Omega') Y_{11}(\Omega) - b_1 Y_{1-1}^*(\Omega') Y_{3-1}(\Omega) - b_1 Y_{3-1}^*(\Omega') Y_{1-1}(\Omega). \quad (5.2)$$

Здесь сферические углы Ω и Ω' определяют направления импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ в системе координат с осью z , направленной вдоль магнитного поля, а коэффициенты b_0 и b_1 определены как

$$b_0 = \frac{64\pi^2}{945\sqrt{21}} k_F^4 U_0 R_0^7 J(k_F R_0),$$

$$b_1 = \frac{16\pi^2}{945} \sqrt{\frac{2}{7}} k_F^4 U_0 R_0^7 J(k_F R_0),$$

где k_F — значение импульса на ферми-поверхности. Остальные обозначения те же, что и в уравнении (4.8).

Значение критической температуры перехода в сверхтекучее состояние можно найти из уравнения БКШ для энергетической щели, имея в виду, что при $T \rightarrow T_c$ ширина энергетической щели обращается в нуль.

При $T \neq 0$ уравнение БКШ для энергетической щели записывается в виде

$$\Delta_k(T) = - \sum_{k'} \frac{U_{kk'} \Delta_{k'}(T)}{2E_{k'}(T)} \tanh \frac{E_{k'}(T)}{2k_B T}, \quad (5.3)$$

где k_B — постоянная Больцмана,

$$E_{k'}(T) = \sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + |\Delta_{k'}(T)|^2}.$$

В рассматриваемом случае сильной анизотропии имеются две возможности для выбора параметра порядка, соответствующие проекциям углового момента: $m = 0$ или $m = 1$. Можно показать [69], что сверхтекучая фаза дейтерия является основным состоя-

нием системы с параметром порядка, соответствующим $m = 0$. При этом параметр порядка ищется в виде

$$\Delta_{0,k} = \Delta_0 Y_{10}(\Omega) - \Delta_0 a_1 Y_{30}(\Omega). \quad (5.4)$$

Здесь a_1 — постоянная порядка единицы, а энергетическая щель определяется выражением

$$\Delta_0 \approx 2\xi \gamma \exp\left(-\frac{4\pi}{b_0 N_0}\right),$$

где $N_0 = m\rho_F/(2\pi^2\hbar^3)$ есть $1/2$ плотности состояний на поверхности Ферми, $\xi \ll \varepsilon_F$ — ширина зоны в импульсном пространстве около поверхности Ферми, а численный коэффициент

$$\ln \gamma \approx -\frac{1}{2} \int |Y_{10} - Y_{30}|^2 \ln |Y_{10} - Y_{30}| d\Omega = 0,2597.$$

С помощью (5.4) из уравнения (5.3) получается следующее выражение для критической температуры:

$$k_B T_c = 1,14 \xi \exp\left(-\frac{4\pi}{|b_0| N_0}\right). \quad (5.5)$$

Это выражение определяет температуру перехода дейтерия в сверхтекучее состояние как функцию плотности газа. Зависимость $T_c(n)$ для трех значений магнитного поля B (10^2 , 10^3 , 10^4 а.е.) показана на рис. 5.

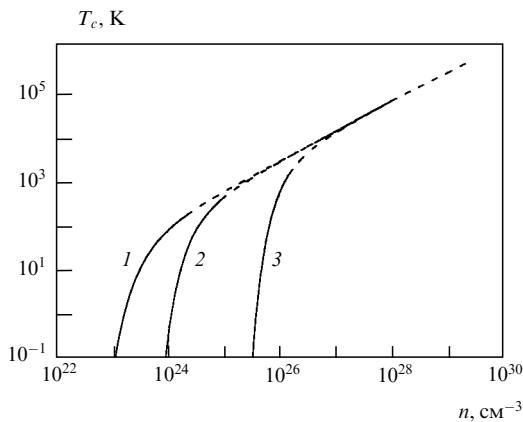


Рис. 5. Критическая температура перехода дейтерия в сверхтекучее состояние в зависимости от плотности атомов для трех значений B (в а.е.): (1) 10^2 , (2) 10^3 , (3) 10^4

6. Связанные состояния водорода в сверхсильном магнитном поле

6.1. Молекула водорода

в сверхсильном магнитном поле

В сильном магнитном поле ($B \gg B_0$) атомы водорода полностью поляризованы с электронными спинами, ориентированными против направления магнитного поля. По этой причине атомы водорода в основном состоянии, как было показано в предыдущих разделах, взаимодействуют очень слабо. В этом случае в потенциале парного взаимодействия, соответствующем триплетному терму, яма мелкая и ввиду антисимметрии

координатной части волновой функции кулоновское отталкивание электронов оказывается доминирующим фактором. При этом из-за принципа Паули расстояние между атомами относительно большое, так что перекрытие волновых функций электронов мало и обменным взаимодействием, экспоненциально убывающим с расстоянием, можно пренебречь.

Что же касается квадруполь-квадрупольного взаимодействия атомов, то, поскольку потенциал $U_{qq}(R) \sim 1/R^5$, в триплетном терме оно также не дает существенного вклада в межатомное взаимодействие. Как было показано в разделах 3 и 4, глубина потенциальной ямы в триплетном терме столь мала, что, в принципе, при достаточно низкой температуре возможно даже образование бозе-конденсата и сверхтекучего состояния.

Напротив, потенциал парного взаимодействия в синглетном терме имеет очень глубокую яму, так что атомы могли бы образовать связанное состояние. Однако энергия, необходимая для переворота спина одного из электронов, значительно больше, чем энергия связи такой молекулы, и даже больше, чем потенциал ионизации атома.

Ситуация изменяется в случае многоэлектронных систем. При этом становятся существенными возбужденные состояния электронов, находящихся на нижнем уровне Ландау, но имеющих отличную от нуля проекцию орбитального момента ($m \neq 0$).

В отличие от свободных электронов в магнитном поле, энергия которых не зависит от m , энергия связанных электронов, находящихся на более высоких орбиталях Ландау $\rho_m = \sqrt{2m+1} \rho_0$, растет с ростом m , однако разность между энергией этих возбужденных состояний и энергией основного состояния мала по сравнению с последней. Асимптотически это различие порядка $1/\ln B$. В принципе, в этом случае становится возможным связывание атомов в молекулы нового типа [19, 72], в которых, по выражению Кадомцева, "электронное облако полностью обобществляется".

Механизмы образования молекул в сверхсильном магнитном поле и обычных молекул в отсутствие поля совершенно различны. Обычная молекула водорода образуется за счет ковалентной связи. При этом присоединение третьего атома к молекуле H_2 , вообще говоря, возможно только в том случае, если атом находится в возбужденном состоянии. Однако энергия возбужденного состояния того же порядка, что и энергия основного состояния атома и энергия связи молекулы H_2 , так что образование молекулы H_3 оказывается энергетически невыгодным.

Напротив, в сильном магнитном поле атомы водорода в основном состоянии не образуют даже молекулу H_2 из-за слабого взаимодействия. Тем не менее атом водорода в этой ситуации может присоединить электрон, находящийся на нижнем уровне Ландау с проекцией орбитального момента $m = 1$, образовав отрицательный ион H^- , поскольку для такой конфигурации кулоновское отталкивание не так велико.

Для приближенной оценки энергии связи H^- можно использовать вариационный метод, аналогичный использованному в начале раздела 2, т.е. энергию связи можно оценить из условия минимума функционала энергии. Для энергии связи в этом случае получается величина порядка $\ln^2 B$. Аналогичные оценки показывают, что два атома водорода в состояниях с $m = 0$ и

$m = 1$ образуют молекулу водорода, энергия связи которой в пределе сверхсильного магнитного поля также порядка $\ln^2 B$.

Следует, однако, иметь в виду, что приведенная оценка для энергии связи молекулы приближенная. Значение энергии связи получается как разность двух больших величин: энергии основного состояния молекулы с "обобществленными электронами" и суммы энергий изолированных атомов, причем каждая из этих величин вычисляется всего лишь с логарифмической точностью.

Энергия связи молекул и длинных молекулярных цепочек вычислялась в работах [19, 20, 25, 28, 29, 72–74] с использованием различных методов (вариационного, метода функционала плотности). Наилучшая точность вычислений достигается с использованием метода Хартри–Фока [29, 75], который позволяет последовательно учесть обменное взаимодействие.

