

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны¹

Р.Х. Зейтунян

Задача о волнах на поверхности воды стала центральной в истории теории нелинейных волн. Эта задача является одним из наиболее интересных и успешных приложений нелинейной гидродинамики (НЛГД). Волны на свободной поверхности воды (совершенная жидкость) всегда были заманчивым предметом для исследования, так как они представляют собой хорошо всем известное, и вместе с тем достаточно сложное, явление, которое легко доступно наблюдению, но которое не так-то просто описать. Например, исходные модельные уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ) и Буссинеска были первоначально выведены в качестве аппроксимации для поверхностных волн и эта задача приковывает к себе неослабевающее внимание вплоть до наших дней. В настоящем обзоре дается обоснованный вывод модельных уравнений с использованием асимптотических методов там, где это необходимо. В самом деле, по нашему мнению чрезвычайно важно понять то, что в некоторых случаях эти приближенные уравнения являются интуитивными и эвристическими. Далеко не всегда ясно, какое место рассматриваемое уравнение занимает в иерархии аппроксимаций, имеющих физический смысл, которые в свою очередь являются следствиями точной формулировки выбранной задачи о волнах на поверхности воды.

PACS numbers: 43.25.Fe, 43.25.Rq

Содержание

1. Введение (1403).
 - 1.1. Несколько исторических замечаний.
 2. Математическая формулировка теории нелинейных волн на поверхности воды (1408).
 - 2.1. Основные уравнения.
 - 2.2. Граничные и начальные условия.
 - 2.3. Безразмерная задача.
 3. Уравнения Буссинеска (1412).
 - 3.1. Двумерные уравнения Буссинеска.
 - 3.2. Квазидвумерные уравнения Буссинеска.
 - 3.3. Буссинесковские уединенные и кноидальные волны.
 4. Уравнения Кортевега–де Вриза и Кадомцева–Петвиашвили (1417).
 - 4.1. Прямой асимптотический вывод уравнения Кортевега–де Вриза.
 - 4.2. От уравнений Буссинеска к уравнениям Кортевега–де Вриза.
 - 4.3. Более полное уравнение Кортевега–де Вриза.
 - 4.4. Анализ в фазовой плоскости.
 - 4.5. Предел Кадомцева–Петвиашвили.
 - 4.6. Прямой асимптотический вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили.
 - 4.7. Обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили.
 - 4.8. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили второго порядка.
 - 4.9. Некоторые особенности волновых решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили.
 5. Нелинейные уравнения Шрёдингера и Шрёдингера–Пуассона (1426).
 - 5.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера.
 - 5.2. Солитонное решение нелинейного уравнения Шрёдингера.
 - 5.3. Асимптотический вывод нелинейного уравнения Шрёдингера–Пуассона.
 - 5.4. Согласованные асимптотические разложения.
 - 5.5. Кноидальные волны и солитоны.
 - 5.6. Обобщенные нелинейные уравнения Шрёдингера–Пуассона и их связь с уравнениями Кадомцева–Петвиашвили.
 6. Влияние неровностей дна (1437).
 - 6.1. Квазидвумерное одномерное уравнение Буссинеска при переменной глубине.
 - 6.2. Уравнение Кортевега–де Вриза при переменной глубине.
 - 6.3. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили в канале с неровным дном.
 7. Некоторые аспекты явления уединенных волн и солитонов (1440).
 - 7.1. Открытие Джона Скотта Рассела.
 - 7.2. Решение Буссинеска и Рэлея в виде уединенной волны.
 - 7.3. Уединенные волны Кортевега–де Вриза и Кадомцева–Петвиашвили.
 - 7.4. Численные исследования Забуски и Крускала.
 - 7.5. От уединенной волны к солитону.
 - 7.6. Солитонная "математика".
 8. Корректно поставленная задача: результаты по существованию, единственности и устойчивости решения (1450).
 - 8.1. Существование и единственность.
 - 8.2. Устойчивость и неустойчивость.
 9. Заключение (1454).
- Список литературы (1454).

R.Kh. Zeytounian. Université des Sciences et Technologies de Lille 1, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Département de Mécanique Fondamentale, Bâtiment M 3, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE
E-mail: vipavlov@omega.univ-lille1.fr (for Prof. R.Kh. Zeytounian)

Статья поступила на английском языке 5 октября 1994 г.; перевод поступил в редакцию 20 июля 1995 г.
Перевел Д.Х. Ганьжа

¹ Редакционная коллегия журнала УФН посвящает данную публикацию 30-летию выхода в свет статьи Н.Б. Забуски, М.Д. Курскала [25], в которой впервые в научной литературе был введен термин *солитон*. (Примеч. редколлегии.)

Данный обзор является расширенной версией недавней статьи "Квазидвумерная асимптотическая теория нелинейных волн на поверхности воды" [Journal of Engineering Mathematics 28 261 (1994)]. Полную теорию "Нелинейных длинных поверхностных волн в мелкой воде" можно найти в препринте [R Kh Zeytounian, Université de Lille 1, LML, (1993) 224 pages]. (Примеч. автора.)

1. Введение

Волновое движение массы воды со свободной поверхностью в канале с неровным дном под действием силы тяжести является одним из наиболее интересных и успешных приложений нелинейной гидродинамики.

Исследования волн на поверхности воды обогащались за счет интереса со стороны других областей науки, включая прикладную математику и сингулярные методы возмущений. В самом деле, волны на свободной поверхности массы воды всегда были заманчивым предметом для исследования, так как они представляют собой хорошо всем известное, и вместе с тем достаточно сложное, явление, которое легко доступно наблюдению, но которое весьма не просто описать!

Если волновое движение невязкой несжимаемой жидкости (например, воды) является безвихревым, то естественно было бы предположить, что потенциал скорости $\phi(t, x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако уравнение Лапласа (эллиптическое) имеет весьма отдаленное отношение к волнам. Такое предположение было бы ошибкой из-за любопытных эффектов, обусловленных наличием свободной поверхности. В самом деле, уравнение Лапласа имеет одно граничное условие, но только в том случае, когда граница известна (так называемые "классические" задачи Дирихле и Неймана). В частности на свободной (неизвестной) поверхности $z = \zeta(t, x, y)$ необходимо два условия, потому что неизвестен не только потенциал $\phi(t, x, y, z)$, но и положение свободной поверхности $\zeta(t, x, y)$. Более того, хотя уравнение Лапласа линейно, но два граничных условия на свободной поверхности, к несчастью, нелинейны.

Необходимо, однако, заметить, что при наличии свободной поверхности завихренность массы невязкой и несжимаемой воды необязательно остается нулевой, даже если она изначально была равна нулю! В самом деле, свободная поверхность может пересекаться сама с собой. Это происходит, когда волна опрокидывается и образуется вихревая пелена. В этом случае вместо уравнения Лапласа необходимо рассматривать полные уравнения Эйлера, которые заведомо справедливы для несжимаемой жидкости. Здесь я не буду рассматривать этот чрезвычайно важный, но и чрезвычайно трудный вопрос. В данной статье дается анализ только классической нелинейной задачи для ϕ и ζ с учетом эффектов поверхностного натяжения и неровностей дна.

Естественно, при рассмотрении задачи Коши для ϕ и ζ не удастся избежать некоторых математических трудностей. Мы признаем вероятность того, что задача Коши не может быть корректно поставлена (определена) — волны на поверхности воды опрокидываются! — т.е. (вихревое) движение может стать турбулентным, и решение теряет непрерывную зависимость от начальных данных; в этом случае возможно возникновение хаоса, проявляющееся в появлении странных аттракторов. Этот аспект проблемы во многом еще не ясен до сих пор и его необходимо иметь в виду в любой теоретической работе по волнам на поверхности воды для придания ей правильной научной перспективы. Тот факт, что большинство существующих теорий (линеаризованные, теории длинных волн или слабо нелинейные приближения) существенно опираются на некоторые гипотетические предположения, не уменьшает, конечно, их практической ценности.

1.1. Несколько исторических замечаний

Что касается потенциала скорости $\phi(t, x, y, z)$ для движения невязкой жидкости (теорема Лагранжа, 1781 г.) [1], то его существование впервые было строго продемонстрировано Коши в 1815 г. [2]. Другое доказательство было дано Стоксом в 1849 г. [3] вместе с превосходным историческим и критическим комментарием по данному вопросу (согласно Лэмбу, 1932 г.) [4]². Более полное доказательство обобщенного условия непротекания на свободной поверхности

$$\frac{D}{Dt}(z - \zeta) = 0 \quad \text{на } z = \zeta(t, x, y),$$

где $D/Dt = \partial/\partial t + \phi_x \partial/\partial x + \phi_y \partial/\partial y + \phi_z \partial/\partial z$, принадлежит лорду Кельвину (см. У. Томсон, 1848 г.) [6]. Первые исследования по бегущим волнам в канале можно найти в трактатах Грина (1839 г.) [7] и Эйри (1845 г.) [8].

Теория бесконечно малых волн, вызванных локальным возмущением свободной поверхности в глубокой воде, была развита в двух классических трудах Коши (1815 г.) [2] и Пуассона (1816 г.) [9]³.

Нахождение формы волн, которые удовлетворяют условиям равномерного распространения без изменения типа при снятии ограничения "бесконечно малой" амплитуды волны, составляет предмет классического исследования Стокса [3] и многих последующих исследований (*стоксовское разложение*). Этой проблеме посвящены также результаты Рэля 1876 г. [10]. Для того чтобы стоксовское разложение было справедливо, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- амплитуда волны должна быть меньше длины волны;
- амплитуда волн на поверхности воды должна быть меньше глубины.

Другими словами *свойства волны меняются мало на расстояниях того же порядка, что и глубина*.

Интересно также отметить следующее. Доказательства сходимости стоксовского разложения дали Леви-Чивита в 1925 г. [12] и Струик в 1926 г. [13]. Однако сходимость не означает устойчивость и для стоксовских волн в глубокой воде имеет место неустойчивость!

Система *точных* уравнений, описывающих форму волнового движения при бесконечной глубине жидкости, была дана еще в 1802 г. Герстнером [14] и позднее независимо от него Рэнкином в 1863 г. [15].

Так называемая "*теория мелкой воды*" подчиняется системе уравнений, исследованной Эйри [8]. Он впервые сформулировал предельные уравнения для анализа очень длинных волн конечной амплитуды в мелкой воде. Но в уравнениях Эйри не учитывались дисперсионные эффекты. Дисперсионные эффекты были учтены в так называемых уравнениях Буссинеска [16–19]. В одномерном случае эти уравнения Эйри совпадают с так называемыми *гидравлическими* уравнениями Сен-Венана [20].

Рассел⁴ в 1844 г. [21] в своем интересном экспериментальном исследовании обратил особое внимание на

² О стационарном уравнении Бернулли см. Бернулли (1738 г.) [5].

³ Об этой проблеме см. также статьи Рэля (1883 г.) [10] и Попова (1858 г.) [11].

⁴ Многие авторы (см., например, Лэмб [4], раздел 252) называют его "Скотт Рассел", но в действительности его фамилия просто Рассел согласно одиннадцатому изданию *Британской энциклопедии*.

необычные волны, которые он назвал "уединенные волны". Такая волна представляла собой *одиночное поднятие*, высота которого не обязательно была мала по сравнению с глубиной жидкости. Она *могла проходить большие расстояния вдоль равномерного канала, практически не меняя своего типа*. Но его описание волны как одиночного поднятия конечной амплитуды и постоянной формы противоречило предсказаниям теории мелкой воды Эйри, что волна конечной амплитуды не может распространяться, не меняя свою форму!

Противоречие между экспериментами Рассела и теорией мелкой воды Эйри (а также стоковским разложением для осциллирующих волн постоянной формы) было разрешено независимо Буссинеском [16–19] и Рэлеем [10]. Они показали, что правильный учет ускорения в вертикальном направлении, которое в конечном итоге обуславливает дисперсию и которое не учитывается в теории мелкой воды Эйри (см. Майлс, 1980 г., [22]), а также конечности амплитуды, ведет к решению

$$\zeta = a_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - ct}{\lambda_0}, \quad \varepsilon = \frac{a_0}{h_0} \ll 1, \quad \delta^2 = \left(\frac{h_0}{\lambda_0}\right)^2 = O(\varepsilon), \quad (1.1.1)$$

где a_0 — характерная амплитуда начального поднятия на свободной поверхности, описываемого функцией $\zeta^0(x/\lambda_0)$, и λ_0 — характерная длина волны в горизонтальном направлении x . Наконец, $c = [g(h_0 + a_0)]^{1/2}$ — скорость волны. Вводя *число Фруда* $Fr = c/(gh_0)^{1/2}$, имеем $(Fr)^2 = 1 + \varepsilon$.

Характерную длину волны λ_0 можно определить с помощью критерия Урселла:

$$U = \frac{3\varepsilon}{4\delta^2} = 1. \quad (1.1.2)$$

Таким образом, характерной особенностью уединенной волны является *баланс между нелинейностью и дисперсией*.

Безразмерный параметр U появился в работе Стокса [3]. Однако его истинное значение как меры отношения нелинейности к дисперсии было впервые продемонстрировано Урселом в 1953 г. [23]. Вывод Рэля [10] эквивалентности (1.1.1) и (1.1.2) был повторен Лэмбом ([4], раздел 252). Этот вывод является более прямым, однако менее глубоким, чем у Буссинеска (согласно [22]). Как отмечает Майлс в статье [22], Буссинеск в своей первой статье об уединенных волнах [16] только намечает в общих чертах вывод уравнения (1.1.1) для профиля уединенной волны. Для того чтобы оценить его истинный вклад в развитие теории уединенных волн, необходимо заглянуть в другую его статью за 1871 г. [17], либо в его статью за 1872 г. [18], либо его эссе за 1877 г. [19]. Лэмб [4] упоминает только о его первой статье [16] и, по крайней мере в ретроспективе, недооценивает значение работ Буссинеска! Так называемые *уравнения Буссинеска*, которые в своей традиционной форме представляют уравнения эволюции смещения на свободной поверхности и усредненной скорости в горизонтальном направлении и отнюдь не ограничены одним направлением распространения, не приводятся в явном виде в статьях Буссинеска за 1871 и 1872 гг. Однако уравнения Буссинеска (формула (19) в статье [18] и формула (280) в эссе [19]) эквивалентны (после исключения некоторых членов более высокого порядка) уравнениям для смещения

свободной поверхности и скорости в горизонтальном направлении на (ровном) дне канала. Действительно, вместо двух его уравнений можно вывести следующее *одно уравнение Буссинеска* для $\zeta(t, x)$

$$\zeta_{tt} = c_0^2 \left(\zeta_{xx} + \frac{3}{2h_0} \zeta_{xx}^2 + \frac{1}{3} h_0^2 \zeta_{xxxx} \right), \quad (1.1.3)$$

где $c_0^2 = gh_0$. Уравнение (1.1.3) сводится к нижеследующему уравнению (1.1.4), классическому уравнению Кортевега и де Вриза [24] (так называемое *КдВ уравнение*) факторизацией оператора $c_0^2 \partial^2 / \partial x^2 - \partial^2 / \partial t^2$, привлечением допущения о распространении в одну сторону и интегрированием по x :

$$\zeta_t + c_0 \left(\frac{3}{2h_0} \zeta \zeta_x + \frac{1}{6} h_0^2 \zeta_{xxx} \right) = 0. \quad (1.1.4)$$

Это КдВ уравнение допускает только решения в виде распространяющейся вправо волны.

Интерес к задаче пошел на убыль после разрешения Буссинеском и Рэлеем парадокса Эйри–Стокса и был весьма спорадическим вплоть до открытия в 1965 г. Забуски и Крускалом того факта, что *асимптотическим решением КдВ уравнения в большинстве случаев является уединенная волна* [25]. Весьма значительный интерес к этой проблеме в наши дни обусловлен именно этим открытием (см. раздел 7.4). Фактически уравнение Кортевега–де Вриза в своей исходной форме (см. с. 423 в статье Кортевега и де Вриза [24]) имеет следующий вид:

$$\zeta_t = \frac{3}{2} c_0 \left(\zeta \zeta_x + \frac{2}{3} \alpha \zeta_x + \frac{1}{3} \sigma \zeta_{xxx} \right), \quad (1.1.5)$$

где α — малая произвольная константа, которая тесно связана со скоростью равномерного движения жидкости, а параметр σ имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{3} h_0^3 - \frac{h_0 T}{\rho_0 g}$$

и зависит от поверхностного натяжения жидкости T (при постоянной плотности ρ_0). В 1895 г. Кортевег и де Вриз, которые по всей видимости не знали работ Буссинеска и Рэля и которые пытались ответить на возражения Эйри и Стокса⁵, вывели однонаправленное уравнение (1.1.5) — *уравнение Кортевега–де Вриза*.

Как пишет Ньювел [27] в своей книге "История солитона" (см. гл. 1): "... На этой первой стадии открытия основные усилия были сосредоточены на доказательстве существования и эластичности волны. Открытие универсальности ее природы и других интересных свойств должно было ждать своего часа, который неожиданно пробил при проведении эксперимента для ответа на совершенно другой вопрос (так называемый *эксперимент Ферми–Паства–Улама* (ФПУ); см. книгу Ньювела [27], § 16). Крускал и Забуски [25, 28–30] подошли к проблеме ФПУ⁶ с позиций сплошной среды и показали, что в этом случае достаточно рассмотреть

⁵ Позднее в 1891 г. Стокс вынужден был признать свои ошибки [26].

⁶ Почему твердые тела имеют конечную теплопроводность? — Твердое тело моделировалось при помощи одномерной *решетки* — системы масс, соединенных пружинами!

следующее уравнение Кортевега–де Вриза

$$u_t + uu_x + \kappa^2 u_{xxx} = 0. \quad (1.1.6)$$

Они решили уравнение (1.1.6) при $u(x, 0) = \cos \pi x$, $0 \leq x \leq 2$ и периодических u , u_x , u_{xx} на интервале $[0, 2]$ для всех t ; коэффициент при третьей производной был выбран равным $\kappa = 0,022$. Некоторые их результаты представлены на рис. 1 ([31], с. 14).

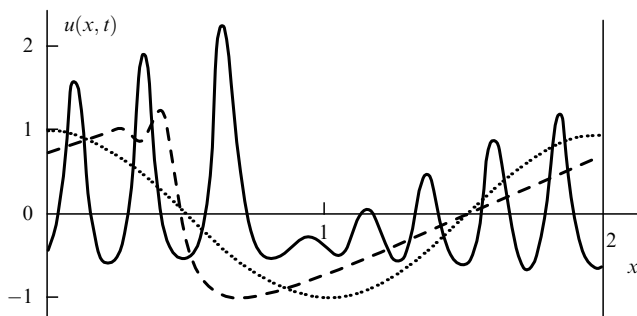


Рис. 1. Решение уравнения Кортевега–де Вриза (1.1.6) с периодическими граничными условиями (статья Забуски и Крускала 1965 г. [25]). Начальный профиль при $t = 0$ (пунктирная линия); профиль при $t = 1/\pi$ (штриховая линия); профиль при $t = 3,6/\pi$ (сплошная линия)

За короткий промежуток времени фронт волны становится крутым, но скачок не образуется, так как дисперсионный член ($\kappa^2 u_{xxx}$) становится большим и наступает что-то наподобие локального баланса между нелинейностью и дисперсией. На более поздней стадии появляется "шлейф из восьми регулярных волн" (см. рис. 1), каждая по виду напоминает функцию sech^2 . Более быстрые (высокие) волны непрерывно нагоняют и обгоняют более медленные (низкие) волны. В основе этого наблюдения лежит открытие того, что такие нелинейные волны могут *сильно взаимодействовать*, а затем продолжать свое движение *почти* так, словно и не было никакого взаимодействия. Забуски и Крускал назвали такие волны за их постоянство *солитонами* с целью подчеркнуть, что при столкновениях эти волны ведут себя как частицы, *сохраняя свою идентичность*. В свою очередь это открытие вызвало целую волну исследований в течение последних тридцати лет. Теория солитонов привлекает внимание и возбуждает интерес — объединяя многие ветви математики, она вызвала к жизни *нетривиальные идеи*; некоторые ее аспекты *поражают воображение* (например, я мог бы назвать следующие темы: *законы сохранения и преобразование Миура, обратное преобразование рассеяния (ОПР), уравнение Лакса, преобразование Бэклунда, метод Хирота и многое другое*)⁷.

Естественно, в случаях, когда нелинейные поверхностные волны в слабо диспергирующей мелкой воде *не являются строго одномерными*, уравнение Кортевега–де Вриза не применимо! В этом случае необходимо иное приближенное модельное уравнение⁸. Это уравнение

Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3c_0}{2h_0} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.1.7)$$

Согласно Кадомцеву и Петвиашвили (1970 г.) [34], если зависимость от y *слабая*, то уравнение Кортевега–де Вриза может быть уточнено добавлением малого члена. В своей статье [34] они получили этот добавочный линейный член из рассмотрения дисперсионного соотношения для двумерных длинных волн, но они не провели проверку того, что нет добавочных нелинейных членов!

Теперь необходимо отметить, что обратное преобразование рассеяния и структура уравнения Кортевега–де Вриза оставались бы математической диковинкой, если бы не были найдены еще уравнения (для волн на поверхности воды!), которые решались бы тем же методом. Однако в 1972 г. Захаров и Шабат в своей теперь фундаментальной статье [35] показали, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НЛШ)

$$-iA_t + \alpha A_{xx} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1.1.8)$$

тоже может быть решено посредством обратного преобразования рассеяния при начальных данных, убывающих достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$. Впервые нелинейное уравнение Шрёдингера было получено для задачи о волнах в воде *конечной* глубины (классическая задача) Хасимото и Оно в 1972 г. [36]. Подобное уравнение было выведено Захаровым в 1968 г. [37], но в случае *бесконечной* глубины. Вместо нелинейного уравнения Шрёдингера (1.1.8) Бенни и Роскес в 1969 г. [38] и Дэви и Стюартсон в 1974 г. [39] вывели систему из двух уравнений, *систему двух нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона*

$$\begin{aligned} iA_t + \lambda A_{xx} + \mu A_{yy} &= \chi |A|^2 A + \chi_1 AB_x, \\ aB_{xx} + B_{yy} &= -b|A|_x^2. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Для случая капиллярно-гравитационных волн в воде (когда в классической задаче учитывается поверхностное натяжение) выражения для различных постоянных коэффициентов в (1.1.9) были указаны Дьордьевиком и Редеконпом в 1977 г. [40] и Абловитцем и Сегуром в 1979 г. [41] (см. также книгу Крайка [42], гл. 6).

Для длинных волн (в мелкой воде) Фриман и Дэви [33] вывели обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, которое справедливо при $\delta \rightarrow 0$, причем $\delta^2/\varepsilon = \kappa_0$ конечно (постоянно).

Теперь, если положить $1/\kappa_0 \rightarrow 0$, тогда получаются уравнения (1.1.9) в пределе длинных волн (при $\delta \rightarrow 0$) с членами порядка $O(1/\kappa_0)$ после некоторого тривиального перемасштабирования (*сшивки* уравнений Кадомцева–Петвиашвили и нелинейных уравнений Пуассона–Шрёдингера в пределе длинных волн). Однако двойной предел $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ является неравномерным! Результат зависит от того, в каком порядке берутся эти пределы. Но Фриман и Дэви [33] показали, что введение параметра подобия $\Delta = 1/\kappa_0$ вместо ε ведет к равномерному двойному пределу $\Delta \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ ⁹.

⁷ Если уж речь зашла о "солитонной математике", то я могу порекомендовать три книги [27, 31, 32].

⁸ Формальный непротиворечивый вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили можно найти в статье 1975 г. Фримана и Дэви [33].

⁹ О выводе этих эволюционных уравнений (Кортевега–де Вриза, Кадомцева–Петвиашвили, нелинейных Шрёдингера и Шрёдингера–Пуассона) см. книги Ньюела [27], Крайка [42], Мея [43], Инфелда и Роулаанда [44] и обзоры Зейтунына [45, 64а].

Для канала с *неровным* дном также можно вывести уравнения Буссинеска, КдВ и КП¹⁰. В этом случае вместо (1.1.6) было выведено следующее уравнение:

$$u_t + uu_x + \kappa^2 u_{xxx} = v(h)u, \quad (1.1.10)$$

где функция $v(h)$ учитывает эффект переменной глубины. Было численно обнаружено и экспериментально подтверждено, что солитон (КдВ) при переходе с одной постоянной глубины к другой постоянной, но меньшей глубине распадается на несколько разных по размерам солитонов в осциллирующем следе. Это расщепление очевидным образом связано с результатом обратного преобразования рассеяния (ОПР) (см. Гарднер и др., 1974 г. [49]), и "возмущенное" уравнение КдВ (1.1.10) предсказывает расщепление солитона, которое происходит, когда уединенная волна попадает в область полочкообразования (Масден и Мей, 1969 г. [50]). В частности, явление полочки, которая появляется позади уединенной волны, в настоящее время нашло свое объяснение (Кникербокер и Ньювел, 1980 г. [51]). Ссылки на литературу о взаимодействии солитонов в случае двух измерений можно найти в обзоре Фримана (1980 г.) [52].

Случай волн на свободной поверхности воды в канале с *очень неровным дном*

$$z = -h(x^*), \quad x^* = \frac{x}{\varepsilon^{1/2}}, \quad \varepsilon = \frac{a_0}{h_0} \ll 1$$

очень интересен в связи с применением асимптотического метода многих масштабов (Розалес и Папаниколау, 1983 г.) [53]. Этот метод дает ожидаемый результат — эволюция одномерных возмущений свободной поверхности описывается уравнением КдВ, как и в случае плоского дна, однако теперь коэффициенты уравнения заданы неявно! Для определения этих коэффициентов необходимо решить четыре вспомогательные задачи. В статье Бенилова (1992 г.) [54] выделены три типа донной топографии, что позволяет упростить основные (двумерные) уравнения мелкой воды, и для двух из них были выведены асимптотические уравнения типа КдВ. В статье Ху-Нон Чена (1989 г.) [55] содержится асимптотический вывод унифицированных уравнений КП, в которых учтены *вязкие* эффекты (когда вязкие эффекты проявляются только в придонном пограничном слое), неровность дна и поперечная модуляция.

Наконец в [45] при помощи асимптотических методов получены квазиодномерные обобщения различных форм уравнений Буссинеска. Кроме того, там же выясняется влияние донной топографии на уравнения КП и дается вывод нетривиальной аппроксимации второго порядка для квазиодномерных длинных нелинейных волн в мелкой воде (в этом случае оказывается возможным ввести понятие "*одетого солитона КП*"; о понятии "*одетого солитона КдВ*", т.е. с учетом поправок высшего порядка, см. статью Сугимото и Какутани, 1977 г. [56] и ссылки в книге Джэффри и Кавахара [57], раздел 7.2).

Классическая краевая задача весьма трудна для решения главным образом потому, что граничные условия на свободной (неизвестной) поверхности являются нелинейными и ставятся на неизвестной заранее границе.

Некоторое представление о трудности задачи можно получить, задав вопрос, что о ней известно. Простейшим нетривиальным утверждением, которое можно сделать о физической задаче, является утверждение о существовании решения.

Согласно Шинброту (1973 г.) [58] имеется только пять ситуаций, в которых это можно утверждать о классической задаче¹¹:

1. $h = \infty$. В 1925 г. Леви-Чевита доказал, что периодическая волна может распространяться в воде бесконечной глубины без изменения формы. Последнее означает, что потенциал $\phi(t, x, z)$ не зависит отдельно от x и t , а зависит только от комбинации $(x - ct)$ с некоторой постоянной c , форма поднятия свободной поверхности $\zeta(t, x)$ также является функцией только $(x - ct)$, а ϕ и ζ являются периодическими функциями $(x - ct)$ [12].

2. $h = h_0 = \text{const}$. Вскоре после того как Леви-Чевита доказал свой результат, Струик в 1926 г. [13] показал, что он может быть обобщен на случай плоского горизонтального дна. Струик доказал существование периодической волны, распространяющейся без изменения формы [13].

3. *Уединенная волна*. Прошло значительное время, прежде чем был получен следующий результат. В 1954 г. Фридрихс и Хайерс [59] доказали для того же случая $h = h_0 = \text{const}$ существование другого типа волны, которая также распространяется без изменения формы с конечной скоростью. Уединенную волну можно рассматривать как периодическую волну *à la* Струик с бесконечной длиной волны.

4. *Волны над периодическим дном*. В 1955 г. Гербер доказал, что если поверхность дна является периодической функцией и имеет только один максимум и один минимум на период, то существует стационарный поток, в котором свободная поверхность имеет те же свойства. Кроме того, впадины свободной поверхности расположены непосредственно над донными впадинами, а гребни — над гребнями [60].

5. *Течение над монотонным дном*. В той же статье [60] Гербер доказал, что существует течение с монотонной свободной поверхностью над монотонным дном. И в этом случае его можно рассматривать как течение над периодическим дном с бесконечным периодом.

Следует подчеркнуть, что все вышеперечисленные примеры являются примерами *стационарных* течений. Очевидно, что последние два являются стационарными. Первые три являются стационарными в системе координат, движущейся со скоростью c . Все рассмотренные течения являются *двумерными*. По прошествии шестидесяти лет *не известны примеры нестационарных или трехмерных течений, а также теоремы о существовании течений над дном "общей формы"*.

Наконец, следует упомянуть *теорию Уизема* для нелинейных диспергирующих систем. В качестве первого знакомства читателю можно рекомендовать "Эпиплог" в книге Лайтхилла [61] и книгу Уизема [62]; в последней книге содержится полная теория нелинейных диспергирующих волн.

Нелинейная неустойчивость и бифуркация волн на поверхности воды обсуждаются в обзоре Дебната ([63],

¹⁰ Об уравнениях Буссинеска для канала с переменной глубиной см. статью Перегрини (1967 г.) [46]. О модифицированных уравнениях КдВ (учитывающих переменную глубину) см. статьи Оно (1972 г.) [47] и Джонсона (1973 г.) [48].

¹¹ Позднее мы приведем дополнительные сведения о "корректности" классической задачи.

с. 233–255) в связи с *резонансным механизмом Бенжамина–Фейра*. В раздел 13 обзора [63] включена *теория неустойчивости волн в глубокой воде Уизема*, нелинейная задача о *неустойчивости равномерного волнового шлейфа конечной амплитуды*, явление повторения ФПУ и *бифуркационный анализ Лонгуета–Хиггена* гравитационных волн в глубокой воде.

О проблеме *взаимодействия волн* см. книгу Крайка [42] — в ней рассматривается главным образом *резонанс при взаимодействии трех волн* под влиянием *квадратичных нелинейностей* по амплитудам волн.

2. Математическая формулировка теории нелинейных волн на поверхности воды

2.1. Основные уравнения

В отсутствие вязкости тангенциальные напряжения в жидкости всюду равны нулю и тензор напряжений имеет вид $-p\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Поэтому уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g}, \quad (2.1.1)$$

где предполагается, что массовая сила, действующая на жидкость, есть сила тяжести $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Уравнение импульсов (2.1.1) и уравнение сохранения массы

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

дают четыре скалярных уравнения для определения \mathbf{u} , p и ρ как функций независимых переменных x и t .

Вообще говоря, необходимо еще одно скалярное уравнение, в качестве которого обычно выбирается уравнение состояния жидкости. Однако в случае, когда жидкость ведет себя как несжимаемая, мы имеем еще одно дополнительное уравнение

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (2.1.3)$$

которое является частной формой уравнения состояния данной жидкости.

Однако уравнение (2.1.3) нет необходимости использовать явно в том случае, если распределение плотности является равномерным в начальный момент времени (при $t = 0$) и, следовательно, остается равномерным с течением времени.

Наконец, для "действительно" несжимаемой невязкой жидкости (когда $\rho = \rho_0 = \text{const}$) система уравнений

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{g}, \quad (2.1.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.4b)$$

достаточна для определения функций \mathbf{u} и p при условии, что заданы адекватные граничные и начальные условия (см. раздел 2.2).

Используя вышеприведенную систему уравнений несжимаемой жидкости (2.1.4), можно легко вывести уравнение для *вектора вихря* $\text{curl } \mathbf{u}$, учитывая векторное тождество $\nabla \times \mathbf{u} = \text{curl } \mathbf{u}$: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(q^2/2) - \mathbf{u} \times \text{curl } \mathbf{u}$,

где $q^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Уравнение (2.1.4a) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \text{curl } \mathbf{u} + \nabla \left[\frac{p}{\rho_0} + \frac{q^2}{2} \right] = \mathbf{g}. \quad (2.1.5)$$

Тогда, если \mathbf{g} является потенциальной силой ∇G , что имеет место, когда \mathbf{g} представляет собой силу тяжести, и если взять ротор от последнего уравнения для исключения члена $\nabla H = \nabla[p/\rho_0 + q^2/2 + G]$, то получается следующее уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial \text{curl } \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times (\text{curl } \mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1.6a)$$

или

$$\frac{D}{Dt} \text{curl } \mathbf{u} = (\text{curl } \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.1.6b)$$

при выводе которых мы воспользовались вспомогательными соотношениями $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ и $\nabla \cdot \text{curl } \mathbf{u} = 0$.

Теперь, замечая, что \mathbf{a} и $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ являются радиус-векторами одного и того же элемента жидкости в моменты времени $t = 0$ и t , соответственно, мы можем использовать лагранжев подход. В этом случае имеем следующую формулу Коши в момент времени t :

$$\text{curl } \mathbf{u} = \omega_i^0 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial a_i}, \quad (2.1.6b)$$

где ω_i — компоненты вектора $\text{curl } \mathbf{u}$ и a_i — компоненты вектора \mathbf{a} ; ω_i^0 — начальное значение ω_i (при $t = 0$) (см. [64b], с. 65).

Из (2.1.6b) видно, что $\text{curl } \mathbf{u} = 0$ является одним из допустимых решений! Поэтому, если $\omega_i^0 = 0$, то вектор вихря остается равным нулю в любой момент времени. В типичных задачах о волнах на свободной поверхности воды рассматривается распространение волн в покоящейся воде или равномерном потоке. В обоих случаях $\omega_i^0 = 0$ и справедливо вышеприведенное заключение. Естественно, решение является единственным при условии, что все компоненты $\nabla \mathbf{u}$ ограничены.

Однако необходимо отметить, что при наличии свободной поверхности завихренность невязкой несжимаемой жидкости не обязательно равна нулю, даже если в начальный момент времени она и была равной нулю! В самом деле, свободная поверхность может пересекать сама себя, что происходит, когда волна *опрокидывается* и образуется *вихревая пелена*. Конечно, в этом случае вместо *уравнения Лапласа*

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = 0, \quad (2.1.7)$$

где ϕ — *потенциал скорости*, Δ — трехмерный *оператор Лапласа*, необходимо рассмотреть полные уравнения Эйлера несжимаемой жидкости для \mathbf{u} и p в случае вихревых и невязких течений.

Однако здесь в большинстве случаев мы ограничимся рассмотрением безвихревых потенциальных течений, когда $\text{curl } \mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{u} = \nabla \phi$.

В этом случае из уравнения (2.1.5) находим

$$\frac{\partial (\nabla \phi)}{\partial t} + \nabla H = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{q^2}{2} + G \right) = 0. \quad (2.1.8)$$

Таким образом, величина в круглых скобках является функцией только времени, скажем, $B(t)$.

Однако вид этой неизвестной функции не имеет значения, так как мы можем определить новый потенциал скорости ϕ' как $\phi' = \phi - \int V(t) dt$, $\nabla\phi' = \nabla\phi$ и таким способом исключить функцию, зависящую от t , не нарушая распределение скорости. Как правило, произвольная функция t игнорируется и интеграл от (2.1.8) записывается в виде *уравнения Бернулли*:

$$p = p_0 - \rho_0 \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \right) \quad (2.1.9)$$

во всей жидкости, где p_0 — произвольная константа и $G = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = gz$.

Интеграл Бернулли дает явное выражение для давления p при известном распределении скорости. Он оказывается весьма полезным при рассмотрении задач со свободной поверхностью, так как ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа (2.1.7) и однозначно определяется для некоторых типов граничных условий (см. раздел 2.2). Таким образом, потенциал скорости может быть определен независимо от давления (так как $p_0 = p_a$ на свободной поверхности в предположении, что атмосферное давление p_a одно и то же на всей свободной поверхности).

Когда решение (2.1.7) найдено при соответствующих граничных условиях, искомые физические величины \mathbf{u} и p находятся из соотношений $\mathbf{u} = \nabla\phi$ и (2.1.9).

2.2. Граничные и начальные условия

Для уравнений Эйлера (2.1.1)–(2.1.3) могут быть заданы различные *начальные* и *граничные условия*. Для волн на поверхности воды наиболее часто встречающимися типами условий являются

а) полный набор начальных условий с заданием \mathbf{u} , p и ρ в начальный момент времени (при $t = 0$);

б) жидкость не проникает сквозь твердую поверхность, т.е. нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю относительно границы (*условие непротекания*)¹²;

в) в случае, если граница является границей между двумя несмешивающимися жидкостями, налагается условие *непрерывности давления* при переходе через границу (в предположении отсутствия *поверхностного натяжения*)¹³;

г) на плотность ρ не налагается никаких условий на твердой границе.

Обычно для уравнения Лапласа (2.1.7) задается одно граничное условие (по контуру, ограничивающему жидкость), но это в случае, когда граница известна! На свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$ необходимы два условия, так как наряду с $\phi(t, x, y, z)$ необходимо определить положение свободной поверхности $\zeta(t, x, y)$.

На свободной поверхности первым граничным условием является *кинематическое условие* — это условие легко получить из требования равенства нулю субстанциональной производной D/Dt величины $f = z - \zeta$ на свободной поверхности. В результате имеем

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y \quad \text{на} \quad z = \zeta(x, y, t). \quad (2.2.1)$$

Движение воздуха над свободной поверхностью, как правило, не учитывается, однако на кинематическое граничное условие (2.2.1) его учет никак не влияет.