Как уже отмечалось, энергия связи вычисляется с логарифмической точностью. Поскольку для использования адиабатического приближения необходимо выполнение неравенства $(\ln B)/\sqrt{B} \ll 1$, то для магнитных полей, представляющих практический интерес ($B \sim 10^{11} - 10^{12}$ Гс), получаемые результаты не обладают большой надежностью. Так, для $B_{12} = 10^{12}$ Гс имеем всего лишь $(\ln B)/\sqrt{B} \approx 0,3$, а асимптотическое выражение для энергии связи $\mathcal{E} = -(\ln^2 B)/2$ достигается лишь при очень больших значениях магнитного поля: $B \sim 10^7 B_9 \sim 10^{16}$ Гс).

Энергия связи (диссоциации) молекулы водорода H_2 и молекулярной цепочки H_n (где $n = 3, 4, \dots, \infty$) с осью молекулы, ориентированной вдоль направления магнитного поля, вычислялась методом молекулярных орбиталей и методом Хартри–Фока в [75]. Задача при этом сводилась к вычислению матричных элементов гамильтониана (3.1) по соответствующим базисным функциям.

Гамильтониан цепочки из n атомов, расположенных вдоль оси z на равных расстояниях a друг от друга, с магнитным полем $\mathbf{B}$, направленным вдоль оси z , имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H}_B + \hat{H}_{el} + \hat{H}_{ee} + \hat{H}_{II}, \quad (6.1)$$

где

$$\hat{H}_B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\mathbf{p}}_i + \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu \mathbf{B}, \quad (6.2)$$

$$\hat{H}_{el} = - \sum_{i,I} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - I a \hat{\mathbf{z}}|}, \quad (6.3)$$

$$\hat{H}_{ee} = - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{r_{ij}}, \quad (6.4)$$

$$\hat{H}_{II} = \frac{1}{2} \sum_{I \neq J} \frac{e^2}{a|I - J|}. \quad (6.5)$$

Здесь индексы i, j относятся к электронам, а I, J нумеруют атомы.

Будем считать, что все электроны в основном состоянии находятся на нижнем уровне Ландау со спинами, направленными против магнитного поля, и выберем калибровку вектор-потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]. \quad (6.6)$$

Для того чтобы свести систему уравнений Хартри–Фока к системе одномерных уравнений, представим базисные волновые функции одноэлектронных состояний как

$$\Psi_{n_\rho=0,m,v}(\rho, \varphi, z) = \psi_{0,m}(\rho, \varphi) f_{m,v}(z), \quad (6.7)$$

где $\psi_{0,m}(\rho, \varphi)$ — волновые функции свободного электрона на основном уровне Ландау (2.7) при $n_\rho = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $f_{m,v}(z)$ — волновые функции, подлежащие определению. Для двухатомной молекулы H_2 квантовое число v (число узлов волновой функции $f_{m,v}(z)$) можно положить равным нулю, поскольку, как мы видели в разделе 3, состояния с $v \neq 0$ расположены значительно выше по энергии.

Нормированная антисимметричная волновая функция электронов определяется детерминантом Слэтера функций (6.7) и в случае двухэлектронной волновой функции имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= S\{\Psi_{00}(\mathbf{r}_1) \Psi_{01}(\mathbf{r}_2)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{\Psi_{00}(\mathbf{r}_1) \Psi_{01}(\mathbf{r}_2) - \Psi_{00}(\mathbf{r}_2) \Psi_{01}(\mathbf{r}_1)\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где для упрощения мы не пишем квантовое число $v = 0$.

Как известно [41], уравнения Хартри–Фока следуют из вариационного принципа при независимом варьировании по функциям Ψ_{00} , Ψ_{01} . При выборе базисных функций в виде (6.7) производится усреднение по радиальным волновым функциям Ландау, а варьирование функционала $\langle \mathcal{H} \rangle$ осуществляется только по функциям f_0 , f_1 .

Таким образом, задача фактически решается в адиабатическом приближении, в результате чего получаются одномерные уравнения Хартри–Фока для функций $f_m(z)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{e^2}{r_0} V_m(z) + \frac{e^2}{r_0} K_m(z) - \mathcal{E}_m \right] f_m(z) = \frac{e^2}{r_0} J_m(z), \quad (6.9)$$

где для двухатомной молекулы $m = 0, 1$, а усредненные по базисным функциям потенциалы определены как

$$V_m(z) = \int d^2 \mathbf{p} |\psi_{0,m}(\rho, \varphi)|^2 \sum_I \frac{1}{|\mathbf{r} - I a \hat{\mathbf{z}}|}, \quad (6.10)$$

$$K_m(z) = \sum_{m'} \int dz' |f_m(z')|^2 D_{m,m'}(z - z'), \quad (6.11)$$

$$J_m(z) = \sum_{m'} f_{m'}(z) \int dz' f_{m'}(z') f_m(z') E_{m,m'}(z - z'), \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} D_{m,m'}(z_1 - z_2) &= \\ &= \int d^2 \mathbf{p}_1 d^2 \mathbf{p}_2 |\psi_m(\mathbf{p}_1)|^2 |\psi_m(\mathbf{p}_2)|^2 \frac{1}{r_{12}}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} E_{m,m'}(z_1 - z_2) &= \\ &= \int d^2 \mathbf{p}_1 d^2 \mathbf{p}_2 \psi_m(\mathbf{p}_1) \psi_{m'}(\mathbf{p}_2) \psi_m^*(\mathbf{p}_2) \psi_{m'}^*(\mathbf{p}_1) \frac{1}{r_{12}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для молекулы водорода H_2 индексы m, m' в (6.9)–(6.14) принимают значения 0, 1 и граничные условия для функции $f_m(z)$ имеют вид

$$f'_m(z=0) = 0, \quad f_m(z \rightarrow \pm\infty) \sim \exp \left[-|z| \left(\frac{2m_e \rho_0^2}{\hbar^2} |e_m| \right)^{1/2} \right]. \quad (6.15)$$

Зная решение уравнений Хартри–Фока (6.9), можно вычислить полную энергию молекулы H_2 :

$$E = \langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle = \frac{e^2}{a} + \mathcal{E}_{00} + \mathcal{E}_{01} - E^{\text{dir}} - E^{\text{exch}}, \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} E^{\text{dir}} &= \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 |\Psi_{00}(\mathbf{r}_1)|^2 |\Psi_{01}(\mathbf{r}_2)|^2 \frac{e^2}{r_{12}} = \\ &= \frac{e^2}{r_0} \int dz_1 dz_2 \times \\ &\times f_0^2(z_1) f_1^2(z_2) D_{01}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} E^{\text{exch}} &= - \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \times \\ &\times \Psi_{00}(\mathbf{r}_1) \Psi_{01}(\mathbf{r}_2) \Psi_{00}^*(\mathbf{r}_2) \Psi_{01}^*(\mathbf{r}_1) \frac{e^2}{r_{12}} = \\ &= - \frac{e^2}{r_0} \int dz_1 dz_2 \times \\ &\times f_0(z_1) f_1(z_2) f_0(z_2) f_1(z_1) E_{01}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

— энергии электрон-электронного и обменного взаимодействия соответственно.

При $a \rightarrow \infty$ полная энергия (6.16) должна переходить в сумму энергий изолированных атомов в основном состоянии $\mathcal{E}_{00}$ (при $m = 0$) и в возбужденном состоянии $\mathcal{E}_{01}$ (при $m = 1$).

В [75] энергия связи (диссоциации) молекулы H_2 находилась в результате численного решения методом молекулярных орбиталей и численного решения уравнения Хартри–Фока (6.9). Вычисленные в [75] значения для размера R_{01} и энергии связи $\mathcal{E}_{01}$ молекулы H_2 в зависимости от магнитного поля показаны на рис. 6.

Для сравнения на том же рисунке показана энергия связи (глубина потенциальной ямы) и размер (минимум в потенциале межатомного взаимодействия) молекулы H_2 для триплетного ($\mathcal{E}_{00T}, R_{00T}$) и синглетного ($\mathcal{E}_{00S}, R_{00S}$) термов, когда оба атома водорода находятся в самом нижнем состоянии ($n_p = 0, m = 0, v = 0$) [61].

В частности, для магнитного поля $B = 10^{12}$ Гс энергия диссоциации молекулы H_2 составляет $\mathcal{E}_{01} = 45,5$ эВ и размер $R_{01} = 0,24 a_0$ [75], тогда как энергия связи в триплетном терме $\mathcal{E}_{00T} = 1$ эВ, а соответствующий размер "молекулы" $R_{00T} \approx 0,4 a_0$.

Для синглетного терма (который при $B = 10^{12}$ Гс лежит выше по энергии примерно на 11,6 кэВ) энергия связи $\mathcal{E}_{00S} = 1$ кэВ и размер $R_{00S} \approx 0,1 a_0$. При этом энергии основного ($m = 0$) и первого возбужденного ($m = 1$) состояний атома водорода равны -161 и -117 эВ соответственно.

Отметим, что полученные в [75] выводы о возможности образования молекулы водорода, как и возможность образования молекулярной цепочки (см. ниже), следует

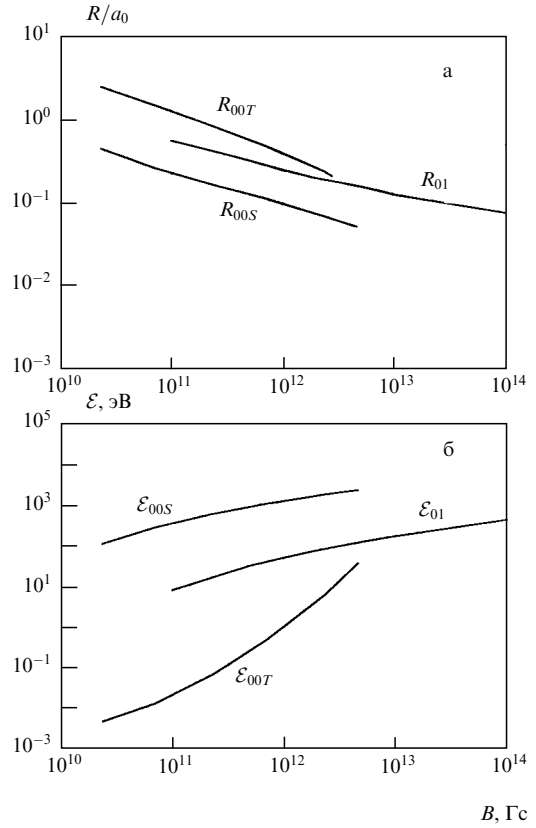


Рис. 6. Размер (а) и энергия связи (б) молекулы водорода для связанного молекулярного состояния ($\mathcal{E}_{01}, R_{01}$) и для синглетного ($\mathcal{E}_{00S}, R_{00S}$) и триплетного ($\mathcal{E}_{00T}, R_{00T}$) термов основного состояния атомов

рассматривать с известной осторожностью. Так, в [75] при вычислении энергии связи молекулы водорода считалось, что атомы расположены на одной линии магнитного поля, и не учитывалось квадрупольное взаимодействие атомов.

Вместе с тем легко видеть, что, например, в магнитном поле $B_9 \ll B < 300 B_9$ размеры атомов α малы по сравнению с межатомным расстоянием R , а энергия их квадрупольного взаимодействия $4,5\alpha^4 P_4(\cos \theta)/R^5$ (где θ — угол между осью молекулы и направлением магнитного поля) того же порядка, что и энергия диссоциации молекулы, вычисленная в [75]. По-видимому, образование связанных молекулярных состояний становится выгодным при значениях поля, больших примерно $500 B_9$.

6.2. Образование больших полимерных молекул водорода

Как уже отмечалось, в нулевом магнитном поле молекула водорода H_2 образуется за счет ковалентной связи и присоединение к ней дополнительного атома водорода энергетически невыгодно.

В сверхсильном магнитном поле ситуация существенно меняется, поскольку различие в энергиях возбужденных состояний с $m \neq 0$ на нижнем уровне Ландау невелико по сравнению с энергией основного состояния ($n_p = 0, m = 0$). В этом случае атомы могут сближаться, даже будучи полностью поляризованными (см. раздел 3). При этом может оказаться энергетически выгодным образование больших молекул водорода H_n с $n \gg 1$.

На больших расстояниях атомы взаимодействуют как квадруполь, будучи сильно вытянутыми вдоль магнитного поля в форме тонких иголок. Для распределения электронной плотности

$$n_e \propto \exp(-2\alpha|z|)$$

энергия квадруполь-квадрупольного взаимодействия атомов с моментом $Q_{qq} = 2\langle z^2 \rangle = \alpha^2/2$ на больших по сравнению с размером атома расстояниях равна

$$Q_{qq} = \frac{9}{8} \frac{1}{\ln^4 B} \frac{1}{R^5} P_4(\cos \theta). \quad (6.19)$$

Атомы отталкиваются, находясь на одной линии ($\theta = 0, \pi$), и притягиваются при $\theta \approx 49^\circ$. Потенциал квадруполь-квадрупольного взаимодействия быстро убывает с расстоянием, так что взаимодействием можно пренебречь на расстояниях $R \gg 1/\alpha$.

При сближении атомов электроны "обобществляются", занимая нижние уровни по продольному (вдоль магнитного поля) движению. В результате n атомов ($n \gg 1$) образуют в сверхсильном поле молекулу, вытянутую вдоль поля, с радиусом электронной оболочки (в плоскости, перпендикулярной полю), равным радиусу максимальной орбиты Ландау

$$R_n \approx \sqrt{2n-1} \rho_0 \approx \sqrt{\frac{2n}{B}}.$$

(Считаем, что электроны последовательно заполняют орбиты с $m = 0, 1, \dots, n-1$.)

Для оценки энергии связи такой молекулы можно обратиться к вариационному методу, использованному в [72] при вычисления энергии двухатомной молекулы из тяжелых атомов в сверхсильном поле ($B \gg 2Z^3$). В [75] аналогичные численные расчеты энергии связи методом Хартри-Фока выполнены для молекулы H_n , состоящей из n атомов водорода.

Если пренебречь обменным взаимодействием, то энергию молекулы из n атомов водорода, расположенных на расстояниях a друг от друга, можно приближенно представить в виде суммы кинетической энергии электронов и кулоновской энергии V_{ee} , V_{el} и V_{ll} :

$$E = n \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{n-1}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \Psi^2 - \sum_{I=-n/2}^{n/2} \frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{I}\hat{z}|} \Psi^2 \right\} + \sum_{I < J} \frac{1}{a|I-J|}. \quad (6.20)$$

Здесь Ψ^2 — средняя волновая функция, нормированная условием $n\Psi^2 = n_e$ (где средняя плотность электронов $n_e = \sum_i \Psi_i^2$), а

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \int d^3 \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Psi^2(\mathbf{r}'). \quad (6.21)$$

Энергия основного состояния определяется из условия минимума функционала (6.20) при дополнительном условии

$$\int d^3 \mathbf{r} \Psi^2(\mathbf{r}) = 1.$$

Имея в виду, что молекула в сверхсильном магнитном поле имеет форму тонкой иглы длиной $L \sim na \gg R$ и

электронная плотность вне атома обращается в нуль как $\exp(-2\alpha|z|)$ вдоль оси z и как $\exp(-\rho^2/R^2)$ в радиальном направлении, выберем пробные функции в виде

$$\Psi^2(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\pi R^2} \exp \left\{ -2\alpha|z| - \frac{\rho^2}{R^2} \right\}, \quad (6.22)$$

где α — свободный параметр.

Подстановка (6.22) в (6.20) с логарифмической точностью дает для энергии следующее выражение:

$$E \approx n \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + 2n\alpha \ln(\alpha R) - \frac{1}{2} n\alpha \ln(\alpha R) + \sum_{I=1}^{n/2} \frac{1}{aI} \right\}. \quad (6.23)$$

Энергию в расчете на один атом можно представить как [75]

$$\frac{E}{n} \approx \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{2} n\alpha \ln \frac{2}{n\alpha R} + \frac{3}{2} n\alpha \gamma, \quad (6.24)$$

где $\gamma = 0,577$ — постоянная Эйлера.

Варьируя (6.24) по α , находим

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2} nl, \\ l &= \ln \frac{2}{n\alpha R} \approx \ln \sqrt{\frac{B}{n^5}}, \\ \frac{E}{n} &\approx -\frac{9}{8} n^2 \ln^2 \sqrt{\frac{B}{n^5}}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $\alpha R \ll 1$, а $\ln(2/n\alpha R) \gg 1$.

Заметим, что полученное решение для "длинной" молекулы водорода в определенном смысле эквивалентно приближенному решению для тяжелого атома в сильном поле [76, 77] (см. также раздел 7). Расстояние между ядрами атомов быстро убывает с ростом n , так что $a = (4/9n^2) \ln^{-1} \sqrt{B/n^5}$.