Вторым условием на свободной поверхности является *динамическое условие*. При выводе этого условия предполагается, что давление p_a постоянно в отсутствии движения воздуха. Тогда давление на свободной поверхности зависит от поверхностного натяжения. Если мы проведем линию на свободной поверхности жидкости, то жидкость справа от линии оказывает натяжение T на жидкость слева на единицу длины линии; T является коэффициентом *поверхностного натяжения*, который различен для различных жидкостей, а кроме того является функцией температуры. Например, $T = 73,5$ дин см⁻¹ или эрг см⁻² для поверхности раздела воздуха и "чистой" воды при 15 °С. В случае трехмерной свободной поверхности можно показать для эйлеровой жидкости, что

$$p = p_a + TJ, \quad (2.2.2)$$

где $J = \nabla \cdot \mathbf{n} = 1/R_1 + 1/R_2$ называется суммой главных кривизн на свободной поверхности (R_1 и R_2 являются главными радиусами кривизн линий, отсекаемых на поверхности раздела двумя ортогональными плоскостями, содержащими ось Oz , направленную против силы тяжести). Таким образом, в каждой точке свободной поверхности должен быть скачок величины давления при переходе к той стороне поверхности, на которой лежит центр кривизны. Заметим, что в точке около O единичный вектор нормали \mathbf{n} к свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$ в прямоугольной системе координат имеет компоненты $(-\zeta_x/N; -\zeta_y/N; +1/N)$, где $N^2 = 1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2$. Тогда *точное* выражение для $\nabla \cdot \mathbf{n}$ имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{N^3} [(1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx}]. \quad (2.2.3)$$

Вернемся к уравнению Бернулли (2.1.9) с $p_0 = p_a$ и $-\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = gz$ и используем условие на поверхностное давление (2.2.2) вместе с (2.2.3). Так как на свободной поверхности $z = \zeta$ и p задано с помощью (2.1.9), имеем

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \frac{T}{\rho_0}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + g\zeta = 0 \quad \text{на} \quad z = \zeta(x, y, t). \quad (2.2.4)$$

Это и есть искомое *динамическое нелинейное граничное условие на свободной поверхности*.

Теперь, предполагая, что жидкость покоится на горизонтальном и непроницаемом дне бесконечной протяженности в плоскости $z = -h_0$, где $h_0 = \text{const}$ предполагается конечным, получаем следующее простое граничное условие (на *ровном дне*)

$$\phi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_0. \quad (2.2.5)$$

Учет донной топографии (не зависящей от времени t) вместо простого условия (2.2.5) дает (так как в невязкой жидкости $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = 0$) условие на *неровном дне*

$$\phi_z = g_0(\phi_x G_x + \phi_y G_y) \quad \text{на} \quad z = -h_0 + g_0 G \left(\frac{x}{l_0}; \frac{y}{m_0} \right), \quad (2.2.6)$$

¹² На касательную к границе компоненту скорости невязкой, эйлеровой жидкости никаких ограничений не накладывается.

¹³ Все имеющиеся данные свидетельствуют, что при обычных условиях в движущейся жидкости как касательная, так и нормальная составляющая скорости непрерывны на границе между жидкостью и другой средой.

где g_0 — типичное поднятие на дне ($g_0 = G(0, 0)$), а l_0 и m_0 — масштабы длин, характеризующие изменения в топографии дна канала в направлениях x и y .

Для волн в глубокой воде вместо (2.2.5) или (2.2.6) можно записать следующее асимптотическое условие для ϕ_z

$$\phi_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (2.2.7)$$

Что касается условий по x и y в предположении, что жидкость покоится на дне бесконечной протяженности, необходимо наложить некоторые условия на бесконечности в направлениях x и y . В действительности, достаточно бывает предположить, что волновое движение периодически по x и y .

Уравнение Лапласа

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad -h_0 \leq z \leq \zeta(x, y, t) \quad (2.2.8)$$

с тремя граничными условиями (2.2.1), (2.2.4) и (2.2.5) и есть (обычно также предполагается, что $T = 0$ в (2.2.4)) классическая трехмерная задача о нелинейных волнах на поверхности воды.

Для вывода модельных уравнений из классической задачи целесообразно заменить кинематическое граничное условие (2.2.1) на утверждение, что субстанциональная производная давления p равна нулю на свободной поверхности. Оно является смесью динамического и кинематического граничных условий, так как утверждение $Dp/Dt = 0$ на $z = \zeta(x, y, t)$ означает, что это и есть искомая подвижная поверхность, на которой давление p постоянно ($p = p_a$). Но из уравнения Бернулли (2.1.9) имеем

$$-\frac{p - p_a}{\rho_0} = \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + gz.$$

Следовательно, искомое граничное условие на свободной поверхности имеет следующий вид

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \phi_x \frac{\partial}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \\ &\times \left[\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + gz \right] = \\ &= \phi_{tt} + g\phi_z + 2\phi_x\phi_{xt} + 2\phi_y\phi_{yt} + 2\phi_z\phi_{zt} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\phi_x \frac{\partial}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0 \end{aligned}$$

на $z = \zeta(x, y, t)$. (2.2.9)

Граничное условие (2.2.9) можно вывести непосредственно из двух граничных условий (2.2.1) и (2.2.4), положив $T = 0$.

В классической задаче о волнах на поверхности воды помимо того, что имеются нелинейные члены положение свободной поверхности является неизвестной величиной, так что точная аналитическая теория для задачи о волнах на поверхности воды практически невозможна!

В качестве центральной классической задачи со свободной поверхностью рассмотрим сначала так называемую "сигнальную" (двумерную) задачу, когда вода

первоначально покоится в полубесконечном канале $x > 0$. В этом случае имеем

$$\phi(0, x, z) = \zeta(0, x) = 0, \quad \text{где} \quad x > 0, \quad t = 0, \quad (2.2.10)$$

и в момент времени $t = 0$ некий идеальный генератор волны вызывает горизонтальное возмущение скорости в точке $x = 0$:

$$\phi_x(t, 0, z) = W_0 B\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad t > 0, \quad (2.2.11)$$

где W_0 и t_0 — характерные масштабы скорости и времени для генератора волны, представленного функцией $B(t/t_0)$.

Другая классическая задача о волнах на поверхности воды в бесконечном канале может быть получена посредством задания начальной формы поверхности с нулевой скоростью (на поверхности также может быть задано произвольное начальное распределение скорости, например, ϕ_t, \dots) для $t = 0$:

$$\zeta = a_0 \zeta_0\left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\mu_0}\right), \quad \phi(0, x, y, z) = 0, \quad (2.2.12)$$

где λ_0 и μ_0 — характеристические длины волн (в направлениях x и y) в случае трехмерных волн и a_0 — характеристическая амплитуда начального поднятия на свободной поверхности, характеризуемая функцией $\zeta_0(x/\lambda_0, y/\mu_0)$.

Наконец, о вариационном выводе классической задачи см. статью Люка (1967 г.) [65], а также книгу Уизема (1974 г., [62], с. 435). Для вывода используется следующий вариационный принцип:

$$\delta \iint_{\mathcal{R}} \mathcal{L} dt dx dy = 0, \quad (2.2.13)$$

где

$$\mathcal{L} = -\rho \int_{-h}^{\zeta} \left[\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + gz \right] dz. \quad (2.2.14)$$

Вариация по ϕ дает уравнение Лапласа (2.2.8) внутри жидкости, граничное условие (2.2.6) на дне (с $h = h_0 - g_0 G$), а также кинематическое граничное условие (2.2.1) на свободной поверхности $z = \zeta$.

Вариация по ζ дает динамическое граничное условие (2.2.4) с $T = 0$ на свободной поверхности $z = \zeta$.

Заметим, что \mathcal{R} в (2.2.13) является произвольной областью в пространстве (t, x, y) . При подстановке (2.2.14) в (2.2.13) интегрирование производится по области \mathcal{R}^+ пространства и времени (t, x, y, z) , состоящей из точек (t, x, y) из \mathcal{R} и $-h < z < \zeta$.

Дополнительные члены gz и ϕ_t в (2.2.14) в сравнении с принципом Дирихле

$$\delta \iiint_{\mathcal{R}^+} \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dt dx dy dz = 0,$$

который дает уравнение Лапласа, оказывают влияние только на граничные условия, так как интеграл от них равен нулю внутри области и они дают ненулевой вклад только на границе области \mathcal{R}^+ .

2.3. Безразмерная задача

Введем *безразмерные независимые переменные* (со штрихом) x' , y' , z' и t' :

$$x' = \frac{x}{\lambda_0}, \quad y' = \frac{y}{\mu_0}, \quad z' = \frac{z}{h_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad (2.3.1)$$

где $t_0 = \lambda_0/c_0$ и $c_0 = (gh_0)^{1/2}$. В этом случае число Струхала $S = \lambda_0/c_0 t_0 = 1$. Теперь обезразмерим функции ϕ и ζ :

$$\phi' = \frac{\phi}{\varepsilon c_0 \lambda_0}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a_0}, \quad \varepsilon = \frac{a_0}{h_0}. \quad (2.3.2)$$

Опуская штрихи, можно записать следующее безразмерное уравнение Лапласа для безразмерного потенциала скорости $\phi(t, x, y, z)$ вместо (2.2.8)

$$\phi_{zz} + \delta^2 \phi_{xx} + \Delta^2 \phi_{yy} = 0, \quad -1 \leq z \leq \varepsilon \zeta(x, y, t). \quad (2.3.3)$$

В уравнение Лапласа (2.3.3) входят два следующих безразмерных параметра

$$\delta = \frac{h_0}{\lambda_0}, \quad \Delta = \frac{h_0}{\mu_0}, \quad \frac{\lambda_0}{\mu_0} = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (2.3.4)$$

Вместо (2.2.5) находим следующее простое безразмерное условие на горизонтальном (ровном) дне

$$\phi_z = 0 \quad \text{на} \quad z = -1. \quad (2.3.5)$$

Вместо граничных условий (2.2.1) и (2.2.4) на $z = \varepsilon \zeta(t, x, y)$ при $T = 0$ находим следующие два безразмерных условия на свободной поверхности $z = \varepsilon \zeta(t, x, y)$:

$$\phi_z = \delta^2 \zeta_t + \varepsilon (\delta^2 \phi_x \zeta_x + \Delta^2 \phi_y \zeta_y), \quad (2.3.6)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \phi_x^2 + \varepsilon \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y^2 + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \phi_z^2 \right) + \zeta = 0. \quad (2.3.7)$$

Заметим, что в условии (2.3.7) число Фруда $Fr = c_0/(gh_0)^{1/2} = 1$.

Уравнение (2.3.3) с условиями (2.3.5)–(2.3.7) является нашей *основной безразмерной классической задачей*.

Учитывая выражение (2.2.3) для $\nabla \cdot \mathbf{n}$, мы можем записать полное динамическое граничное условие (2.2.4) в следующей безразмерной форме

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \phi_x^2 + \varepsilon \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y^2 + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \phi_z^2 \right) + \zeta = \\ = \delta^2 We (1 + \varepsilon^2 \delta^2 \zeta_x^2 + \varepsilon^2 \Delta^2 \zeta_y^2)^{-3/2} \times \\ \times \left[\frac{\Delta^2}{\delta^2} (1 + \varepsilon^2 \delta^2 \zeta_x^2) \zeta_{yy} - 2\varepsilon^2 \Delta^2 \zeta_x \zeta_y \zeta_{xy} + (1 + \varepsilon^2 \Delta^2 \zeta_y^2) \zeta_{xx} \right] \\ \text{на} \quad z = \varepsilon \zeta(t, x, y), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где безразмерный параметр

$$We = \frac{T}{g \rho_0 h_0^2}, \quad (2.3.9)$$

— число *Бонда–Вебера*. Беря граничное условие (2.2.9) в безразмерной форме, находим

$$\phi_{tt} + \frac{1}{\delta^2} \phi_z + 2\varepsilon \left(\phi_x \phi_{xt} + \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y \phi_{yt} + \frac{1}{\delta^2} \phi_z \phi_{zt} \right) +$$

$$\begin{aligned} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\phi_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\delta^2} \phi_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \\ \times \left(\phi_x^2 + \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y^2 + \frac{1}{\delta^2} \phi_z^2 \right) = 0 \quad \text{на} \quad z = \varepsilon \zeta(t, x, y), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

где $We = 0$.

Наконец, вместо условия (2.2.6) на неровном дне получаем следующее безразмерное условие

$$\phi_z = \alpha [\delta^2 \phi_x G_x + \Delta^2 \phi_y G_y] \quad \text{на} \quad z = -1 + \alpha G(x^*, y^*) \quad (2.3.11)$$

с тремя безразмерными параметрами

$$\alpha = \frac{g_0}{h_0}, \quad \beta = \frac{\lambda_0}{l_0}, \quad \gamma = \frac{\mu_0}{m_0}, \quad (2.3.12)$$

где $x^* = \beta x$ и $y^* = \gamma y$ — координаты точки на поверхности дна.

Теперь для так называемой *сигнальной задачи* вместо граничного условия (2.2.11) получаем следующее безразмерное условие

$$\phi_x(t, 0, z) = \omega B(t), \quad t > 0, \quad (2.3.13)$$

в предположении, что t_0 в (2.2.11) есть в точности λ_0/c_0 . В (2.3.13) появляется новый безразмерный параметр

$$\omega = \frac{W_0}{\varepsilon c_0} = \frac{W_0/c_0}{\varepsilon}. \quad (2.3.14)$$

Для задачи с заданием начальной формы свободной поверхности вместо первого из условий (2.2.12) можно записать следующее начальное безразмерное условие при $t = 0$:

$$\zeta = \zeta_0(x, y). \quad (2.3.15)$$

В вышеприведенной безразмерной центральной задаче параметр $\varepsilon = a_0/\lambda_0$ является *параметром нелинейности* и в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированных x, y, z и t , а также при фиксированных δ и Δ вместо (2.3.3), (2.3.5)–(2.3.7) получаем классическую *центральную задачу о линейных волнах на поверхности воды* для ϕ_0 :

$$\begin{aligned} (\phi_0)_{zz} + \delta^2 (\phi_0)_{xx} + \Delta^2 (\phi_0)_{yy} = 0, \quad -1 \leq z \leq 0, \\ (\phi_0)_z = 0 \quad \text{на} \quad z = -1, \\ (\phi_0)_z + \delta^2 (\phi_0)_{tt} = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

где $\lim^1 \phi = \phi_0$, при этом предел \lim^1 определяется при $\varepsilon \rightarrow 0$ с фиксированными x, y, z, t, δ и Δ . Параметр δ — параметр *длинных продольных волн* на воде (в направлении x), а параметр Δ — параметр *длинных поперечных волн* на воде (в направлении y).

В последующих разделах мы будем рассматривать главным образом следующий асимптотический случай, когда

$$\varepsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1, \quad \Delta \ll 1, \quad (2.3.17)$$

и выполняются два соотношения подобия

$$\delta^2 = \kappa_0 \varepsilon, \quad \Delta = \nu_0 \varepsilon, \quad (2.3.18)$$

где κ_0 и ν_0 порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Иными словами, мы предполагаем, что

- а) амплитуды волн *малы*;
- б) вода является *мелкой* в сравнении с типичной длиной волны;
- в) волны *почти* одномерные;
- г) все три вышеупомянутых эффекта оказывают *сравнимое* влияние (все три эффекта одного порядка согласно критерию Урселла (1953 г.) [23]).

При $\alpha \ll 1$ эффект неровности дна мал. Заметим также, что при $\beta \gg 1$ и $\gamma \gg 1$ поверхность дна является *сильно неровной*, а при $\beta \ll 1$ и $\gamma \ll 1$ поверхность дна *меняется плавно*.

Для более полного динамического условия на свободной поверхности (2.3.8) возможны два случая. В первом случае мы предполагаем, что $We = O(1)$ порядка единицы и последнее граничное условие при $z = 0$ для линейной задачи (2.3.16) должно быть заменено следующим условием

$$(\phi_0)_z + \delta^2(\phi_0)_{tt} + We(\phi_0)_{zzz} = 0 \quad \text{на } z = 0. \quad (2.3.19)$$

Во втором случае предполагается, что

$$We \gg 1, \quad \text{но } \delta^2 We = We^* = O(1). \quad (2.3.20)$$

3. Уравнения Буссинеска

3.1. Двумерные уравнения Буссинеска

Для вывода двумерных уравнений Буссинеска в случае двумерных волн на поверхности воды мы разлагаем потенциал скорости по степеням δ

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(t, x, y, z') + \delta^2 \phi_1(t, x, y, z') + \\ &+ \delta^4 \phi_2(t, x, y, z') + O(\delta^6), \quad z' = z + 1 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

и подставляем в безразмерную трехмерную центральную задачу, сформулированную в разделе 2.3 (предполагается, что $We = 0$ и $\Delta^2 \equiv \delta^2$), для ζ и ϕ .

Согласно уравнению Лапласа (2.3.3):

$$\phi_{z'z'} + \delta^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0$$

членом наименьшего порядка является

$$\phi_0 = F(t, x, y). \quad (3.1.2)$$

Это эквивалентно предположению, что горизонтальные составляющие скорости не зависят от глубины:

$$u_0(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v_0(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (3.1.3)$$

Если ϕ_1 обращается в нуль на дне $z' = 0$, а u_0 и v_0 являются горизонтальными составляющими скорости на дне, то мы можем опустить произвольную функцию и тогда имеем для ϕ_1 :

$$\phi_1 = -\frac{1}{2} z'^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad (3.1.4)$$

так как $\partial \phi_1 / \partial z' = 0$ при $z' = 0$. Подставляя решение для ϕ_1 в уравнение для ϕ_2

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2} = -\left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{z'^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right),$$

интегрируя и вновь используя условие $\partial \phi_2 / \partial z' = 0$ при $z' = 0$, находим функцию ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{1}{24} z'^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad (3.1.5)$$

так как мы предположили, что ϕ_2 обращается в нуль при $z' = 0$.

Теперь вернемся к двум безразмерным граничным условиям на свободной поверхности $z' = 1 + \varepsilon \zeta$ (см. (2.3.7) и (2.3.6)):

$$\phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \frac{1}{\delta^2} \phi_{z'}^2 \right) + \zeta = 0, \quad (3.1.6a)$$

$$\phi_{z'} = \delta^2 [\zeta_t + \varepsilon(\phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y)]. \quad (3.1.6b)$$

Как и ранее, мы сохраним все члены вплоть до порядка δ^4 , ε^2 и $\delta^2 \varepsilon$ в (3.1.6b) и до порядка δ^2 , ε в (3.1.6a). В этом случае вместо (3.1.6a) и (3.1.6b) мы получаем, используя решения (3.1.2), (3.1.4) и (3.1.5), два следующих уравнения:

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \delta^2 \varepsilon \left(u_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \delta^2 (1 + \varepsilon \zeta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \\ - \frac{1}{6} \delta^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon (u_0^2 + v_0^2) = 0. \quad (3.1.8)$$

Уравнение (3.1.7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon \zeta) u_0] + \frac{\partial}{\partial y} [(1 + \varepsilon \zeta) v_0] - \\ - \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

так как мы предполагаем, что $\delta^2 = \kappa_0 \varepsilon$.

Дифференцирование (3.1.8) сначала по x , а затем по y дает два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \varepsilon \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.10b)$$

где

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad (3.1.11)$$

так как "течение F " является безвихревым.

Теперь для трех неизвестных функций u_0 , v_0 и ζ имеем три *приближенных двумерных уравнения Буссинеска* (3.1.9), (3.1.10a) и (3.1.10b).

Подчеркнем, что в вышеприведенных уравнениях Буссинеска u_0 и v_0 являются неусредненными составляющими скорости в горизонтальной плоскости на дне при

$z = -1$, которые к тому же удовлетворяют условию отсутствия завихренности (3.1.11).

Полагая $\kappa_0 \rightarrow 0$ в уравнениях Буссинеска (3.1.9), (3.1.10а) и (3.1.10б), мы приходим к так называемым уравнениям *мелкой воды* Эйри:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon \zeta)u_0] + \frac{\partial}{\partial y} [(1 + \varepsilon \zeta)v_0] &= 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \varepsilon \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Заметим, что потенциал скорости ϕ для двумерных уравнений Буссинеска согласно (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) и (3.1.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi &= F(t, x, y) - \frac{1}{2} \delta^2 z'^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{24} \delta^4 z'^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + O(\delta^6). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

3.2. Квазидвимерные уравнения Буссинеска

Для вывода так называемых квазидвимерных уравнений Буссинеска рассмотрим, следуя Зейтуаню [45, 64а], следующую безразмерную задачу из раздела 2.3 с точностью до $O(\varepsilon^2 \Delta^2)$:

$$\begin{aligned} \phi_{zz} + \delta^2 \phi_{xx} + \Delta^2 \phi_{yy} &= 0, \quad -1 \leq z \leq \varepsilon \zeta(x, y, t), \quad (3.2.1a) \\ \phi_z &= 0 \quad \text{на } z = -1, \quad (3.2.1б) \\ \phi_z &= \delta^2 \zeta_t + \varepsilon (\delta^2 \phi_x \zeta_x + \Delta^2 \phi_y \zeta_y) \quad \text{на } z = \varepsilon \zeta(x, y, t), \quad (3.2.1в) \\ \phi_t + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \phi_x^2 + \varepsilon \frac{\Delta^2}{\delta^2} \phi_y^2 + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \phi_z^2 \right) + \zeta &= \\ &= \delta^2 \text{We} \left[\zeta_{xx} + \frac{\Delta^2}{\delta^2} \zeta_{yy} - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \delta^2 \zeta_x^2 \zeta_{xx} + O(\varepsilon^2 \Delta^2) \right] \\ &\quad \text{на } z = \varepsilon \zeta(x, y, t). \end{aligned} \quad (3.2.1г)$$

Переменная z входит только в решение уравнения Лапласа (3.2.1а) и эту зависимость можно сделать явной посредством формального разложения решения по степеням δ^2 и Δ^2 :

$$\phi = \phi_{00} + \delta^2 \phi_{10} + \delta^4 \phi_{20} + \Delta^2 \phi_{01} + \delta^6 \phi_{30} + \delta^2 \Delta^2 \phi_{11} + \dots \quad (3.2.2)$$

Это асимптотическое представление согласуется с нашей основной гипотезой (2.3.17), (2.3.18). Тогда для ϕ_{00} имеем следующую тривиальную задачу

$$(\phi_{00})_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad (\phi_{00})_z = 0 \quad \text{на } z = -1,$$

решение которой есть

$$\phi_{00} = F(x, y, t). \quad (3.2.3)$$

Ниже для простоты мы, как и ранее, предполагаем, что произвольная функция F является (неизвестным) значением потенциала скорости ϕ при $z = -1$. В этом случае для членов в разложении (3.2.2) можно записать

следующие дополнительные граничные условия:

$$\phi_{10} = \phi_{20} = \phi_{01} = \phi_{30} = \phi_{11} = 0 \quad \text{при } z = -1. \quad (3.2.4)$$

Но согласно (3.2.1б) в качестве граничных условий при $z = -1$ имеем кроме того следующие условия на дне:

$$(\phi_{10})_z = (\phi_{20})_z = (\phi_{01})_z = (\phi_{30})_z = (\phi_{11})_z = 0 \quad \text{при } z = -1. \quad (3.2.5)$$

Теперь можно непосредственно выписать решение уравнения для ϕ_{10} , $(\phi_{10})_{zz} = -(F)_{xx}$ в следующем виде:

$$\phi_{10} = -\frac{1}{2} (z + 1)^2 (F)_{xx}. \quad (3.2.6)$$

По аналогии для функций ϕ_{20} , ϕ_{01} , ϕ_{30} и ϕ_{11} , которые являются решениями уравнений $(\phi_{20})_{zz} = -(\phi_{10})_{xx}$, $(\phi_{01})_{zz} = -(F)_{yy}$, $(\phi_{30})_{zz} = -(\phi_{20})_{xx}$ и $(\phi_{11})_{zz} = -(\phi_{10})_{yy}$, получаем следующие явные решения по z :

$$\phi_{20} = \frac{1}{24} (z + 1)^4 (F)_{xxxx}, \quad (3.2.7a)$$

$$\phi_{01} = -\frac{1}{2} (z + 1)^2 (F)_{yy}, \quad (3.2.7б)$$

$$\phi_{30} = -\frac{1}{720} (z + 1)^6 (F)_{xxxxxx}, \quad (3.2.7в)$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{24} (z + 1)^4 (F)_{xxyy}. \quad (3.2.7г)$$

Наконец, вместо (3.2.2) получаем следующее асимптотическое представление для потенциала скорости ϕ как решение уравнения Лапласа с условием на дне при $z = -1$:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= F(x, y, t) - \frac{1}{2} \delta^2 (z + 1)^2 (F)_{xx} + \\ &+ \frac{1}{24} \delta^4 (z + 1)^4 (F)_{xxxx} - \frac{1}{2} \Delta^2 (z + 1)^2 (F)_{yy} - \\ &- \frac{1}{720} \delta^6 (z + 1)^6 (F)_{xxxxxx} + \frac{1}{24} \delta^2 \Delta^2 (z + 1)^4 (F)_{xxyy}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Теперь, используя разложения в ряды Тейлора, можно вычислить производные ϕ_s , где $s = (t, x, y)$, и ϕ_z при $z = \varepsilon \zeta(s)$:

$$[\phi_s]_{z=\varepsilon \zeta(s)} = (F)_s - \frac{1}{2} \delta^2 \left\{ (F)_{xxs} + \frac{1}{2} \delta^2 (F)_{xxxxs} - \frac{\Delta^2}{\delta^2} (F)_{yys} - 2\varepsilon [\zeta(F)_{xxs} + \zeta_s (F)_{xx}] \right\}, \quad (3.2.9a)$$

$$\begin{aligned} [\phi_z]_{z=\varepsilon \zeta(s)} &= -\delta^2 \left\{ (F)_{xx} + \frac{1}{6} \delta^2 (F)_{xxxx} - \frac{\Delta^2}{\delta^2} (F)_{yy} - \right. \\ &- \varepsilon \zeta (F)_{xx} - \frac{1}{120} \delta^4 (F)_{xxxxxx} + \frac{1}{6} \Delta^2 (F)_{xxyy} - \\ &\left. - \frac{\Delta^2}{\delta^2} \varepsilon \zeta (F)_{yy} + \frac{1}{2} \varepsilon \delta^2 \zeta (F)_{xxxx} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.9б)$$

Наконец, учитывая два граничных условия (3.2.1в) и (3.2.1г) на свободной поверхности $z = \varepsilon \zeta(s)$, $s = (t, x, y)$, вместе с соотношениями (3.2.9) и двумя соотношениями подобия (2.3.18): $\delta^2 = \kappa_0 \varepsilon$ и $\Delta = v_0 \varepsilon$, а также предположением (2.3.20): $\text{We} \gg 1$, так что $\delta^2 \text{We} = \text{We}^* = O(1)$, полу-

чаем для двух неизвестных функций $\zeta(t, x, y)$ и $F(t, x, y)$ следующие два приближенных уравнения (с точностью до $O(\varepsilon^3)$):

$$(F)_t + \zeta - \text{We}^* \zeta_{xx} + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} (F)_{xx}^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xxt} - \frac{v_0^2}{\kappa_0} \text{We}^* \zeta_{yy} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\kappa_0^2}{24} (F)_{xxxxt} + \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xx}^2 - \frac{v_0^2}{2} (F)_{yyt} + \frac{v_0^2}{2\kappa_0} (F)_y^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xxx} (F)_x - \kappa_0 [\zeta (F)_{xx}]_t \right\} = O(\varepsilon^3), \quad (3.2.10a)$$

$$\zeta_t + (F)_{xx} + \varepsilon \left\{ \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F)_{yy} + [\zeta (F)_x]_x - \frac{\kappa_0}{6} (F)_{xxxx} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\kappa_0^2}{120} (F)_{xxxxx} - \frac{\kappa_0}{2} [\zeta (F)_{xxx}]_x + \frac{v_0^2}{\kappa_0} [\zeta (F)_y]_y - \frac{v_0^2}{6} (F)_{xxyy} \right\} = O(\varepsilon^3). \quad (3.2.10б)$$

Приближенные уравнения (3.2.10a) и (3.2.10б), которые содержат члены порядка $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$, называются "квазиодномерными обобщенными уравнениями Буссинеска" (К1МОБ).

Естественно, в уравнениях (3.2.10a) и (3.2.10б) неизвестные функции $\zeta(x, y, t)$ и $F(x, y, t)$ неявно зависят от ε , так что мы можем записать

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots \quad (3.2.11)$$

Подставляя (3.2.11) в уравнения (3.2.10a) и (3.2.10б), получаем последовательно следующие предельные уравнения для F_0 и ζ_0 , F_1 и ζ_1 , а также для F_2 и ζ_2 :

$$(F_0)_t + \zeta_0 - \text{We}^* (\zeta_0)_{xx} = 0, \quad (\zeta_0)_t + (F_0)_{xx} = 0; \quad (3.2.12a)$$

$$(F_1)_t + \zeta_1 - \text{We}^* (\zeta_1)_{xx} = -\frac{1}{2} (F_0)_{xx}^2 + \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xxt} + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \text{We}^* (\zeta_0)_{yy}, \quad (\zeta_1)_t + (F_1)_{xx} = -\frac{v_0^2}{\kappa_0} (F_0)_{yy} - [\zeta_0 (F_0)_x]_x + \frac{\kappa_0}{6} (F_0)_{xxxx}; \quad (3.2.12б)$$

$$(F_2)_t + \zeta_2 - \text{We}^* (\zeta_2)_{xx} = -(F_0)_x (F_1)_x + \frac{\kappa_0}{2} (F_1)_{xxt} + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \text{We}^* (\zeta_1)_{yy} - \frac{\kappa_0^2}{24} (F_0)_{xxxxt} - \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xx}^2 + \frac{v_0^2}{2} (F_0)_{yyt} - \frac{v_0^2}{2\kappa_0} (F_0)_{yy}^2 + \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xxx} (F_0)_x + \kappa_0 [\zeta_0 (F_0)_{xx}]_t, \quad (\zeta_2)_t + (F_2)_{xx} = -\frac{v_0^2}{\kappa_0} (F_1)_{yy} - [\zeta_0 (F_1)_x + \zeta_1 (F_0)_x]_x + \frac{\kappa_0}{6} (F_1)_{xxxx} - \frac{\kappa_0^2}{120} (F_0)_{xxxxx} + \frac{\kappa_0}{2} [\zeta_0 (F_0)_{xxx}]_x - \frac{v_0^2}{\kappa_0} [\zeta_0 (F_0)_y]_y + \frac{v_0^2}{6} (F_0)_{xxyy}. \quad (3.2.12в)$$

Для вывода "собственно так называемых" квазиодномерных уравнений Буссинеска (К1МБ) вернемся к обобщенным уравнениям (3.2.12a) и (3.2.12б), но на этот раз будем предполагать, что число Бонда-Вебера $\text{We} = O(1)$. В этом случае согласно первому из соотношений подобия (2.3.18) все члены пропорциональны $\text{We}^* = \varepsilon \kappa_0 \text{We}$ и поэтому имеют порядок ε .

Следовательно, вместо уравнений (3.2.12a) и (3.2.12б) получаем следующую систему из двух уравнений для F_0 и F_1 :

$$(F_0)_{tt} - (F_0)_{xx} = 0, \quad (3.2.13)$$

$$(F_1)_{tt} - (F_1)_{xx} = \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xxt} - \frac{\kappa_0}{6} (F_0)_{xxxx} - \kappa_0 \text{We} (F_0)_{xxt} - (F_0)_x (F_0)_{xt} - [(F_0)_x (F_0)]_x + \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F_0)_{yy}, \quad (3.2.14)$$

после исключения функций ζ_0 и ζ_1 .

Теперь, вводя следующую функцию $F^* = F_0 + \varepsilon F_1$, мы можем вывести из (3.2.13) и (3.2.14) следующее одно квазиодномерное уравнение Буссинеска для $F^*(x, y, t)$:

$$(F^*)_{tt} - (F^*)_{xx} - \varepsilon \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F^*)_{yy} + \varepsilon \left[(F^*)_x^2 + \frac{1}{2} (F^*)_t^2 \right]_t + \varepsilon \kappa_0 \left(\text{We} - \frac{1}{3} \right) (F^*)_{xxt} = 0, \quad (3.2.15)$$

с учетом того, что

$$[(F_0)_x (F_0)]_x = \frac{1}{2} [(F_0)_x^2 + (F_0)_t^2]_t, \quad (F_0)_{tt} = (F_0)_{xx}.$$

Это последнее уравнение Буссинеска (3.2.15) является обобщением классического уравнения Буссинеска

$$(F^*)_{tt} - (F^*)_{xx} + \varepsilon \left[(F^*)_x^2 + \frac{1}{2} (F^*)_t^2 \right]_t - \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} (F^*)_{xxt} = 0 \quad (3.2.16)$$

для почти двумерных длинных волн в мелкой воде.

Последнее квазиодномерное уравнение Буссинеска (3.2.15) можно непосредственно получить из исходной безразмерной задачи (3.2.1) при выполнении соотношений подобия (2.3.18), используя вместо (3.2.8) следующее представление для $\phi(t, x, y, z)$:

$$\phi(t, x, y, z) = F(x, y, t) + \varepsilon \left[G - \frac{\kappa_0}{2} (z+1)^2 (F)_{xx} \right] + \varepsilon^2 \left[H + \frac{1}{24} \kappa_0^2 (z+1)^4 (F)_{xxxx} - \frac{1}{2} v_0^2 (z+1)^2 (F)_{yy} - \frac{\kappa_0}{2} (z+1)^2 (G)_{xx} \right] + O(\varepsilon^3), \quad (3.2.17)$$

где F, G, H, \dots — неизвестные функции независимых переменных x, y и t . Естественно, в этом случае в (3.2.17) $F(x, y, t)$ не является значением потенциала скорости ϕ на дне $z = -1$.

Предположим теперь, что

$$(F, G, H) = (F, G, H)_0 + \varepsilon (F, G, H)_1 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \dots \quad (3.2.18)$$

Используя (3.2.17) и (3.2.18), можно вычислить (как в (3.2.9)) производные ϕ_s по $s = (t, x, y)$ и ϕ_z на $z = \varepsilon \zeta(s)$.

Наконец, из двух граничных условий (3.2.1в) и (3.2.1г) на $z = \varepsilon \zeta(x, y, t)$ получаем следующие уравнения для функций $F_0, \zeta_0, F_1 + H_0$ и ζ_1 :

$$(F_0)_t + \zeta_0 = 0, \quad (F_0)_{xx} + (\zeta_0)_t = 0, \quad (3.2.19a)$$

$$[F_1 + H_0]_t + \zeta_1 + \frac{1}{2}(F_0)_x^2 - \frac{\kappa_0}{2}(F_0)_{xxt} - \kappa_0 \text{We}(\zeta_0)_{xx} = 0, \quad (3.2.19б)$$

$$[F_1 + H_0]_{xx} + (\zeta_1)_t + (F_0)_x(\zeta_0)_x + \zeta_0(F_0)_{xx} - \frac{\kappa_0}{6}(F_0)_{xxxx} + \frac{v_0^2}{\kappa_0}(F_0)_{yy} = 0. \quad (3.2.19в)$$

Из системы уравнений (3.2.19а)–(3.2.19в) непосредственно получаем квазиодномерное уравнение Буссинеска (3.2.15), но теперь для функции $F^{**} = F_0 + \varepsilon[F_1 + H_0]$.

Кроме того, из уравнений (3.2.12а) и (3.2.12б) можно получить систему квазиодномерных уравнений Буссинеска для формы свободной поверхности $\zeta(x, y, t)$ и горизонтальных составляющих скорости $u(x, y, t) = (F)_x$ и $v(x, y, t) = (F)_y$, в следующем виде (в предположении, что $\text{We}^* \equiv 0$):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon \zeta)u] + \frac{\varepsilon v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.2.20)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2.22)$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Усреднение

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} (z+1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} (z+1)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2)$$

по глубине для u и v дает

$$u = U + \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2), \quad (3.2.23a)$$

$$v = V + \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2). \quad (3.2.23б)$$

Подставляя (3.2.23а) и (3.2.23б) в (3.2.20)–(3.2.22), получаем квазиодномерные уравнения Буссинеска в следующем виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon \zeta)U] + \frac{\varepsilon v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.2.24a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (3.2.24б)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.2.24в)$$

для усредненных горизонтальных составляющих скорости $U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$ и для $\zeta(x, y, t)$.

Заметим, что наши квазиодномерные уравнения Буссинеска (3.2.24) существенно отличаются от "трехмерного обобщения уравнений Буссинеска", полученного Инфельдом в 1980 г. ([44], приложение 1, уравнения В1). По всей видимости, эти уравнения Инфельда являются противоречивыми с асимптотической точки зрения. Наконец, дифференцируя уравнение (3.2.24а) по x и используя уравнение (3.2.24в), можно вывести следующие два уравнения для $\zeta(x, y, t)$ и $U(x, y, t)$ вместо (3.2.24)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 + \varepsilon \zeta)U] + \frac{\varepsilon v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (3.2.25a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (3.2.25б)$$

3.3. Буссинесковские уединенные и кноидальные волны

В этом разделе мы рассмотрим одно решение одномерного уравнения Буссинеска (см. уравнение (3.2.16)):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.3.1)$$

в следующем виде:

$$F = \Phi(\xi), \quad \xi = x - Ct, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{d}{d\xi}. \quad (3.3.2)$$

В этом случае для $\Phi(\xi)$ имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$(C^2 - 1) \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = C^2 \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{d^4 \Phi}{d\xi^4} - \varepsilon C \left(1 + \frac{C^2}{2} \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2.$$

Действительно, $C = 1 + O(\varepsilon)$, поэтому в правой части ОДУ можно положить $C = 1$ без потери точности. Интегрируя один раз по ξ , имеем

$$(C^2 - 1) \frac{d\Phi}{d\xi} + A = \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} + \frac{3\varepsilon}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2.$$

С точностью до членов главного порядка имеем $\partial F_0 / \partial t = -\zeta = -d\Phi / d\xi$. Таким образом,

$$(C^2 - 1)\zeta + A = \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + \frac{3}{2} \varepsilon \zeta^2.$$

Наконец, умножим уравнение для ζ на $d\zeta / d\xi$ и, проинтегрировав его еще раз, получим

$$-\frac{1}{2} \varepsilon \zeta^3 + \frac{1}{2} (C^2 - 1)\zeta^2 + A\zeta + B = \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2, \quad (3.3.3)$$

где обе константы интегрирования A и B порядка $O(\varepsilon)$.

Рассмотрим два случая.

3.3.1. Одиночные волны. Одиночная волна, открытая Джоном Скоттом Расселом в 1834 г. и опубликованная в 1844 г. [21], имеет единственный гребень, амплитуда которого уменьшается до нуля по мере того, как $|\xi| \rightarrow \infty$.

Так как ζ , $d\zeta / d\xi$ и $d^2 \zeta / d\xi^2$ обращаются в нуль на бесконечности, то константы A и B должны быть равны

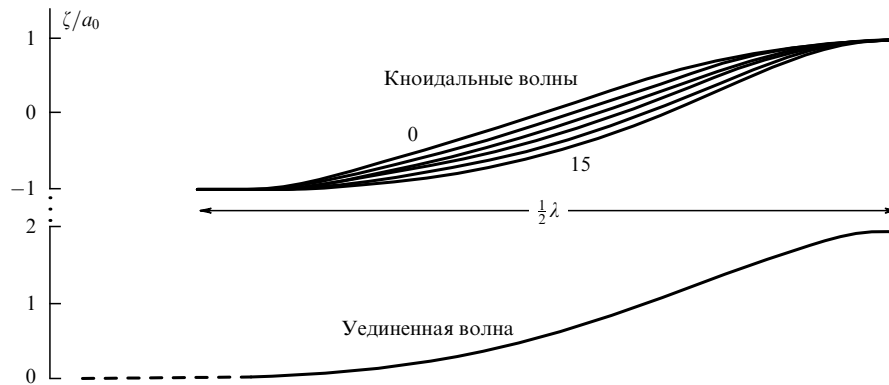


Рис. 2. Кноидальные волны длины λ и амплитуды a_0 на поверхности воды при глубине h_0 представлены для шести значений $a_0\lambda^2/h_0^3$. Уединенная волна является предельной кноидальной волной с бесконечной длиной волны

нулю на бесконечности. Таким образом, уравнение (3.3.3) принимает простой вид

$$\kappa_0 \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 = 3\zeta^2 \left(\frac{C^2 - 1}{\varepsilon} - \zeta \right), \quad (3.3.4)$$

а для того чтобы правая часть была положительной, необходимо положить $C > 1$ или, в физических переменных, $C > (gh_0)^{1/2}$. Эта последняя скорость волны называется *суперкритической*. Более того, необходимо потребовать выполнение условия $\zeta \leq (C^2 - 1)/\varepsilon$. Следовательно, $(C^2 - 1)/\varepsilon$ является в точности максимальной амплитудой гребня, которая равна *единице* согласно способу обезразмеривания, т.е. $C^2 = 1 + \varepsilon$. В этом случае уравнение (3.3.4) можно записать в виде

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \left(\frac{3}{\kappa_0} \right)^{1/2} \zeta [1 - \zeta]^{1/2}, \quad (3.3.5)$$

что после интегрирования дает $[3/\kappa_0]^{1/2} [\xi - \xi_0] = -2 \operatorname{artanh}[(1 - \zeta)^{1/2}]$ или

$$\zeta = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\kappa_0} \right)^{1/2} (\xi - \xi_0) \right]. \quad (3.3.6)$$

Соответствующий профиль есть *одиночный холм* с гребнем в точке $\xi = \xi_0$, но константа интегрирования ξ_0 может быть выбрана равной нулю. В размерных физических переменных *профиль поверхностной волны* имеет вид

$$\zeta(x, t) = a_0 \operatorname{sech}^2 [b_0(x - Ct)], \quad (3.3.7)$$

где $C^2 = g(a_0 + h_0)$ и $b_0 = (3a_0/4h_0^3)^{1/2}$. Таким образом, профиль волны тем уже, чем выше пик. Одиночная волна легко может быть получена в длинном резервуаре посредством почти любого возмущения.

3.3.2. Кноидальные волны. Помимо только что рассмотренных уединенных волн, решением одномерного уравнения Буссинеска (3.3.1) могут быть также периодические постоянные волны.

Перепишем (3.3.3) в случае, когда A отлична от нуля, а $B = 0$, в виде

$$\frac{\kappa_0}{3} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 = \zeta(1 - \zeta)(\zeta - 1 + \beta) \quad (3.3.8)$$

с $C^2 = 1 + 2\varepsilon[1 - (\beta/2)]$ и $2A/\varepsilon = \beta - 1$, $0 < 1 < \beta$.

На этот раз минимальное значение ζ равно нулю, а максимальное — 1. На этом интервале $(d\zeta/d\xi)^2 > 0$; ζ не может меняться в пределах между 0 и $-(\beta - 1)$, так как в этом случае $(d\zeta/d\xi)^2 < 0$, а $\zeta = -(\beta - 1)$ соответствует равномерному сверхкритическому потоку. Полное уравнение (3.3.8) имеет решения, которые могут быть выражены через эллиптические функции Якоби Cn , откуда происходит имя *кноидальные волны*

$$\zeta = \operatorname{Cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3\beta}{\kappa_0} \right)^{1/2} (\xi - \xi_0) | m \right\}, \quad m = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (3.3.9)$$

где m — модуль эллиптической функции. Длина волны равна

$$\lambda_0 = \frac{4h_0^3}{(3\beta)^{1/2}} \operatorname{K}(m), \quad (3.3.10)$$

где $\operatorname{K}(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Вряд ли читатель знаком с эллиптическими функциями. Это не суть важно. Отметим только, что $\operatorname{Cn}(v|m)$ является периодической функцией, так что мы имеем шлейф периодических волн в мелкой воде¹⁴.

Заметим, что в пределе $\beta \rightarrow 1$ мы получаем уединенную волну. Шлейф волн, следующих за волнообразной борой, может рассматриваться как шлейф кноидальных волн. Кноидальные волны изображены на рис. 2.

¹⁴ Прежде всего определим интеграл:

$$v = \int_0^\phi (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

Кроме того, мы можем определить пару обратных функций (Якоби и Абель), исходя из этого интеграла:

$$\operatorname{Sn}(v|m) = \sin \phi, \quad \operatorname{Cn}(v|m) = \cos \phi,$$

и мы получим две эллиптические функции Якоби. Если $m = 0$, то $v = \phi$, и, таким образом, $\operatorname{Cn}(v|0) = \cos v$ и, если $m = 1$, то вычисление интеграла дает $v = \operatorname{arsech}(\cos \phi)$, и, таким образом, $\operatorname{Cn}(v|1) = \operatorname{sech} v$. Далее, период Cn и Sn соответствует периоду 2π косинуса и синуса, и, таким образом, период этих эллиптических функций может быть записан как $4\operatorname{K}(m)$, где

$$\operatorname{K}(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$$

и $\operatorname{K}(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 1$; в действительности, это означает, что функция $\operatorname{Cn}(v|1) = \operatorname{sech} v$ имеет бесконечный период.

4. Уравнения Кортевега–де Вриза и Кадомцева–Петвиашвили

4.1. Прямой асимптотический вывод уравнения Кортевега–де Вриза

Здесь мы исходим из двумерной физической задачи о волне на свободной поверхности воды с *горизонтальным* дном в плоскости $z = 0$. Мы пренебрегаем поверхностным натяжением ($T/\rho_0 = 0$) и вводим следующие безразмерные величины, используя глубину воды h_0 и скорость $c_0 = (gh_0)^{1/2}$:

$$\phi^* = \frac{\phi}{h_0 c_0}, \quad (x^*, z^*) = \frac{(x, z)}{h_0}, \quad t^* = \frac{c_0}{h_0} t, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{h_0}. \tag{4.1.1}$$

В этом случае получаем следующую основную безразмерную задачу (ниже звездочки опущены):

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad 0 < z < 1 + \zeta(t, x), \tag{4.1.2a}$$

$$\phi_z = 0, \quad z = 0, \tag{4.1.2б}$$

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x, \quad z = 1 + \zeta(t, x), \tag{4.1.2в}$$

$$\phi_t + \zeta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) = 0, \quad z = 1 + \zeta(t, x). \tag{4.1.2г}$$

Для того чтобы получить уравнения Кортевега–де Вриза для смещения водной поверхности, необходимо (из классического анализа размерностей) ввести следующее асимптотическое представление

$$\phi = \varepsilon^{1/2} [\phi_1(\xi, z, \tau) + \varepsilon \phi_2(\xi, z, \tau) + \varepsilon^2 \phi_3(\xi, z, \tau) + \dots], \tag{4.1.3a}$$

$$\zeta = \varepsilon \zeta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \zeta_2(\xi, \tau) + \dots \tag{4.1.3б}$$

с новыми переменными

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t, \tag{4.1.4}$$

где $\varepsilon = (h_0/\lambda_0)^2 \ll 1$ и λ_0 — длина длинной волны.

Прежде всего перепишем задачу в новых переменных (ξ, z, τ) в следующем безразмерном виде

$$\varepsilon \phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} = 0, \tag{4.1.5a}$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \tag{4.1.5б}$$

$$\phi_z = \varepsilon^{3/2} \zeta_\tau + \varepsilon \phi_\xi \zeta_\xi - \varepsilon^{1/2} \zeta_\xi; \tag{4.1.5в}$$

$$\varepsilon^{3/2} \phi_\tau + \frac{1}{2} \varepsilon \phi_\xi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} \phi_\xi + \frac{1}{2} \phi_z^2 + \zeta = 0, \tag{4.1.5г}$$

$$\text{на} \quad z = 1 + \varepsilon \zeta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \zeta_2(\xi, \tau) + \dots,$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

На *свободной поверхности* $z = 1 + \varepsilon \zeta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \zeta_2(\xi, \tau) + \dots$ и, как следствие, производные ϕ_σ , $\sigma = (\xi, \tau)$ и ϕ_z можно выразить при помощи разложений в ряд Тейлора в виде

$$\begin{aligned} \phi_\sigma = \varepsilon^{1/2} \{ & (\phi_1)_\sigma + \varepsilon [(\phi_2)_\sigma + \zeta_1(\phi_1)_{\sigma z} + (\zeta_1)_\sigma(\phi_1)_z] + \\ & + \varepsilon^2 [(\phi_3)_\sigma + \zeta_1(\phi_2)_{\sigma z} + (\zeta_1)_\sigma(\phi_2)_z + \zeta_2(\phi_1)_{z\sigma} + \end{aligned}$$

$$+ (\zeta_2)_\sigma(\phi_1)_z + \frac{1}{2} \zeta_1^2(\phi_1)_{\sigma z z} + \zeta_1(\zeta_1)_\sigma(\phi_1)_{z z}] + O(\varepsilon^3) \}_{z=1}, \tag{4.1.6a}$$

$$\begin{aligned} \phi_z = \varepsilon^{1/2} \{ & (\phi_1)_z + \varepsilon [(\phi_2)_z + \zeta_1(\phi_1)_{zz}] + \varepsilon^2 [(\phi_3)_z + \\ & + \zeta_1(\phi_2)_{zz} + \zeta_2(\phi_1)_{zz} + \frac{1}{2}(\zeta_1)^2(\phi_1)_{zzz}] + O(\varepsilon^3) \}_{z=1}. \end{aligned} \tag{4.1.6б}$$

Далее, подстановкой получаем вместо (4.1.5), приравняв члены различных порядков по ε , соответственно: для членов *порядка* ε^0

$$\begin{aligned} (\phi_1)_{zz} = 0, \quad (\phi_1)_z = 0, \quad z = 0, \\ (\phi_1)_z + \zeta_1 = (\phi_1)_\xi, \quad (\phi_1)_z = 0, \quad z = 1, \end{aligned} \tag{4.1.7a}$$

и, следовательно,

$$\phi_1 = F(\xi, \tau), \quad \zeta_1 = F_\xi; \tag{4.1.7б}$$

для членов *порядка* ε^1

$$\begin{aligned} (\phi_2)_{zz} = -F_{\xi\xi}, \quad (\phi_2)_z = 0, \quad z = 0, \\ (\phi_2)_z + (\zeta_1)_\xi = 0, \quad z = 1, \\ \zeta_2 - (\phi_2)_\xi + \frac{1}{2} \zeta_1^2 + (\phi_1)_\tau = 0, \quad z = 1, \end{aligned} \tag{4.1.8a}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \phi_2 = -\frac{1}{2} z^2 F_{\xi\xi} + G(\xi, \tau), \\ G_\xi = \zeta_2 + [(\phi_1)_\tau]_{z=1} + \frac{1}{2} \zeta_1^2 + \frac{1}{2} F_{\xi\xi\xi}; \end{aligned} \tag{4.1.8б}$$

для членов *порядка* ε^2 получаем следующее уравнение для ϕ_3 :

$$(\phi_3)_{zz} = -(\phi_2)_{\xi\xi} \equiv \frac{1}{2} z^2 F_{\xi\xi\xi\xi} - G_{\xi\xi},$$

и, следовательно,

$$\phi_3 = \frac{1}{4!} z^4 F_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2!} z^2 G_{\xi\xi} + H(\xi, \tau), \tag{4.1.9}$$

так как $(\phi_3)_z = 0$ на $z = 0$.

Однако для членов *порядка* ε^2 из условия на свободной поверхности (4.1.5б) получаем также следующее соотношение между $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta_1$ и ζ_2

$$\begin{aligned} [(\phi_3)_z]_{z=1} + \zeta_1 [(\phi_2)_{zz}]_{z=1} - (\zeta_1)_\xi [(\phi_1)_z]_{z=1} = \\ = (\zeta_1)_\tau - (\zeta_2)_\xi. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Прямым следствием соотношения (4.1.10) является приведенное уравнение Кортевега–де Вриза для ζ_1 , которое можно получить, используя решения (4.1.7б), (4.1.8б) и (4.1.9) для ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 , а также третье соотношение из (4.1.8a) для $(\zeta_2)_{z=1}$. Уравнение Кортевега–де Вриза по сути является условием совместности для правдоподобности нашего асимптотического вывода, исходящего из разложений (4.1.3a) и (4.1.3б)

$$(\zeta_1)_\tau + \frac{3}{2} \zeta_1(\zeta_1)_\xi + \frac{1}{6}(\zeta_1)_{\xi\xi\xi} = 0. \tag{4.1.11}$$

Таким образом, мы показали, что уравнение Кортевега–де Вриза возникает естественным образом из согласованного асимптотического разложения по малому параметру ε для безразмерной задачи со свободной поверхностью (4.1.5) и разложений (4.1.3). Возвращаясь к физическим размерным переменным, вместо уравнения Кортевега–де Вриза (4.1.11) получаем

$$(\zeta_1)_t + \frac{3c_0}{2h_0} \zeta_1 (\zeta_1)_\xi = -\frac{c_0}{6} h_0^2 (\zeta_1)_{\xi\xi\xi}. \tag{4.1.12}$$

Линейное дисперсионное соотношение для поверхностных волн дается выражением $\omega^2 = gk \tanh kh_0$, из которого следует для волн в мелкой воде, что

$$kh_0 \ll 1 \Rightarrow \omega = kc_0 \left[1 - \frac{1}{6} h_0^2 k^2 + \dots \right], \tag{4.1.13}$$

откуда видно, что коэффициент при члене в правой части уравнения Кортевега–де Вриза (4.1.12) в точности равен коэффициенту при k^2 в (нелинейном) дисперсионном соотношении (о "связи" между модельными уравнениями и дисперсионными соотношениями см. [62], раздел 11.1).

4.2. От уравнений Буссинеска к уравнениям Кортевега–де Вриза

Естественно, уравнение Кортевега–де Вриза можно вывести непосредственно из уравнения Буссинеска (3.3.1). В самом деле, в случае более общей переходной эволюции нелинейных и дисперсионных длинных волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , введем в (3.3.1) следующие новые переменные

$$\sigma = x - t, \quad \theta = \varepsilon t, \tag{4.2.1}$$

так как безразмерный масштаб медленного времени равен $(1/\varepsilon)$. Производные в этих переменных (σ, θ) есть $\partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial \sigma$ и $\partial/\partial t \rightarrow \varepsilon \partial/\partial \theta - \partial/\partial \sigma$. Подставляя их в уравнение (3.3.1) для $F(t, x)$, немедленно получаем следующее уравнение для $F(\theta/\varepsilon, \sigma + t) = f(\theta, \sigma)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \theta} + \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial^4 f}{\partial \sigma^4} = O(\varepsilon), \tag{4.2.2}$$

откуда видно, что параметр подобия $\kappa_0 = \delta^2/\varepsilon$ играет важнейшую роль в совместности уравнения (4.2.2). Главный член имеет порядок $\partial f/\partial \sigma \sim \zeta + O(\varepsilon)$, т.е.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \sigma^3} = 0 \tag{4.2.3}$$

— не что иное как уравнение Кортевега–де Вриза. В физических переменных и стационарных координатах (4.2.3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2h_0} \zeta \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{c_0}{6} h_0^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \tag{4.2.4}$$

где $c_0 = (gh_0)^{1/2}$.

4.3. Более полное уравнение Кортевега–де Вриза

Положим $We = 0$ в классической двумерной задаче (3.2.1a)–(3.2.1r), где $\Delta^2 = 0$. В этой последней задаче параметр $\delta = kh_0$, где k — волновое число, можно считать малым в случае малой глубины или длинных волн. Заметим, что если δ и ε оба малы в задаче (3.2.1), то нелинейность в точности уравновешивается дисперсией,

когда $\kappa_0 = \delta^2/\varepsilon = O(1)$, а $\chi_0 = 1/\kappa_0$ мало, когда дисперсия превосходит нелинейность, и порядка единицы, когда они уравновешены!

При $\delta \ll 1$ решение формально имеет вид

$$\begin{aligned} \phi = & F(x, t; \delta, \chi_0) + \delta^2 \left[G - \frac{1}{2} (z+1)^2 F_{xx} \right] + \\ & + \delta^4 \left[H - \frac{1}{2} (z+1)^2 G_{xx} + \frac{1}{24} (z+1)^4 F_{xxxx} \right] + O(\delta^6). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Следует отметить, что это только формальное разложение по степеням δ^2 , так как F, G, H, \dots и, следовательно, сами коэффициенты зависят от δ ; отметим также, что $\chi_0 = 1/\kappa_0 = \varepsilon/\delta^2$. Эта зависимость будет устранена дальнейшим разложением на более позднем этапе! В общем случае можно ожидать (согласно Фриману и Дэви, 1975 г. [33]), что двойной предел $\delta \rightarrow 0$ и $\chi_0 \rightarrow 0$ является равномерным! Именно этим мотивирована процедура разложения, которая используется ниже при рассмотрении задачи с конечным χ_0 и малым δ прежде всего для вывода "обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза" (ОКдВ уравнение). Если δ мало и χ_0 порядка единицы, тогда можно записать следующее разложение для функций ϕ и ζ в двумерной классической задаче с (4.3.1):

$$\begin{aligned} F = & F_0(\xi, \sigma, \tau) + \chi_0 \delta^2 F_1 + \dots, \\ \zeta = & \zeta_0(\xi, \sigma, \tau) + \chi_0 \delta^2 \zeta_1 + \dots, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

где согласно [33]

$$\xi = x - c_p t, \quad \sigma = \chi_0 (x - c_g t), \quad \tau = \chi_0^2 \delta^2 t, \tag{4.3.3}$$

при $\delta \ll 1$: $c_p = 1 - (1/6)\delta^2 + \dots$, $c_g = 1 - (1/2)\delta^2 + \dots$ — фазовая и групповая скорости в линейной теории (см., например, Зейтунян [64a], с. 37–39). Предполагается, что волновой пакет распространяется в положительном направлении оси x , так что движение является однонаправленным. Очевидно, когда χ_0 выбирается малым, то σ является медленной переменной, модулирующей быстрое изменение, характеризуемое ξ .

Теперь, учитывая (4.3.3), имеем следующие формулы в новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial}{\partial \sigma} \equiv D, \\ \frac{\partial}{\partial t} = & \chi_0^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \chi_0 \delta^2 \frac{\partial}{\partial \sigma}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Подставляя (4.3.2)–(4.3.4) в уравнения (3.2.1a)–(3.2.1r) при $\Delta^2 = 0$ и разложение (4.3.1) и приравнивая члены порядка δ^2 , при фиксированном χ_0 имеем

$$\zeta_0 = DF_0, \tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned} \chi_0 (D\zeta_1 - D^2 F_0) - D^2 G = & \chi_0^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \chi_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \sigma} + \\ & + \chi_0 DF_0 D\zeta_0 + \chi_0 \zeta_0 D^2 F_0 - \frac{1}{6} D^4 F_0, \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned} \chi_0 (\zeta_1 - DF_0) - DG = & -\chi_0^2 \frac{\partial F_0}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \chi_0 \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} - \\ & - \frac{1}{2} D^3 F_0 - \frac{1}{2} \chi_0 (DF_0)^2. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Как можно было предвидеть, первое уравнение (4.3.5) недостаточно для определения обеих функций F_0 и ζ_0 . Необходимо учесть члены второго порядка (уравнения (4.3.6) и (4.3.7)) для получения условия совместимости. В действительности, достаточно продифференцировать (4.3.7) по D (4.3.4) и результат вычесть из (4.3.6). Окончательно имеем следующее обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза для ζ_0 :

$$\chi_0^2 \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \tau^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \sigma} + 3\chi_0 \zeta_0 D\zeta_0 + \frac{1}{3} D^3 \zeta_0 = 0,$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial}{\partial \sigma}, \tag{4.3.8}$$

которое вместе с (4.3.5) достаточно для определения ζ_0 и F_0 при надлежащих граничных условиях¹⁵.

4.4. Анализ в фазовой плоскости

Рассмотрим следующее уравнение Кортевега–де Вриза

$$\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{4.4.1}$$

решение которого будем искать в виде функции $f(\eta)$:

$$u = f(\eta), \quad \eta = x - ct, \tag{4.4.2}$$

где константа c — скорость распространения стационарной волны.

Подстановка $u = f(\eta)$ в (4.4.1) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\eta)$:

$$\beta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f^2 - cf = 0. \tag{4.4.3}$$

Константа интегрирования в (4.4.3) положена равной нулю, так как, используя замену $f = f^* + f^0$ и $c = c^* + f^0$, можно выбрать $\text{const} = -f^0(c^* + f^0/2)$.

Поэтому необходимо держать в уме, что к любому решению (4.4.3) может быть прибавлена произвольная константа, если эта константа прибавлена к c , что эквивалентно переходу к подвижной системе координат. Далее отметим, что (4.4.3) эквивалентно уравнению движения:

$$\beta \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\frac{dU}{df}, \quad U = U(f) = \frac{1}{6} f^3 - \frac{c}{2} f^2, \tag{4.4.4}$$

для частицы массы β в поле силы с потенциалом $U(f)$ (см., например, Бреховских и Гончарова, 1985 г., [66], с. 296–299)). С другой стороны, хорошо известно, что ограниченное решение $f(\eta)$ существует, только если уровень

¹⁵ Интересно также отметить, что ОКдВ уравнение можно легко получить из классического уравнения Кортевега–де Вриза. В самом деле, вводя в классическом КдВ уравнении

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3}{2} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6\chi_0} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad \chi_0 = \frac{1}{\kappa_0} = \frac{\varepsilon}{\delta^2},$$

для $\zeta(x, t; \chi_0)$ переменные τ, ξ и σ с помощью следующего преобразования

$$\xi = x + \frac{1}{6\chi_0^2} \tau, \quad \sigma = \chi_0 x + \frac{1}{2\chi_0} \tau, \quad \tau = \chi_0 t \tag{4.3.9}$$

мы выводим другим способом ОКдВ уравнение (4.3.8) для функции $\zeta(\tau, \xi, \sigma)$. Наконец, отметим, что обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза является весьма удобным исходным уравнением для вывода классического нелинейного уравнения Шрёдингера (НЛШ) в пределе мелкой воды, т.е. когда $\delta \rightarrow 0$ (см. раздел 5).

полной энергии частицы $E = (\beta/2)(df/d\eta)^2 + U(f)$ расположен внутри потенциальной ямы. Зависимость $U(f)$ (при $\beta > 0$ и $c > 0$) приведена ниже на рис. 3а. Ограниченное решение существует при $E(f) \leq 0$. Уравнение (4.4.4) можно переписать в виде

$$\frac{df}{d\eta} = \pm \left[\frac{2}{\beta} (E - U) \right]^{1/2} \tag{4.4.5}$$

после интегрирования. В (4.4.5) константа интегрирования E есть полная энергия.

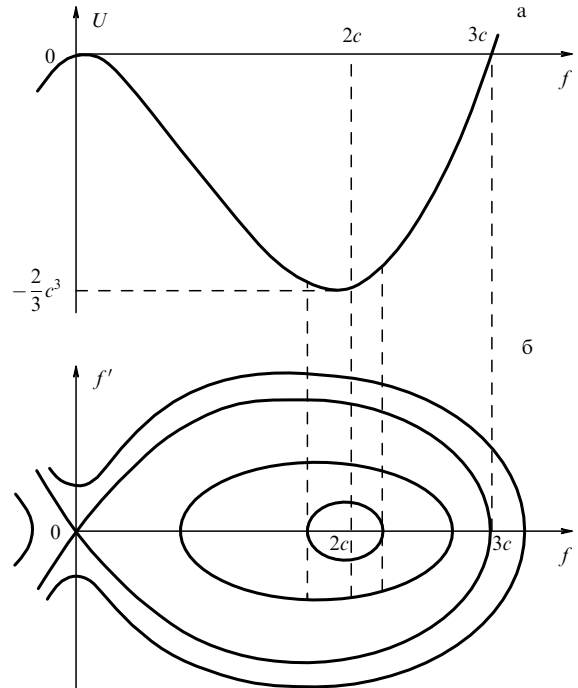


Рис. 3. Эквивалентный потенциал $U(f)$ (а) и фазовые траектории для КдВ уравнения в фазовой плоскости (f', f) (б)

Используя значение $U(f)$, из (4.4.4) и (4.4.5) можно найти соответствующую производную $df/d\eta = f'$ для каждого значения f . Соответствующие кривые в фазовой плоскости (f', f) при различных фиксированных E называются фазовыми траекториями. Траектории для уравнения Кортевега–де Вриза показаны на рис. 3б. Они пересекают ось f в точке, которую можно найти из уравнения $E = U(f)$. Наиболее интересные траектории соответствуют энергии $E = 0$. В этом случае уравнение имеет двойной корень $f_{1,2} = 0$ и простой корень $f_3 = 3c$. Эта траектория отделяет ту часть плоскости (f', f) , в которой траектории замкнуты (периодическое движение), от той части, в которой траектории уходят на бесконечность (непериодическое движение). Именно поэтому эта траектория называется разделяющей. Подстановкой легко доказывается, что соответствующее решение (4.4.5) ($E = 0$) есть

$$f(\eta) = 3c \cosh^{-2} \frac{\eta + \eta^0}{d}, \quad d = \left(\frac{12\beta}{3c} \right)^{1/2}, \tag{4.4.6}$$

называемое солитоном, и $A = 3c$ — амплитуда. Его скорость зависит от амплитуды $c = A/3$. Величина d задает масштаб длины солитона, а константа интегри-

рования η^0 определяет положение солитона в пространстве. Форма солитона изображена на рис. 4а. Периодические решения при $E < 0$ называются *кноидальными волнами*. Типичная форма кноидальной волны показана на рис. 4б (корень f_2 может быть даже отрицательным, так как к нему всегда может быть прибавлена произвольная константа!). При $E \rightarrow 0$ фазовая траектория приближается к разделяющей. Точка, движущаяся вдоль такой траектории, большую часть времени находится вблизи корня f_2 уравнения $E = U(f)$, а решение представляет собой *периодическую последовательность солитонов*. Заметим, что впереди находится солитон с наибольшей амплитудой (и скоростью), а солитоны расположены друг за другом в порядке их интенсивности.

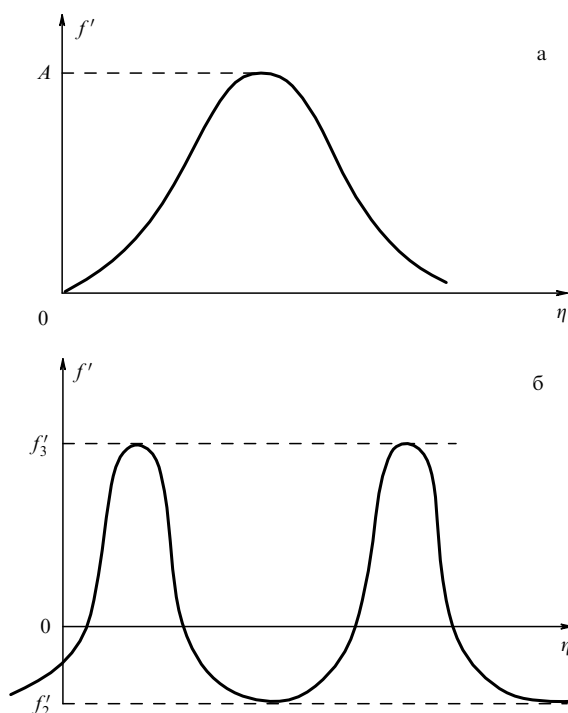


Рис. 4. Два простых решения КдВ уравнения: (а) солитон; (б) кноидальная волна

Если предположить, что имеется два солитона и что идущий впереди солитон имеет меньшую амплитуду, то второй солитон нагонит первый солитон с течением времени. При взаимодействии волновое возмущение не есть просто сумма двух солитонов. Позднее, однако, это возмущение вновь распадается на отдельные солитоны, но теперь уже солитон с большей амплитудой находится впереди. Следовательно, солитоны ведут себя в некотором смысле как не взаимодействующие линейные волны. Оказывается, положение солитонов после взаимодействия несколько отличается от того, которое бы они занимали, если бы взаимодействия не было вовсе.

Наконец, подставляя (4.4.2) в уравнение (4.4.1) и интегрируя дважды по η , приходим к

$$3\beta \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 = -f^3 + 3cf^2 + 6Bf + 6C \equiv F(f),$$

где $F(f) \equiv (f - a)(f - b)(e - f)$, $a < b < e$, $c = (a + b + e)/3$, $B = -(ab + be + ea)/6$, $C = abe/6$.

Здесь мы предполагали, что $F(f) = 0$ имеет три действительных корня для того, чтобы уравнение имело ограниченные действительные решения. Если $F(f) = 0$ имеет три различных корня, то решения имеют вид *равномерных волновых шлейфов* или кноидальных волн (рис. 4б). Если $F(f) = 0$ имеет двойной корень, скажем $a = b$, то кноидальные волны вырождаются в уединенные волны (рис. 4а), в то время, как если $b = e$, то уравнение имеет только постоянное решение $f = e = f^0$. Кноидальные волны могут быть выражены через эллиптические функции Якоби следующим образом

$$f = b + (e - b) \operatorname{Cn}^2 \left\{ \left(\frac{e - a}{12\beta} \right)^{1/2} \left[x - \frac{1}{3}(a + b + e)t \right] \middle| m \right\}, \tag{4.4.7}$$

где $m^2 = (e - b)/(e - a)$, $1 \geq m \geq 0$, а m — модуль эллиптической функции. В пределе $b \rightarrow a$ ($m \rightarrow 1$) (4.4.7) есть уединенная волна

$$f = f^0 + a_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{a_0}{12\beta} \right)^{1/2} \left[x - \left(f^0 + \frac{1}{3} a_0 \right) t \right] \right\}. \tag{4.4.8}$$

Таким образом, мы показали, что скорость волны в равномерном состоянии f^0 пропорциональна амплитуде. Ширина уединенной волны обратно пропорциональна квадрату амплитуды волны. Поэтому более высокие уединенные волны уже и распространяются быстрее, чем короткие. Тот факт, что уравнение Кортевега–де Вриза имеет первый порядок по времени означает, что оно описывает однонаправленное волновое движение, так что все уединенные волны (4.4.8) будут распространяться в сторону возрастания x . Следовательно, если есть две уединенные волны и волна с большей амплитудой первоначально находится слева, то она в конце концов обгонит волну с меньшей амплитудой, находящуюся справа от нее. Теперь хорошо известно, что уединенные волны вида (4.4.8) имеют замечательные свойства, которые впервые были продемонстрированы Забуски и Крускалом в 1965 г. при помощи численного моделирования [25]. Одна уединенная волна распространяется без изменения своей формы, что означает, что волна устойчива. Когда две уединенные волны отделены друг от друга в начальный момент (и при этом волна с большей амплитудой находится слева), более быстрая уединенная волна нагоняет более медленную, они взаимодействуют нелинейным образом, после чего волна с большей амплитудой оказывается справа. Каждая волна имеет в точности ту же структуру, что и до нелинейного взаимодействия, меняется только их положение друг относительно друга. Это замечательное свойство устойчивости уединенных волн, в котором они демонстрируют поведение *сходное с поведением частиц*, навело Забуски и Крускала на мысль назвать такую волну *солитоном* [25]. Более подробно уединенные волны и солитоны обсуждаются в разделе 7.

4.5. Предел Кадомцева–Петвиашвили

Мы будем исходить из *размерных уравнений*. Как и ранее, жидкость имеет потенциал скорости $\phi(t, x, y, z)$, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad -h_0 \leq z \leq \zeta(x, y, t). \tag{4.5.1}$$

Условие на ровном дне имеет вид

$$\phi_z = 0, \quad z = -h_0. \tag{4.5.2}$$

Наконец, имеется два граничных условия на свободной поверхности

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y, \tag{4.5.3a}$$

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\zeta = \\ = \frac{T}{\rho_0 N^3} [(1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} - 2\zeta_x \zeta_y \zeta_{xy} + (1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx}] \end{aligned} \tag{4.5.3б}$$

вдоль свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$, где $N^2 = 1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2$.

Для полной нелинейной центральной задачи (4.5.1)–(4.5.3) рассмотрим следующий предельный случай Кадомцева–Петвиашвили

$$\varepsilon = a_0/h_0 \ll 1 \text{ — малая амплитуда,}$$

$$h_0^2(k^2 + l^2) \ll 1 \text{ — длинные волны,}$$

$$(l/k)^2 \ll 1 \text{ — почти одномерные волны,}$$

где (k, l) — волновые числа возмущений в горизонтальной плоскости (x, y) , а оси в горизонтальной плоскости ориентированы таким образом, что ось x является главным направлением распространения волны; наконец, a_0 , как и ранее, означает характеристическую амплитуду возмущений.

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили имеет место, когда все три вышеперечисленные эффекта имеют один и тот же порядок

$$h_0^2(k^2 + l^2) = O(\varepsilon), \quad \left(\frac{l}{k}\right)^2 = O(\varepsilon). \tag{4.5.4}$$

В предположении (4.5.4) первым приближением для задачи (4.5.1)–(4.5.3) является классическое линейное волновое уравнение для поднятия на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = O(\varepsilon), \tag{4.5.5}$$

где $c_0^2 = gh_0$.

Таким образом, решение гиперболического уравнения (4.5.5) для $\zeta(t, x, y)$ с точностью до членов наимизшего порядка можно приближенно записать в виде

$$\zeta \approx \varepsilon h_0 [F(x - c_0 t, y) + G(x + c_0 t, y)], \tag{4.5.6}$$

где F и G известны из начальных данных (при $t = 0$).

Чтобы перейти к следующему приближению (по ε), определим безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi = \varepsilon^{1/2} \frac{x - c_0 t}{h_0}, \quad \sigma = \varepsilon^{1/2} \frac{x + c_0 t}{h_0}, \quad \eta = \varepsilon \frac{y}{h_0}, \\ \tau = \varepsilon^{3/2} t \frac{c_0}{h_0}, \quad \text{We} = \frac{T}{g\rho_0 h_0^2}. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Далее, будем искать решение для поднятия на свободной поверхности в следующем виде:

$$\zeta \approx \varepsilon h_0 [U(\xi, \eta, \tau) + V(\xi, \eta, \tau)] \tag{4.5.8}$$

и будем использовать метод многих масштабов — в данном случае для того, чтобы исключить вековые члены более высоких приближений. Автоматически получаем следующие два уравнения Кадомцева–Петвиашвили для неизвестных функций U и V , соответственно (в ε приближении)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + 3U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{3} - \text{We}^* \right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \tag{4.5.9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[2 \frac{\partial V}{\partial \tau} - 3V \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \left(\frac{1}{3} - \text{We}^* \right) \frac{\partial^3 V}{\partial \sigma^3} \right] - \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0, \tag{4.5.9б}$$

при $\tau = 0$: $U = F$ и $V = G$.

В большинстве представляющих интерес случаев $1/3 < \text{We}^*$ для волн на воде. Из линеаризованного дисперсионного соотношения для исходной задачи (4.5.1)–(4.5.3) следует, что линеаризованная фазовая скорость имеет максимум (локальный) при $k = 0$ и $l = 0$. Таким образом, волны, подчиняющиеся уравнениям (4.5.9), распространяются быстрее, чем их соседки (в плоскости (k, l)) и возмущения отсутствуют при $\xi \rightarrow +\infty$ или $\sigma \rightarrow -\infty$. Следовательно, например, (4.5.9a) можно проинтегрировать по ξ

$$2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + 3U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{3} - \text{We}^* \right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\xi^*, \tag{4.5.10}$$

которое теперь записано в виде эволюционного уравнения для $U(\xi, \eta, \tau)$.

Если U и все ее производные равны в начальный момент нулю при $\xi \rightarrow -\infty$, то из (4.5.10) видно, что U будут оставаться равными нулю только в том случае, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\xi^* = 0. \tag{4.5.11}$$

Так как U — производная потенциала скорости, (4.5.11) автоматически выполняется в начальный момент. В самом деле, (4.5.11) есть константа движения для линеаризованного уравнения (4.5.10) и достаточно знать ее в начальный момент времени!