Оценку энергии основного состояния молекулы H_n можно получить из элементарных качественных соображений, аналогичных использованным в [19]. Пусть n атомов водорода расположены вдоль оси z на равных расстояниях a друг от друга. Радиус такой молекулы $R \approx \sqrt{2n/B}$, ее длина $L \approx na$, причем мы считаем, что $n \gg 1$ и $L \gg R$.

Рассматривая молекулу как тонкий равномерно заряженный цилиндр радиусом R и длиной L , имеем с логарифмической точностью следующее выражение для полной энергии, равной сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E \approx n \left(\frac{p_z^2}{2m_e} + U \right) \approx n \left(\frac{1}{L^2} - \frac{n}{L} \ln \frac{2a}{R} \right). \quad (6.26)$$

Варьируя (6.26) по L , находим

$$L \approx \frac{1}{nl}, \quad E \approx -n^3 l^2, \quad (6.27)$$

где

$$l = \ln \frac{2a}{R} \approx \ln \frac{B^{1/2}}{n^{5/2} \ln B}.$$

Следует отметить, что полученные выражения для энергии молекулы водорода являются лишь асимптоти-

ческими и справедливы при выполнении сильного условия $\ln B \gg 1$. Численные расчеты [75] показывают, что асимптотическая функциональная зависимость достигается лишь при $B \gg 10^7$.

С увеличением n электроны в оболочке молекулы H_n занимают все более высокие орбиты $R \approx \sqrt{2n-1} \rho_0$ до тех пор, пока при $R \sim a$ не наступит насыщение, соответствующее $n = n_s$. Начиная с $n \geq n_s$, более выгодным станет заполнение состояний, соответствующих волновым функциям, имеющим узлы по z , т.е. $v \neq 0$.

Легко видеть [19, 75], что в пределе $n \gg n_s \gg 1$ энергия однородно заряженного цилиндра радиусом R в расчете на один атом не зависит от n и равна

$$E = -0,39 B^{2/5} = -10,6 \left(\frac{B}{B_9} \right)^{2/5} \text{ эВ}, \quad (6.28)$$

причем

$$R \approx \frac{1,7}{B^{2/5}}, \quad a \approx 1,88 R. \quad (6.29)$$

Еще раз отметим, что все полученные формулы справедливы только как далекие асимптотики при $B \gg 1$ и даже для магнитного поля $B = 10^{12}$ Гс они верны лишь по порядку величины.

В численных расчетах [75] энергии связи молекул H_n при $n = 2, 3, \dots, \infty$, плотность электронов в молекуле предполагалась однородной вдоль оси z , а в качестве базисных функций выбирались произведения плоских волн по z и функций Ландау $\psi_{0,m}(\rho, \varphi)$. Вычисленные в [75] значения энергии связи $\mathcal{E}_\infty$ для молекулы H_∞ , энергии диссоциации $\mathcal{E}_\infty^{\text{dis}}$ ($H_{\infty+1} \rightarrow H_\infty + H$) и равновесное расстояние a между атомами в зависимости от магнитного поля показаны на рис. 7.

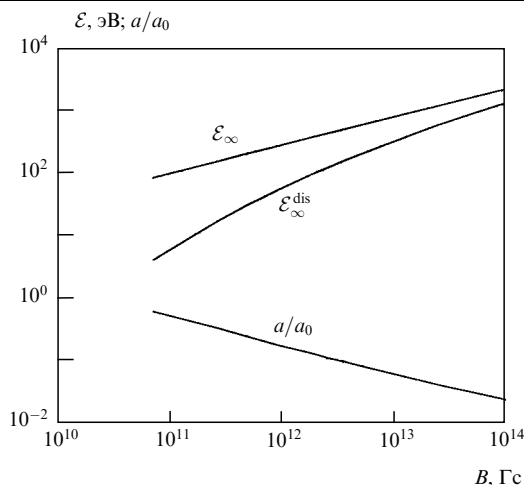


Рис. 7. Энергия связи $\mathcal{E}_\infty$, энергия диссоциации $\mathcal{E}_\infty^{\text{dis}}$ и межатомное расстояние a для бесконечной молекулярной цепочки атомов водорода в зависимости от магнитного поля

По порядку величины число молекул, образующихся в атмосфере нейтронной звезды, определяется малостью отношения $k_B T / \ln^2 B$. Имея в виду, что для $B = 10^{12}$ Гс энергия диссоциации молекул водорода составляет примерно от 46 эВ для H_2 до 29 эВ для H_∞ , при температуре поверхности звезды порядка 10 эВ можно ожидать заметное число молекул в атмосфере и на поверхности звезды.

Присутствие достаточно большого числа молекул должно влиять на скорость охлаждения звезды и может быть обнаружено в ультрафиолетовом и рентгеновском спектрах.

7. Тяжелый атом в сильном магнитном поле. Модель Томаса–Ферми

Задача об энергии связи и энергии ионизации тяжелого атома с $Z \gg 1$ является одной из наиболее важных для понимания структуры поверхности нейтронных звезд. Расчеты многоэлектронной системы методом Хартри–Фока в этом случае становятся довольно громоздкими, поэтому обычно для тяжелых атомов используется более простой, хотя и существенно менее точный метод Томаса–Ферми [41].

Впервые свойства тяжелых атомов и молекул в сверхсильном магнитном поле, типичном для условий поверхности нейтронной звезды, рассматривались в [19, 43, 72, 73, 76, 77].

Более детально проблема исследовалась позже авторами [57, 58, 78–81]. Очевидно, что точность метода Томаса–Ферми тем выше, чем больше число электронов, т.е. чем больше Z .

Действительно, в [82, 83] строго показано, что модель Томаса–Ферми является асимптотически точной в пределе $n_e \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow \infty$. Это утверждение оказывается справедливым также и в случае тяжелых атомов ($Z \rightarrow \infty$) в сверхсильном магнитном поле [84]. Математические аспекты модели в пределе $Z \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$ изложены в [84–86].

В случае тяжелого атома ($Z \gg 1$) следует уточнить понятие сверхсильного магнитного поля. Обозначим полное число электронов через N , заряд ядра — через Z . Тогда положительному иону отвечает $N < Z$, а нейтральному атому — $N = Z$. В модели Томаса–Ферми отсутствуют решения, описывающие отрицательные ионы ($N > Z$) и связанные молекулярные состояния [87–89].

В основном состоянии в сильном магнитном поле электроны расположены на циклотронных орбитах с радиусами $\rho_m = \sqrt{2m+1} \rho_0$, где m меняется от $m = 0$ до $m = m_{\text{max}}$. Так как $B \gg 1$, то спины всех электронов направлены против поля. Магнитное поле является сильным, если

$$\rho_m \ll \frac{a_0}{Z}. \quad (7.1)$$

Если условие (7.1) выполнено для $m_{\text{max}} \geq N$, т.е. для всех m вплоть до $m_{\text{max}} = Z$, то энергетически выгодно заполнение только нижнего уровня Ландау. При этом движение электронов вдоль оси z , соответствующее основному состоянию, описывается волновыми функциями, которые не имеют нулей по оси z . Электроны заполняют циклотронные орбиты от $m = 0$ до $m = N$, и электронная оболочка атома сильно вытянута вдоль поля.

Условие сверхсильного поля, соответствующее (7.1), имеет вид

$$B \gg 2Z^3. \quad (7.2)$$

Строго говоря, при $Z \rightarrow \infty$ в модели Томаса–Ферми следует различать следующие области магнитного поля

[84]:

- (1) $B \ll Z^{4/3}$,
- (2) $B \approx Z^{4/3}$,
- (3) $Z^{4/3} \ll B \ll Z^3$,
- (4) $B \approx Z^3$,
- (5) $B \gg Z^3$.

(7.3)

В областях (1), (2), (3) электронная плотность сферически-симметрична. В областях (3), (4), (5) электроны занимают нижний уровень Ландау. В областях (4), (5) атом становится несферическим, сильно вытянутым вдоль поля.