Ограничение (4.5.11) имеет простую физическую интерпретацию. Интеграл $\int U(\xi, \eta, \tau) d\xi^*$ можно рассматривать как общую массу волны в узкой полосе по η . Тогда (4.5.11) обеспечивает постоянство поперечной производной от массы, что означает, что результирующий поток массы к (или от) какой-либо полосе отсутствует.

4.6. Прямой асимптотический вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили

Асимптотический вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили во многом следует асимптотическому выводу уравнения Кортевега–де Вриза (см. раздел 4.1). Поэтому здесь мы остановимся только на основных моментах асимптотического вывода. Прежде всего, как и в (4.1.4), введем новые переменные

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t, \quad \eta = \varepsilon y. \tag{4.6.1a}$$

В этом случае вместо (4.1.5) получаем следующую безразмерную задачу:

$$\varepsilon^2 \phi_{\eta\eta} + \varepsilon \phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} = 0, \tag{4.6.2a}$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{на } z = 0, \tag{4.6.2б}$$

$$\phi_z = \varepsilon^2 \phi_{\eta\zeta\eta} + \varepsilon^{3/2} \zeta_\tau + \varepsilon \phi_{\xi\zeta\xi} - \varepsilon^{1/2} \zeta_\xi, \tag{4.6.2в}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \phi_\eta^2 + \varepsilon^{3/2} \phi_\tau + \frac{1}{2} \varepsilon \phi_\xi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} \phi_\xi + \frac{1}{2} \phi_z^2 + \zeta = 0, \tag{4.6.2г}$$

где (4.6.2в) и (4.6.2г) выполняются на $z = 1 + \varepsilon \zeta_1(\xi, \eta, \tau) + \varepsilon^2 \zeta_2(\xi, \eta, \tau) + \dots$

Для ϕ имеем

$$\phi = \varepsilon^{1/2} [F(\xi, \eta, \tau, z) + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3 + \dots]. \tag{4.6.3}$$

Из (4.6.2а), (4.6.2в) и (4.6.2г) видно, что явная зависимость от η появляется только в членах порядка ε^2 и, как следствие, можно использовать результаты раздела 4.1 вплоть до (4.1.8б). Вместо (4.1.9) получаем следующее решение для ϕ_3

$$\phi_3 = \frac{1}{4!} z^4 F_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2!} z^2 G_{\xi\xi} - \frac{1}{2!} z^2 F_{\eta\eta} + H(\xi, \eta, \tau), \tag{4.6.4}$$

где $F = F(\xi, \eta, \tau)$ и $\zeta_1 = F_\xi$.

Соотношение (4.1.10) для членов порядка ε^2 также остается неизменным (член этого порядка $\varepsilon^2 \phi_{\eta\zeta\eta} \sim \varepsilon^{7/2} (\zeta_1)_\eta F_\eta$ не может появиться). Но теперь, если мы используем новое решение (4.6.4) для ϕ_3 вместо (4.1.9), то получим из соотношения (4.1.10) следующее новое "двумерное" соотношение для $F(\xi, \eta, \tau)$:

$$\frac{1}{3} F_{\xi\xi\xi\xi} + F_{\eta\eta} + 3F_\xi F_{\xi\xi} + 2F_{\tau\xi} = 0. \tag{4.6.5}$$

Окончательно, вводя функцию $f(\xi, \eta, \theta) = (2/3)F_\xi(6\theta, \xi, \eta)$, $\theta = \tau/6$, получаем классическое уравнение Кадомцева–Петвиашвили в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + 6f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \tag{4.6.6}$$

$$\zeta = \frac{3}{2} \varepsilon f + O(\varepsilon^2). \tag{4.6.7}$$

Чтобы сделать модельное уравнение Кадомцева–Петвиашвили для распространяющейся вправо волны более наглядным, запишем его в размерном виде относительно поднятия свободной поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2h_0} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0. \tag{4.6.8}$$

4.7. Обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили

Для классической трехмерной задачи вместо (4.3.2) имеем следующее разложение

$$F = F_0(\xi, \sigma, \eta, \tau) + \chi_0 \delta^2 F_1 + \dots, \tag{4.7.1}$$

$$\zeta = \zeta_0(\xi, \sigma, \eta, \tau) + \chi_0 \delta^2 \zeta_1 + \dots,$$

где (см. (4.3.3))

$$\xi = x - c_p t, \quad \sigma = \chi_0(x - c_g t), \quad \tau = \chi_0^2 \delta^2 t, \quad \eta = \frac{y}{v_0}. \tag{4.7.2}$$

Здесь $\chi_0 = 1/\kappa_0$ мало, когда дисперсия *превосходит* нелинейность, и порядка единицы, когда дисперсия и нелинейность *одного порядка*.

В этом случае, как и в разделе 4.3, легко получаем следующее обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили для поднятия свободной поверхности $\zeta_0(\xi, \sigma, \eta, \tau)$

$$2\chi_0^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \sigma} + 3\chi_0 \zeta_0 D \zeta_0 + \frac{1}{3} D^3 \zeta_0 = -\chi_0^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2}, \tag{4.7.3}$$

$$\zeta_0 = D F_0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial}{\partial \sigma}. \tag{4.7.4}$$

Обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (4.7.3) вместе с (4.7.4) является согласно Фриману и Дэви [33] удобным исходным уравнением для вывода системы двух двумерных нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона, впервые полученной Дэви и Стюартоном в 1974 г. [39] в пределе длинных волн (см. раздел 5).

4.8. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили второго порядка

Вернемся к квазиодномерным обобщенным уравнениям Буссинеска (3.2.10а,б) для функций $F(x, y, t)$ и $\zeta(x, y, t)$, где $We^* = \varepsilon \kappa_0 We$ согласно (2.3.18) и (2.3.20). Как и ранее, в (3.2.10а) и (3.2.10б) введем медленное время $\tau = \varepsilon t$ и предположим, что $F = F(x, y, t, \tau)$, $\zeta = \zeta(x, y, t, \tau)$ и $\partial/\partial t = \partial/\partial t + \varepsilon \partial/\partial \tau$.

В этом случае вместо уравнений (3.2.10а) и (3.2.10б) получаем для $F(x, y, t, \tau)$ и $\zeta(x, y, t, \tau)$ следующую систему из двух уравнений

$$(F)_t + \zeta + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} (F)_{xx}^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xxt} - \kappa_0 We \zeta_{xx} + (F)_\tau \right\} + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{\kappa_0}{2} (F)_{xxt} + \frac{\kappa_0^2}{24} (F)_{xxxxt} + \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xx}^2 - \frac{v_0^2}{2} (F)_{yyt} + \frac{v_0^2}{2\kappa_0} (F)_y^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F)_{xxx} (F)_x - \kappa_0 [\zeta (F)_{xx}]_t - v_0^2 We \zeta_{yy} \right\} = O(\varepsilon^3), \tag{4.8.1a}$$

$$\zeta_t + (F)_{xx} + \varepsilon \left\{ \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F)_{yy} + [\zeta (F)_x]_x - \frac{\kappa_0}{6} (F)_{xxxx} + \zeta_\tau \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\kappa_0^2}{120} (F)_{xxxxx} - \frac{\kappa_0}{2} [\zeta (F)_{xxx}]_x + \frac{v_0^2}{\kappa_0} [\zeta (F)_y]_y - \frac{v_0^2}{6} (F)_{xxyy} \right\} = O(\varepsilon^3). \tag{4.8.1б}$$

Если разложить F и ζ в ряды по степеням ε

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots, \tag{4.8.2}$$

то в результате получим следующий набор уравнений различного порядка по ε

$$O(\varepsilon^0): (F_0)_t + \zeta_0 = 0, \quad (\zeta_0)_t + (F_0)_{xx} = 0; \tag{4.8.3a}$$

$$O(\varepsilon^1): (F_1)_t + \zeta_1 + \frac{1}{2} (F_0)_x^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xxt} - \kappa_0 We (\zeta_0)_{xx} + (F_0)_\tau = 0,$$

$$(\zeta_1)_t + (F_1)_{xx} - \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F_0)_{yy} + [\zeta_0(F_0)_x]_x - \frac{\kappa_0}{6} (F_0)_{xxxx} + (\zeta_0)_\tau = 0; \quad (4.8.3б)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): (F_2)_t + \zeta_2 + (F_0)_x(F_1)_x - \frac{\kappa_0}{2} (F_1)_{xxt} + (F_1)_\tau - \\ - \kappa_0 \text{We}(\zeta_1)_{xx} - \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xxt} + \frac{\kappa_0^2}{24} (F_0)_{xxxx} + \\ + \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_{xx}^2 - \frac{\kappa_0}{2} (F_0)_x(F_0)_{xxx} - \\ - \kappa_0 [\zeta_0(F_0)_{xx}]_t + \frac{v_0^2}{2\kappa_0} (F_0)_y^2 - \\ - \frac{v_0^2}{2} (F_0)_{yyt} - v_0^2 \text{We}(\zeta_0)_{yy} = 0, \\ (\zeta_2)_t + (F_2)_{xx} - \frac{\kappa_0}{6} (F_1)_{xxxx} + \frac{v_0^2}{\kappa_0} (F_1)_{yy} + \\ + [\zeta_0(F_1)_x + \zeta_1(F_0)_x]_x + (\zeta_1)_\tau + \\ + \frac{\kappa_0}{120} (F_0)_{xxxxx} - \frac{\kappa_0}{2} [\zeta_0(F_0)_{xxx}]_x + \\ + \frac{v_0^2}{\kappa_0} [\zeta_0(F_0)_y]_y - \frac{v_0^2}{6} (F_0)_{xyy} = 0. \quad (4.8.3в) \end{aligned}$$

Из (4.8.3а) следует, что F_0 , а также ζ_0 , зависит от x и t только в комбинации $x - t$ или $x + t$. Здесь мы рассматриваем только волну, распространяющуюся вправо. Следовательно, F_0 и ζ_0 зависят от x и t только через переменную $\xi = x - t$. В этом случае $\partial/\partial x = \partial/\partial \xi$ и $\partial/\partial t = -\partial/\partial \xi$. Более того, если F_1 и ζ_1 зависят также только от ξ , τ и y , то (4.8.3б) можно свести к

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} = \zeta_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\kappa_0}{2} \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} - \kappa_0 \text{We} \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} + \frac{\partial F_0}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} - \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial^4 F_0}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

и мы приходим вновь к классическому уравнению Кадомцева–Петвиашвили для функции $F_0(\xi, \tau, y)$ как условию совместности для системы двух уравнений (4.8.4), а именно

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[2 \frac{\partial F_0}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 + \kappa_0 \left(\frac{1}{3} - \text{We} \right) \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} \right] + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = 0. \quad (4.8.5)$$

Кроме того, заметим, что

$$\zeta_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \xi}. \quad (4.8.6)$$

Но для определения $\zeta_1(\xi, \tau, y)$ необходимо прежде найти функцию $F_1(\xi, \tau, y)$, так как

$$\zeta_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \xi} - A(F_0), \quad (4.8.7)$$

где

$$A(F_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 + \kappa_0 \left(\frac{1}{2} - \text{We} \right) \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} + \frac{\partial F_0}{\partial \tau}. \quad (4.8.8)$$

Далее, если вновь $F_2 = F_2(\xi, \tau, y)$ и $\zeta_2 = \zeta_2(\xi, \tau, y)$, то из (4.8.3в) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = \zeta_2 + \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \kappa_0 \left(\frac{1}{2} - \text{We} \right) \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial F_1}{\partial \tau} + \\ + B(F_0) - \kappa_0 \text{We} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} A(F_0), \end{aligned} \quad (4.8.9а)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi^2} - \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \xi^4} + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) + \\ + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi \partial \tau} + C(F_0) - \frac{\partial}{\partial \tau} A(F_0) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A(F_0) \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right], \end{aligned} \quad (4.8.9б)$$

где

$$\begin{aligned} B(F_0) = -\frac{\kappa_0^2}{24} \frac{\partial^5 F_0}{\partial \xi^5} + \frac{\kappa_0}{2} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} \right)^2 - \frac{\kappa_0}{2} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} + \\ + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\kappa_0}{2} \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \\ + v_0^2 \left[\frac{1}{2\kappa_0} \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \text{We} \right) \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi \partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (4.8.10а)$$

$$\begin{aligned} C(F_0) = \frac{\kappa_0^2}{120} \frac{\partial^6 F_0}{\partial \xi^6} - \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} \right) + \\ + v_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial F_0}{\partial y} \right) - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 F_0}{\partial \xi^2 \partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.8.10б)$$

Наконец, из двух уравнений (4.8.9а) и (4.8.9б) для F_2 и ζ_2 можно исключить функцию ζ_2 , в результате чего получаем следующее неоднородное (но линейное) уравнение для функции $F_1(\xi, \tau, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2 \frac{\partial F_1}{\partial \tau} + 3 \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \kappa_0 \left(\frac{1}{3} - \text{We} \right) \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi^3} \right] + \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A(F_0) \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \kappa_0 \text{We} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) A(F_0) - \\ - \frac{\partial [B(F_0)]}{\partial \xi} - C(F_0). \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

Таким образом, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (4.8.5) для F_0 и линейное неоднородное уравнение (4.8.11) для F_1 составляют аппроксимацию Кадомцева–Петвиашвили второго порядка. Из (4.8.6) можно вычислить ζ_0 , а из (4.8.7), (4.8.8) и (4.8.11) — ζ_1 .

Установлено, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили является нетривиальным следствием наименьшего порядка из пертурбационной аппроксимации квазиодномерных обобщенных уравнений Буссинеска для слабо диспергирующих волн.

Важно также отметить, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили допускает решение в виде уединенных волн. В самом деле, переписывая уравнение Кадомцева–Петвиашвили (4.8.5) для F_0 как уравнение для функции $\zeta_0 = \partial F_0/\partial \xi$ при $\text{We} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \frac{\kappa_0}{6} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \xi^3} \right) + \frac{v_0^2}{2\kappa_0} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = 0, \quad (4.8.12)$$

ищем его решение в виде:

$$\zeta_0 = \zeta_0(\theta), \quad \theta = \xi - \alpha\tau + \beta y. \quad (4.8.13)$$

В этом случае получаем *солитонное* решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили (4.8.2) в виде

$$\zeta_0 = \operatorname{sech}^2 \left[\xi - \left(1 + \frac{v_0^4}{3} \right) \tau + v_0^2 y \right], \quad (4.8.14)$$

$$\kappa_0 = \frac{3}{4}, \quad \beta = v_0^2, \quad \alpha = 1 + \frac{\beta}{3} v_0^2, \quad (4.8.15)$$

где параметр v_0^2 характеризует (малое) отклонение волны от главного направления. Если направление y отсутствует (при $v_0^2 = 0$ имеем одномерный случай), решение (4.8.14) представляет собой солитонное решение уравнения Кортевега–де Вриза.

Подставляя решение (4.8.14) для $\partial F_0 / \partial \xi = \zeta_0$ в уравнение (4.8.11), для F_1 находим член второго порядка $F_1(\theta)$. Теперь мы можем ввести понятие "*одетого КП солитона*", т.е. КП солитона с учетом поправок второго порядка.

Однако одетое солитонное решение КП может содержать вековые члены (как и в теории Кортевега–де Вриза), и для исключения этих членов в методе возмущений помимо ξ и τ необходимо ввести следующие новые медленные переменные $X = \varepsilon(x - t)$, $T = \varepsilon^2 t, \dots$. Однако мы не видим необходимости во введении новой медленной поперечной переменной $\eta = \varepsilon y$. Очевидно, в этом случае уравнение (4.8.11) для F_1 меняется и в преобразованном уравнении для $F_1(\xi, \tau, y, X, T, \dots)$ появляются некоторые новые члены с производными по X, T, \dots . Как следствие, в качестве солитонного решения мы можем принять следующее:

$$F_1(\theta, X, T, \dots) = A \operatorname{sech}^2 [B(\theta + C)], \quad (4.8.16)$$

где $A = A(X, T, \dots)$, $B = B(X, T, \dots)$ и $C = C(X, T, \dots)$.

Теперь мы можем использовать предоставившуюся дополнительную свободу для исключения вековых членов. В качестве условия отсутствия вековых членов получаем набор уравнений для "модулирующих" функций $A(X, T, \dots)$, $B(X, T, \dots)$ и $C(X, T, \dots)$. В теории уравнения Кортевега–де Вриза эти вековые члены были исключены Сугимото и Какутани в 1977 г. [56] (см. также книгу Джэффри и Кавахара [55]).

4.9. Некоторые особенности волновых решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили

В каноническом виде уравнение Кадомцева–Петвиашвили имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial f}{\partial \theta} + 6f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \quad (4.9.1)$$

$$\zeta = \frac{3}{2} \varepsilon f + O(\varepsilon^2).$$

Сацума в 1976 г. нашел решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили с N солитонами [67], а Майлс [22] дал подробное описание его структуры (см. также содержательный обзор Фримана [52]).

Вместо того, чтобы испускать порой десятки страниц бумаги, в сложных случаях можно с успехом использовать компьютер для построения известных аналитических солитонных волновых решений. Типичная *кноидальная волна Кадомцева–Петвиашвили* изображена на рис. 5; на рис. 6 показано решение с двумя солитонами и на рис. 7 решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили *с тремя солитонами*. На последнем из них показано три плоских солитона вместе с областью взаимодействия, в которой видны несколько коротких отрезков волн. Взаимодействие приводит к сдвигу по фазе для каждого из солитонов. Эта диаграмма соответствует рис. 6а в обзоре [52], к которому читатель может обратиться за дальнейшими разъяснениями.

Согласно Сегуру и Финкелю [68] (рис. 5 и 6 соответствуют рис. 1 и 2 в их статье) уравнение Кадомцева–Петвиашвили (4.9.1) имеет галилеевы инварианты, так что их периодические по пространству решения можно отнормировать, налагая условие

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L} \int_0^L \zeta(x + x^0, y, t) \right] = 0, \quad (4.9.2)$$

являющееся нормировкой свободной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$. Это условие означает, что в предположении, что дном является плоскость $z = -h_0$, h_0 — средняя глубина жидкости и что $z = 0$ ($\zeta = 0$) при отсутствии движения! Естественно, уравнение Кадомцева–Петвиашвили

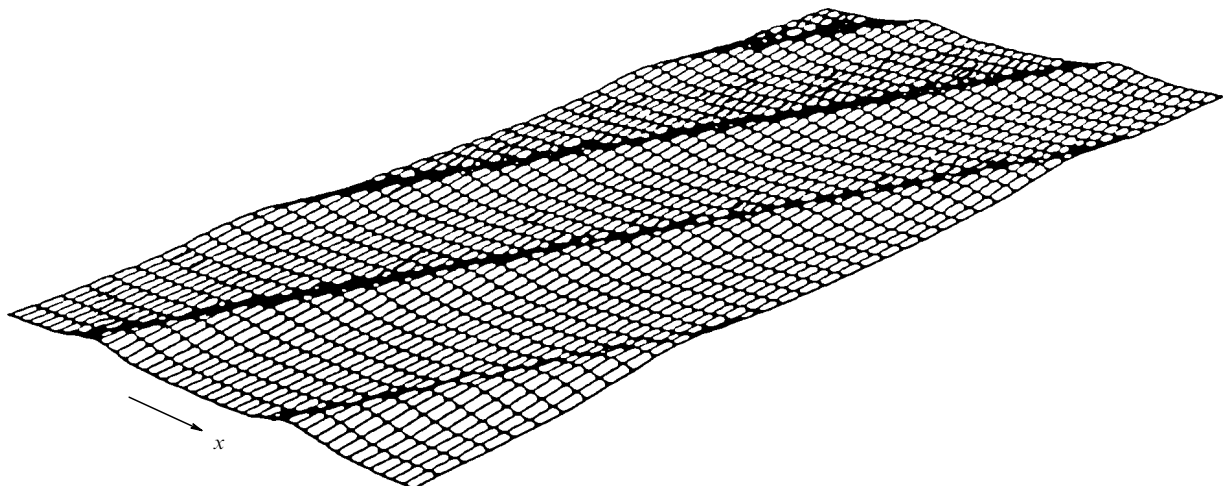


Рис. 5. Решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили с кноидальной волной

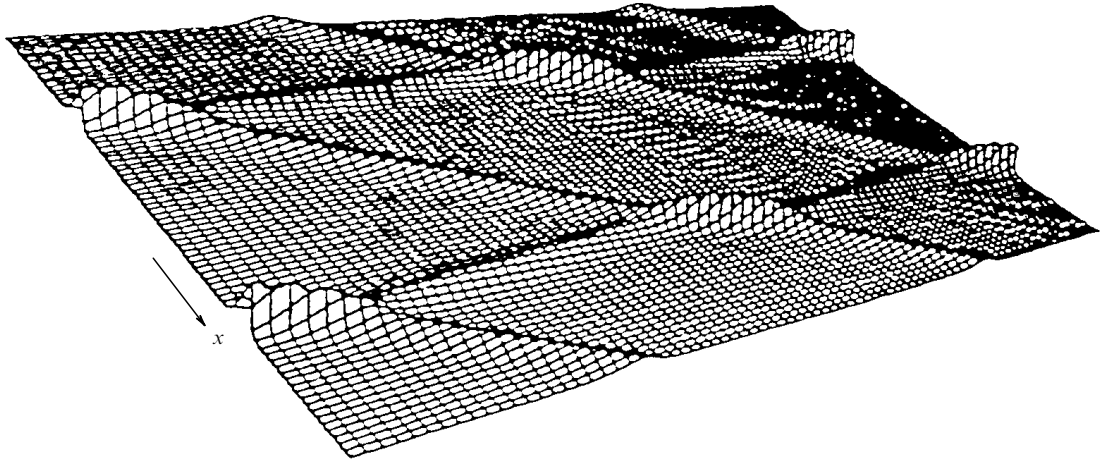


Рис. 6. Решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили с двумя солитонами

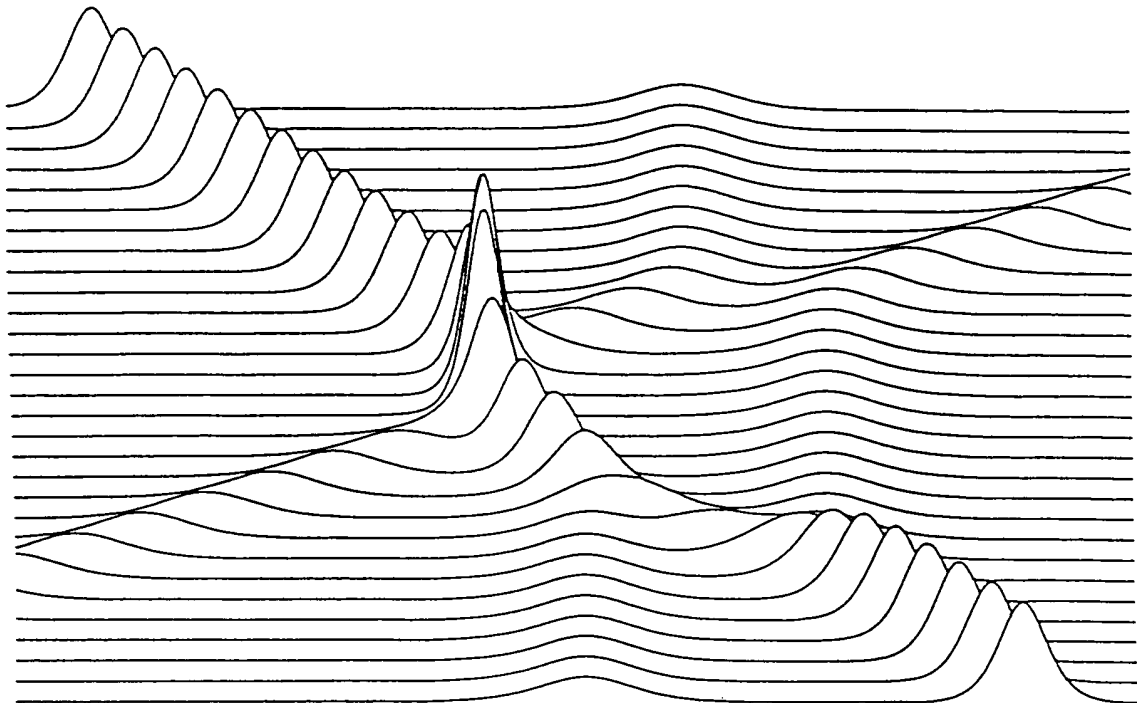


Рис. 7. Решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили с тремя солитонами

швили допускает решение в виде волн, которые распространяются в произвольном направлении в плоскости (x, y) . Однако адекватно моделируются только волны, распространяющиеся преимущественно в направлении x . В сравнении с уравнением Кортевега–де Вриза в уравнении Кадомцева–Петвиашвили (4.9.1) учет поперечной (перпендикулярной) динамики весьма приближителен. Однако добавление члена $3\partial^2 f/\partial\eta^2$ в (4.9.1) из сопоставления с уравнением Кортевега–де Вриза открывает дверь к богатым физическим эффектам.

Рекомендуем читателю ознакомиться с недавно вышедшей книгой Инфельда и Роулэндса [44], где дается более детальный анализ уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

В обзорной статье Фримана [52] читатель может найти очень интересное описание взаимодействия солитонов в двумерном случае на основе анализа структуры решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили с двумя и

тремя солитонами. Как и для уравнения Кортевега–де Вриза, в общем случае для решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили используется обратное преобразование рассеяния (об ОПР см. раздел 7), что позволяет получать многосолитонные решения. Например, с помощью него можно рассмотреть общий случай взаимодействия двух плоских волн в дальнем поле на *больших временах* при $\tau = \epsilon t = O(1)$ [69, 52]. При этом достаточно рассмотреть развитие таких волн в дальнем поле. Для этого мы предполагаем, что возмущения локализованы вблизи некоторой линии $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - t = \text{const}$.

Такие волны достаточно рассмотреть *вблизи области их взаимодействия*, так как вдали от нее наличие одной волны никак не сказывается на другой. Такое взаимодействие было названо Майлсом [69] "слабым". В этом случае, вводя координаты ξ_1 и ξ_2 , где $\xi_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} - t$ с $\mathbf{r} = (x, y)$ и $\mathbf{n}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, $i = 1, 2$, получаем (из классической трехмерной задачи в предположении, что

амплитудный ε и дисперсионный (длинноволновой) δ параметры малы, но $\delta^2/\varepsilon = 1$) уравнение Кортевега–де Вриза при условии, что $1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) = O(1)$. Но вышеизложенная методика разложения (для вывода уравнения Кортевега–де Вриза), очевидно, не применима, когда

$$1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) = O(\varepsilon). \quad (4.9.3)$$

В этом случае волны почти выровнены и $\theta_1 - \theta_2 = O(\varepsilon^{1/2})$. Взаимодействие уже не является слабым и, следуя [69], называется *сильным*. Две фазы отличаются только порядком ε , поэтому целесообразно ввести в качестве координат ξ_1 и нормальную координату к ξ_1 с соответствующим масштабированием η . Таким образом,

$$\eta = \varepsilon^{1/2}(y \cos \theta_1 - x \sin \theta_2), \quad \xi = \xi_1. \quad (4.9.4)$$

В случае "сильного" взаимодействия получаем следующее уравнение Кадомцева–Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + 3 \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \eta^2} = 0, \quad (4.9.5)$$

$$\zeta = \varepsilon \zeta_0 + \dots$$

Линейное дисперсионное соотношение для этого уравнения Кадомцева–Петвиашвили может быть записано в виде $2\omega k = k^4/3 + m^2$, где фазовая функция $\beta = k\xi + m\eta - \omega t$. Подходящую параметризацию этого соотношения получаем, полагая $k = \sqrt{6}(1+n)$, $m = 6(n^2 - l^2)$, $\omega = 4\sqrt{6}(l^3 + n^3)$. Таким образом, одиночное асимметричное солитонное решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta_0 = 2(l+n)^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \beta(l, n) \right], \quad (4.9.6)$$

что соответствует КдВ солитону

$$\zeta_0 = 8l^2 \operatorname{sech}^2 [\sqrt{6} l (\xi - 4l^2 \tau)]$$

при $l = n$ и распространению волны в направлении ξ .

Заметим, что амплитуда волны в этом случае равна $2(l+n)^2$ и, вообще говоря, волна характеризуется двумя параметрами l и n .

Наконец, решение с двумя солитонами уравнения Кадомцева–Петвиашвили запишется в виде

$$\zeta_0 = \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \log f, \quad (4.9.7)$$

где

$$f = 1 + \exp \beta_1 + \exp \beta_2 + N_2 \exp(\beta_1 + \beta_2), \quad (4.9.8)$$

а $N_2 = (l_1 - l_2)(n_1 - n_2)/(l_1 + n_2)(l_2 + n_1)$ и $\beta_i = \beta(l_i, n_i)$, $i = 1, 2$ — фазы двух солитонов.

5. Нелинейные уравнения Шрёдингера и Шрёдингера–Пуассона

5.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера

Дисперсионное соотношение для действительно линейной системы не зависит от амплитуды. Однако, предположим, что развитие гармонической волны в *слабо*

нелинейной системе может быть представлено дисперсионным соотношением, которое зависит от амплитуды! Такая ситуация имеет место в нелинейной теории волн на поверхности воды, и мы можем предположить, что

$$\omega = \omega(k; |a|^2). \quad (5.1.1)$$

Разложение в ряд Тейлора около некоторого волнового числа k_0 и частоты ω_0 дает

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 (k - k_0)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial |a|^2} \right)_0 |a|^2 + \dots \quad (5.1.2)$$

Уравнение (5.1.2) является пространственным фурье-эквивалентом операторного уравнения, которое в применении к амплитуде a дает:

$$i \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial |a|^2} \right)_0 a |a|^2 = 0, \quad (5.1.3)$$

в пренебрежении членами более высокого порядка [32].

Уравнение (5.1.3) есть нелинейное уравнение Шрёдингера, а имя "нелинейное Шрёдингера" было дано ему потому, что его структура в точности соответствует структуре уравнения Шрёдингера в квантовой механике с потенциалом $|a|^2$, хотя в большинстве случаев, в которых оно имеет место, его единственным сходством с настоящим уравнением Шрёдингера является его имя. В самом деле, оно играет важную роль в теории распространения огибающей шлейфа волн во многих устойчивых диспергирующих физических системах без диссипации. Вышеприведенный, скорее эвристический, вывод нелинейного уравнения Шрёдингера демонстрирует, как можно грубо смоделировать эффект нелинейности в предположении, что система имеет дисперсионное соотношение, зависящее от амплитуды.

Этот быстрый способ показывает, откуда возникает нелинейное уравнение Шрёдингера. Но, к несчастью, он не указывает значения коэффициентов в нелинейном уравнении Шрёдингера в его окончательной форме, в частности члена $(\partial \omega / \partial |a|^2)_0$. Как увидим ниже, знак этого члена немаловажен. В этом месте желательно использовать более строгий математический метод, который бы мог быть применен в общем случае к широкому диапазону нелинейных уравнений, когда мы хотим знать развитие *медленно меняющейся огибающей, модулирующей быструю несущую волну!*

Это последнее свойство означает, что на одну длину волны огибающей приходится несколько длин несущей волны. Следовательно,

$$\alpha = \frac{\lambda_c}{\lambda_e} \ll 1, \quad (5.1.4)$$

где λ_c и λ_e — типичные длины несущей волны и огибающей, соответственно. Так как x и t есть обыкновенные пространственная и временная переменные для двумерной несущей волны, мы можем определить набор "медленных" пространственных и временных переменных:

$$X_n = \alpha^n x, \quad T_n = \alpha^n t. \quad (5.1.5)$$

Эти медленные пространственная и временная переменные есть переменные движения образующей. Здесь и далее они будут рассматриваться как независимые переменные (метод многих масштабов или "двух времен"). Чтобы лучше понять метод нахождения уравнения эволюции огибающей осцилляций для данного нелинейного уравнения, рассмотрим один пример, прежде чем переходить к общему случаю.

5.1.1. Возьмем в качестве исходного нелинейного уравнения уравнение Кортевега–де Вриза и выведем соответствующее нелинейное уравнение Шрёдингера. Поэтому для функции $u(t, x)$ имеем следующее уравнение Кортевега–де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (5.1.6)$$

с (линейным) дисперсионным соотношением: $\omega = k - k^3$. Разложим u в ряд

$$u = \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots, \quad (5.1.7)$$

$$u_n = u_n(t, x; X_1, T_1, T_2, \dots), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial T_1} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial X_1} + \dots \quad (5.1.9)$$

Как и ожидалось, имеем для членов порядка $O(\alpha)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_1 = 0, \quad (5.1.10)$$

$$u_1 = A(X_1, T_1, T_2, \dots)E + \text{к.с.}, \quad (5.1.11)$$

$$E = \exp i\theta, \quad \theta = kx - \omega t,$$

где к.с. означает комплексно-сопряженный член. Для членов порядка $O(\alpha^2)$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_2 = - \left[\frac{\partial A}{\partial T_1} + (1 - 3k^2) \frac{\partial A}{\partial X_1} \right] E + \text{к.с.} - 2ik\beta A^2 E^2 + 2ik\beta A^* E^{-2}. \quad (5.1.12)$$

E является вековым членом, поэтому мы берем

$$X^* = X_1 - (1 - 3k^2)T_1 \rightarrow A = A(X^*, X_2, T_2, \dots). \quad (5.1.13)$$

Интегрируя уравнение (5.1.12), находим

$$u_2 = \frac{\beta}{3k^2} (A^2 E^2 + A^* E^{-2}) + B(X^*, T_1), \quad (5.1.14)$$

где $B(X^*, T_1)$ — константа интегрирования для быстрых масштабов x и t , но может быть сделана функцией медленных масштабов.

Для членов порядка $O(\alpha^3)$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_3 = & - \left[3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial X_1^2} + \frac{\partial}{\partial T_2} \right] [AE + A^* E^{-1}] - \\ & - \left[3 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right] \left[\frac{\beta}{3k^2} (A^2 E^2 + A^* E^{-2}) + \right. \\ & + B(X^*, T_1) \left. \right] - \beta \frac{\partial}{\partial X_1} (A^2 E^2 + A^* E^{-2} + 2|A|^2) - \\ & - 2\beta \frac{\partial}{\partial x} \left[ABE + \frac{\beta}{3k^2} (A|A|^2 E + A^3 E^3) + \text{к.с.} \right]. \quad (5.1.15) \end{aligned}$$

В (5.1.15) имеется два типа вековых членов. Первые являются функциями только медленных масштабов и дают члены, явно зависящие от x и t в u_3 . Их исключение дает

$$\left[\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1} \right] B + 2\beta \frac{\partial}{\partial X_1} |A|^2 = 0. \quad (5.1.16)$$

Далее, исключение вековых E членов дает

$$3ik \frac{\partial^2 A}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial A}{\partial T_2} - ik \frac{4\beta^2}{3k^2} A|A|^2 + ik \frac{2\beta^2}{3k^2} A|A|^2 = 0. \quad (5.1.17)$$

Наконец, исходя из (5.1.16) и (5.1.17) можно выписать для A следующее нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{2\beta^2}{3k^2} A|A|^2 = 0, \quad (5.1.18)$$

где $\tau = kT_2$ и $\xi = X^*/\sqrt{3}$.

Поэтому временной масштаб нелинейного уравнения Шрёдингера для огибающей весьма велик, так как одна единица времени τ равна $1/\alpha^2$ единиц реального времени (уравнение в дальнем поле).

5.1.2. Амплитуда $A(\tau, \xi)$ является комплексной функцией и поэтому содержит информацию о фазе волны. Уравнение (5.1.18) может быть записано через действительные функции, полагая

$$A = a \exp \left(i \int W d\xi \right), \quad (5.1.19)$$

где $a = a(\tau, \xi)$ и $W = W(\tau, \xi)$. Разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} W a^2 = 0, \quad (5.1.20a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - W^2 + \frac{2\beta^2}{3k^2} a^2 \right) = 0. \quad (5.1.20б)$$

Эти уравнения имеют форму законов сохранения

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0.$$

Они были выведены для глубокой воды Чу и Меем в 1970 г. [70] и Уиземом в 1967 г. [71] без члена $(1/a)\partial^2 a/\partial \xi^2$. Связь между уравнениями (5.1.20) и (5.1.18) была указана Дэви в 1972 г. [72].

5.1.3. Здесь необходимо также подчеркнуть, что в общем случае, когда параметр длинной волны δ не мал, а фиксирован при $\varepsilon \rightarrow 0$, нелинейное уравнение Шрёдингера описывает амплитуду профиля гармонической волны как функцию медленных пространственной и временной переменных. Длина несущей волны принимается равной $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что соответствует фиксированному δ в предельном процессе. Поэтому основная волна ищется в виде

$$\zeta \sim A(\zeta, \tau) \exp i p + \text{к.с.}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.1.21)$$

$$p = x - c_p t, \quad \zeta = \varepsilon(x - c_g t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \quad (5.1.22)$$

Разложение для ζ (и ϕ) построено таким образом, что оно является периодическим по p (для всех порядков), откуда следует, что члены более высокого порядка должны содержать более высокие гармоники в результате нелинейного взаимодействия. Несущая волна движется с фазовой скоростью (c_p), а амплитудная модуляция движется с соответствующей групповой скоростью (c_g), хотя конкретные формы c_p и c_g заранее не известны! Из центральной двумерной задачи о волнах на поверхности воды с условием на ровном дне без учета поверхностного натяжения имеем с точностью до главного и следующего порядков

$$c_p^2 = \frac{\tanh \delta}{\delta}, \quad c_g = \frac{1}{2} c_p \left(1 + \frac{2\delta}{\sinh 2\delta} \right), \quad (5.1.23)$$

соответственно. Для следующего порядка получаем общее нелинейное уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью (ОНЛШ):

$$-2ic_p \frac{\partial A}{\partial \tau} + q \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + rA|A|^2 = 0, \quad (5.1.24)$$

где q и r — степенные функции δ . Коэффициент $r(\delta) = 0$ при $\delta = \delta^0 = 1,363$, а, как хорошо известно, стоковская волна неустойчива при $\delta \geq \delta^0$ [73]. Это наводит на мысль, что для изучения природы неустойчивости Бенджамина-Фейра можно использовать соответствующее обобщение нелинейного уравнения Шрёдингера (5.1.24), справедливое вблизи $r = 0$ [74]. Укажем, что коэффициент q всегда положителен, в то время как r меняет знак с положительного на отрицательный в точке $\delta = \delta^0 = 1,363$ при росте δ .

Нелинейное уравнение Шрёдингера (5.1.24) было впервые получено (для конечной глубины) Хасимото и Оно в 1972 г. в следующем виде [36]

$$\frac{1}{i} \frac{\partial A}{\partial \tau} = \mu \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + vA|A|^2, \quad (5.1.25)$$

где

$$\mu = -\frac{g}{8k_0\sigma\omega_0} \left\{ [\sigma - k_0h_0(1 - \sigma^2)]^2 + 4k_0^2h_0^2\sigma^2(1 - \sigma^2) \right\}, \quad (5.1.26a)$$

$$v = -\frac{k_0^4}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{c_g^2 - gh_0} [4c_0^2 + 4(1 - \sigma^2)c_0c_g + gh_0(1 - \sigma^2)^2] + \frac{1}{2\sigma^2} (9 - 10\sigma^2 + 9\sigma^4) \right\}, \quad (5.1.26b)$$

$$\sigma = \tanh k_0h_0, \quad c_0 = \frac{\omega_0}{k_0} = \left(\frac{g\sigma}{k_0} \right)^{1/2}. \quad (5.1.26в)$$

Как видно из (5.1.26a), μ всегда отрицательно, в то время как v меняет знак с положительного на отрицательный в точке $k_0h_0 = 1,363$ при уменьшении k_0h_0 .

Как известно, нелинейное уравнение Шрёдингера (5.1.25) имеет следующее решение в виде *нелинейной плоской волны*

$$A = A_0 \exp[i(\alpha\tau - \kappa\xi)], \quad (5.1.27)$$

где $A_0 = \text{const}$ и $\alpha = -\mu\kappa^2 + v|A_0|^2$.

5.1.4. В пределе $k_0h_0 \rightarrow 0$ при k_0 порядка единицы коэффициенты μ и v в уравнении (5.1.25) принимают, соответственно, вид

$$\mu \rightarrow \mu_s = -\frac{1}{2} c_0^{1/2} k_0 h_0^2, \quad (5.1.28a)$$

$$v \rightarrow v_s = \frac{9}{4} c_0^{-1/2} k_0 h_0^{-2}, \quad (5.1.28b)$$

где $c_0 = (gh_0)^{1/2}$. В этом случае нелинейная плоская волна (при $\varepsilon < (k_0h_0)^3 \ll 1$) имеет следующий вид:

$$\zeta = \varepsilon a \cos \theta_s - \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2 a^2}{h_0(k_0h_0)^2} (1 - \cos 2\theta_s), \quad (5.1.29)$$

где $\theta_s = k_0x - (\omega_0 - \varepsilon^2\alpha_s)t$ и $\alpha_s = v_s g^2 a^2 / 4\omega_0^2$.

С другой стороны, как хорошо известно, волны в мелкой воде подчиняются уравнению Кортевега-де Вриза:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3c_0\zeta}{2h_0} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{c_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (5.1.30)$$

которое имеет стационарное периодическое решение, называемое кноидальной волной

$$\zeta = \varepsilon a \left\{ \zeta_\infty + \frac{2}{m^2} \text{Dn}^2 \left[\left(\frac{\varepsilon a}{6m^2} \right)^{1/2} (x - c_g t) | m \right] \right\}, \quad (5.1.31)$$

$$c_g = c_0 \left\{ 1 + \frac{3\varepsilon a}{2h_0} \left[\zeta_\infty + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (5.1.32)$$

и средняя глубина, скажем ζ^* , дается соотношением $\zeta^* = \varepsilon a (\zeta_\infty + 2E/m^2 K)$, где K , E и m есть, соответственно, полные эллиптические интегралы первого и второго рода и их модуль.

Следуя Хасимото и Оно [36], полагаем

$$k_0^2 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon a \pi^2}{m^2 h_0^3 K^2}, \quad \zeta^* = -\frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2 a^2}{h_0^3 k_0^2},$$

и, разлагая решение (5.1.31) для малых значений m , получаем (5.1.29). Таким образом, мы установили, что решение в виде плоской нелинейной волны соответствует слабой кноидальной волне в пределе мелкой воды.

Наконец, мы можем сделать вывод, что слабая кноидальная волна модуляционно устойчива к малым возмущениям, потому что $v_s \mu_s < 0$ (см. раздел 8).

5.2. Солитонное решение нелинейного уравнения Шрёдингера

В зависимости от знака β в нелинейном уравнении Шрёдингера (5.1.18) изоспектральный оператор (в этом случае соответствующие собственные числа не зависят от времени!) является либо самосопряженным, либо косо-сопряженным.

При $\beta > 0$ оператор является косо-сопряженным и собственные значения являются мнимыми. В этом случае солитоны обусловлены дискретным спектром, который в свою очередь обусловлен состояниями с отрицательной (ограниченной) энергией (состояния с отрицательной энергией связаны с отрицательными мнимыми

собственными значениями). Условие $\beta < 0$ имеет место, когда происходит фокусировка или образование пучка огибающей волны.

Решение канонического нелинейного уравнения Шрёдингера (5.1.18) ищется в виде

$$A = a_m \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/2} a_m (\xi - \xi_0 - U\tau) \right] \times \exp[-ir(\xi - V\tau - \varphi)], \quad \beta > 0, \quad (5.2.1)$$

где $r = U/2$ и $a_m = 2U[(U/8) - V]/\beta$.

Огибающий солитон характеризуется свободными параметрами a_m и U и фазами φ и ξ_0 .

Одной из наиболее важных особенностей нелинейного уравнения Шрёдингера является то, что его можно решить точно для начальных условий быстро убывающих при $|\xi| \rightarrow \infty$. Решение было найдено Захаровым и Шабатом в 1972 г. [35] с использованием метода, который был ни чем иным, как заново открытым обратным преобразованием рассеивания (Гарднер и др. [49]). Они показали, что произвольный волновой пакет в конце концов со временем превращается в несколько "огibaющих солитонов" и диспергирующий след. Основная масса энергии содержится в солитонах, которые имеют форму уединенной волны и распространяются без изменения формы после того, как образовались. Кроме того, солитоны не разрушаются при взаимодействии с другими солитонами и волновыми пакетами. Так как нелинейное уравнение Шрёдингера описывает огибающую длинных волн в мелкой воде с несущей частотой, теория предсказывает существование пакета длинных волн в мелкой воде со свойствами солитона. Наличие этих свойств солитона у огибающей вряд ли можно было предсказать на основании опыта, почерпнутого из линейных волновых систем, в которых волновые компоненты не взаимодействуют друг с другом и являются сильно диспергирующими.

Отметим, что нелинейное уравнение Шрёдингера описывает множество разнообразных нелинейных волновых структур, а именно, солитоны, солитоны разряжения, несколько типов периодических нелинейных волн и пару скачков. Ученые относятся с подозрением к такому сверхизобилию и высказывают сомнения по поводу того, что все эти решения реализуются в действительности.

Простейшее решение нелинейного уравнения Шрёдингера (5.1.18) ищется в виде

$$A(\tau, \xi) = a(\xi) \exp(i\gamma^2 \tau), \quad (5.2.2)$$

где $a(\xi)$ — действительная функция, а γ — неизвестная константа, характеризующая частотную поправку к отдельным волнам.

В этом случае из (5.1.18) получаем уравнение для $a(\xi)$:

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} + \gamma^2 a + \beta a^3 = 0,$$

а решение этого уравнения может быть выражено через "Dn" функции — эллиптические функции Якоби второго рода

$$a(\xi) = a^0 \operatorname{Dn}[a^0(\xi - \xi^0) | m], \quad (5.2.3)$$

где m — модуль Dn-функции со свойствами

$$a^0 = \gamma \left(\frac{2}{2 - m^2} \right)^{1/2}, \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (5.2.4)$$

В пределе $m \rightarrow 0$: $\operatorname{Dn}[\xi|0] \rightarrow 1$ и в пределе $m \rightarrow 1$: $\operatorname{Dn}[\xi|1] \rightarrow \operatorname{sech} \xi$.

На рис. 8 схематически изображены солитонная и периодическая огибающие для НЛШ уравнения.

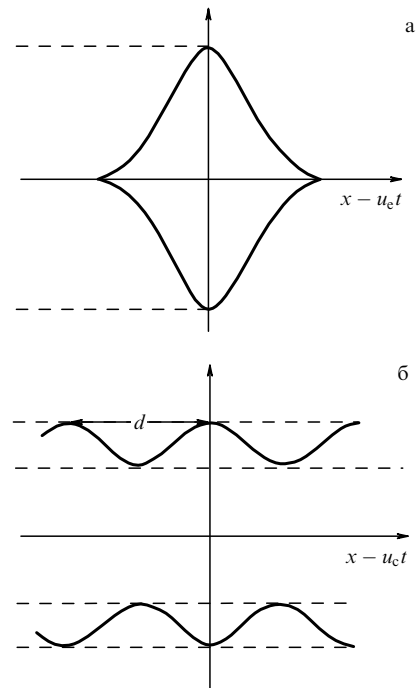


Рис. 8. Солитонная и периодическая огибающие для нелинейного уравнения Шрёдингера

Уточним, что несущая волна распространяется со скоростью u_c , а огибающая — со скоростью u_e ; амплитуда импульса равна

$$A_0 = \left[\frac{u_e}{2\beta} (u_e - 2u_c) \right]^{1/2}.$$

5.3. Асимптотический вывод нелинейного уравнения Шрёдингера–Пуассона

Вернемся к обобщенному уравнению Кадомцева–Петвиашвили (4.7.3) и соотношению (4.7.4). Следовательно, в этом разделе мы будем исходить из системы для функций ζ_0 и F_0

$$\begin{aligned} 2\chi_0^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \sigma} + 3\chi_0 \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + 3\chi_0^2 \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \sigma} + \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \xi^3} + 3\chi_0 \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \xi^2 \partial \sigma} + 3\chi_0^2 \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \sigma^2 \partial \xi} + \chi_0^3 \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \sigma^3} \right) + \\ + \chi_0^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

$$\zeta_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \chi_0 \frac{\partial F_0}{\partial \sigma}. \quad (5.3.2)$$

В (5.3.1) и (5.3.2) в качестве малого параметра (в пределе длинных волн) имеем

$$\chi_0 = \frac{1}{\kappa_0} \equiv \frac{\varepsilon}{\delta^2} \ll 1. \quad (5.3.3)$$

Вначале разложим неизвестные функции ζ_0 и F_0 в ряды по χ_0 :

$$\zeta_0 = h_0 + \chi_0 h_1 + \chi_0^2 h_2 + \dots, \quad (5.3.4a)$$

$$F_0 = f_0 + \chi_0 f_1 + \chi_0^2 f_2 + \dots \quad (5.3.4b)$$

В этом случае получаем следующие уравнения для h_0, f_0, h_1, f_1, h_2 и f_2 , приравнявая последовательно подобные члены при χ_0^0, χ_0^1 и χ_0^2 :

$$h_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \xi}, \quad (5.3.5a)$$

$$h_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, \quad (5.3.5b)$$

$$h_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \quad (5.3.5в)$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_0}{\partial \xi} = 0, \quad (5.3.6a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = -3 \left(\frac{\partial h_0}{\partial \sigma} + 3h_0 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial \xi^2 \partial \sigma} \right), \quad (5.3.6b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = -3 \left[2 \frac{\partial h_0}{\partial \tau} + 3h_0 \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \xi} h_0 h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (5.3.6в)$$

Теперь из (5.3.6a) и (5.3.5a) определяем h_0 и f_0 в следующем виде

$$h_0 = A_{01} E + A_{01}^* E^{-1}, \quad (5.3.7a)$$

$$f_0 = B_{00} + B_{01} E + B_{01}^* E^{-1}, \quad (5.3.7b)$$

где $E = \exp i\xi$ и $E^{-1} = \exp(-i\xi)$; "*" означает комплексное сопряжение. В вышеприведенных соотношениях (5.3.7)

$$B_{01} = -iA_{01}, \quad B_{01}^* = iA_{01}^*. \quad (5.3.8)$$

Далее, из (5.3.5b) можно определить функцию h_1 :

$$h_1 = A_{10} + A_{11} E + A_{11}^* E^{-1} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \quad (5.3.9'a)$$

где

$$A_{10} = \frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma}, \quad A_{11} = \frac{\partial B_{01}}{\partial \sigma}, \quad A_{11}^* = \frac{\partial B_{01}^*}{\partial \sigma}. \quad (5.3.10)$$

Теперь из (5.3.6b) с учетом выражения (5.3.7a) для h_0 и (5.3.9'a) для h_1 находим следующее уравнение для функции f_1

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} = -\frac{9}{2} (A_{01}^2 E^2 + A_{01}^{*2} E^{-2}),$$

и выражение для функции f_1 имеет вид:

$$f_1 = B_{10} + B_{12} E^2 + B_{12}^* E^{-2}, \quad (5.3.9b)$$

где

$$B_{12} = -i \frac{3}{4} A_{01}^2, \quad B_{12}^* = i \frac{3}{4} A_{01}^{*2}. \quad (5.3.11)$$

Учитывая (5.3.9b), находим из (5.3.9'a) следующие выражения для h_1

$$h_1 = A_{10} + A_{11} E + A_{11}^* E^{-1} + A_{12} E^2 + A_{12}^* E^{-2}, \quad (5.3.9a)$$

$$A_{12} = 2iB_{12}, \quad A_{12}^* = -2iB_{12}^*. \quad (5.3.12)$$

Подчеркнем, что в соотношениях (5.3.7)–(5.3.12) все коэффициенты $A_{01}, A_{01}^*, B_{00}, B_{01}, B_{01}^*, A_{10}, A_{11}, A_{11}^*, B_{10}, B_{12}, B_{12}^*, A_{12}, A_{12}^*$ являются функциями σ, τ и η .

Рассмотрим теперь уравнения (5.3.5в) и (5.3.6в). В самом деле, уравнение (5.3.6в) является уравнением для h_2 и его можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = -3 \left(L_0 + L_1 E + L_2 E^2 + 9iA_{01} \frac{\partial A_{12}}{\partial \sigma} E^3 + \text{к.с.} \right), \quad (5.3.13)$$

где

$$L_0 = \frac{\partial A_{10}}{\partial \sigma} + 3 \left(A_{01} \frac{\partial A_{01}^*}{\partial \sigma} + A_{01}^* \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 B_{00}}{\partial \eta^2}, \quad (5.3.14a)$$

$$L_1 = 2 \frac{\partial A_{01}}{\partial \tau} + i \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \sigma^2} + 3i(A_{10} A_{01} + A_{01}^* A_{12}) + \frac{\partial^2 B_{01}}{\partial \eta^2}, \quad (5.3.14b)$$

$$L_2 = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} A_{01}^2 + 6iA_{11} A_{01} + 3A_{01} \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} - 4 \frac{\partial A_{12}}{\partial \sigma} \equiv 0. \quad (5.3.14в)$$

Здесь мы воспользовались выражениями (5.3.7a), (5.3.7b) и (5.3.9a) для h_0, f_0 и h_1 .

Мы видим, что члены L_0 и L_1 в (5.3.13) являются *вековыми*. Однако член E^3 не является вековым (член E^2 равен нулю), потому что он не резонирует с однородным решением. Поэтому, для того чтобы теория возмущений была применима на больших временах, мы должны потребовать

$$L_0 = 0, \quad L_1 = 0. \quad (5.3.15)$$

Теперь из (5.3.5в) и (5.3.9b) мы можем определить также функцию h_2

$$h_2 = A_{20} + A_{22} E^2 + A_{22}^* E^{-2} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi}, \quad (5.3.16)$$

$$A_{20} = \frac{\partial B_{10}}{\partial \sigma}, \quad A_{22} = \frac{\partial B_{12}}{\partial \sigma}, \quad A_{22}^* = \frac{\partial B_{12}^*}{\partial \sigma}. \quad (5.3.17)$$

Как следствие (5.3.15) и (5.3.16), получаем следующее соотношение для левой части уравнения (5.3.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial f_2}{\partial \xi} - 6i(A_{22} E^2 - A_{22}^* E^{-2}). \quad (5.3.18)$$

Таким образом, для нахождения f_2 необходимо решить следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial f_2}{\partial \xi} = -3i \left(-2iA_{22}E^2 + 9iA_{01} \frac{\partial A_{12}}{\partial \sigma} E^3 + \text{к.с.} \right). \quad (5.3.19)$$

Мы имеем для функций $A_{01}, B_{00}, B_{01}, A_{10}, A_{11}$ и $A_{12} = 2iB_{12}$ следующие четыре соотношения

$$\begin{aligned} B_{01} &= -iA_{01}, & A_{10} &= \frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma}, \\ A_{11} &= \frac{\partial B_{01}}{\partial \sigma}, & B_{12} &= -i \frac{3}{4} A_{01}^2 \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

и два уравнения (из (5.3.15) с учетом (5.3.14а), (5.3.14б)), так как $A_{01}A_{01}^* \equiv |A_{01}|^2$,

$$\frac{\partial A_{10}}{\partial \sigma} + 3 \frac{\partial |A_{01}|^2}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 B_{00}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (5.3.21a)$$

$$2 \frac{\partial A_{01}}{\partial \tau} + i \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \sigma^2} + 3i(A_{10}A_{01} + A_{01}^*A_{12}) + \frac{\partial^2 B_{01}}{\partial \eta^2} = 0. \quad (5.3.21б)$$

Из (5.3.20) и (5.3.21) можно исключить функции A_{10}, A_{11}, A_{12} и B_{01} . Для A_{01} и B_{00} находим следующую систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 B_{00}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 B_{00}}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial |A_{01}|^2}{\partial \sigma} = 0, \quad (5.3.22)$$

$$2i \frac{\partial A_{01}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \sigma^2} - \frac{9}{2} A_{01} |A_{01}|^2 + \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \eta^2} = 3A_{01} \frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma}. \quad (5.3.23)$$

Предельные уравнения (5.3.22) и (5.3.23) составляют систему двух нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона (справедливая в пределе длинных волн), которая была впервые получена Дэви и Стюартсоном в 1974 г. [39], а также Фриманом и Дэви в 1975 г. [33].

Следовательно, амплитудная модуляция A_{01} бегущей волны — пакет малой амплитуды (бегущий в выделенном направлении на поверхности воды конечной глубины) может быть описан нелинейным уравнением Шрёдингера (5.3.23) вместе с уравнением Пуассона (5.3.22) для средней части потенциала скорости потока B_{00} .

Отметим, что система двух нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона (5.3.22), (5.3.23) была выведена Дэви и Стюартсоном [39] в пределе длинных волн ($\varepsilon \rightarrow 0$ и затем $\delta \rightarrow 0$) без какого-либо формального обоснования. Согласно [33] два вышеприведенных эволюционных НЛШП уравнения (5.3.22), (5.3.23) выведены при помощи двукратного разложения в такой последовательности: сначала производится разложение по δ , а затем по χ_0 ($\chi_0 = 1/\kappa_0 \equiv \varepsilon/\delta^2 \ll 1$). Такая процедура, казалось, подразумевает, что параметры δ и χ_0 не зависят друг от друга. Более внимательный анализ метода показывает, что результат остается справедливым, даже если χ_0 зависит от δ . На первый взгляд, сохранение членов порядка $\chi_0 \delta^2$ при выводе ОКП уравнения (4.7.3) и пренебрежение членами порядка δ^4 в разложении ϕ по

степеням δ предполагает некоторое ограничение на размер χ_0 в сравнении с δ . Однако члены порядка δ^4 , которыми пренебрегли в разложении ϕ , равны нулю с точностью до первого порядка по χ_0 , потому что значение c_p подобрано из линейной теории таким образом, чтобы это как раз выполнялось. Подобные рассуждения применимы и к некоторым членам порядка $\delta^4 \chi_0$ вследствие выбора c_g .

Поэтому мы можем с уверенностью утверждать, что двойной предел сначала при $\delta \rightarrow 0$ и затем при $\chi_0 \rightarrow 0$, описанный в настоящем разделе, справедлив и корректен. Так как более формальная процедура, когда сначала берется предел при $\chi_0 \rightarrow 0$ и затем при $\delta \rightarrow 0$, дает тот же самый результат, двойной предел $\delta, \chi_0 \rightarrow 0$ является справедливым и равномерным и дает (5.3.22), (5.3.23) как соответствующие эволюционные уравнения: *двойной предел $\delta, \chi_0 \rightarrow 0$ является равномерным, так как порядок, в котором берется предел, не имеет значения.*

Уравнения (5.3.22), (5.3.23) достаточны для определения A_{01} и B_{00} при соответствующих граничных условиях. С физической точки зрения "разумным" граничным условием является такое, что в любой фиксированный момент времени τ волна полностью затухает достаточно далеко от ее центра, так что

$$|A_{01}| \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_{00}}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \sigma^2 + \eta^2 \rightarrow \infty. \quad (5.3.24)$$

Далее, предполагая, что в момент времени $t = 0$ образуется бегущая волна, причем поднятие свободной поверхности достигает до $z = \varepsilon \zeta$ (в безразмерном виде), где $\zeta = \zeta_0(\chi_0 x, \eta) \exp i\chi + \text{к.с.}$, то соответствующее начальное условие для A_{01} есть

$$A_{01}(\sigma, \eta, 0) = \zeta_0(\chi_0 x, \eta), \quad \sigma_{\tau=0} \equiv \chi_0 x. \quad (5.3.25)$$

Таким образом, на этом этапе мы можем связать следующие два асимптотических разложения для функции ζ_0 и F_0

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= A_{01}E + A_{01}^*E^{-1} + \chi_0 \left(\frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} - i \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} E + i \frac{\partial A_{01}^*}{\partial \sigma} E^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} A_{01}^2 E^2 + \frac{3}{2} A_{01}^{*2} E^{-2} \right) + O(\chi_0^2), \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

$$F_0 = B_{00} - iA_{01}E + iA_{01}^*E^{-1} + O(\chi_0), \quad (5.3.27)$$

где $E = \exp i\zeta$.

5.4. Согласованные асимптотические разложения

В принципе, можно продолжить асимптотические разложения (5.3.26) и (5.3.27) до членов порядка χ_0^3 для ζ_0 и членов порядка χ_0^2 для F_0 . Но для этого вначале необходимо разрешить уравнение (5.3.19) для f_2 . Удивительно, но в результате выражение f_2 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f_2 &= B_{20} + \frac{3}{8} \frac{\partial A_{01}^2}{\partial \sigma} E^2 + \frac{3}{8} \frac{\partial A_{01}^{*2}}{\partial \sigma} E^{-2} - \\ &\quad - i \frac{9}{16} A_{01}^3 E^3 + i \frac{9}{16} A_{01}^{*3} E^{-3}, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

и из (5.3.16) получаем следующее выражение для h_2 (члены с E^2 и E^{-2} сокращаются!)

$$h_2 = \frac{\partial B_{10}}{\partial \sigma} + \frac{27}{16} A_{01}^3 E^3 + \frac{27}{16} A_{01}^* E^{-3}. \quad (5.4.2)$$

Поэтому, если мы намереваемся продолжить (5.3.26) и (5.3.27), то необходимо определить функцию $B_{10}(\sigma, \tau, \eta)$. Для этого необходимо рассмотреть уравнение для функции h_3 и определить структуру правой части этого уравнения. Из исходного уравнения (5.3.1) легко выведем следующее уравнение для h_3

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_3}{\partial \xi} = & -3 \left(2 \frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{\partial h_2}{\partial \sigma} + 3h_0 \frac{\partial h_1}{\partial \sigma} + 3h_1 \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} + \right. \\ & + 3h_0 \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + 3h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 3h_2 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 h_2}{\partial \xi^2 \partial \sigma} + \\ & \left. + \frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi \partial \sigma^2} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial \sigma^3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Теперь, учитывая выражения (5.3.7а), (5.3.9а) и (5.4.2), соответственно, для h_0 , h_1 и h_2 находим следующее уравнение для h_3 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \frac{\partial h_3}{\partial \xi} = & -3(N_0 + N_1 E + N_2 E^2 + \\ & + N_3 E^3 + N_4 E^4 + \text{к.с.}), \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

где

$$\begin{aligned} N_0 = & 2 \frac{\partial A_{10}}{\partial \tau} + \frac{\partial A_{20}}{\partial \sigma} + 3A_{01} \frac{\partial A_{11}^*}{\partial \sigma} + 3A_{01}^* \frac{\partial A_{11}}{\partial \sigma} + \\ & + 3A_{11}^* \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} + 3A_{11} \frac{\partial A_{01}^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 B_{10}}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Мы пока не выписываем соответствующие выражения для членов, пропорциональных E , E^2 , E^3 и E^4 , так как мы собираемся вывести только уравнение для B_{10} . Для уравнения (5.4.4) имеем, во-первых, условие совместности $N_0 = 0$ и из (5.4.5) с учетом соотношений $A_{10} = \partial B_{00} / \partial \sigma$, $A_{11} = \partial B_{01} / \partial \sigma$, $A_{11}^* = \partial B_{01}^* / \partial \sigma$, $B_{01} = -iA_{01}$, $B_{01}^* = iA_{01}^*$ и $A_{20} = \partial B_{10} / \partial \sigma$ находим следующее уравнение Пуассона для B_{10}

$$\frac{\partial^2 B_{10}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 B_{10}}{\partial \eta^2} = -2 \frac{\partial^2 B_{00}}{\partial \tau \partial \sigma} + 3i \left(A_{01}^* \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \sigma^2} - A_{01} \frac{\partial^2 A_{01}^*}{\partial \sigma^2} \right). \quad (5.4.6)$$

Наконец, мы можем записать следующие согласованные асимптотические выражения для ζ_0 и F_0 :

$$\begin{aligned} \zeta_0 = & A_{01} E + A_{01}^* E^{-1} + \chi_0 \left(\frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} - i \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} E + \right. \\ & \left. + i \frac{\partial A_{01}^*}{\partial \sigma} E^{-1} + \frac{3}{2} A_{01}^2 E^2 + \frac{3}{2} A_{01}^{*2} E^{-2} \right) + \\ & + \chi_0^2 \left(\frac{\partial B_{10}}{\partial \sigma} + \frac{27}{16} A_{01}^3 E^3 + \frac{27}{16} A_{01}^{*3} E^{-3} \right) + O(\chi_0^3), \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned} F_0 = & B_{00} - iA_{01} E + iA_{01}^* E^{-1} + \\ & + \chi_0 \left(B_{10} - i \frac{3}{4} A_{01}^2 E^2 + i \frac{3}{4} A_{01}^{*2} E^{-2} \right) + O(\chi_0^2). \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Соответствующие уравнения для функций $A_{01}(\tau, \sigma, \eta)$, $B_{00}(\tau, \sigma, \eta)$ и $B_{10}(\tau, \sigma, \eta)$ есть уравнения (5.3.22), (5.3.23) и (5.4.6).

Следует отметить, что, в принципе, выражения (5.4.7) и (5.4.8) для ζ_0 и F_0 также можно продолжить, для чего необходимо рассмотреть соответствующие уравнения для h_4 , h_5, \dots и f_4 , f_5, \dots в разложениях (5.3.4а), (5.3.4б). Но в этом случае необходимо ввести помимо медленных переменных τ , σ и η несколько новых медленных переменных, например $\tau_1 = \chi_0 \tau$, $\sigma_1 = \chi_0 \sigma, \dots$

В самом деле, выражая явно член, пропорциональный E , в правой части уравнения (5.4.4)

$$\begin{aligned} N_1 = & 2 \frac{\partial A_{11}}{\partial \tau} + 3i(A_{20} A_{01} + A_{10} A_{11} + A_{12} A_{11}^*) + \\ & + 3 \frac{\partial}{\partial \sigma} (A_{10} A_{01} + A_{12} A_{01}^*) + i \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 A_{01}}{\partial \sigma^3}, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

получаем новое уравнение из второго условия совместности для уравнения (5.4.4) $N_1 = 0$; а именно,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{\partial^3 A_{01}}{\partial \sigma^3} - 2i \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \sigma \partial \tau} + 3 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[A_{01} \left(\frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} + \frac{3}{2} |A_{01}|^2 \right) \right] + \\ + 3i \left(\frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} \frac{\partial B_{10}}{\partial \sigma} - i \frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} \frac{\partial A_{01}}{\partial \sigma} + i \frac{3}{2} \frac{\partial A_{01}^*}{\partial \sigma} A_{01} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Это последнее уравнение (5.4.10) является дополнительным уравнением для неизвестных функций A_{01} , B_{00} и B_{10} , для которых уже есть три уравнения (5.3.22), (5.3.23) и (5.4.6)!

Ни откуда не следует, что уравнение (5.4.10) является тождеством. Поэтому задача для A_{01} , B_{00} и B_{10} представляется *переопределенной*! Для разрешения этого затруднения мы предполагаем, что неизвестные функции A_{01} , B_{00} и B_{10} также зависят от медленных переменных: τ_1 , σ_1, \dots — ясно, что необходимы дальнейшие исследования в этом направлении!

5.5. Кноидальные волны и солитоны

5.5.1. Вводя новые переменные (p, T, Y) с помощью преобразования $\xi = p + (1/6\chi_0)T$, $\sigma = \chi_0 [p + (1/2\chi_0)T]$, $\eta = \chi_0^{1/2} Y$, $\tau = \chi_0 T$ из уравнения ОКП (4.7.3) выводим для функции

$$\zeta_0 \left[\chi_0 T, p + \frac{1}{6\chi_0} T, \chi_0 \left(p + \frac{1}{2\chi_0} T \right), \chi_0^{1/2} Y \right] \equiv h(p, T, Y)$$

следующее каноническое уравнение Кадомцева–Петвиашвили

$$2 \frac{\partial h}{\partial T} + 3h \frac{\partial h}{\partial p} + \frac{1}{3\chi_0} \frac{\partial^3 h}{\partial p^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = 0, \quad (5.5.1)$$

где $h = \partial f / \partial p$ и χ_0 порядка единицы. Уравнение (5.5.1) допускает решения в виде поперечных кноидальных волн, в которых и h , и f являются функциями только $\theta = lp + mY - cT$.

В этом случае соответствующее уравнение для $h = h(\theta)$ имеет вид

$$l^3 h''' + 3\chi_0(3l^2 h - 2cl + m^2)h' = 0$$

и имеет решение в виде

$$h(\theta) = a + b \operatorname{Cn}^2[\theta|v], \quad (5.5.2)$$

где Cn обозначает эллиптическую функцию Якоби, a , b и v — константы. Эти константы должны удовлетворять алгебраическим соотношениям:

$$3l^2 a - 2lc + m^2 = \frac{4l^3}{3\chi_0}(1 - 2v), \quad b = \frac{4lv}{3\chi_0}, \quad (5.5.3)$$

при заданных значениях l , m , a . Ясно, что и v , и $(1/c)$ должны быть порядка χ_0 в пределе $\chi_0 \rightarrow 0$ при условии, что амплитуда b остается порядка единицы; заметим также, что c при этом будет отрицательной. Поэтому в этом пределе кноидальные волны становятся гармоническими и данное решение вместе с F_0 , заданной посредством $\zeta_0 = \partial F_0 / \partial \xi$, можно идентифицировать с соответствующим решением НЛШП уравнений (5.3.22) и (5.3.23).

Например, записывая $l = 1 + k\chi_0 \cos \theta$, $m = k\chi_0^{1/2} \sin \theta$ и требуя, чтобы решение (5.5.2) имело нулевое среднее и единичную амплитуду, из (5.5.2) с $a = 0$ и $b = 1$ получаем, что

$$\zeta_0 = \exp \left\{ i \left[\xi + k(\sigma \cos \theta + \eta \sin \theta) + \left(\frac{9}{4} \cos 2\theta + \frac{k^2}{2} \cos 2\theta \right) T \right] \right\} + \text{к.с.} + O(\chi_0), \quad (5.5.4)$$

и главный член в правой части есть решение нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона (5.3.22) и (5.3.23) для A_{01} ; а именно,

$$A_{01} = \exp \left\{ i \left[k(\sigma \cos \theta + \eta \sin \theta) + \left(\frac{9}{4} \cos 2\theta + \frac{k^2}{2} \cos 2\theta \right) T \right] \right\}. \quad (5.5.5)$$

5.5.2. Примечательно, что Анкер и Фриман [75] использовали ОПР Захарова и Шабата [35] для двух пространственных переменных, чтобы показать интегрируемость НЛШП уравнений (5.3.22), (5.3.23). НЛШП уравнения вместе с уравнением Кадомцева–Петвиашвили являются двумя из немногих имеющих физический смысл уравнений с двумя пространственными переменными, которые были решены при помощи ОПР.

Прежде всего, вводя соотношения

$$A_{01} = C^0 P \exp(i\tau), \quad Q = Q^0 + \mathcal{Q}, \quad (5.5.6)$$

$$\frac{\partial B_{00}}{\partial \sigma} = Q - 3|A_{01}|^2,$$

где p , C^0 и Q^0 — константы, перепишем систему двух нелинейных уравнений Шрёдингера–Пуассона (5.3.22), (5.3.23) в следующей новом виде для P и \mathcal{Q} :

$$2i \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} = -\frac{9}{2} C^{02} P(|P|^2 - 1) + 3P\mathcal{Q}, \quad (5.5.7a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \eta^2} = 3C^{02} \frac{\partial^2 |P|^2}{\partial \eta^2}, \quad (5.5.7b)$$

полагаем $C^{02} = 2(Q^0 + 2p)/3$.

Для одномерной задачи, не зависящей от η , уравнения (5.5.7) дают нелинейное уравнение Шрёдингера. Линеаризация приведенных выше уравнений в одномерном случае показывает, что оно является устойчивым (см. раздел 8) в смысле Хасимото и Оно [36]. В этом случае Захаровым и Шабатом в 1973 г. было, кроме того, показано, что существует решение типа солитона

$$P = \frac{(\lambda + iv)^2 + \exp[2v(\sigma - \sigma^0 + \lambda\tau)]}{1 + \exp[2v(\sigma - \sigma^0 + \lambda\tau)]}, \quad (5.5.8)$$

где $v = (1 - \lambda^2)^{1/2}$, и что могут быть построены решения с несколькими солитонами.

В одной из последующих статей Захаров и Шабат [76] описывают общий метод построения уравнений, которые решаются посредством ОПР и имеют решение с одним или несколькими солитонами. Показано, что одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера принадлежит к этому классу уравнений. Согласно Анкеру и Фриману [75] НЛШП (Фримана–Дэви) уравнение (5.5.7) может быть построено по методу Захарова–Шабата [76] и, следовательно, имеет одно и многосолитонные решения. Псевдодвумерные решения, полученные таким образом, описывают взаимодействие солитонов вида (5.5.8), которые *скошены* относительно друг друга.

Первым шагом в развитии теории является задание операторов в теории Захарова–Шабата [76], соответствующих двумерному случаю. Такие операторы описывают множество линейных дифференциальных уравнений в частных производных (см. уравнения (2.23)–(2.25) в статье Анкера и Фримана [75]), которое лежит в основе системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (5.5.7). Простые экспоненциальные решения этих линейных уравнений затем дают солитоны, соответствующие солитонам (5.5.8) в двумерном случае, а суммы этих решений описывают взаимодействие нескольких солитонов.

Анализ N -солитонного решения позволяет вычислить сдвиг по фазе и смещение центра для каждого солитона в отдельности. Смещение центра описывает смещение огибающей волны, а сдвиг по фазе — изменение в фазе модулированной волны. В особых случаях, сдвиг по фазе становится бесконечным и получается предельное решение, в котором условие резонанса определяет третий солитон. На рис. 9 изображены два численных расчета для двух значений сдвига по фазе (по Анкеру и Фриману [75]).

5.6. Обобщенные нелинейные уравнения Шрёдингера–Пуассона и их связь с уравнениями Кадомцева–Петвиашвили

Прежде всего следует отметить, что в более общем случае можно асимптотически вывести связанную систему двух уравнений для эволюции пакета волн на поверхности воды при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\Delta = v_0\varepsilon$, но при фиксированных δ и v_0 — так называемая ОНЛШП система двух уравнений — из классической безразмерной задачи (2.3.3), (2.3.5)–(2.3.7). Ниже даются узловые моменты этого вывода, а также рассматривается связь между КП и ОНЛШП уравнениями.