Наибольший интерес для физики нейтронных звезд представляют области умеренно сильного (3) и сверхсильного (5) магнитных полей. Соответствующие численные значения магнитного поля в случае железа ($Z = 26$) равны

$$B = 26^{4/3} B_9 = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Гс}, \quad B = 26^3 B_9 = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ Гс}.$$

7.1. Тяжелый атом

в умеренно сильном магнитном поле

Рассмотрим область умеренно сильного магнитного поля, полагая $m_{\max} \ll N, Z$. В этом случае электроны находятся на нижнем уровне Ландау. Поскольку по ρ ширина волновых функций $\psi(\rho) \sim \exp(-\rho^2/B)$ порядка $1/\sqrt{B}$, то для не слишком больших значений B волновые функции соседних циклотронных орбит будут сильно перекрываться. При этом энергетически выгодным становится заполнение возбужденных уровней по z с малыми значениями m .

Соответствующие волновые функции $f_v(z)$ с $v \neq 0$ имеют нули по z , а электронная плотность более или менее однородна вдоль оси z . На каждом m -уровне в основном состоянии находится по крайней мере несколько электронов, так что можно пользоваться приближением Томаса–Ферми.

В адиабатическом приближении число состояний электронов в фазовом пространстве легко подсчитать, принимая во внимание, что радиус циклотронной орбиты в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, равен $\rho_m \approx \sqrt{2m/B}$, т.е. число возможных "поперечных" состояний $dN_{\perp} \equiv dm = \rho B d\rho$. В направлении вдоль магнитного поля движение электронов в адиабатическом приближении предполагается одномерным с импульсом p_z , так что $dN_{\parallel} = p_z dz/2\pi$.

Полное число состояний в элементарной ячейке будет

$$dN_{\perp} dN_{\parallel} = \frac{p_z B}{2\pi} \rho_m d\rho_m dz = n_e(\mathbf{r}) \pi \rho d\rho dz, \quad (7.4)$$

откуда плотность электронов

$$n_e(\mathbf{r}) = \frac{B}{2\pi^2} p_z. \quad (7.5)$$

Полная кинетическая энергия электронов внутри поверхности Ферми есть

$$K[n_e(\mathbf{r})] = dN_{\perp} \frac{dz}{2\pi} \int_{|p| \leq p_F} \frac{p^2}{2} dp, \quad (7.6)$$

откуда, используя (7.5), для плотности кинетической энергии имеем

$$k(\mathbf{r}) = \frac{2\pi^4}{3B^2} n_e^3(\mathbf{r}). \quad (7.7)$$

Без учета обменного взаимодействия уравнения Томаса–Ферми следуют из условия минимума функционала полной энергии

$$E = \frac{2\pi^4}{3B^2} \int n_e^3(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} - Z \int \frac{n_e(\mathbf{r})}{r} d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \frac{n_e(\mathbf{r})n_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \quad (7.8)$$

при дополнительном нормировочном условии

$$N = \int n_e(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (7.9)$$

Варьируя (7.8), получаем соотношение, выражающее плотность электронов через потенциал электростатического поля:

$$n_e(\mathbf{r}) = \frac{B}{2\pi^2} \sqrt{2(\varphi - \varphi_0)}. \quad (7.10)$$

Это выражение очевидным образом следует из закона сохранения энергии $p_z^2/2 = \varphi - \varphi_0$, где электростатический потенциал определяется как

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{Z}{r} + \int \frac{n_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (7.11)$$

Напомним (см. [41]), что φ_0 — максимальная энергия, причем для иона $\varphi_0 > 0$, а для нейтрального атома $\varphi_0 = 0$.

Подставляя (7.10) в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi n_e, \quad (7.12)$$

получаем окончательное уравнение для φ в виде

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2B}{\pi} \sqrt{2(\varphi - \varphi_0)}. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.13) является сферически-симметричным [76, 57], т.е. его решение $\varphi(\mathbf{r})$, как и функция $n_e(\mathbf{r})$, минимизирующая функционал энергии (7.8), зависит только от $r = |\mathbf{r}|$.

Естественные граничные условия для $\varphi(r)$ состоят в том, что при $r \rightarrow 0$ потенциал $\varphi(r)$ переходит в кулоновский потенциал ядра с зарядом Z :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\varphi(r) = -Z, \quad (7.14)$$

а при $r \rightarrow \infty$ из-за экранировки ядра электронами оболочки потенциал $\varphi(r)$ должен убывать по крайней мере быстрее, чем $1/r$.

Вместо r и $\varphi(r)$ удобно ввести новую переменную x и функцию χ :

$$x = r \left(\frac{2^3 B^2}{\pi^2 Z} \right)^{1/5}, \quad \chi(x) = -\frac{r}{Z} [\varphi(r) - \varphi_0]. \quad (7.15)$$

В переменных (7.15) уравнение (7.13) и граничные условия принимают вид

$$\chi''(x) = \sqrt{x}\chi, \quad (7.16)$$

$$\chi(0) = 1, \quad \chi(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (7.17)$$

В случае положительного иона ($N < Z$) следует дополнительно потребовать, чтобы на границе иона (при $x = x_0$) выполнялось условие $\chi(x_0) = 0$. Учитывая это условие, из (7.9) и (7.16) получаем

$$\begin{aligned} N &= Z \int_0^{x_0} \frac{d}{dx} [x\chi'(x) - \chi(x)] dx = \\ &= Z\{1 + x_0\chi'(x_0) - \chi(x_0)\}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Поскольку в переменных x и χ уравнение (7.16) и граничные условия (7.17) не зависят от N и Z , то тем самым формулы перехода к новым переменным (7.15) определяют универсальную зависимость радиуса атома, потенциала и плотности электронов от заряда ядра Z и магнитного поля. Зная решения (7.16), можно выразить через $\chi(x)$ плотность электронов, энергию атома и энергию ионизации. Выражая ϕ через $\chi(x)$ в (7.10), для плотности электронов имеем

$$n_e = \left(\frac{2}{\pi^{11}}\right)^{1/5} Z^{2/5} B^{6/5} \left(\frac{\chi(x)}{x}\right)^{1/2}. \quad (7.19)$$

С учетом (7.19) полная энергия атома записывается в виде [78]

$$E = -\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{1/5} Z^{9/5} B^{2/5} \left\{ \chi'(0) + \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{N}{Z}\right)^2 \right\}, \quad (7.20)$$

а энергия ионизации определяется как разность энергий:

$$E_I = E(Z, N-1) - E(Z, N).$$

Таким образом, в умеренно сильном магнитном поле радиус атома и его энергия зависят от Z и B как

$$R(Z, B) \sim Z^{1/5} B^{-2/5}, \quad E(Z, B) \sim -Z^{9/5} B^{2/5}. \quad (7.21)$$

Область умеренно сильного магнитного поля определяется условием применимости метода Томаса–Ферми вместе с использованным в ходе решения методом адиабатического приближения. Следовательно, необходимо, чтобы кулоновское взаимодействие в атоме было мало по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау, т.е. $Z/R \ll \hbar\omega_c$. Учитывая, что согласно (7.15) характерный размер атома $R \sim Z^{1/5} B^{-2/5}$, получаем ограничение на магнитное поле $B \gg Z^{4/3}$.

Вместе с тем для применимости модели Томаса–Ферми требуется, чтобы фермиевская длина волны электронов была мала по сравнению с размером атома. Условие умеренно сильного магнитного поля означает, что на каждом уровне с квантовым числом m находится по крайней мере несколько электронов, т.е. $\rho_Z \gg 1/Z$, откуда с учетом того, что $\rho_Z \approx \sqrt{2Z/B}$, следует $B \ll Z^3$. Таким образом, область применимости решений в модели Томаса–Ферми определяется соотношением

$$Z^{4/3} \ll B \ll Z^3. \quad (7.22)$$

Как известно, метод Томаса–Ферми удобен для оценок благодаря возможности получения простых аналитических решений, однако точность получаемых

результатов значительно ниже, чем, например, в методе Хартри–Фока. В случае сильного магнитного поля неточность модели Томаса–Ферми обусловлена по крайней мере двумя факторами: отсутствием учета обменного взаимодействия и использованием адиабатического приближения.

Обменное взаимодействие, вообще говоря, эффективно уменьшает электростатическое отталкивание электронов, так что они упаковываются в оболочке более плотно (чем предсказывает простая модель Томаса–Ферми), тем самым уменьшая радиус атома и увеличивая его энергию. Численные расчеты в рамках модели Томаса–Ферми–Дирака, проведенные в [78], показывают, что относительный вклад обменного взаимодействия (особенно в энергию ионизации) может быть порядка 30–60 % в зависимости от Z , N и B .