Вывод ОНЛШП уравнений читатель может найти в статьях Бенни и Роскеса [38], Дэви и Стюартсона [39], Джорджевика и Редеккоппа [40], Абловитца и Сегура [41], а также в книге Мея ([43], с. 607–618). Наиболее общий

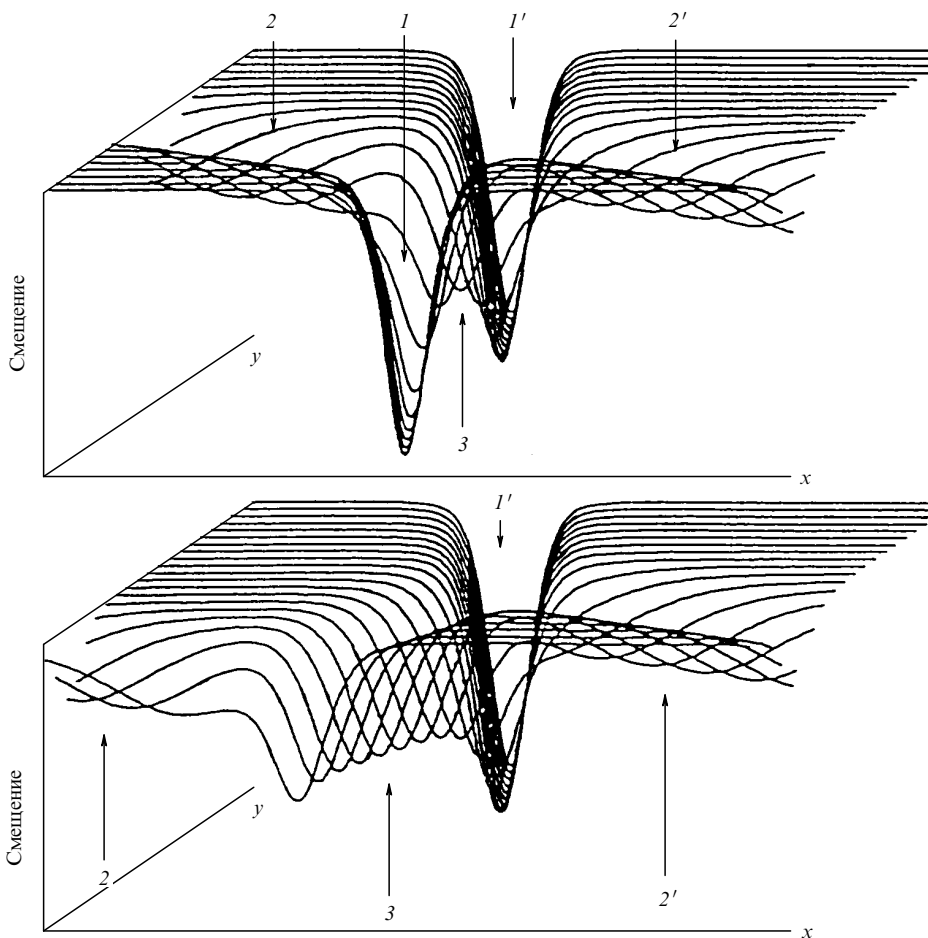


Рис. 9. Изменение амплитуды при взаимодействии двух солитонов для двух значений сдвига по фазе: 1 и 2 — падающие солитоны; 1' и 2' — солитоны после взаимодействия; 3 — солитон во время взаимодействия (во втором случае падающий солитон 1 не изображен)

анализ проведен в [40], где учтены эффекты поверхностного натяжения и произвольной глубины при выводе ОНЛШП системы двух связанных эволюционных уравнений.

Без учета поверхностного натяжения (при $We = 0$) нашей исходной задачей в безразмерных переменных является уравнение Лапласа внутри воды вместе с условиями на свободной поверхности (2.3.6) и (2.3.7) и граничным условием на ровном дне (2.3.5).

Ниже дается краткий анализ на основе теории возмущений.

5.6.1. Длина несущей волны принимается равной $O(1)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, что соответствует фиксированному δ в предельном процессе:

$$\epsilon \rightarrow 0, \quad \Delta = v_0 \epsilon \text{ при фиксированных } \delta \text{ и } v_0. \quad (5.6.1)$$

В самом деле, как показано в ранних работах Бенни и Роскеса (1969 г.) [38] и Дэви и Стюартсона (1974 г.) [39], оказывается удобным ввести следующие несколько медленных масштабов:

$$q = \epsilon(x - c_g t), \quad y^* = \epsilon \frac{\delta}{\Delta} y = \frac{\delta}{v_0} y, \quad t^* = \epsilon^2 t. \quad (5.6.2)$$

Несущая волна движется с фазовой скоростью c_p , а амплитудная модуляция движется с соответствующей групповой скоростью c_g , но конкретные формы c_p и c_g заранее не известны.

Волновой шлейф строится таким образом, что он является периодическим (для всех порядков по ϵ) по

$$p^* = x - c_p t \quad (5.6.3)$$

с основной периодичностью $E = \exp ip^*$ и амплитудной модуляцией, описываемой масштабными координатами (5.6.2), откуда следует, что члены более высокого порядка (в разложении в ряд по ϵ , согласно (5.6.4)) должны содержать высшие гармоники вследствие нелинейного взаимодействия. Теперь принимая в качестве решения задачи (2.3.3), (2.3.5)–(2.3.7) с (5.6.1)–(5.6.3) следующие асимптотические разложения:

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + \epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2 + \dots, \quad (5.6.4)$$

получаем для функций ϕ_n и ζ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, такой набор задач

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial p^{*2}} = -F_n, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (5.6.5a)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + c_p \delta^2 \frac{\partial \zeta_n}{\partial p^*} = G_n \Big|_{z=0}, \quad (5.6.5б)$$

$$\zeta_n = c_p \frac{\partial \phi_n}{\partial p^*} \Big|_{z=0} + H_n \Big|_{z=0}, \quad (5.6.5в)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$),

где

$$F_0 = 0, \quad G_0 = 0, \quad H_0 = 0; \quad (5.6.6a)$$

$$F_1 = 2\delta^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^* \partial q},$$

$$G_1 = -c_g \delta^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial q} + \delta^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} - \zeta_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2},$$

$$H_1 = c_g \frac{\partial \phi_0}{\partial q} + c_p \zeta_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^* \partial z} + c_p \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \right)^2 - \frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right)^2; \quad (5.6.6б)$$

$$F_2 = 2\delta^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p^* \partial q} + \delta^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^{*2}} \right),$$

$$G_2 = -c_g \delta^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial q} + \delta^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial p^*} \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} + \delta^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \zeta_1}{\partial p^*} - \zeta_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + \delta^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial t^*} + \delta^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial q} \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} + \delta^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \zeta_0}{\partial q} + \delta^2 \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^* \partial z} + \delta^2 \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} \right)^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \zeta_0^2 \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial z^3},$$

$$H_2 = c_g \frac{\partial \phi_1}{\partial q} + c_p \zeta_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p^* \partial z} + c_p \zeta_1 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^* \partial z} + c_p \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + c_p \frac{\partial \zeta_1}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_1}{\partial p^*} - \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_0}{\partial t^*} + c_g \zeta_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial q \partial z} + c_g \frac{\partial \zeta_0}{\partial q} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_0}{\partial q} + c_p \zeta_0^2 \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial z^2 \partial p^*} + c_p \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} - \zeta_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial p^*} - \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta_0}{\partial p^*} - \frac{1}{\delta^2} \zeta_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2}. \quad (5.6.6в)$$

Комбинируя (5.6.5a), (5.6.5б) с (5.6.5в) получаем следующую однородную задачу при $n = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^{*2}} = 0, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (5.6.7a)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \Big|_{z=0} + c_p^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial p^{*2}} \Big|_{z=0} = 0, \quad (5.6.7б)$$

откуда можно легко получить следующий результат для ϕ_0 и ζ_0 :

$$\phi_0 = \phi_{00}(q, y^*, t^*) + F_{00}(z) [A(q, y^*, t^*)E + A^* E^{-1}], \quad (5.6.8a)$$

$$\zeta_0 = c_p \frac{\partial \phi_0}{\partial p^*} \Big|_{z=0} = i c_p [A(q, y^*, t^*)E - A^* E^{-1}], \quad (5.6.8б)$$

где

$$F_{00}(z) = \frac{\cosh[\delta(z+1)]}{\cosh \delta}, \quad E^{-1} = \exp(-ip^*), \quad (5.6.9)$$

и c_p вычисляется из дисперсионного соотношения в линейной теории

$$c_p = \frac{\omega(\delta)}{\delta}, \quad \omega(\delta) = (\delta\sigma)^{1/2}, \quad \sigma \equiv \tanh \delta. \quad (5.6.10)$$

Далее, для ϕ_1 имеем неоднородную задачу

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p^{*2}} = -2i\delta^2 F_{00}(z) \left[\frac{\partial A}{\partial q} E - \frac{\partial A^*}{\partial q} E^{-1} \right], \quad (5.6.11a)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (5.6.11б)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + c_p^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p^{*2}} \Big|_{z=0} = N(\phi_0)_{z=0}, \quad (5.6.11в)$$

где

$$N(\phi_0) = -2i\delta^2 c_p c_g \left(\frac{\partial A}{\partial q} E - \frac{\partial A^*}{\partial q} E^{-1} \right) + 3i\delta^2 c_p (\sigma^2 - 1) (A^2 E^2 - A^{*2} E^{-2}). \quad (5.6.12)$$

Решением задачи (5.6.11) с (5.6.12) является:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \phi_{10}(q, y^*, t^*) + F_{00}(z) [B(q, y^*, t^*)E + B^* E^{-1}] - \\ & - 2i\delta^2 F_{10}(z) \left(\frac{\partial A}{\partial q} E - \frac{\partial A^*}{\partial q} E^{-1} \right) + \\ & + F_{11}(z) (A^2 E^2 - A^{*2} E^{-2}), \end{aligned} \quad (5.6.13a)$$

где

$$F_{10}(z) = \frac{1}{2\delta} \left\{ \frac{(z+1) \sinh[\delta(z+1)]}{\cosh \delta} - \frac{\sigma \cosh[\delta(z+1)]}{\cosh \delta} \right\}, \quad (5.6.14a)$$

$$F_{11}(z) = \frac{3i}{4\sigma^2} (\sigma^2 + 1)(\sigma^2 - 1) \frac{\cosh[2\delta(z+1)]}{\cosh 2\delta}, \quad (5.6.14б)$$

и для ζ_1 находим

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & c_p \frac{\partial \phi_{00}}{\partial q} - (1 - \sigma^2) |A|^2 + i c_p [BE - B^* E^{-1}] + \\ & + c_g \left(\frac{\partial A}{\partial q} E + \frac{\partial A^*}{\partial q} E^{-1} \right) + \\ & + \frac{1}{2\sigma^2} (\sigma^2 - 3) (A^2 E^2 + A^{*2} E^{-2}). \end{aligned} \quad (5.6.13б)$$

Результаты (5.6.13a), (5.6.13б) для ϕ_1 и ζ_1 получены в предположении, что

$$c_g = c_p \frac{\sigma + \delta(1 - \sigma^2)}{2\sigma} = \frac{d\omega(\delta)}{d\delta} \quad (5.6.15)$$

согласно линейной теории.

При желании можно получить ϕ_2 и ζ_2 , если найдены решения для среднего потока (ϕ_0 , ζ_0) и второй гармоники (ϕ_1 , ζ_1) (5.6.8) и (5.6.13). Нахождение F_2 , G_2 и H_2 из (5.6.6в) — задача не столько трудная, сколько трудоемкая!

Например, для ϕ_2 находим следующее решение:

$$\begin{aligned} \phi_2 = & -\frac{\delta^2}{2} (z+1)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial y^{*2}} \right) + \phi_{20}(q, y^*, t^*) + \\ & + F_{00}(z) [C(q, y^*, t^*)E + C^* E^{-1}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta^2 F_{10}(z) \left[\left(2\delta\sigma \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^{*2}} - 2i \frac{\partial B}{\partial q} \right) E + \text{к.с.} \right] - \\
 & - \frac{\delta^2}{2} F_{00}(z) [(z+1)^2 - 1] \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2} E + \frac{\partial^2 A^*}{\partial q^2} E^{-1} \right) + \\
 & + \text{члены старших гармоник.} \tag{5.6.16}
 \end{aligned}$$

Затем, используя граничное условие (5.6.7б) в плоскости $z = 0$ при $n = 2$, находим из выражения (5.6.6в) для G_2 , что *среднее течение с точностью до главного порядка*, или *длинноволновая компонента* $\phi_{00}(q, y^*, t^*)$, описывается уравнением

$$(1 - c_g^2) \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial y^{*2}} = - [2c_p + c_g(1 - \sigma^2)] \frac{\partial}{\partial q} |A|^2. \tag{5.6.17}$$

Это последнее уравнение (5.6.17) показывает, что длинноволновая компонента ϕ_{00} обусловлена самовзаимодействием короткой волны (характеризуемой амплитудной функцией $A(q, y^*, t^*)$).

Наконец, сравнение членов с первой гармоникой в условии (в плоскости $z = 0$) (5.6.5б) при $n = 2$ с соответствующей G_2 из (5.6.6в) и выражения (5.6.5в) для ζ_2 при $n = 2$ с соответствующей H_2 из (5.6.6в) показывает, что два выведенных уравнения согласуются, только если амплитудная функция $A(q, y^*, t^*)$ удовлетворяет следующему уравнению (Шрёдингера):

$$\begin{aligned}
 2ic_p \frac{\partial A}{\partial t^*} - [c_g^2 - (1 - \sigma^2)(1 - \sigma\delta)] \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} + c_p c_g \frac{\partial^2 A}{\partial y^{*2}} = \\
 = [2c_p + c_g(1 - \sigma^2)] A \frac{\partial \phi_{00}}{\partial q} + \\
 + \left(\frac{9}{2\sigma^2} - 6 + \frac{13}{2} \sigma^2 - \sigma^4 \right) A |A|^2. \tag{5.6.18}
 \end{aligned}$$

Уравнения (5.6.17) и (5.6.18) описывают эволюцию бегущей волны с точностью до первого порядка по ε при фиксированном δ .

Для капиллярно-гравитационных волн на воде (при $We \neq 0$) можно вывести аналогичную ОНЛШП систему двух связанных уравнений

$$i \frac{\partial A}{\partial t^*} + \lambda \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} + \mu \frac{\partial^2 A}{\partial y^{*2}} = \chi_1 A \frac{\partial \phi_{00}}{\partial q} + \chi A |A|^2, \tag{5.6.19a}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial y^{*2}} = -\beta \frac{\partial}{\partial q} |A|^2, \tag{5.6.19б}$$

где $\lambda, \mu, \chi, \chi_1, \alpha$ и β — известные действительные константы. Выражения для различных констант приведены Абловитцем и Сегуром (см. [41], с. 697), но в их тексте в выражении (2.24d) для коэффициента χ имеется опечатка.

В частности отметим, что (в размерном случае) $\alpha = 1 - (c_g^2/g h_0)$, что μ, χ_1 и β неотрицательны и ограничены и что α, λ, χ и $v = \chi - (\beta/\alpha)\chi_1$ меняют знак, как показано на рис. 10. На рис. 10 по осям отложены безразмерное волновое число kh_0 и параметр поверхностного натяжения (согласно (2.3.9) и (2.3.20)): $We^* = \delta^2 We$. Каждая линия соответствует простому нулю означенного коэффициента, за исключением линий, ограничивающих область F , которые соответствуют особенностям v и χ .

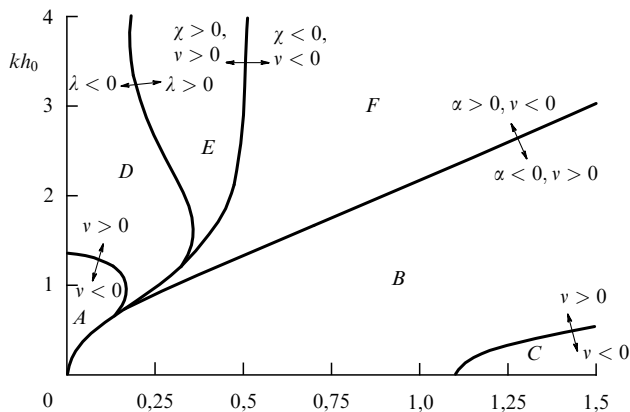


Рис. 10. Зависимость λ, χ, α и v от kh_0 и We^* . Кривые указывают, где различные коэффициенты меняют знак

Эти особенности возникают, когда $We^* = \sigma^2/(3 - \sigma^2)$, $\sigma = \tanh kh_0$, что является условием резонанса для второй гармоники, для которого настоящее разложение не верно. Случаи $\alpha = 0$ также являются особыми.

5.6.2. Теперь рассмотрим ОНЛШП систему двух связанных уравнений (5.6.17) и (5.6.18) для функций $A(q, y^*, t^*)$ и $\phi_{00}(q, y^*, t^*)$ в пределе мелкой воды при $\delta \rightarrow 0$. В этом случае из выражений (5.6.10) и (5.6.15) для c_p и c_g найдем вначале следующие предельные значения:

$$c_p = 1 - \frac{1}{6} \delta^2 + \dots, \quad c_g = 1 - \frac{1}{2} \delta^2 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0. \tag{5.6.20}$$

В таком случае вместо (5.6.17) получаем следующее уравнение Пуассона для предельных значений ϕ_{00}

$$\left(\delta^2 \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial y^{*2}} \right) \phi_{00}^0 = -3 \frac{\partial}{\partial q} |A^0|^2, \tag{5.6.21}$$

так как $\sigma = \delta - (1/3)\delta^2 + \dots$ при $\delta \rightarrow 0$, а $\phi_{00}^0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{00}$ и $A^0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} A$.

Далее, при $\delta \rightarrow 0$ вместо уравнения Шрёдингера (5.6.18) находим

$$2i\delta^2 \frac{\partial A^0}{\partial t^*} - \delta^4 \frac{\partial^2 A^0}{\partial q^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 A^0}{\partial y^{*2}} = 3\delta^2 A^0 \frac{\partial \phi_{00}^0}{\partial q} + \frac{9}{2} A^0 |A^0|^2. \tag{5.6.22}$$

Теперь сравним медленные переменные (5.6.2) $q = \varepsilon(x - c_g t)$, $y^* = \varepsilon y \delta / \Delta = y \delta / v_0$ и $t^* = \varepsilon^2 t$ с переменными (σ, η, τ) в НЛШП (Фримана-Дэви) уравнениях (5.3.22) и (5.3.23). Переменные (σ, η, τ) определяются выражениями (4.7.3) как $\sigma = \chi_0(x - c_g t)$, $\tau = \chi_0^2 \delta^2 t$ и $\eta = y/v_0$, где $\chi_0 = 1/\kappa_0 \equiv \varepsilon/\delta^2$. Сравнение дает следующие соотношения

$$q = \delta^2 \sigma, \quad y^* = \delta \eta, \quad t^* = \delta^2 \tau, \tag{5.6.23}$$

так как $\Delta = v_0 \varepsilon$ и $\chi_0 \equiv \varepsilon/\delta^2$.

С учетом (5.6.23) из уравнений (5.6.21) и (5.6.22) для A^0 и ϕ_{00}^0 заново выводим НЛШП систему двух уравнений (5.5.22), (5.3.23), но уже для $A^0(\sigma, \eta, \tau)$ и $\phi_{00}^0(\sigma, \eta, \tau)$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_{00}^0}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \phi_{00}^0}{\partial \eta^2} \right) \phi_{00}^0 = -3 \frac{\partial}{\partial \sigma} |A^0|^2, \tag{5.6.24a}$$

$$2i \frac{\partial A^0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 A^0}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 A^0}{\partial \eta^2} = 3A^0 \frac{\partial \phi_{00}^0}{\partial \sigma} + \frac{9}{2} A^0 |A^0|^2. \quad (5.6.24б)$$

Отсюда ясно, что (5.6.24) и (5.3.22), (5.3.23) совпадают, т.е. $B_{00} = \phi_{00}^0$ и $A_{01} = A^0$.

Таким образом, в пределе длинных волн ОНЛШП уравнения (5.6.17), (5.6.18) в точности совпадают с КП уравнениями в пределе коротких волн (выведенными в разделах 4.5 и 4.6). Таким образом, подтвердилось утверждение о сходстве между ОНЛШП уравнениями для длинных волн ($\delta \rightarrow 0$) и КП уравнением для коротких волн ($\kappa_0 \rightarrow \infty$). Говоря более формально,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\text{ОНЛШП}] = \lim_{\kappa_0 \rightarrow \infty} [\text{КП}], \quad (5.6.25)$$

и, так как совпадение имеет место, коэффициенты ОНЛШП уравнений при $\delta (= kh_0) \rightarrow 0$ могут быть сверены с коэффициентами КП уравнений в пределе $\kappa_0 \rightarrow \infty$ ($\chi_0 = 1/\kappa_0 \equiv \varepsilon/\delta^2$)¹⁶.

6. Влияние неровностей дна

6.1. Квазиодномерное одномерное уравнение Буссинеска при переменной глубине

Если мы хотим учесть влияние неровного дна, то необходимо рассмотреть трехмерную безразмерную классическую задачу (3.2.1), где вместо (3.2.1б) берется условие на неровном дне

$$\phi_z = \alpha [\delta^2 \phi_x G_x + \Delta^2 \phi_y G_y] \quad \text{на} \quad z = -1 + \alpha G(x^*, y^*), \quad (6.1.1)$$

согласно (3.2.11), где $\alpha = g_0/h_0$, $\beta = \lambda_0/l_0$, $\gamma = \mu_0/m_0$ и $x^* = \beta x$, $y^* = \gamma y$.

Положим $We = 0$ и рассмотрим безразмерное уравнение Лапласа

$$\begin{aligned} \phi_{zz} + \delta^2 \phi_{xx} + \Delta^2 \phi_{yy} &= 0, \\ -1 + \alpha G(x^*, y^*) &\leq z \leq \varepsilon \zeta(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

с условием на неровном дне (6.1.1) и следующими двумя безразмерными условиями на свободной поверхности:

$$\phi_z = \delta^2 \zeta_t + \varepsilon (\delta^2 \phi_x \zeta_x + \Delta^2 \phi_y \zeta_y), \quad (6.1.3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \phi_x^2 + \frac{\varepsilon \Delta^2}{\delta^2} \phi_y^2 + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \phi_z^2 \right) + \zeta = 0, \quad (6.1.4)$$

на $z = \varepsilon \zeta(x, y, t)$.

Как и в разделе 3.2 из уравнения Лапласа (6.1.2) с условием на неровном дне (6.1.1), можно найти вместо (3.2.8) следующее асимптотическое разложение для потенциала скорости ϕ :

$$\begin{aligned} \phi &= F(x, y, t) - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} (z+h)^2 (F)_{xx} - \beta \varepsilon \kappa_0 (z+h) (F)_x \frac{\partial h}{\partial x^*} + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{\kappa_0^2}{24} (z+h)^4 (F)_{xxxx} - \frac{\nu_0^2}{2} (z+h)^2 (F)_{yy} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \beta \varepsilon^2 \frac{\kappa_0^2}{2} (z+h)^3 (F)_{xxx} \frac{\partial h}{\partial x^*} - \gamma \varepsilon^2 \nu_0^2 (z+h) (F)_y \frac{\partial h}{\partial y^*} + \\ &+ O(\varepsilon^3; \beta^2 \varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

где, как и ранее, полагаем $\delta^2 = \kappa_0 \varepsilon$ и $\Delta = \nu_0 \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В (6.1.5) $h(x^*, y^*; \alpha) \equiv 1 - \alpha G(x^*, y^*)$. Подчеркнем, что (6.1.5) справедливо при $\gamma = O(1)$, но необходимо, чтобы $\beta \gg \varepsilon$. Если $\beta = O(\varepsilon)$, то тогда пятый член в разложении (6.1.5), пропорциональный $\beta \varepsilon^2$, имеет порядок $O(\varepsilon^3)$ и в этом случае этот член можно опустить! Этот последний случай корректно рассмотрен в статье Лиу, Йун и Кирби [79]. Эти авторы предложили "модифицированные" уравнения Кадомцева–Петвиашвили для переменной глубины (влияние переменной глубины на вид уравнений Кадомцева–Петвиашвили рассматривается в разделе 6.3).

Из (6.1.5) легко получаем значение производных ϕ_s , где $s = (t, x, y)$, и ϕ_z на $z = \varepsilon \zeta(s)$:

$$\phi_t = (F)_t - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} h^2 (F)_{xxt} - \beta \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xt} + \dots, \quad (6.1.6a)$$

$$\phi_x = (F)_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} h^2 (F)_{xxx} - 2\beta \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xx} + \dots, \quad (6.1.6б)$$

$$\begin{aligned} \phi_y &= (F)_y - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} h^2 (F)_{xxy} - \beta \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xy} - \\ &- \gamma \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial y^*} (F)_{xx} + \dots, \end{aligned} \quad (6.1.6в)$$

$$\begin{aligned} \phi_z &= -\varepsilon \kappa_0 \left[h(F)_{xx} + \beta \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_x + \varepsilon \zeta (F)_{xx} - \right. \\ &- \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} h^3 (F)_{xxxx} + \frac{\varepsilon \nu_0^2}{\kappa_0} h (F)_{yy} - \frac{3}{2} \beta \varepsilon \kappa_0 h^2 \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xxx} + \\ &\left. + \frac{\gamma \varepsilon \nu_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial h}{\partial y^*} (F)_y \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.1.6г)$$

Теперь из граничного условия на свободной поверхности (6.1.3) находим с учетом (6.1.6) следующее приближенное уравнение

$$\begin{aligned} \zeta_t + h(F)_{xx} + \\ + \varepsilon \left[\zeta_x (F)_x + \zeta (F)_{xx} - \frac{\kappa_0}{6} h^3 (F)_{xxxx} + \frac{\nu_0^2}{\kappa_0} h (F)_{yy} \right] = \\ = -\beta \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_x - \frac{3}{2} \beta \varepsilon \kappa_0 h^2 \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xxx} + \frac{\gamma \varepsilon \nu_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial h}{\partial y^*} (F)_y \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Далее, второе граничное условие на свободной поверхности (6.1.4) дает с учетом (6.1.6) второе приближенное уравнение

$$(F)_t + \zeta + \varepsilon \left[\frac{1}{2} (F)_x^2 - \frac{\kappa_0}{2} h^2 (F)_{xxt} \right] = \beta \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xt}, \quad (6.1.8)$$

с той же точностью $O(\varepsilon^2)$.

Два уравнения (6.1.7) и (6.1.8) и есть квазиодномерные уравнения Буссинеска для неровного дна переменной глубины вида $z = -h(x^*, y^*; \alpha)$, где $x^* = \beta x$ и $y^* = \gamma y$.

¹⁶ О соответствии между уравнениями Кадомцева–Петвиашвили и нелинейном Шрёдингера в одномерном случае см. [77]; [78], с. 24.

При $h \equiv 1$ из (6.1.7) и (6.1.8) вновь выводим классическую систему двух квазиодномерных уравнений Буссинеска для F и ζ , аналогично (3.2.20)–(3.2.23).

При $h \neq 1$ вышеприведенные уравнения Буссинеска (6.1.7), (6.1.8) для неровного дна можно переписать в следующем виде:

$$\zeta_t + [(h + \varepsilon \zeta)u]_x + \frac{\varepsilon v_0^2}{\kappa_0} (hv)_y - \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} (h^3 u_{xx})_x = \beta \varepsilon \kappa_0 h^2 \frac{\partial h}{\partial x^*} u_{xx}, \tag{6.1.9}$$

$$u_t + \varepsilon u u_x + \zeta_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} h^2 u_{xxt} = 2\beta \varepsilon \kappa_0 h \frac{\partial h}{\partial x^*} u_{xt}, \tag{6.1.10}$$

где $u = (F)_x, v = (F)_y, u_y = v_x$.

Как и ранее, из уравнений (6.1.7) и (6.1.8) можно исключить функцию ζ и вывести одно уравнение Буссинеска для F . В самом деле, из (6.1.8) имеем следующее выражение для ζ :

$$\zeta = -(F)_t - \frac{\varepsilon}{2} (F)_x^2 + \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} [h^2 (F)_{xt}]_x$$

и, учитывая соотношение (6.1.7), находим для $F(x, y, t)$ одно приближение уравнения Буссинеска для неровного дна в следующем виде:

$$(F)_{tt} - [h(F)_x]_x - \frac{\varepsilon v_0^2}{\kappa_0} [h(F)_y]_y + \varepsilon \left[(F)_x^2 + \frac{1}{2} (F)_t^2 \right]_t - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} [h^2 (F)_{xt}]_{xt} + \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} [h^3 (F)_{xxx}]_x + \beta \varepsilon \kappa_0 h^2 \frac{\partial h}{\partial x^*} (F)_{xxx} = 0 \tag{6.1.11}$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$ при $\beta \gg \varepsilon$.

Естественно, если $\beta = O(\varepsilon)$, тогда вместо (6.1.11) следует записать следующее приведенное уравнение Буссинеска для $F(x, t, y^*; h)$ того же порядка $O(\varepsilon^2)$ с $\gamma = O(1)$:

$$(F)_{tt} - h(F)_{xx} - \varepsilon \gamma^2 \frac{v_0^2}{\kappa_0} h(F)_{y^* y^*} + \varepsilon \left\{ \left[(F)_x^2 + \frac{1}{2} (F)_t^2 \right]_t - \gamma^2 \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial h}{\partial y^*} (F)_{y^*} - \frac{\kappa_0}{2} h^2 \left[(F)_{tt} - \frac{1}{3} h(F)_{xx} \right]_{xx} \right\} = 0, \tag{6.1.12}$$

где $h = h(\varepsilon x, y^*; \alpha)$ и $y^* = \gamma y$.

6.2. Уравнение Кортевега–де Вриза при переменной глубине

Вернемся к уравнениям Буссинеска (6.1.9) и (6.1.10) для неровного дна. Для одномерных волн на поверхности воды при

$$\beta = \varepsilon, \quad \gamma = 0, \quad h = h(\varepsilon x) \tag{6.2.1}$$

получаем в качестве уравнений Буссинеска для переменной глубины следующие два безразмерные уравнения для $u(t, x)$ и $\zeta(t, x)$

$$\zeta_t + [(h + \varepsilon \zeta)u]_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} [h^3 u_{xx}]_x = 0, \tag{6.2.2}$$

$$u_t + \varepsilon u u_x + \zeta_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} h^2 u_{xxt} = 0$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Альтернативную форму уравнений Буссинеска (6.2.2) для неровного дна $z = -h(\varepsilon x)$ можно получить, вводя усредненную по глубине горизонтальную скорость $U(x, t)$ как

$$U = \frac{1}{h + \varepsilon \zeta} \int_{-h}^{\varepsilon \zeta} \phi_x dz = \frac{1}{h + \varepsilon \zeta} \int_{-h}^{\varepsilon \zeta} \left[(F)_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{2} (z + h)^2 h^2 (F)_{xxx} + \dots \right] dz,$$

согласно (6.1.6б). Следовательно,

$$U = u - \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} h^2 u_{xx} + O(\varepsilon^2), \quad u = (F)_x, \tag{6.2.3}$$

что дает следующее приближенное выражение для u :

$$u = U + \frac{\varepsilon \kappa_0}{6} h^2 U_{xx} + O(\varepsilon^2). \tag{6.2.4}$$

После подстановки соотношения (6.2.4) для u в (6.2.2) немедленно получаем

$$\zeta_t + [(h + \varepsilon \zeta)U]_x = 0, \tag{6.2.5}$$

$$U_t + \varepsilon U U_x + \zeta_x - \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} h^2 U_{xxt} = 0$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Здесь $h = h(\varepsilon x)$.

Введем две новые переменные:

$$x^* = \varepsilon x, \quad \zeta = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{dx^*}{[h(x^*)]^{1/2}} - t, \tag{6.2.6}$$

где координата ζ движется с локальной линейной скоростью. Делая замены

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{1}{[h(x^*)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{6.2.7}$$

уравнение (6.2.5) принимает вид

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} + \varepsilon u \frac{dh}{dx^*} + \varepsilon h \frac{\partial u}{\partial x^*} + \varepsilon u h^{-1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} + \varepsilon \zeta h^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + h^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \tag{6.2.8a}$$

$$-h^{1/2} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \varepsilon h^{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial x^*} + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon \kappa_0}{3} h^{3/2} \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} = 0 \tag{6.2.8б}$$

с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Складывая уравнения (6.2.8) и используя главную аппроксимацию $u \sim h^{-1/2} \zeta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем с точностью до главного порядка

$$h^{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \zeta h^{-1/2} \frac{dh}{dx^*} + 3h^{-1} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} + \frac{\kappa_0}{3} h \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \zeta^3} = 0. \tag{6.2.9}$$

Это последнее обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза (6.2.9), впервые выведенное Какутани в 1971 г. [80], имеет несколько представлений. Например, применяя преобразование Оно [47]

$$\zeta = -\frac{2}{3} \kappa_0 h^2 Z, \quad T = \frac{\kappa_0}{6} \int_{x^*} h^{1/2} dx^*, \tag{6.2.10}$$

где степени h подобраны таким образом, чтобы исключить наибольшее число переменных коэффициентов. В этом случае получаем для функции $Z(T, \zeta)$ вместо (6.2.9) следующее приведенное уравнение Кортевега–де Вриза для неровного дна:

$$\frac{\partial Z}{\partial T} - 6Z \frac{\partial Z}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \zeta^3} + \lambda(T)Z = 0, \tag{6.2.11}$$

где коэффициент

$$\lambda(T) = \frac{27}{2\kappa_0} h^{-3/2} \frac{dh}{dx^*}, \quad dT = \frac{\kappa_0}{6} [h(x^*)]^{1/2} dx^* \tag{6.2.12}$$

отражает эффект переменной глубины.

6.2.1. Рассмотрим два инварианта уравнения (6.2.11). Интегрируя уравнение (6.2.11) по ζ от $-\infty$ до $+\infty$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Z d\zeta \right) + \left[-3Z^2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \lambda(T) \int_{-\infty}^{+\infty} Z d\zeta = 0.$$

Далее, если Z и ее производные обращаются в нуль на бесконечности, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z d\zeta \left[\exp \int_0^T \lambda(T) dT \right] = \text{const} = J. \tag{6.2.13}$$

Далее, умножая уравнение (6.2.11) на Z и интегрируя по ζ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 d\zeta \right) + \left[-2Z^3 + Z \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial(Z^2)}{\partial \zeta} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \\ + \frac{1}{2} \lambda(T) \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 d\zeta = 0, \end{aligned}$$

последнее уравнение также можно проинтегрировать по T , что дает

$$\exp \left[2 \int_0^T \lambda(T) dT \right] \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 d\zeta \right) = \text{const} = H. \tag{6.2.14}$$

Соотношения (6.2.13) и (6.2.14) являются двумя инвариантами обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза (6.2.11) для неровного дна.

Используя выражение (6.2.12) для коэффициента $\lambda(T)$, можно показать, что

$$\exp \int_0^T \lambda(T) dT = h^{9/4}, \quad dT = \frac{\kappa_0}{6} h^{1/2} dx^*.$$

Следовательно, инварианты имеют вид

$$J = h^{9/4} \int_{-\infty}^{+\infty} Z d\sigma, \quad H = h^{9/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 d\sigma. \tag{6.2.15}$$

6.2.2. Отметим, что приближенное обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза (6.2.11), справедливое для волны, распространяющейся вправо, не описывает отражение за счет передачи, которое описывается более полными уравнениями Буссинеска, полученными Перегрином [46]. В частности, Перегрин отмечает, что слабое отражение должно описываться линеаризованными уравнениями Эйри, но для переменной глубины, и их можно решить аналитически с помощью метода характеристик.

6.2.3. Переменные коэффициенты уравнения Кортевега–де Вриза (6.2.9) часто также записываются в следующем виде [48, 78, 27]

$$\frac{\partial Z}{\partial T} - 6Z \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \xi^3} = \frac{9}{4} \frac{Z}{h} \frac{dh}{dT}. \tag{6.2.16}$$

Это "возмущенное" уравнение Кортевега–де Вриза (6.2.16) описывает расщепление солитона, который происходит, когда уединенная волна движется в области полочкообразования [40]. Уравнение (6.2.16) используется в качестве исходного при обсуждении эффектов возмущения в уравнении Кортевега–де Вриза, когда $(1/h) dh/dT$ мало. Это можно осуществить либо прямыми методами [81] или, что более предпочтительно, с помощью обратного метода рассеяния [82]. В частности, нашло свое объяснение и появление полочки позади уединенной волны [51].

6.3. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили в канале с неровным дном

В этом разделе из уравнений (6.1.7) и (6.1.8) выводится уравнение Кадомцева–Петвиашвили для неровного дна. При $v_0 = 0$ получаем классическое уравнение Кортевега–де Вриза для неровного дна в различных представлениях (см., например, книгу Мея [43], с. 560–561). Для вывода "обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили" для неровного дна необходимо рассмотреть уравнения Буссинеска (6.1.7) и (6.1.8) при $\beta = \varepsilon$.

В этом случае в эти уравнения входят следующие переменные

$$t, x, y, \text{ а также } x^* = \varepsilon x, \quad y^* = \varepsilon y, \tag{6.3.1}$$

и для F и ζ можно выписать с точностью до $O(\varepsilon^2)$ следующие два уравнения

$$\begin{aligned} \zeta_t + h(F)_{xx} + \varepsilon \left[\zeta_x(F)_x + \zeta(F)_{xx} - \frac{\kappa_0}{6} h^3(F)_{xxxx} + \right. \\ \left. + \frac{v_0^2}{\kappa_0} h(F)_{yy} + \frac{\partial h}{\partial x^*}(F)_x \right] = \gamma \varepsilon \frac{v_0^2}{\kappa_0} \frac{\partial h}{\partial y^*}(F)_y, \end{aligned} \tag{6.3.2a}$$

$$(F)_t + \zeta + \varepsilon \left[\frac{1}{2}(F)_x^2 - \frac{\kappa_0}{2} h^2(F)_{xx} \right] = 0. \tag{6.3.2б}$$

По аналогии с одномерным случаем (см. раздел 6.2) введем следующие новые переменные:

$$\tau = \varepsilon t, \quad \xi = \int_0^x h^{-1/2}(\varepsilon x, y^*; \alpha) dx - t. \tag{6.3.3}$$

В этом случае производные представлены формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} + h^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial y^*} + G \frac{\partial}{\partial \xi},$$

где $h = h(x^*, y^*; \alpha)$ и

$$G(x^*, y^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \int_0^{x^*} h^{-1/2}(\varepsilon x, y^*; \alpha) dx. \tag{6.3.4}$$

Теперь, полагая

$$F = F_0(\tau, \xi, x^*, y^*) + \varepsilon F_1 + \dots,$$

$$\zeta = \zeta_0(\tau, \xi, x^*, y^*) + \varepsilon \zeta_1 + \dots \tag{6.3.5}$$

и, приравнявая члены порядка ε^0 и ε^1 , получаем следующие уравнения для функций F_0 , ζ_0 и F_1 , ζ_1 :

$$\zeta_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \xi}, \tag{6.3.6a}$$

$$-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + 2h^{1/2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi \partial x^*} + \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial x^*} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} +$$

$$+ h^{-1} \left(\zeta_0 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} \right) - \frac{\kappa_0}{6} h \frac{\partial^4 F_0}{\partial \xi^4} +$$

$$+ \frac{v_0^2}{\kappa_0} \left[\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left(h \frac{\partial F_0}{\partial y^*} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial y^*} \left(hG \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma hG \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi \partial y^*} + hG^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} \right], \tag{6.3.6b}$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \zeta_1 = -\frac{1}{2} h^{-1} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\kappa_0}{2} h \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3}. \tag{6.3.6в}$$

Как и следовало ожидать, первое уравнение (6.3.6a) недостаточно для определения обеих функций ζ_0 и F_0 . Необходимо перейти ко второму порядку по ε (члены порядка ε^1), чтобы получить условие совместимости для их определения.

Дифференцируя (6.3.6в) по ξ и вычитая результат из (6.3.6б), получаем следующее уравнение для старшего члена поднятия свободной поверхности ζ_0 :

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + 2h^{1/2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x^*} + \frac{1}{2} h^{-1/2} \zeta_0 \frac{\partial h}{\partial x^*} + 3h^{-1} \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{\kappa_0}{3} h \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \xi^3} + \frac{v_0^2}{\kappa_0} h \left(G^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} + \gamma G \frac{\partial \zeta_0}{\partial y^*} \right) +$$

$$+ \frac{v_0^2}{\kappa_0} \gamma \frac{\partial}{\partial y^*} \left(hG \zeta_0 + \gamma h \frac{\partial F_0}{\partial y^*} \right) = 0, \tag{6.3.7}$$

где

$$F_0 = \int_{-\infty}^{\xi} \zeta_0 d\xi.$$

Из уравнения (6.3.7) выводим уравнения, полученные Хью-Нон Ченом ([55], уравнение (22)) при условии, что ζ_0 не зависит от медленного времени τ .

Естественно, наше обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (6.3.7) относительно ζ_0 для неровного дна можно было вывести непосредственно из уравнения Буссинеска (6.1.12). В случае, когда дно является ровным ($h = 1$), (6.3.7) сводится к классическому уравнению Кадомцева–Петвиашвили, а в случае, когда $v_0 = 0$, это уравнение сводится к уравнению Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами, полученному Джонсоном при $\partial \zeta_0 / \partial \tau = 0$ [48, 81] (см. раздел 6.2).

Более краткую запись (6.3.7) можно получить, принимая $\zeta_0 = h^{-1/4} H(x^*, y^*, \xi)$ при $\partial \zeta_0 / \partial \tau = 0$. Тогда (6.3.7) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial x^*} + \frac{3}{2} h^{-7/4} H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\kappa_0}{6} h^{1/2} \frac{\partial^3 H}{\partial \xi^3} +$$

$$+ \frac{v_0^2}{2\kappa_0} \left[h^{1/2} G^2 \frac{\partial H}{\partial \xi} + \gamma h^{3/4} G \frac{\partial}{\partial y^*} (h^{-1/4} H) + \right.$$

$$\left. + \gamma h^{-1/4} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\gamma h \frac{\partial F_0}{\partial y^*} + h^{3/4} G H \right) \right] = 0, \tag{6.3.8}$$

где

$$F_0 = h^{-1/4} \int_{-\infty}^{\xi} H d\xi.$$

Вновь при $v_0 = 0$ можно вывести различные представления классического уравнения Кортевега–де Вриза для неровного дна (см. книгу Мея [43], с. 560–561).

7. Некоторые аспекты явления уединенных волн и солитонов

7.1. Открытие Джона Скотта Рассела

История (повесть!) уединенных волн (УВ) начинается с наблюдения Дж. С. Рассела "большой волны сдвига" (в канале между Эдинбургом и Глазго в 1834 г.). Рассел сделал доклад о своем открытии в Британской ассоциации развития науки в 1844 г. (открытие УВ поразило научное и поэтическое воображение Скотта Рассела!). Ниже приводится цитата из его доклада.

"... Я наблюдал за движением лодки, которую быстро тащила по узкому каналу пара лошадей. Внезапно лодка остановилась. Но не остановилась масса воды в канале, которую лодка привела в движение: она неистово билась о нос лодки. Вдруг вода оставила лодку позади и покатила вперед с большой скоростью, приняв форму большого одиночного поднятия — круглого, ровного, правильного водяного вала, который продолжал свое движение в канале, не меняя сколько-нибудь заметно свою форму и скорость. Я бросился за ней в погоню на лошади и догнал ее по-прежнему движущейся со скоростью восьми или девяти миль в час с сохранением своей первоначальной формы около тридцати футов в длину и от фута до полутора в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась и через милю или две я потерял ее среди ряби в канале. Так в августе 1834 г. состоялось мое первое случайное свидание с этим необычным и прекрасным явлением..."

Рассел знал, что скорость волны пропорциональна ее высоте и в результате многочисленных опытов предло-

жил следующую формулу

$$c^2 = g(h + a), \tag{7.1.1}$$

где g , h и a — ускорение свободного падения, невозмущенная глубина и максимальная высота волны от уровня невозмущенной воды, соответственно. Таким образом, УВ является гравитационной волной. Он знал о взаимодействии уединенных волн, но по всей видимости не заметил их солитонных свойств, которых я вкратце коснусь в разделах 7.4 и 7.5. Он также знал, как вызывать такие волны! Но, к несчастью, идеи Рассела столкнулись с неприкрытой враждебностью и скептицизмом со стороны светил научного сообщества его дней. Как Эйри, так и Стокс выражали сомнение в том, что волна, распространяющаяся без изменения формы, может находиться целиком над поверхностью воды. Они указывали на уменьшение амплитуды как на знак того, что волна по своей природе не является постоянной. Рассел высказал предположение (и был совершенно прав!), что уменьшение амплитуды происходит вследствие трения. Из (7.1.1) видно, что более высокие волны распространяются быстрее.

В "Докладе о волнах" Рассела, сделанном в 1844 г. (см. [83], лист XLVII), имеется диаграмма, воспроизведенная на рис. 11 (этот рисунок является точной копией рисунка 1.5 из книги [31] вместе с относящимся к нему описанием).

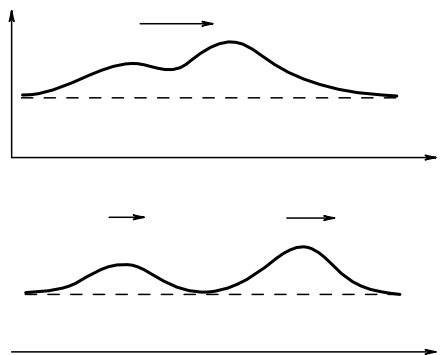


Рис. 11. Эскиз "сложной волны" Джона Скотта Рассела. Этот рисунок "показывает генезис большого низкого столба жидкости в виде сложной или двойной волны первого порядка, которая немедленно распадается, как показывает спонтанный анализ, на две, большая из которых движется быстрее и опережает меньшую" (см. [83], с. 384)

Этот результат Рассела (см. подпись к рисунку) на основе современных знаний можно интерпретировать следующим образом. Произвольный первоначальный профиль (не являющийся в точности УВ!) эволюционирует в две (или более!) волны, которые удаляются друг от друга, постепенно превращаясь каждая в отдельную УВ при $t \rightarrow \infty$, так как УВ определена на $(-\infty, +\infty)$.

Это само по себе кажется удивительным, но можно обнаружить и еще одно замечательное свойство. Беря в качестве начального профиля, изображенный на рис. 11, но с более высокой волной слева от более низкой волны, имеем следующую картину (рис. 12).

Эксперименты Рассела по УВ, собранные в [83], вызвали появление теоретических работ Эйри [8] и Стокса [3], которые лежат в основе почти всех последую-

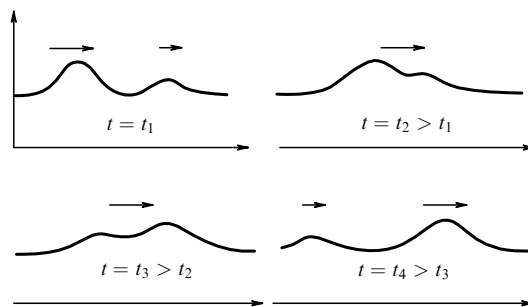


Рис. 12. Более высокая волна нагоняет, взаимодействует и затем минует более короткую. Все это выглядит так, что более высокая волна обгоняет более низкую и продолжает свое движение, как уединенная волна, невредимой и искаженной

щих теоретических работ по волнам на поверхности воды за исключением, как это ни парадоксально, УВ!

УВ были впервые описаны много позже Буссинеском [16–19] и привлекли широчайший интерес в последние годы в связи с солитонными решениями, впервые полученными для уравнения Кортевега–де Вриза, которое описывает уединенную волну.

7.2. Решения Буссинеска и Рэлея в виде уединенной волны

Только в 1870 г. работа Рассела была наконец реабилитирована, а ее научное значение подтверждено авторитетом ученых, которые проделали эту работу (см. книгу [27], с.3).

Противоречие между наблюдениями Рассела и теорией мелкой воды Эйри (см. уравнения (3.1.12)) было разрешено независимо Буссинеском и Рэлеем. Буссинеск [16] и Рэлей [10] нашли решение в виде квадрата гиперболического секанса для поднятия свободной поверхности.

Чтобы дать теоретическое обоснование формуле Рассела (7.1.1), и Буссинеск, и Рэлей предположили, что УВ имеет масштаб длины много больший, чем глубина воды. Из уравнения движения невязкой несжимаемой жидкости они вывели формулу Рассела для c .

Кроме того, они показали, что профиль $z = \zeta(x, t)$ описывается формулой

$$\zeta = a \operatorname{sech}^2 [\beta(x - ct)], \tag{7.2.1}$$

где $\beta^2 = 3a/4h^2(h + a)$ для любого $a > 0$, хотя профиль sech^2 , строго говоря, справедлив только при $a/h \ll 1$! Однако ни один из авторов не получил простого уравнения (типа КдВ!) для $\zeta(x, t)$, которое допускает (7.2.1) в качестве решения.

Буссинеск получил свое решение из приближенного уравнения:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{3}{2h_0} \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right) \tag{7.2.2}$$

для уравнения волн на поверхности воды, которое теперь носит его имя. В этом приближенном уравнении движение по-прежнему может быть двунаправленным, но в нем уже отражена основная идея баланса между нелинейностью и дисперсией!

Буссинеск показал также, что любая локальная часть однонаправленного решения (7.2.2) движется прибли-

женно со скоростью

$$C = C_0 \left(1 + \frac{3}{4h_0} \zeta + \frac{1}{6\zeta} h_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \quad (7.2.3)$$

где C_0 — скорость бесконечно малой длинной волны, а второй и третий члены в скобках в (7.2.3) представляют нелинейность и дисперсию, соответственно. Он заключил на основании (7.2.3), что начальное поднятие водной поверхности, для которого al^2 значительно превосходит значение, определенное $U = 3al^2/4h^3 = 1$, распадется со временем на две или более уединенные волны (плюс, в большинстве случаев, остаточный шлейф волн) и что начальное углубление распадется на осциллирующей волновой шлейф в полном согласии с наблюдениями Рассела. (Заметим, что l является характеристической длиной УВ.) Рэлей получил

$$l^2 = \frac{4h^2(h+a)}{3a},$$

что сводится к $U = 1$ при $a/h \ll 1$. Вывод Рэрея [10] эквивалентности (7.1.1) и (7.2.1) был воспроизведен Лэмбом ([4], раздел 252). Он является более прямым, но менее глубоким, чем у Буссинеска.

7.3. Уединенные волны Кортевега–де Вриза и Кадомцева–Петвиашвили

К несчастью, и Буссинеск, и Рэлей не получили простого уравнения для $\zeta(x, t)$, которое допускает (5.3.2) в качестве решения! Этот последний шаг (в начальный период истории уединенной волны) был сделан Кортевегом и де Вризом в 1895 г. [24]. Эти авторы, которые, "очевидно", не знали работ Буссинеска и Рэрея и которые пытались ответить на возражения Эйри и Стокса, выписали однонаправленное уравнение (уравнение Кортевега–де Вриза) для $\zeta(x, t)$, которое теперь носит их имя. Уравнение Буссинеска (7.2.2) сводится к уравнению Кортевега–де Вриза (4.2.4) факторизацией оператора $C_0^2 \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$, допущением *a priori* однонаправленного распространения и интегрированием по x .

На самом деле Кортевег и де Вриз [24] вывели несколько более общее уравнение, которое допускает произвольный равномерный перенос системы отсчета и учитывает поверхностное натяжение, а именно

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right), \quad (7.3.1)$$

где α — малая произвольная постоянная, которая находится в непосредственной зависимости от точной скорости равномерного движения жидкости и где

$$\sigma = \frac{1}{3} h_0^3 - \frac{h_0 T}{\rho_0 g}, \quad (7.3.2)$$

зависит от поверхностного натяжения T жидкости постоянной плотности ρ_0 .

Затем они получили семейство периодических решений вида $\zeta = \zeta(x - Ct)$, которые они назвали кноидальными волнами (см. подробности в разделе 3.3). Буссинеск [18, 19] также рассматривал периодические решения (7.2.2), но не получил их в явном виде. Это семейство кноидальных волн образует уединенную волну Бусси-

неска (7.2.1) в пределе бесконечного периода. Более точно можно говорить, что УВ имеет длину волны λ не в смысле обычного пространственного периода, но в смысле расстояния, на протяжении которого поднятие водной поверхности составляет (скажем) свыше 3 % от своего максимального значения. В этом смысле получаем

$$\frac{a_0 \lambda^2}{h_0^3} \approx 16. \quad (7.3.3)$$

На рис. 2 (раздел 3.3) УВ изображена (нижняя кривая) с использованием этого значения в качестве длины волны ([61], с. 465–466).

Мы показали, что уравнение Кортевега–де Вриза справедливо для волн малой амплитуды в соответствующей области пространства (x, t) (см., например, раздел 4.1). Однако нам еще осталось установить одну последнюю связь: между уравнением Кортевега–де Вриза и профилем sech^2 ! Покажем ее, следуя [31]. Вернемся к уравнению (7.3.1), выведенному Кортевегом и де Вризом. Оно имеет то преимущество, что записано в физических переменных и поэтому его более удобно использовать для сравнения с результатами Рассела, Буссинеска и Рэрея — соотношения (7.1.1) и решения (7.2.1).

Если решение (7.3.4) является стационарным в системе отсчета χ (координата χ выбирается таким образом, что она движется (практически) вместе с волной), то $\zeta = \zeta(\chi)$ и, таким образом,

$$\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \chi^3} = 0. \quad (7.3.4)$$

В предположении $\zeta \rightarrow 0$ при $|\chi| \rightarrow \infty$ (что справедливо для УВ), двукратное интегрирование уравнения (7.3.4) дает

$$2\alpha \zeta^2 + \zeta^3 + \sigma \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \chi} \right)^2 = 0. \quad (7.3.5)$$

Это последнее уравнение можно проинтегрировать еще раз. Однако проще проверить с помощью непосредственной подстановки, что $\zeta(\chi) = a \text{sech}^2 \beta \chi$ является решением при условии, что $a = 4\sigma\beta^2$ и $\alpha = -2\sigma\beta^2$.

Координата χ была определена Кортевегом и де Вризом [24] как

$$\chi = x - \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\alpha}{h_0} \right) t,$$

так что решение в виде УВ принимает вид

$$\zeta(x, t) = a \text{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sigma} \right)^{1/2} \left[x - \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{a}{2h_0} \right) t \right] \right\}. \quad (7.3.6)$$

Это согласуется с (7.1.1) и (7.2.1) в пренебрежении поверхностным натяжением (так что $\sigma = h_0^3/3$) и в предположении, что $a/h_0 \ll 1$, так как тогда

$$C \sim \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{a}{2h_0} \right), \quad \beta \sim \frac{1}{2} \left(\frac{3a}{h_0^3} \right)^{1/2}. \quad (7.3.7)$$

Таким образом, УВ Рассела является решением уравнения Кортевега–де Вриза.

В заключение отметим [31]: а) из решения (7.3.2) в виде УВ видно, что *скорость* УВ относительно $(g/h_0)^{1/2}$ (скорость бесконечно малых волн) пропорциональна амплитуде a УВ; б) *ширина* УВ (определенная, скажем, как расстояние между точкам высоты $a/2$) обратно пропорциональна $a^{1/2}$. Другими словами, *более высокие волны уже и распространяются быстрее*.

Наконец, интересно сравнить амплитуду a в решении (7.3.6) с $\varepsilon = a/h_0$ в обезразмеренных переменных, использованных нами при асимптотическом выводе уравнения Кортевега–де Вриза (см., например, в разделе 4.1 формулы (4.1.3)).

7.3.1. Двумерное обобщение УВ Кортевега–де Вриза получается из уравнения Кадомцева–Петвиашвили (см. уравнение (4.6.8))

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2h_0} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0, \quad (7.3.8)$$

где $c_0 = (g/h_0)^{1/2}$. Ясно, что это уравнение Кадомцева–Петвиашвили также имеет решения в виде уединенных волн, которые являются асимметричными аналогами волн Буссинеса, Рэлея и Кортевега и де Вриза. Записанные в тех же обозначениях, они принимают вид

$$\zeta(x, y, t) = a \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3a}{h_0^3} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[x + my - \left(1 + \frac{a}{2h_0} + \frac{m^2}{2} \right) \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t \right] \right\}, \quad (7.3.9)$$

при $\sigma = h_0^3/3$, m — параметр, описывающий малое отклонение КПУВ от основного направления распространения волны.

В заключение необходимо отметить, что решение в виде УВ уравнения КдВ оставалось диковинкой в научной литературе, пока численные исследования Забуски и Крускала в 1965 г. [23] не показали, как и предвидел Скотт Рассел, что УВ имеет универсальную природу!

7.4. Численные исследования Забуски и Крускала

На рис. 1 (см. раздел 1.1), взятом из знаменитой статьи Забуски и Крускала 1965 г. [25], провозгласившей *эру солитонов* (о солитонах см. раздел 7.5), показаны результаты численного эксперимента Забуски и Крускала, в котором они использовали консервативную по массе и почти консервативную по энергии схему с центральными разностями для решения уравнения Кортевега–де Вриза для $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (7.4.1)$$

Они использовали периодические граничные условия, а в качестве начального профиля была выбрана синусоида:

$$u(x, 0) = \cos \pi x, \quad 0 \leq x < 2, \quad (7.4.2)$$

u , $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ периодичны на $[0, 2]$ для всех t ; они выбрали $\delta = 0,022$.

Поначалу отрицательный наклон становится круче, затем влияние члена с третьей производной приводит к

появлению мелких осцилляций с длиной волны δ вблизи и слева от максимума u . С течением времени осцилляции разделяются, образуя шлейф импульсов, распространяющихся вправо, причем наибольшим из них является крайний правый; каждый импульс живет своей собственной (!) жизнью и имеет скорость, пропорциональную амплитуде. Каждый из этих импульсов может быть приближенно описан решением в виде УВ sech^2 , хотя строго говоря это решение справедливо для изолированного импульса на бесконечной прямой. В силу периодичности граничных условий уединенные импульсы появляются на левой границе и большие импульсы, так как они имеют большую скорость, обгоняют меньшие.

Здесь Забуски и Крускал обнаружили замечательное явление. Два импульса вели себя почти нелинейным образом при взаимодействии, но после него больший оказывался впереди и оба они сохраняли в точности свою прежнюю идентичность (высоту, ширину и скорость).

Единственным свидетельством имевшего место столкновения был сдвиг по фазе: больший импульс оказывался впереди того места, где он должен был быть, если бы распространялся сам по себе, а меньший оказывался позади положенного ему места. Если два импульса были почти равны, то взаимодействие по всей видимости происходило посредством обмена идентичностью, т.е. передний и меньший солитон становился выше и уже после того, как его касалась передняя кромка большего, который в свою очередь заимствовал идентичность меньшего.

Если два импульса имели сильно различающиеся амплитуды, то больший проходил над меньшим адиабатическим образом. Если различия в амплитудах не были столь существенными, то взаимодействие происходило более сложным образом. Позднейший анализ взаимодействия, проведенный Лаксом в 1968 г. [84], подтвердил эти наблюдения строго.

Удивительным был тот факт, что УВ появлялась после столкновения, имея ту же самую форму, вопреки ожиданиям, что сильное нелинейное взаимодействие во время столкновения приведет к разрушению импульсов. Это свойство является чрезвычайно важным, так как оно показывает, что энергия может распространяться без рассеивания в локализованных устойчивых "пакетах". И этим свойством обладает не только уравнение Кортевега–де Вриза!

Отметим также, что по истечении продолжительного периода времени решение вновь принимает форму начального профиля или чрезвычайно близко к нему — явление, требующее для своего объяснения привлечения топологии тора. Это явление является примером *повторяемости*.

Забуски и Крускал дали этим волнам за их постоянство имя "СОЛИТОН" с целью подчеркнуть, что они ведут себя как частицы в том смысле, что сохраняют свою идентичность при столкновении. Это открытие вызвало целый поток работ за последние тридцать лет!

7.5. От уединенной волны к солитону

Хотя первоначально термин солитон относился только к уединенной (одиночной) волне (УВ) уравнения Кортевега–де Вриза, теперь известны несколько нелинейных волновых уравнений (НЛВ), решения которых обладают подобными свойствами (см., например, нелинейное уравнение Шрёдингера, выведенное в разделе 5). Этот

термин, не имея формального определения, зачастую используется в более широком смысле. В самом деле, солитон есть решение НЛВ уравнения (или солитонного уравнения!) в виде уединенной волны, которое асимптотически сохраняет свою скорость и форму при столкновении с другой УВ.

Можно доказать, что произвольное начальное движение (например, для уравнения Кортевега–де Вриза) распадается в конце концов на "ансамбль солитонов". В самом деле, значение имени солитон для УВ уравнения Кортевега–де Вриза состоит в том, что солитоны возникают для широкого спектра граничных условий, что может быть показано с помощью ОПР. Например, заметим, что на рис. 1 (см. раздел 1.1) образование из восьми более или менее ясно различимых солитонов, чьи гребни лежат практически на одной прямой, можно продолжить с периодом 2.

В общем, первоначальный горб в конце концов распадается на N солитонов, каждый из которых соответствует дискретному собственному значению начального "потенциального колодца" (в ОПР). С помощью более аккуратного анализа интегрального уравнения ГЛМ (см. раздел 7.6) можно показать, что за шлейфом солитонов тянется осциллирующий след. Однако его отставание со временем увеличивается, так что солитоны остаются в одиночестве впереди. Распад начального импульса в шлейф солитонов называется также *расщеплением*.

7.5.1. В самом деле, с помощью численных и экспериментальных исследований было подтверждено, что солитон, распространяющийся из области постоянной глубины в область постоянной, но меньшей глубины, распадается на несколько солитонов различного размера, тянущихся в осциллирующем следе. С другой стороны, численно (а также аналитически!) было показано, что УВ над неровным дном имеет свои особенности такие, как затухание, рост или расщепление в зависимости от местного наклона дна (распад или вырождение солитона в мелкой воде с неровным дном). Доказано также, что если глубина уменьшается и выходит на полочку, то тогда для некоторых глубин УВ распадается на конечное число солитонов асимптотически далеко от края полочки. Показано, что если глубина меняется с h^* на h^{**} , то тогда образуются только солитоны при условии, что [48]

$$\frac{h^{**}}{h^*} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^{-4/9}, \quad (7.5.1)$$

где целое n — число солитонов достаточно далеко от края полочки.

При росте глубины (волна, распространяющаяся в сторону более глубокой воды) можно получить осциллирующее асимптотическое решение, которое описывает УВ (солитон), вырождающуюся в кноидальную волну! Уточним, что расщепление солитонов было впервые открыто и изучено в [50] с помощью численных методов.

7.5.2. Возможно, наиболее поразительным открытием при численных расчетах сильного солитона является то, что "самый высокий" солитон не является солитоном с наибольшей энергией. Если солитон является локальной целостностью, сохраняющей свою идентичность после взаимодействия (почти как при суперпозиции), то его

можно рассматривать как *локальное вместилище энергии волнового поля* и когда два солитона сталкиваются, каждый может выйти из столкновения, имея тот же характер, что и до него. Когда солитон встречается с "антисолитоном", то оба аннигилируют. Отметим, что солитон является решением для волн постоянной формы, однако такое решение в общем случае не является солитоном.

Явление взаимодействия двух "солитонов" схематически представлено на рис. 13.

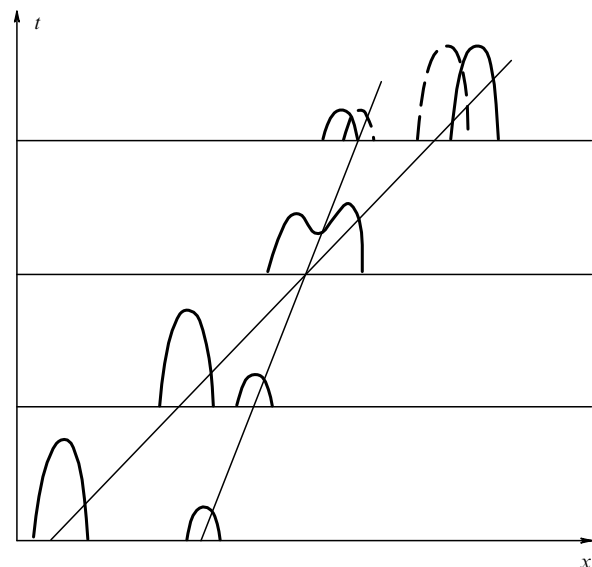


Рис. 13. Схема взаимодействия двух солитонов

Эти специальные "солитонные решения" НЛВ уравнения важны во многих отношениях. Гарднер, Крускал и Миура в 1967 г. [49] разработали нетривиальную последовательность шагов для перехода от уравнения Кортевега–де Вриза к обратной задаче рассеивания, т.е. определение потенциала рассеивания по спектральным функциям, что можно сделать с помощью известного интегрального уравнения ГЛМ (см. раздел 7.6).

7.5.3. К несчастью, невозможно дать исчерпывающее и точное определение солитона! Однако вслед за Дразином и Джонсоном [31] мы будем подразумевать под этим термином следующее:

любое решение нелинейного волнового уравнения (или системы уравнений), которое а) представляет собой *волну постоянной формы*, б) является *локализованным*, т.е. распадается или приближается к *постоянному на бесконечности* и в) может сильно *взаимодействовать* с другими солитонами с *сохранением своей идентичности*.

Естественно, имеются более формальные определения, некоторые из которых используют собственные значения задачи рассеивания. В контексте уравнения Кортевега–де Вриза принято называть односолитонное решение уединенной волной, а когда их два или более, то они называются солитонами.

Другими словами, солитон является уединенной волной, когда он бесконечно удален от любого другого солитона. Следует отметить тот факт, что решение

какого-либо другого НЛВ уравнения (не Кортевега–де Вриза или Кадомцева–Петвиашвили) в виде уединенной волны не обязательно является функцией sech^2 ! Более того, некоторые НЛВ уравнения (или системы уравнений) имеют решения в виде УВ, но не солитонов, в то время как другие (подобно уравнению Кортевега–де Вриза) имеют УВ, которые являются солитонами.

7.5.4. Теперь я хотел бы рассмотреть некоторые свойства, связанные с "динамикой солитонов", как они отражены в очень интересной книге [27].

Начнем с того, что солитонное уравнение обычно рассматривается как нелинейное эволюционное уравнение, предписание, которое определяет, как данная функция пространственно-подобной переменной x меняется с временно-подобной переменной t . Именно из такой точки зрения исходят, когда применяют ОПР — эволюционное уравнение рассматривается как начально-краевая задача Коши. Однако, по мере того как раскрываются различные чудеса солитонного уравнения, становится ясным, что данное уравнение предпочтительнее рассматривать как локальное соотношение между функцией (функциями) бесконечного числа независимых переменных и ее (их) различными производными по независимым переменным — весьма специфическое соотношение вследствие лежащей в его основе алгебраической структуры. Так как уравнение является локальным, то нет необходимости рассматривать какую-либо одну переменную в качестве пространственно-подобной и таким образом выделять ее среди остальных.

Солитонные уравнения являются удивительными исключительно вследствие алгебраических причин — структуры уравнения, как весьма специфического соотношения между функцией и ее различными производными. Ее особое значение можно понять без привлечения глобальных свойств.

Солитон сам по себе является драматической новой концепцией в нелинейной науке. Вот, наконец, на классическом уровне, объект, который теоретики теории поля постулировали давным давно — локальная импульсная когерентная структура в виде бегущей волны, решение уравнения поля с замечательными свойствами устойчивости, ведущее себя как частица. Оно по природе своей нелинейно и обязано своим существованием балансу двух сил — линейной, стремящейся рассеять импульс, и нелинейной, стремящейся его сфокусировать.

Пусть нелинейное уравнение Шрёдингера (рассмотренное в разделе 5) явилось первенцем среди солитонных уравнений (см. статью Захарова и Шабата [35]), отцом солитона стало прославленное уравнение Кортевега–де Вриза. Оно тоже является универсальным и также распространённым и, как и в случае нелинейного уравнения Шрёдингера, можно точно описать обстоятельства, в которых оно применимо (оно описывает эволюцию волн в мелкой воде). Оба уравнения, Кортевега–де Вриза и нелинейное Шрёдингера, возникли как асимптотические условия разрешимости — условие на аппроксимацию главного порядка к решению более сложного набора уравнений, что гарантирует равномерную ограниченность последующих итераций аппроксимации. Интересно отметить, что многие уравнения, полученные как асимптотические условия разрешимости при весьма общих и широко применимых предположениях, также являются солитонными уравнениями!

Одним из ключевых свойств солитонного уравнения является бесконечное число законов сохранения и связанных с ними свойств симметрии.

Что мы имеем в виду под солитонным уравнением? Настоящий солитон — решение уравнения с весьма специфическими особенностями, является гораздо более чем уединенной волной. Решение солитонного уравнения в виде уединенной волны имеет, однако, дополнительные свойства. Одним из этих свойств является то, что две таких УВ могут пройти одна через другую без потери идентичности — оба импульса выходят из нелинейного взаимодействия в точности сохранив свою прежнюю идентичность, причем больший из них находится впереди. При этом взаимодействие не проявляется ни в радиации, ни в другом каком-либо следствии процесса рассеяния — единственным напоминанием будет сдвиг фаз. Хотя свойство взаимодействия является весьма примечательным и на практике часто используется в качестве теста солитонного решения, само по себе оно не является достаточным. Имеются уравнения, которые допускают решения, являющиеся нелинейной суперпозицией двух УВ, но которые не имеют всех тех свойств, которые присущи солитонному уравнению.

Солитонное уравнение, которое допускает решения в виде уединенных волн, должно допускать решение, которое является нелинейной суперпозицией N УВ при произвольном N . На сегодня все известные солитонные уравнения имеют Гамильтонову структуру и бесконечное число независимых констант движения при инволюции. Кроме того, имеется каноническое преобразование, которое переводит солитонное уравнение в бесконечную последовательность отдельных уравнений в переменных действие–угол, каждое из которых интегрируется тривиально. В принципе, таким способом можно решить начальную задачу Коши.

Оказывается, что некоторые из переменных действия являются параметрами солитона — это объясняет тот факт, что солитон сохраняет свою идентичность при взаимодействии, а именно, параметры, определяющие форму, скорость, амплитуду, внутреннюю частоту и т.д.

Среди множества специфических свойств солитона имеется два очень интересных:

а) первое из них открыто Хирота, *свойство Хирота*, который обнаружил полезный и важный метод расчета многосолитонных решений (см. раздел 7.6);

б) существование этих рациональных решений (решений Хирота) эквивалентно другому свойству, присущему солитонным решениям — *свойству Пенлеве*¹⁷.

Открытие солитона, сделанное при помощи компьютера, по иронии судьбы показало, что современная тенденция хвататься за компьютер для решения любых задач является преждевременной, если не сказать больше. Все возможности таких методов, как обратная теория рассеяния, еще в полной мере не исчерпаны. Изобретательность, проявленная здесь учеными, позволяет надеяться на открытие еще многих полезных приложений по крайней мере для недиссипативных систем.

¹⁷ Свойство Пенлеве на языке f -функции Хироты (см. раздел 7.6) по всей видимости означает отсутствие подвижной критической точки функции $f(x, t)$! — это наблюдение является важным по своим потенциальным следствиям не только в контексте эволюционных уравнений, но и для других моделей, имеющих точные решения.

В настоящее время основным препятствием на пути к новым достижениям является отсутствие стандартной техники конструирования соответствующей задачи на собственные значения или хотя бы открытие критерия ее существования (согласно Фриману [52], с. 35).

Наконец, солитонные решения уравнения Кортевега–де Вриза (например!) активно обсуждаются на научных симпозиумах и в литературе. В качестве элементарного введения можно рекомендовать книгу Дразина (1983) [31]; более подробные изложения и обзоры "динамики солитонов" можно найти в [22, 27, 31, 32, 44, 52, 53, 62, 85–103].

7.6. Солитонная "математика"

7.6.1. Уравнение Шрёдингера и законы сохранения. Если V удовлетворяет так называемому "модифицированному" уравнению Кортевега–де Вриза

$$Q(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial \tau} + \alpha V^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^3} = 0,$$

тогда функция U в виде

$$U = V^2 + \frac{\partial V}{\partial \xi} \quad (7.6.1)$$

удовлетворяет классическому уравнению Кортевега–де Вриза

$$P(U) \equiv \frac{\partial U}{\partial \tau} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad \alpha + 6\beta = 0.$$

В самом деле, используя (7.6.1), после некоторых преобразований можно показать, что

$$P(U) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 2V \right) Q(V) + (\alpha + 6\beta) \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}. \quad (7.6.2)$$

Естественно, обратное утверждение: если $P(U) = 0$, то $Q(V) = 0$, неверно. Заметим, что при заданном U соотношение (7.6.1) является уравнением Риккати для V , так что обычное преобразование для лианеризации уравнения Риккати

$$V = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (7.6.3)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - UW = 0, \quad (7.6.4)$$

где U — решение классического уравнения Кортевега–де Вриза $P(U) = 0$.

Используя теперь инвариантность уравнения Кортевега–де Вриза $P(U) = 0$ при галилеевом преобразовании

$$U \Rightarrow U - \lambda, \quad \xi \Rightarrow \xi + \alpha \lambda \tau, \quad \tau \Rightarrow \tau, \quad (7.6.5)$$

немедленно получаем обобщение уравнения (7.6.4):

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + UW = \lambda W. \quad (7.6.6)$$

Это и есть уравнение Шрёдингера для функции $W(\xi, \tau; \lambda)$ с потенциалом U и $P(U) = 0$.

Тем не менее этот результат значительно отличается от уравнения Шрёдингера в квантовой механике вследствие того, что U меняется со временем τ , так как является решением классического уравнения Кортевега–де Вриза $P(U) = 0$. Следовательно, время τ в уравнении (7.6.6) следует рассматривать как параметр. Другими словами, необходимо, чтобы уравнение (7.6.6) было справедливо для $U(\xi, \tau)$ в каждый момент времени!

Казалось бы, собственное значение λ также должно зависеть от времени, но, как это ни удивительно, *собственные значения λ не зависят от времени* при условии, что U убывает достаточно быстро на бесконечности по ξ или если оно удовлетворяет периодическому граничному условию.

Уточним, используя уравнение Кортевега–де Вриза в исходном виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right),$$

что преобразования

$$t' = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t, \quad x' = \frac{x}{\sigma^{1/2}}, \quad (7.6.7a)$$

$$u = -\frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{3} \alpha \quad (7.6.7b)$$

дают нам

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (7.6.8)$$

где штрихи у переменных опущены. Для приведенного уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.8) подтвердилось условие $\alpha + 6\beta = 0$!

Далее, рассмотрим законы сохранения для уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.8), а именно уравнения вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (7.6.9)$$

где N — "плотность", а J — соответствующий "поток".

Десять таких величин для уравнения Кортевега–де Вриза были найдены в [88]. Однако ни одна из этих величин не имеет непосредственного физического значения, которое мы связываем с уравнением неразрывности.

Вот первые три из них:

$$N_1 = u, \quad J_1 = -3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{уравнение Кортевега–де Вриза}),$$

$$N_2 = u^2, \quad J_2 = -4u^3 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

$$N_3 = u^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

$$J_3 = -\frac{9}{4} u^4 + 3u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2.$$

Предположение, что уравнение Кортевега–де Вриза имеет бесконечное число таких законов сохранения было впоследствии доказано Крускалом и Миурой и одно-

временно с ними Гарднером (см. обзор [88]). Для получения всей последовательности констант движения для уравнения Кортевега–де Вриза (заметим, бесконечной последовательности) введем вначале функцию w как

$$u = w + e \frac{\partial w}{\partial x} + e^2 w^2, \quad (7.6.10)$$

где e — произвольная постоянная. Подстановка в уравнение Кортевега–де Вриза (7.6.8) показывает, что w должна удовлетворять следующему закону сохранения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(3w^2 + 2e^2 w^3 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (7.6.11)$$

для всех e . Интегрирование по всем x в предположении, что w и ее производные обращаются в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$ дает, что $\langle w \rangle = 0$, т.е. является константой движения.

Уравнение (7.6.10) можно формально решить разложением по e :

$$w = w_0 + e w_1 + e^2 w_2 + \dots = u - e \frac{\partial u}{\partial x} - e^2 \left(u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \dots$$

Важным является то обстоятельство, что u не зависит от e !

Таким образом, условие $d\langle w \rangle/dt = 0$ дает бесконечный набор условий:

$$\frac{d\langle w_n \rangle}{dt} = 0. \quad (7.6.12)$$

Мы получили бесконечный набор констант движения для уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.8), а именно, проинтегрированных w_n . Можно доказать, однако, что только коэффициенты при четных степенях e приводят к нетривиальным константам!

Тот факт, что уравнение Кортевега–де Вриза имеет бесконечный набор констант движения наводит на мысль, что уравнение Кортевега–де Вриза эквивалентно интегрируемой гамильтоновой системе бесконечного порядка. В таком случае существуют относительно простые аналитические решения, такие как солитоны! Действительно, *необходимым (но не достаточным) условием наличия у уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.8) решений типа N солитонов является существование бесконечного набора констант движения!*

В любом случае, вышеприведенное наблюдение, касающееся "уравнения Шрёдингера", и потенциальная важность того факта, что уравнение Кортевега–де Вриза имеет бесконечное число законов сохранения, мало чем помогают в решении уравнения Кортевега–де Вриза!