Учет обменного взаимодействия действительно приводит к увеличению полной энергии связи атома и уменьшению его радиуса. Однако с ростом магнитного поля относительный вклад обменного взаимодействия в энергию связи и энергию ионизации становится малым.

Неточность метода Томаса–Ферми, связанная с использованием адиабатического приближения при вычислении кинетической энергии как функционала электронной плотности, обсуждалась в [79]. Более точные вычисления для электронной плотности [79, 90] приводят к уравнению для потенциала, которое хотя и сферически симметрично, как (7.16), но содержит в явном виде параметры Z и B в уравнении и граничных условиях, так что скейлинг (7.21) с этой точки зрения приближенный, асимптотически точный при $B \rightarrow \infty$.

Согласно численным расчетам [79] существенное отличие от решения, полученного в адиабатическом приближении, имеет место при $B = (10-50) B_9$, однако уже для $B \geq 1000 B_9$ согласие с адиабатическим приближением удовлетворительное.

7.2. Тяжелый атом в сверхсильном магнитном поле

В случае, когда $m_{\max} \gg N$, выполняется условие для сверхсильного магнитного поля (7.2). При этом электроны заполняют нижние по азимутальному квантовому числу m уровни циклотронных орбит в нижней зоне Ландау, располагаясь по одному электрону на каждом уровне.

Атом становится сильно вытянутым вдоль магнитного поля с радиусом оболочки порядка радиуса максимальной циклотронной орбиты $\rho_Z \approx \sqrt{2Z/B}$. В этом случае основное состояние тяжелого атома аналогично основному состоянию атома водорода при $B \gg 1$.

Энергию тяжелого атома можно вычислить в приближении самосогласованного поля [77] аналогично тому, как это было сделано в разделе 6.2. Из изложенного в конце раздела 7.1 следует, что адиабатическое приближение в рассматриваемом случае должно иметь хорошую точность, а поправки на обменное взаимодействие невелики.

Аналогично выражению (6.20) энергия атома определяется как

$$\begin{aligned} E &= \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z_i} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{Z}{r_i} \Psi^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \Psi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

В пренебрежении обменным взаимодействием волновая функция Ψ представляет собой просто произведение одночастичных волновых функций электронов в самосогласованном электрическом поле. При этом энергия выражается через среднюю плотность электронов $n_e = \sum_i \Psi_i^2$.

Таким образом, мы приходим к уравнению, аналогичному (6.20):

$$E = N \int d^3r \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{N-1}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \Psi^2 - \frac{Z}{r} \Psi^2 \right\}. \quad (7.24)$$

Здесь Ψ — средняя волновая функция, нормированная условием $N\Psi^2 = n_e$, $\langle 1/r \rangle$ определено как (6.21).

Так же как и в разделе 6.2, выберем волновую функцию в виде (6.22). Подстановка (6.22) в (7.24) дает с логарифмической точностью

$$E \approx \frac{N\alpha^2}{2} - 2NZ \ln(\alpha R) + \frac{1}{2} \alpha N(N-1) \ln(\alpha R), \quad (7.25)$$

где $R = \rho_N$, а $\alpha \rho_N \ll 1$.

Варьируя (7.25) по α , из условия минимума энергии с логарифмической точностью находим [77]

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (4Z - N + 1) L, \\ E &= -\frac{N}{8} L^2 (4Z - N + 1)^2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Выражение для L в (7.26) аналогично выражению для l в (6.25) и при $N = Z$ с логарифмической точностью имеет вид

$$L \approx \frac{1}{2} \ln \frac{B}{Z^3}. \quad (7.27)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, в сверхсильном магнитном поле ($B \gg Z^3$) форма тяжелого атома и выражение для энергии аналогичны соответствующим характеристикам атома водорода при $B \gg 1$. В частности, при $Z = N = 1$ формула для энергии (7.26) переходит в асимптотическую формулу для энергии связи атома водорода $\mathcal{E}_H = -(\ln^2 B)/2$.

Энергия ионизации нейтрального атома

$$E_I = \frac{3}{8} L^2 Z^2 \quad (7.28)$$

очень быстро растет с ростом Z , в отличие от энергии ионизации атомов в умеренно сильном поле. Заметим, что численное значение энергии ионизации для тяжелых атомов с $Z \gg 1$ огромно по "земным" масштабам и составляет сотни килоэлектрон-вольт.

7.3. Молекулы. Уравнение состояния

Скорость остывания нейтронной звезды зависит от состояния вещества на поверхности звезды, от профиля плотности и градиента температуры в поверхностном слое. Таким образом, представляет интерес вопрос об уравнении состояния вещества на поверхности нейтронной звезды в сильном магнитном поле.

Несмотря на малую точность по сравнению с методом самосогласованного поля, простота модели Томаса–Ферми делает привлекательным распростране-

ние метода на исследование связанных молекулярных состояний и уравнения состояния вещества. Не останавливаясь здесь на изложении результатов (см. [91–94] и обзор [81]), ограничимся лишь общими замечаниями относительно применимости метода Томаса–Ферми.

В простейшей форме (без учета обменного взаимодействия между электронами) уравнение Томаса–Ферми получается путем варьирования функционала полной энергии (см. (7.8)), куда следует добавить член с кулоновским взаимодействием ядер. Учет обменного взаимодействия не приводит к существенным усложнениям. Уравнения состояния холодного вещества в сильном магнитном поле с учетом обменного взаимодействия (модель Томаса–Ферми–Дирака) рассмотрены в [81, 92].

Как известно, ни модель Томаса–Ферми, ни модель Томаса–Ферми–Дирака не имеют решений, соответствующих устойчивым связанным молекулярным состояниям. В рамках этого подхода не существует также решения, отвечающего конденсированному состоянию с нулевым давлением.

Утверждение об отсутствии решений, отвечающих устойчивым молекулам в модели Томаса–Ферми, известное как теорема Теллера [88, 89], становится очевидным, если принять во внимание, что в приближении Томаса–Ферми энергия атома пропорциональна $Z^{7/3}$ и радиус атома пропорционален $Z^{-1/3}$, в то время как энергия связи молекул и их размеры, обусловленные электронами на внешней оболочке атома, не должны зависеть от заряда ядра Z или по крайней мере зависимость должна быть слабой.

Проблема сама по себе может быть сформулирована в более общей форме как проблема устойчивости материи (см. обсуждение в [95, 96]). Приблизительно энергия связи молекул может быть вычислена в модифицированной модели Томаса–Ферми–Дирака–Вайцзекера, учитывающей члены с градиентом электронной плотности в функционале кинетической энергии. Вычисление энергии связи молекул в сильном магнитном поле в модифицированной модели [94] качественно согласуется с результатами, полученными в методе самосогласованного поля.

8. Вещество в сверхсильном магнитном поле

Вопрос об энергии связи вещества в сильном магнитном поле на поверхности нейтронной звезды представляется одним из наиболее важных для теории магнитосферы пульсаров. В зависимости от того, велика или мала энергия связи, вещество либо находится в твердой фазе, образуя одномерную металлическую решетку, либо образует жидкий (газовый) слой на поверхности звезды. Тем самым определяются граничные условия для электрического поля на поверхности пульсара, являющиеся основой для теоретических моделей магнитосферы [22, 24, 33, 34, 97].

В зависимости от значений энергии связи и работы выхода мы имеем либо модель магнитосферы со свободной эмиссией частиц из звезды, либо модель с запертой эмиссией и конечным электрическим полем на поверхности. Конкретное значение поля на поверхности зависит от температуры поверхности звезды, но с учетом того, что основным процессом является термоэмиссия, оно будет преимущественно определяться энергией связи вещества.

Численный коэффициент для термоэмиссионного тока в рассматриваемых условиях оценить трудно, однако на основании экстраполяции известных для лабораторных условий скоростей термоэмиссии можно сделать вывод о том [26], что при температуре поверхности порядка 100 эВ минимальное значение энергии связи вещества, которое совместимо с моделями магнитосферы с конечным электрическим полем, составляет $E_{\min} \approx 3$ кэВ.

Возможные кристаллические структуры в твердой фазе, имеющие оптимальную энергию связи, определяются цилиндрической формой атомов в сверхсильном магнитном поле. Поэтому это может быть либо объемно-центрированная тетрагональная решетка (D_{4h}), либо ромбоэдрическая решетка (D_{3d}). На самом деле для более или менее достоверной оценки достаточно получить оценку энергии связи бесконечной молекулярной цепочки.

В ранних работах [20, 98] авторы вычисляли энергию связи полимерных молекул, предполагая, что длинные молекулы плотно упаковываются путем слипания, образуя таким образом твердое тело. Типичные значения энергии связи, полученные в [20, 98] для кристаллической решетки из атомов железа, оценивались от 2,6 кэВ для $B = 10^{12}$ Гс до 10 кэВ для $B = 5 \cdot 10^{12}$ Гс. Однако более точные расчеты [99] показали, что эти значения примерно на порядок завышены.

Простые оценки энергии связи атомов в кристаллической решетке в сильном магнитном поле (как, например, приведенные в разделе 6.1) не дают более или менее надежного ответа, так как при такой оценке энергия связи определяется как разность двух больших чисел, каждое из которых получено с недостаточной точностью.

Вообще говоря, а priori можно было бы предположить, что, поскольку в сверхсильном магнитном поле атомы полностью поляризованы, синглетные термы, обуславливающие сильную межатомную связь, не будут эффективны и, следовательно, энергия связи должна быть мала. Этот вывод в целом подтверждается численными расчетами энергии связи, выполненными методом функционала плотности [25–27] и методом Хартри–Фока [28, 29].

В [25–27] вычислялась энергия связи для объемно-центрированной и ромбоэдрической кристаллических решеток из атомов железа в сильном магнитном поле. Обменное взаимодействие электронов принималось таким, как если бы они образовывали однородный газ в отсутствие магнитного поля. Вычисленная таким образом энергия связи для объемноцентрированной решетки составляет всего лишь 0,12 кэВ при $B = 10^{12}$ Гс и 0,5 кэВ для $B = 5 \cdot 10^{12}$ Гс.

Более последовательный учет обменного взаимодействия можно получить в модели Хартри–Фока, однако вычисление энергии связи для кристаллической решетки представляет собой довольно громоздкую и трудную задачу. Вычисленные в [28, 29] значения энергии связи молекулярных цепочек в приближении Хартри–Фока показывают, что тяжелые атомы в сильном магнитном поле не образуют связанные состояния.

В [29] показано, что изолированные атомы энергетически более выгодны, чем молекулярные цепочки, для атомов с $Z > 2$ при $B > 10^{12}$ Гс и для атомов с $Z > 4$ при $B > 5 \cdot 10^{12}$ Гс. Энергия связи для молекулы из атомов гелия, найденная в [29], составляет примерно 25 эВ на

атом при $B = 10^{12}$ Гс, а атомы с $Z \geq 3$ при $B > 10^{12}$ Гс совсем не связываются в цепочку.

Оценка энергии связи полимерной молекулы из атомов железа в сильном поле в приближении Хартри–Фока [29] дает значение меньше 1 кэВ, а для возможной энергии связи между полимерными цепочками — меньше 0,5 кэВ. Таким образом, расчеты показывают, что как в приближении функционала плотности, так и в приближении Хартри–Фока тяжелые атомы в сверхсильных магнитных полях не образуют связанных состояний.

9. Заключение

Присутствие сверхсильного магнитного поля коренным образом изменяет физические свойства вещества. Полностью изменяется строение электронных оболочек атомов. Атомы становятся сильно вытянутыми вдоль магнитного поля. При этом их энергия связи и потенциал ионизации существенно увеличиваются. Изменяются также характер и интенсивность межатомного взаимодействия и, как следствие, структура вещества.

В основном состоянии полностью поляризованные в сильном магнитном поле атомы становятся слабо взаимодействующими. Более того, газ водородоподобных атомов образует слабонеидеальный бозе-газ, не замерзающий вплоть до нулевой температуры. В то же время слабо возбужденные атомы водорода могут образовывать молекулы с относительно большой энергией связи и длинные полимерные молекулярные цепочки.

Присутствие молекул водорода (или гелия) в атмосфере пульсаров может влиять на скорость охлаждения атмосферы и должно проявляться в ультрафиолетовых и рентгеновских спектральных наблюдениях.

Выполненные расчеты энергии связи вещества на поверхности нейтронной звезды говорят в пользу моделей магнитосферы со свободной эмиссией. Действительно, энергия связи атомов железа согласно расчетам [25–27, 29] порядка температуры поверхности и слишком мала для предотвращения свободной эмиссии в сильном электрическом поле.

Имеется, однако, другая возможность, не рассматривавшаяся до сих пор. С течением времени благодаря аккреции водорода и гелия на поверхности пульсара могут образовываться молекулы, состоящие из чередующихся тяжелых и легких атомов. Предварительные оценки показывают (см. также [72]), что энергия связи таких смешанных молекул может быть довольно большой.

Если более точные расчеты подтвердят вышеприведенные оценки, то возможен следующий сценарий эмиссии пульсара. Сразу после рождения пульсара его магнитосфера описывается моделью со свободной эмиссией, а по мере накопления на поверхности в результате аккреции легких атомов истечение вещества из звезды может стать полностью запертым. Если такая эволюция действительно имеет место, то модели магнитосферы со свободной эмиссией должны лучше описывать молодые пульсары, а модели с запертым истечением вещества из звезды должны быть более пригодны для старых пульсаров.

Укажем здесь также на новую возможность механизма молекулярного лазерного излучения водорода на поверхности нейтронной звезды. Такое излучение может быть обусловлено переходом между высоколежащим

метастабильным сильносвязанным состоянием водородоподобных атомов в синглетном терме и практически несвязанным основным состоянием атомов, взаимодействующих через потенциал триплетного терма. Заметим, что, поскольку во всех моделях магнитосферы пульсара имеется обратный поток частиц высокой энергии [22, 100], лазерная накачка обеспечена при любой модели магнитосферы.

Мы благодарны Б. Б. Кадомцеву и В. Л. Гинзбургу за полезные обсуждения, стимулировавшие написание настоящего обзора, а также С.М. Гольбергу, А.В. Королёву и Ю. П. Кравченко за обсуждение рассмотренных здесь вопросов. Мы также благодарим Шведскую Королевскую академию наук за поддержку настоящей работы.

Список литературы

- Baym G, Pethick C, Sutherland P *Astrophys. J.* **170** 299 (1971)
- Lai D, Shapiro S L *Astrophys. J.* **383** 745 (1991)
- Silvera I F, Walraven J T M *Phys. Rev. Lett.* **44** 164 (1980)
- Silvera I F, Reynolds M J *Low Temp. Phys.* **87** 343 (1992)
- Silvera I F, Walraven J T M, in *Progress in Low Temperature Physics* V. X (Ed. D F Brewer) (Amsterdam: North-Holland, 1990) p. 139
- Korolev A V, Liberman M A *Phys. Rev. Lett.* **72** 270 (1994)
- Korolev A V, Liberman M A *Phys. Rev., Ser. B* **50** 257 (1994)
- Сахаров А Д, Людаев Р З, Смирнов Е Н и др. *ДАН СССР* **165** 65 (1965)
- Felber F S, Liberman M A, Velikovich A L *Appl. Phys. Lett.* **46** 1042 (1985)
- Felber F S, Malley M M, Liberman M A et al. *Phys. Fluids* **31** 2053 (1988)
- Hewish A, Bell S J, Pilkington J D et al. *Nature* **217** 709 (1968)
- Хьюиш Э УФН **97** 715 (1969)
- Baade W, Zwicky F *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20** 254 (1934)
- Oppenheimer J R, Volkoff G *Phys. Rev.* **55** 374 (1934)
- Pacini F *Nature* **216** 567 (1967)
- Gold T *Nature* **218** 731 (1968)
- Shapiro S L, Teukolsky S A *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects* (N. Y.: John Wiley & Sons, 1983)
- Srinivasan G *Astron. Astrophys. Rev.* **1** 209 (1989)
- Ruderman M *Phys. Rev. Lett.* **27** 1306 (1971)
- Flowers E G, Lee Jin-Fuw, Ruderman M A et al. *Astrophys. J.* **215** 291 (1977)
- Sturrock P A *Astrophys. J.* **164** 529 (1971)
- Ruderman M A, Sutherland P G *Astrophys. J.* **196** 51 (1975)
- Cheng A F, Ruderman M A *Astrophys. J.* **214** 598 (1977)
- Beskin V S, Gurevich A V, Istomin Ya N *Physics of the pulsar magnetosphere* (Cambridge: University Press, 1993)
- Jones P B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **216** 503 (1985)
- Jones P B *Phys. Rev. Lett.* **55** 1338 (1985)
- Jones P B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **218** 477 (1986)
- Neuhauser D, Langanke K, Koonin S E *Phys. Rev. A* **33** 2084 (1986)
- Neuhauser D, Koonin S E, Langanke K *Phys. Rev. A* **36** 4163 (1987)
- Fawley W M, Arons J, Scharlemann E T *Astrophys. J.* **217** 227 (1977)
- Michel F C *Astrophys. J.* **192** 713 (1974)
- Scharlemann E T, Arons J, Fawley W M *Astrophys. J.* **222** 297 (1978)
- Arons J, Scharlemann E T *Astrophys. J.* **231** 854 (1979)
- Arons J *Astrophys. J.* **266** 215 (1983)
- Муслимов А Г, Цыган А И, в кн. *Физика нейтронных звезд. Пульсары и барстеры* (Ред. Д А Варшавович, А Д Каминкер, Г Г Павлов, Д Г Яковлев) (Л.: ФТИ им. А. Ф. Иоффе, 1988) с. 121
- Alcock C, Illarionov A *Astrophys. J.* **235** 534 (1980)
- Haensel P, Zdunik J L *Astron. Astrophys.* **227** 431 (1990)
- Elliott R J, Loudon R J *Phys. Chem. Solids* **15** 196 (1960)
- Hasegawa H, Haward R E J *Phys. Chem. Solids* **21** 179 (1961)
- Горьков Л П, Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **53** 717 (1967)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1989)
- Loudon R *Amer. J. Phys.* **27** 649 (1959)
- Cohen R, Lodenquai J, Ruderman M *Phys. Rev. Lett.* **25** 467 (1970)
- Smith Ed R, Henry R J W, Surmelian G L et al. *Phys. Rev. D* **6** 3700 (1972)
- Rau A R P, Spruch L *Astrophys. J. B* **207** 51 (1976)
- Avron J E, Herbst I W, Simon B *Phys. Rev. A* **20** 2287 (1979)
- Cabib D, Fabri F, Firoito G *Nuovo Cimento* **10** 185 (1972)
- Canuto V, Kelly D C *Astrophys. Space Sci.* **17** 277 (1972)
- Wunner J *Astrophys. J.* **240** 971 (1980)
- Ruder H, Herold H, Rösner W, Wunner G *Physica B* **127** 671 (1984)
- Rösner W, Wunner G, Herold H, Ruder H J *Phys. B* **17** 29 (1984)
- Le Guillou J C, Zinn-Justin J *Ann. Phys.* **147** 57 (1983)
- Garstang R H *Rep. Prog. Phys.* **40** 105 (1977)
- Ozaki J, Tomishima Y J *Phys. Soc. Japan* **49** 1497 (1980)
- Forster H, Strupat W, Rösner W et al. *J. Phys. B* **17** 1301 (1984)
- Turbiner A V J *Phys. A* **17** 859 (1984)
- Mueller R O, Rau A R P, Spruch L *Phys. Rev. Lett.* **26** 1136 (1971)
- Rau A R P, Mueller R O, Spruch L *Phys. Rev. A* **11** 1865 (1975)
- Glasser M L, Kaplan J I *Phys. Lett. A* **53** 373 (1975)
- Королёв А В, Либерман М А *ЖЭТФ* **100** 407 (1991)
- Korolev A V, Liberman M A *Phys. Rev. A* **45** 1762 (1992)
- Горьков Л П, Пятаевский Л П *ДАН СССР* **151** 822 (1963)
- Herring C, Flicker M *Phys. Rev.* **134** 362 (1964)
- Bazile S, Trombetta F, Ferrante G *Nuovo Cimento* **9** 457 (1987)
- Korolev A V, Liberman M A *Phys. Rev. B* **47** 14318 (1993)
- Беляев С Т *ЖЭТФ* **34** 433 (1958)
- Попов В Н *Функциональные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (М.: Наука, 1980)
- Лифшиц Е М, Пятаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2* (М.: Наука, 1978) § 14
- Korolev A V, Liberman M A *Physica A* **193** 347 (1993)
- Anderson P W, Morel P *Phys. Rev.* **123** 1911 (1961)
- Leggett A J *Rev. Mod. Phys.* **47** 331 (1975)
- Кадомцев Б Б, Кудрявцев В С *Письма в ЖЭТФ* **13** 15 (1971)
- Кадомцев Б Б, Кудрявцев В С *ЖЭТФ* **62** 144 (1972)
- Constantinescu D H, Reháč P *Phys. Rev. D* **8** 1693 (1973)
- Lai D, Salpeter E E, Shapiro S L *Phys. Rev. A* **45** 4832 (1992)
- Кадомцев Б Б *ЖЭТФ* **58** 1765 (1970)
- Кадомцев Б Б, Кудрявцев В С *Письма в ЖЭТФ* **13** 61 (1971)
- Banerjee B, Constantinescu D H, Reháč P *Phys. Rev. D* **10** 2384 (1974)
- Tomishima Y, Yonei K *Prog. Theor. Phys.* **59** 683 (1978)
- Chen Z, Spruch L *Phys. Rev. A* **35** 1981 (1987)
- Fushiki I, Gudmundsson E H, Pethick C J, Yngvason J *Ann. Phys.* **216** 29 (1992)
- Lieb E H, Simon B *Phys. Rev. Lett.* **31** 681 (1973)
- Lieb E H *Rev. Mod. Phys.* **53** 603 (1981)
- Lieb E H, Solovej J P, Yngvason J *Phys. Rev. Lett.* **69** 749 (1992)
- Lieb E H, Solovej J P, Yngvason J *Commun. Pure Appl. Math.* **XLVII** 513 (1994)
- Lieb E H, Solovej J P, Yngvason J *Commun. Math. Phys.* **161** 77 (1994)
- Sheldon J W *Phys. Rev.* **99** 1291 (1955)
- Teller E *Rev. Mod. Phys.* **34** 627 (1962)
- Balázs N L *Phys. Rev.* **156** 42 (1967)
- Tomishima Y, Matsuno K, Yonei K J *Phys. B* **15** 2837 (1982)
- Van Riper K A *Astrophys. J.* **329** 339 (1991)
- Fushiki I, Gudmundsson E H, Pethick C J *Astrophys. J.* **342** 958 (1989)
- Abrahams A M, Shapiro S L *Astrophys. J.* **374** 652 (1991)
- Abrahams A M, Shapiro S L *Astrophys. J.* **382** 233 (1991)
- Dyson F J J *Math. Phys.* **8** 1538 (1967)
- Spruch L *Rev. Mod. Phys.* **63** 151 (1991)
- Arons J *Astrophys. J.* **248** 1099 (1981)
- Chen H H, Ruderman M A, Sutherland P G *Astrophys. J.* **191** 473 (1974)
- Müller E *Astron. Astrophys.* **130** 145 (1984)
- Jones P B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **204** 9 (1983)
- Келдыш Л В, Онищенко Т Ф *Письма в ЖЭТФ* **24** 70 (1976)
- Garstang R H *Rep. Prog. Phys.* **40** 105 (1977)

**PROPERTIES OF MATTER IN ULTRAHIGH MAGNETIC FIELDS
AND STRUCTURE OF THE SURFACE OF NEUTRON STARS****M. A. Liberman***P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences**ul. Kosygina 2, 117334 Moscow**Physics Department, University of Uppsala**Box 530, S-75121 Uppsala, Sweden**Tel. (4618) 18 31 02, Fax (4618) 55 49 17**E-mail: mishal@snobben.teknikum.uu.se***B. Johansson***Physics Department, University of Uppsala**Box 530, S-75121 Uppsala, Sweden**Tel. (4618) 18 36 23, Fax (4618) 18 35 24*

The physical properties of atoms, molecules, and solids in ultrahigh magnetic fields $B \gg 10^9$ G, which are believed to exist on the surface of neutron stars, are discussed. In such magnetic fields atoms are strongly deformed and elongated along the magnetic field lines; the binding energy and ionizing energy of the atoms are substantially increased and the interatomic interaction is dramatically changed. This strongly modifies the properties of matter at the surface of magnetic neutron stars, which are crucial for modelling pulsar magnetosphere. A scenario for magnetosphere evolution is proposed, which suggests free emission for a young pulsar and strong binding of the matter to the surface at a later stage. This later stage is due to strongly bound chains of alternate heavy atoms and light atoms accreted on the star surface.

PACS numbers: **95.30.-k**, 97.60.Jd

Bibliography — 102 references

Received 21 October 1994