Однако наличие уравнения типа Шрёдингера представляет проблему в другом свете; дает новую позицию, с которой можно взяться за проблему. Сотрудничество нескольких изобретательных исследователей, каждый из которых внес свой собственный взгляд, привело к открытию красивого и весьма оригинального метода обратного преобразования рассеивания (ОПР).

Общее решение $u(x, t)$ уравнения Кортевега–де Вриза

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

получается посредством

а) рассмотрением (ограниченного) решения рассеивания $W(x, 0)$,

б) нахождением его эволюции во времени,

в) получением обратного решения интегрального уравнения ГЛМ.

Эта общая схема получила название ОПР — нетривиальное обобщение преобразования Фурье для решения линейного уравнения.

7.6.2. Обратное преобразование рассеивания (ОПР). Возвращаясь к уравнению Шрёдингера (7.6.6), мы можем записать $U = \lambda + [\partial^2 W / \partial \xi^2] / W$. Подставляя это значение U в уравнение Кортевега–де Вриза, $P(u) = 0$, и, интегрируя полученное в результате уравнение по всем $x = \xi$, имеем следующее соотношение

$$\frac{d\lambda}{dt} \int W^2 dx = 0 \quad (7.6.13)$$

в предположении, что W и ее производные стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

По предположению мы связываем с (7.6.13) N решений $W_n(x, t)$ таких, что каждое из них ограничено и интеграл (7.6.13) существует и конечен. Следовательно, если потенциал $u(x, t)$ в (линейном) уравнении Шрёдингера

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (u - \lambda)W = 0 \quad (7.6.14)$$

удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (7.6.15)$$

то тогда собственные значения λ_n — константы.

Более точно, в силу предположения, что $u(x, t)$ быстро убывает при $x \rightarrow \pm\infty$ для всех t , линейное уравнение Шрёдингера (7.6.14) допускает *конечное* число собственных состояний с отрицательной энергией $\lambda_n = -k_n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$, а также *непрерывный спектр* с положительной энергией $\lambda = k^2$.

Дискретные собственные значения $\lambda_n = -k_n^2$ дают в качестве решения собственные функции, обращающиеся в нуль на бесконечности и интегрируемые с квадратом. Если собственная функция, соответствующая k_n , нормирована

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_n^2 dx = 1, \quad (7.6.16)$$

то тогда коэффициент c_n определяется асимптотическим поведением W_n

$$W_n \sim c_n(t) \exp(-k_n t), \quad x \rightarrow \infty. \quad (7.6.17)$$

Для непрерывного спектра волновая функция W является линейной комбинацией $\exp(\pm ikx)$. Так как $u(x, t)$ обращается в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$, мы налагаем условия:

$$W_n \sim \exp(-ikx) + b(k, t) \exp(ikx), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (7.6.18a)$$

$$W_n \sim a(k, t) \exp(-ikx), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7.6.18b)$$

С физической точки зрения член в правой части соответствует стационарному излучению плоских волн,

распространяющихся в потенциал из бесконечности, величине $b(k, t)$, называемой *коэффициентом отражения*, которая отражается от потенциала, и величине $a(k, t)$, называемой *коэффициентом передачи*, которая передается через потенциал. В частности, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Таким образом, справедлива следующая теорема Миуры [88].

Если $u(x, t)$ обращается в нуль достаточно быстро при $x \rightarrow \pm\infty$, то

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4k_n^3 t), \quad b(k, t) = b(k, 0) \exp(8ik^3 t), \\ a(k, t) = a(k, 0), \tag{7.6.19}$$

где $c_n(0)$, $b(k, 0)$ и $a(k, 0)$ определяются из начальных данных для уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.15) для $u(x, t)$.

Имеется обширная литература об обратном преобразовании рассеивания (ОПР) (см., например, Гельфанд и Левитан [104]). Нахождение ОПР сводится к задаче решения линейного интегрального уравнения — интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ)

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^{+\infty} B(y + z)K(x, z) dz = 0. \tag{7.6.20}$$

Наконец, решим начальную задачу Кортевега–де Вриза для $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \\ -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u^0(x).$$

Вначале решим задачу на собственные значения:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - [u^0(x) - \lambda]W = 0, \tag{7.6.21}$$

из решения которой определим K_n , $c_n(0)$ и $b(k, 0)$.

Далее, (7.6.19) дает зависящие от времени величины $c_n(t)$ и $b(k, t)$, что позволяет выписать $B(x + y)$ в (7.6.20) в явном виде:

$$B(x + y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k, 0) \exp[ik(8ik^2 t + x + y)] dk + \\ + \sum_{n=1}^N [c_n(0)]^2 \exp[8k_n^3 t - k_n(x + y)], \tag{7.6.22}$$

Таким образом, мы определили ГЛМ уравнение (7.6.20).

Если бы решение интегрального уравнения ГЛМ было известно, то тогда решение начальной задачи для уравнения Кортевега–де Вриза можно было бы просто записать в виде:

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} [K(x, x; t)], \tag{7.6.23}$$

где t в K рассматривается как параметр.

Естественно, напрашивается возражение, что мы просто заменили одну трудноразрешимую задачу (нелинейную!) на другую. Однако нам удалось достичь двух важных упрощений:

- а) (7.6.21) и ГЛМ уравнение являются линейными;
- б) время t входит в задачу только как параметр.

К несчастью, основное интегральное уравнение ГЛМ (7.6.20) невозможно решить аналитически в общем случае за исключением, конечно, случая безотражательного потенциала ($u^0(x)$ такой, что $b(k, 0) = 0$). В общем случае решение на больших временах представляет собой N солитонов, распространяющихся с различными скоростями вправо, и шумы (*осцилляции*), распространяющиеся влево. Основная математическая трудность состоит в определении интегрального вклада в $B(x + y)$.

На рис. 14 приведено решение уравнения Кортевега–де Вриза с солитонами и осциллирующим следом (для $N = 2$). Помимо двух солитонов, распространяющихся вправо, имеется диспергирующий осциллирующий след, распространяющийся влево (в силу отрицательности групповой скорости линейных волн).

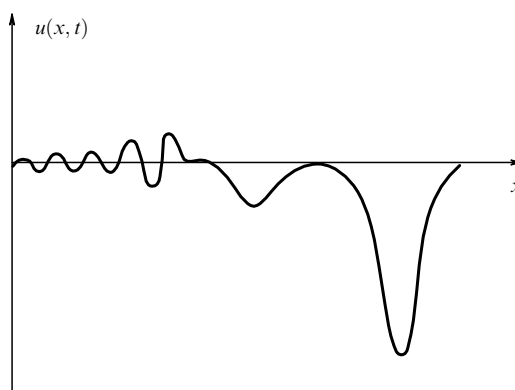


Рис. 14. Решение уравнения Кортевега–де Вриза с солитонами и осциллирующим следом

7.6.3. Преобразование Бэклунда. В частном случае может быть использовано преобразование Бэклунда (ПБ — иногда также называемое автоматическое ПБ или АПБ) для преобразования *нулевого солитонного решения* $u = 0$ уравнения Кортевега–де Вриза

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 6 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \tag{7.6.24}$$

в (ненулевое) решение

$$w = -k_0 \tanh \xi_0, \quad \xi_0 = k_0(x - 4k_0 t), \tag{7.6.25}$$

которое простым образом связано с *односолитонным решением* уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.24). Далее, решение (7.6.25) само может быть преобразовано в решение:

$$v = \frac{k_1^2 - k_0^2}{q - v}, \tag{7.6.26a}$$

где

$$q = -k_1 \coth \xi_1, \quad \xi_1 = k_1[x - 4k_1^2 t], \tag{7.6.26б}$$

которое соответствует *двухсолитонному решению* (7.6.24).

Процесс может быть продолжен, что дает решения все с большим и большим числом солитонов. На каждом шаге необходимо, однако, решить следующие два уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} - k^2 + (w - u)^2, \quad (7.6.27a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \left[k^4 + k^2 \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 (w - u)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} (w - u)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (w - u) \right] \quad (7.6.27b)$$

с условием интегрируемости на w : $\partial^2 w / \partial x \partial t = \partial^2 w / \partial t \partial x$.

К несчастью, вывод этих "исходных" уравнений (7.6.27), так чтобы w и u удовлетворяли уравнению Кортевега–де Вриза (7.6.24), является не простой задачей.

С другой стороны, с открытием ПБ появилась относительно простая возможность получать целую иерархию решений! В рассматриваемом нами частном случае мы будем исходить из двух уравнений (7.6.27) для u и w , где k — произвольная постоянная. Условие интегрируемости для w дает после несложных преобразований, что w и u удовлетворяют уравнению Кортевега–де Вриза (7.6.24) при всех k и в этом случае имеем АПБ. Дифференцирование уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.24) по x показывает, что $F = -2 \partial f / \partial x$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 6F \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0. \quad (7.6.28)$$

Пусть u удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза (7.6.24): таким решением является, например $u = 0$, в этом случае (7.6.27a), (7.6.27b) сводятся к

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -k_0^2 + w^2, \quad (7.6.29a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 4(k_0^4 - k_0^2 w^2), \quad (7.6.29b)$$

где k_0 — соответствующее значение k .

Эти уравнения легко решаются. Их решение и есть (7.6.25). Теперь выберем полученное решение в качестве u и подставим его в правую часть (7.6.27a) с другим значением k , например со значением k_1 (перестановочность!), что дает следующее уравнение в иерархии, а именно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = k_0 \operatorname{sech}^2 \xi_0 - k_1^2 + (v + k_0 \tanh \xi_0)^2. \quad (7.6.30)$$

Далее, вводя функцию q такую, что (7.6.26) остается справедливым и используя вышеприведенные уравнения, находим

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -k_1^2 + q^2, \quad (7.6.31)$$

которое по своему виду идентично (7.6.29a). Это последнее уравнение для q имеет решение (физически допустимое!) вида (7.6.26b), которое удовлетворяет (7.6.26a), так как оно дает ограниченное решение для v .

Подробности и другие результаты можно найти в [105]. Здесь мы только отметим три полезных применения ПБ:

а) алгебраическое (см. выше) построение решений с использованием теоремы "перестановочности" (получена Бианчи (см. [106]));

б) вывод соответствующего ОЗР, так как $u = v^2 + \partial v / \partial x$, по существу, соответствует половине решения с помощью ПБ уравнения Кортевега–де Вриза и модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза;

в) получение законов сохранения с помощью (7.6.10).

Наконец, поспешим отметить, что при выводе вышеизложенных результатов для уравнения Кортевега–де Вриза мы во многом воспользовались хорошо развитой теорией этого уравнения и что получение аналогичных результатов для уравнений, для которых ПБ, ОПР и законы сохранения не найдены, является весьма непростой задачей! Более подробное изложение читатель может найти в книге [32].

7.6.4. Метод Хироты. Теперь рассмотрим уравнение Кортевега–де Вриза в виде

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 12u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (7.6.32)$$

которое при $u = \partial w / \partial x$ сводится к

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 6 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (7.6.33)$$

Преобразование

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \log f \quad (7.6.34)$$

сводит уравнение Кортевега–де Вриза к *однородному* уравнению для $f(x, t)$ [107]:

$$f \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (7.6.35)$$

Преобразование (7.6.34) известно как преобразование Хопфа–Коула [108, 109]. Прежде чем попытаться решить уравнение (7.6.35), обратим внимание на тот факт, что классическое односолитонное волновое решение уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.22) имеет вид

$$u = \frac{a^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\theta}{2}, \quad \theta = ax - a^3 t + b \quad (7.6.36)$$

и получается при

$$f = 1 + \exp \theta_1, \quad (7.6.37)$$

где $\theta_i = a_i x - a_i^3 t + b_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Это дает нам основание искать решение уравнение (7.6.35) в виде

$$f = 1 + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n f^{(n)}, \quad (7.6.38)$$

где ε — некоторый подходящий параметр разложения.

Для $O(\varepsilon)$ получаем в качестве точного решения экспоненту, как и в (7.6.37). Однако, так как в этом случае мы имеем линейное однородное уравнение для $f^{(1)}$, можно ввести сколь угодно много экспонент. Мы ограничимся *двумя*:

$$f^{(1)} = \exp \theta_1 + \exp \theta_2. \quad (7.6.39)$$

Далее, это точное решение для $f^{(1)}$ можно подставить в правую часть уравнения порядка $O(\varepsilon^2)$ для $f^{(2)}$, что дает

$$\frac{\partial^4 f^{(2)}}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x \partial t} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2). \quad (7.6.40)$$

Его решение есть

$$f^{(2)} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2). \quad (7.6.41)$$

Удивительно, но уравнение порядка $O(\varepsilon^3)$ для $f^{(3)}$ есть просто

$$\frac{\partial^4 f^{(3)}}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x \partial t} = 0,$$

так как правая часть равна нулю!

Естественно, можно взять в качестве решения $f^{(3)} = 0$. Легко видеть, что при таком тривиальном решении для $f^{(3)}$ все последующие $f^{(n)} = 0$ при $n \geq 3$. Это самообрывание цепочки для f чрезвычайно важно для получения точного решения уравнения Кортевега–де Вриза (7.6.32).

Множители при ε могут быть включены в фазу каждого θ , так что точное двухсолитонное решение имеет вид

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f(x, t),$$

$$f = 1 + \exp \theta_1 + \exp \theta_2 + A \exp(\theta_1 + \theta_2), \quad (7.6.42)$$

$$A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2.$$

Тот же процесс справедлив и для трехпараметрического решения, но преобразования в этом случае несравненно более сложные! Уравнение Кортевега–де Вриза было решено таким способом в случае N солитонов Хиротой [107].

Проанализируем формулу (7.6.42) в случае, когда два солитона находятся далеко друг от друга. Большой солитон $a_1 > a_2 > 0$ смещен вперед, а меньший $a_2 < a_1$ назад относительно движения, которое бы они имели, если бы не было взаимодействия.

Траектории максимумов солитонов на рис. 15 иллюстрируют этот результат. Не имеет значения, рассматривается ли столкновение солитонов как процесс, при

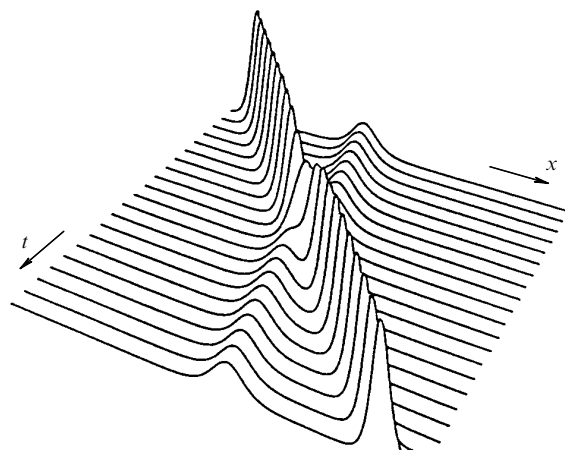


Рис. 15. Столкновение двух уединенных волн Кортевега–де Вриза

котором один солитон проходит через другой, или как процесс, при котором они обмениваются своими идентичностями — все это лишь способ интерпретации. Наконец, интересно отметить, что, как указал Хирота, члены в (30.35) очень напоминают формулы Лейбница для производных произведений. Без учета знаков (7.6.35) похоже на

$$\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4 f^{(2)}}{\partial x^4}.$$

Хирота изобрел новый оператор D_x , определенный на упорядоченных парах функций $g(x), f(x)$ следующим образом

$$D_x g \cdot f = f \frac{\partial g}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Это определение может быть распространено и на функции $g(x, t), f(x, t)$. Например,

$$D_x D_t f \cdot f = 2 \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$D_x^4 f \cdot f = 2 \left[f \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 \right].$$

В этих обозначениях уравнение Кортевега–де Вриза (7.6.35) имеет весьма компактный вид

$$[D_x D_t + D_x^4] f \cdot f = 0. \quad (7.6.43)$$

Нахождение многосолитонных решений также упрощается. Это видно, например, из того, как операторы D_x действуют на экспоненты:

$$D_x^m \exp kx \cdot \exp lx = (k - l)^m \exp(k + l)x.$$

8. Корректно поставленная задача: результаты по существованию, единственности и устойчивости решения

8.1. Существование и единственность

Если мы рассмотрим двумерную классическую задачу для физического потенциала скорости $\phi(x, z, t)$, то эта краевая задача оказывается чрезвычайно трудна для решения (даже при $T = 0$) главным образом вследствие динамического граничного условия:

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\zeta = 0, \quad z = \zeta(x, t), \quad (8.1.1)$$

которое является нелинейным и ставится на неизвестной границе $z = \zeta(x, y, t)$.

Некоторое представление о трудности классической задачи можно получить, задав себе вопрос, что известно о ней! Естественно, можно ввести новую вертикальную независимую переменную вместо z . Например, в случае волн в глубокой воде, если

$$\eta = z - \zeta(\zeta, \tau), \quad x = \zeta, \quad t = \tau \quad (8.1.2)$$

есть новые переменные с $0 < \eta < -\infty$, то тогда производные имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta},$$

а также

$$\begin{aligned}\phi_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}, \\ \phi_{zz} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Как следствие, получаем следующую двумерную каноническую классическую задачу для волн в глубокой воде:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad 0 < \eta < -\infty, \quad (8.1.3a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad (8.1.3b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 + g\zeta = 0, \quad \eta = 0. \quad (8.1.3v)$$

В глубокой воде имеем также следующее условие для потенциала на бесконечности:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (8.1.3r)$$

Сильно нелинейная задача для волн на поверхности воды (8.1.3) для двух функций ϕ и ζ чрезвычайно сложна. Ясно, что математическая теория для этой задачи практически невозможна! Численное интегрирование задачи (8.1.3) также не так-то просто осуществить!

Простейшее нетривиальное утверждение, которое математик может сделать о физической задаче, является утверждение о существовании решения. Что касается доказательства существования (согласно книге Шинброта [58], с. 87), исторически первым значительным результатом был следующий.

В 1925 г. Леви-Чевита [12] доказал, что в воде бесконечной глубины ($h_0 = \infty$) может существовать периодическая волна, которая распространяется без изменения формы. Последнее означает, что ϕ не зависит отдельно от t и x , а только от их комбинации $x - ct$ с некоторой постоянной скоростью c . Естественно, ζ также зависит только от $x - ct$, а ϕ и ζ являются периодическими функциями $x - ct$.

Вскоре после того, как Леви-Чевита доказал этот результат, Струик [13] показал, что его можно обобщить на случай плоского горизонтального дна ($h_0 = \text{const}$). Струик доказал существование периодической волны распространяющейся без изменения формы.

В 1954 г. Фридрихс и Хайерс [59] доказали при $h_0 = \text{const}$ существование другого типа волны, также распространяющуюся без изменения формы с постоянной скоростью (уединенная волна), которую можно рассматривать как периодическую волну "à la Струик" с бесконечной длиной волны.

В случае, когда дно является периодическим и имеет один максимум и один минимум на период, Гербер [60] доказал существование стационарного потока с поверхностью, имеющей те же свойства. Кроме того, впадины свободной поверхности лежат прямо напротив впадин

дна, а вершины — напротив вершин. В той же самой статье [60] 1965 г. Гербер доказал существование над монотонным дном потока с монотонной свободной поверхностью. И в этом случае поток можно рассматривать как поток над периодическим дном с бесконечным периодом. Результат Гербера был обобщен Красовским [110].

Следует отметить, что все эти примеры, по существу, являются примерами стационарных двумерных потоков — последние два из них просто стационарные, а первые три стационарные в системе координат, движущейся со скоростью c .

Что касается трехмерной задачи, отметим статьи Лаврентьева [111, 112], в которых используется теория квазиконформных отображений трехмерных областей. Тер-Киркоров [113–115] доказал существование периодических волн, которые вырождаются в уединенную волну, а также существование уединенной волны на поверхности жидкости с завихренностью.

В статье Овсянникова [116] приводится теорема существования для задачи Коши–Пуассона о волнах на поверхности воды (движение нестационарной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью) вследствие начального возмущения. Что касается работ советских ученых, то читатель может обратиться к тематическому сборнику, изданному Академии наук СССР в 1970 г. (см. обзорную статью Моисеева [117], с. 55).

Среди недавних результатов для двумерной задачи о потенциале выделим полученные Шовольтером [118]. В этой статье получены результаты о существовании, единственности и устойчивости решения из соответствующих результатов для абстрактной задачи Коши для эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве. О теории существования безвихревых волн на поверхности воды см. также статью Киди и Норбьори [119].

Обоснование так называемых модельных уравнений "мелкой воды" (так называемые "уравнения Эйри" — 4.12) было дано Овсянниковым [120]. О строгом математическом обосновании справедливости уравнений мелкой воды для двумерного канала с аналитическими данными см. статью [121]. В трехмерном случае с допущением *a priori* о свободной поверхности обоснование было дано Бергером в 1976 г. [122].

Существование решений в виде бегущей волны для уравнения Кортевега–де Вриза (об уравнении Кортевега–де Вриза, а также Кадомцева–Петвиашвили см. раздел 4) было проанализировано и доказано Шовольтером в 1988 г. [118]. Согласно статье [118] соответствующая начально-краевая задача для уравнения Кортевега–де Вриза корректно поставлена. Глобальная теорема существования для решения уравнения Кортевега–де Вриза в канале общей формы была доказана Шеном в 1983 г. [123] как следствие результатов о существовании, полученных Като [124, 125].

В статье [126] математически рассматривается задача, возникающая из теории уединенных волн на воде при наличии поверхностного натяжения. Обширный обзор нелинейных волн при наличии внешних сил (нелинейные резонансные поверхностные волны) дан в обзорной статье [127]. В более недавних работах [128], а также [129] получены строгие результаты для уравнения Буссинеска (выведенные в разделе 3), а также предельное уравнение Кортевега–де Вриза для волн на воде, включая

"строгий" вывод этих уравнений и оценок для различий в эволюции решений. Для КДВ уравнения получены более сильные результаты, чем для уравнения Буссинеска, благодаря корректности начальной задачи¹⁸.

Уточним, что Кано и Нишида [128] работали в классе аналитических функций и использовали абстрактную форму теоремы Коши–Ковалевской для доказательства существования и последующих оценок. Крэг в 1985 г. [129] рассматривал различные классы функций и поставил задачу о существовании решения в пространстве *Соболева*. Он получил теорему существования на *больших временах* для задачи о волнах на воде в масштабе длинных волн. Кроме того, последняя постановка является естественной для задачи о волнах на воде, так как она не проявляет мелкомасштабной линейной неустойчивости в отличие от задачи устойчивости Кельвина–Гельмгольца. Обе упомянутые статьи дают математическое обоснование для уравнений Буссинеска и Кортевега–де Вриза как аппроксимаций к классической задаче о волнах на воде. Однако результаты для уравнения Буссинеска отличаются от соответствующих результатов для уравнения Кортевега–де Вриза в силу различий в корректности постановки начальной задачи для этих двух уравнений. Утверждение для уравнения Буссинеска состоит, грубо говоря, в том, что оператор Буссинеска имеет ошибку порядка $O(\varepsilon^2)$ в применении к решению задачи о волнах на воде в соответствующем функциональном пространстве.

В недавней работе [131] авторы дают строгий анализ применения теории модуляции к задаче о волнах на воде в двумерном канале и обоснование аппроксимации решения волновым пакетом, модулированным согласно нелинейному уравнению Шрёдингера (см. раздел 5 об асимптотическом выводе НЛШ уравнения *в пределе длинных волн*). Результаты этой последней цитированной работы включают строгий вывод НЛШ уравнения, а также оценку в классе пространств Соболева, которая показывает, что модуляционная аппроксимация удовлетворяет классической задаче о волнах на воде с точностью до главного порядка по масштабному параметру. Результаты не такие сильные, как результаты двух вышеприведенных ссылок относительно уравнения Кортевега–де Вриза, но они сильнее, чем результаты в буссинесковском масштабе.

Обоснование предела Кортевега–де Вриза и в [129], и в [128] существенно сильнее, чем любой из результатов об уравнениях НШЛ или Буссинеска. Доказывается, что решения классической задачи о волнах на воде сильно сходятся к решениям уравнения Кортевега–де Вриза в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Крэг [129] сделал более сильное заключение вследствие различия функциональной аналитической постановки между [129] и [128]. Он ставил задачу в лагранжевых координатах, которая, как доказано Налимовым в 1974 г. [132] и Йосихарой в 1982 г. [133], является корректно поставленной в соответствующем пространстве Соболева.

Более точно, Крэг [129] показал, что в масштабе длинных волн время существования получается порядка $O(\varepsilon^{-3/2})$. Так как временной масштаб Кортевега–де Вриза отслеживает изменения в решении только на временных интервалах порядка $O(\varepsilon^{-3/2})$, решения зада-

чи о волнах на воде (с начальными данными, удовлетворяющими однонаправленным условиям) сильно сходятся к решениям Кортевега–де Вриза на интервале длины $O(1)$, измеренном во времени Кортевега–де Вриза! Кано и Нишида [128] сформулировали задачу в терминах зависящего от времени конформного отображения на базисную область начальных данных из пространства аналитических функций и прибегли к обобщенному варианту теоремы Коши–Ковалевской для решения начальной задачи. В этом случае время существования порядка $O(1/\varepsilon)$.

Наконец, отметим, что лагранжева формулировка задачи о волнах на воде является весьма удобной для получения строгих оценок асимптотической процедуры. Для перехода к лагранжевым переменным координаты свободной поверхности задаются в виде $\zeta(x, t) = [x + X(x, t), Y(x, t)]$, где (X, Y) — ограниченное локальное возмущение свободной поверхности $(x, 0)$ покоящейся жидкости. При описании движения поверхности точка $(x + X, Y)$ рассматривается как координата лагранжевой частицы на свободной поверхности. Пусть $\mathbf{X} = (X, Y)$. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{u}(t, x + X, Y) \quad (8.1.4)$$

и, исключая член с давлением в уравнении Эйлера, уравнения движения свободной поверхности запишутся в следующем виде:

$$\left(1 + \frac{\partial X}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial Y}{\partial x} \left(g + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right) = 0, \quad (8.1.5)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \mathbf{K}(\mathbf{X}) \frac{\partial X}{\partial t}, \quad (8.1.6)$$

где оператор \mathbf{K} — *гильбертово преобразование* для переменной области, занимаемой жидкостью. Подчеркнем, что компоненты скорости жидкости $\mathbf{u} = (u, v)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана для аналитической функции $f(z)$ с $f = u - iv$ и $z = x + iy$ и, вместе с граничным условием на дне $v(x, -h) = 0$, имеют *сингулярный* оператор на верхней поверхности, который восстанавливает граничные значения v по граничным значениям подходящим образом себя ведущей u : $v = \mathbf{K}(\mathbf{X})u$.

Классические решения (8.1.5), (8.1.6), описывающие свободную поверхность и скорость жидкости на этой поверхности, были изучены Крэгом [129] и Йосихарой [133]. Вместе с граничным условием на дне это позволяет вычислить из решения уравнения Лапласа скорость жидкости во всей области, занятой жидкостью, в фиксированный момент времени. Оператор $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ вычислен в [133]. Коифман и Майер в [134] сделали важное наблюдение, что $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ зависит аналитически от \mathbf{X} вблизи начала координат в пространстве непрерывных по Лишпицу функций. Таким образом, можно разложить

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}_n(\mathbf{X}), \quad (8.1.7)$$

где $\mathbf{K}_n(\mathbf{X})$ — однородный оператор степени n в \mathbf{X} , сцепление степеней $\mathbf{X}(x)$ и ее производных с явными множителями Фурье¹⁹.

¹⁸ О начальной задаче для уравнения Кортевега–де Вриза см. [130], с. 508.

¹⁹ Простой вывод этих коэффициентов дается в Приложении 1 статьи [131].

8.2. Устойчивость и неустойчивость

8.2.1. Буссинек показал, что решение уравнения (26.2) характеризуется инвариантами

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta dx, \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 dx, \quad (8.2.1a)$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\zeta_x^2 - \frac{3}{h_0^3} \zeta^3 \right) dx \quad (8.2.1b)$$

при условии, что ζ обращается в нуль достаточно быстро при $x \rightarrow \pm\infty$. Q и E , очевидно, представляют собой *объем* и *энергию* волны. Буссинек обозначил M как момент неустойчивости и показал, что уединенные волны являются единственным решением *вариационной задачи*: $\delta(M) = 0$ при фиксированной E (он не учитывал неявное ограничение на Q , — объем должен быть постоянным, — но оно никак не сказывается на конечном результате, так как соответствующий множитель Лагранжа обращается в нуль).

Он также показал, что амплитуда и объем уединенной волны заданной энергии даются формулами:

$$a_0 = \frac{3}{4h_0} E^{2/3}, \quad Q = 2h_0 E^{1/3} \quad (8.2.2)$$

и заметил, что (см. статью [22], с. 15):

"Когда волна распространяется вдоль канала, глубина которого h_0 медленно уменьшается от одной точки к другой ... дно канала непрерывно отражает небольшую часть движения так, что объем и энергия волны разделяются между исходной и отраженной волной. Последняя имеет постоянно растущую длину и высоту, которая одновременно пропорциональна этому объему и ее высоте, и со временем перестает быть малой. Исходная волна, таким образом, сохраняет приблизительно всю энергию волны и, так как она эффективно сохраняет форму уединенной волны, ... ее высоту a_0 и ... ее объем Q ... можно получить в любой конкретный момент времени при помощи (8.2.2), где E остается неизменной: видно, что волна становится выше короче и, следовательно, менее устойчивой, пока не лишается основания и не опрокидывается. Когда глубина монотонно возрастает, наблюдается противоположная ситуация".

Это предсказание Буссинеска осталось почему-то незамеченным в современной литературе (за исключением [135]).

8.2.2. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение Шрёдингера (5.1.25):

$$i^{-1} \frac{\partial A}{\partial \tau} = \mu \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu A |A|^2. \quad (8.2.3)$$

Как видно из (5.1.26a) μ всегда отрицательно, в то время как ν (согласно (5.1.26b)) меняет знак с положительного на отрицательный в точке $k_0 h_0 = 1,363$ при уменьшении $k_0 h_0$. Известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (8.2.3) имеет следующее решение, представляющее собой *нелинейную плоскую волну* $A = A_0 \exp[i(\alpha\tau - \kappa\xi)]$, где $A_0 = \text{const}$ и $\alpha = -\mu\kappa^2 + \nu|A_0|^2$. Рассмотрим это решение в исходных физических переменных. В частности, положив $\kappa = 0$ и $A_0 = ag/2i\omega_0$, где a действительная постоян-

ная, для $\omega_0(k_0)$ получаем классическое дисперсионное соотношение $\omega_0^2 = gk_0\sigma$. Тогда возмущенная поверхность имеет следующий вид

$$\zeta = \varepsilon a \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2 a^2}{k_0 \sigma} (\gamma - \lambda \cos 2\theta), \quad (8.2.4)$$

где $\theta = k_0 x - (\omega_0 - \varepsilon^2 \alpha_0) t$ и $\alpha_0 = \nu g^2 a^2 / 4 \omega_0^2$.

В (8.2.4) $\gamma = [1/(c_g^2 - gh_0)] [2\omega_0 k_0 c_g + (1 - \sigma^2) gh_0 k_0^2]$ и $\lambda = (\sigma^2 - 3) k_0^2 / 2\sigma^2$. Это ничто иное, как *стоксовский волновой шлейф с точностью до второго порядка аппроксимации*. Здесь следует отметить, что $\omega = \omega_0 - \varepsilon^2 \alpha_0$ является нелинейным дисперсионным соотношением для стоксовской волны с учетом эффекта индуцированного горизонтального потока. Необходимо также отметить, что дисперсионный член в (8.2.3) не играет существенной роли в решении, так как $\kappa = 0$.

Помимо описанного выше решения в виде плоской волны уравнение (8.2.3) имеет решение другого типа в виде эллиптических функций Якоби, выражающее динамический баланс между нелинейными и дисперсионными эффектами, которое мы называем *равновесным решением*:

$$A = B(\xi) \exp i\alpha\tau, \quad (8.2.5)$$

где α — константа, а β — действительная функция. В случае, если $\mu\nu > 0$, то

$$B(\xi) = B^0 \text{Dn} \left[B^0 \left(\frac{\nu/2}{\mu} \right)^{1/2} \xi \mid m \right] \quad (8.2.6)$$

с модулем m и $m^2 = 2 - 2\alpha/\nu(B^0)^2$.

Теперь покажем, что эволюцию во времени неустойчивых мод можно рассматривать как специальный случай общей модуляции, описываемой (8.2.3). Для воспроизведения стоксовской волны положим в (5.1.27a) $\alpha = \alpha_0$, $\kappa = 0$ и $A_0 = ag/2i\omega_0$. Затем рассмотрим возмущенную стоксовскую волну:

$$A = [A_0 + \lambda A'] \exp[i(\alpha_0\tau + \lambda\theta')], \quad (8.2.7)$$

где действительные функции A' и θ' описывают возмущение, а λ — малый параметр. Подставляя последнее выражение в нелинейное уравнение Шрёдингера (8.2.3) для $A(\tau, \xi)$ и лианеризуя его по λ , имеем

$$\frac{\partial A'}{\partial \tau} + \mu |A_0| \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8.2.8a)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} - 2\nu |A_0|^2 A' - \mu \frac{\partial^2 A'}{\partial \xi^2} = 0. \quad (8.2.8b)$$

Так как эти уравнения образуют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение может быть записано в виде

$$(A', \theta') = (A'_0, \theta'_0) \exp[i(k'\xi - \omega'\tau)] + \text{к.с.}, \quad (8.2.9)$$

где A'_0 и θ'_0 — некоторые константы. Из условия что (8.2.8a), (8.2.8b) имеют нетривиальное решение, получаем следующее дисперсионное соотношение

$$\omega'^2 = \mu^2 k'^2 \left(k'^2 - \frac{2\nu}{\mu} |A'_0|^2 \right), \quad (8.2.10)$$

которое показывает, что если $\mu\nu < 0$, то ω' всегда действительна при произвольных значениях k' , так что стоковская волна (5.1.27а) нейтрально устойчива. С другой стороны, если $\mu\nu > 0$, то ω' становится мнимой при

$$k' < 2\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/2} |A'_0|. \quad (8.2.11)$$

Следовательно, возмущение будет экспоненциально расти. В этом смысле стоковская волна (5.1.27а) является неустойчивой к модуляционному возмущению и максимальная скорость роста, скажем d_{\max} , дается формулой $d_{\max} = |\nu A'_0|^2$ при $k' = (\nu/\mu)^{1/2} |A'_0|$.

С помощью современной теории (согласно Хасимото и Оно (1972) [36]), возвращаясь к исходному нелинейному уравнению Шрёдингера (8.2.3), можно проследить эволюцию во времени таких неустойчивых мод до того момента, где линейная теория перестает быть справедливой. Например, при $m = 1$ равновесное решение (8.2.6) вырождается в уединенную модуляционную волну, распространяющуюся с групповой скоростью:

$$B(\xi) = \left(\frac{2\alpha}{\nu}\right)^{1/2} \operatorname{sech}\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{1/2} \xi\right], \quad (8.2.12)$$

которая имеет ширину $(\mu/\alpha\varepsilon^2)^{1/2}$. При $\alpha = \alpha_0$ эта ширина совпадает с длиной волны неустойчивой моды с максимальной скоростью роста. Этот факт заставляет предположить, что модуляция стоковской волны в конечном счете превращается в уединенную волну, описываемую (8.2.12).

8.2.3. Неустойчивость волн в глубокой воде была также исследована в статьях [71, 73, 136–141]. Авторы заключили: *стоксовские волны в глубокой воде определенно неустойчивы!*

Для жидкости конечной глубины влияние индуцированного среднего потока оказывает существенный стабилизирующий эффект. В этом случае модуляционные уравнения Уизема для волновых шлейфов являются эллиптическими или гиперболическими в зависимости от $kh_0 > 1,36$ или $kh_0 < 1,36$. В первом случае модуляция неустойчива, что означает замечательное совпадение теоретических предсказаний Бенджамина и Уизема.

Открытие неустойчивости слабо нелинейных стоковских волн поставило вопрос об эволюции неустойчивых нелинейных волновых шлейфов. Как следствие, возник интерес к выводу эволюционных уравнений, которые были бы справедливы на *больших временах!* Как оказывается, многие нелинейные задачи с неустойчивостью самой разнообразной природы можно описать при помощи нелинейного уравнения Шрёдингера. Наконец, когда имеется несколько доминирующих (линейных) волновых мод, то становится существенным влияние их взаимодействия. Оно особенно существенно, когда некоторые моды резонируют. Простейшим и наиболее важным случаем является трехволновой резонанс. Однако не все системы имеют *трехволновой резонанс* и, по иронии судьбы, одна из первых попыток поиска такого резо-

нанса среди невязких поверхностных гравитационных волн дала отрицательный результат и Филипс "смело" (см. книгу [42], с. 73) продолжил свой анализ до третьего порядка по амплитуде с целью определения *кубического* коэффициента взаимодействия резонансных *квартетов!* Подробное обсуждение трехволнового резонанса, кубического взаимодействия трех и четырех волн, сильного взаимодействия, локальных неустойчивостей и перехода в турбулентный режим можно найти в книге Крайка [42], главы 5, 7 и 8.

9. Заключение

Как отметил Крайк ([42], с.288): "... Ключ к пониманию нелинейного волнового движения и перехода в турбулентный режим не дают ни солитоны, ни теория бифуркации, ни теория катастроф, ни странные аттракторы, ни каскады с удвоением периода и т.д. Модные и очаровательные теоретические новинки дают импульс научному прогрессу, но могут также и завести неосторожных в тупиковые аллеи. Богатство механики жидкости таково, что нас ждет множество новых удивительных открытий и чудес".

Список литературы

1. Lagrange J L *Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides* (Nouveau Mém. de l'Acad. de Berlin, Oeuvres, IV 714, 1781)
2. Cauchy A *Mémoire sur la Théorie des Ondes*. Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. I (1827) [Oeuvres complètes, Paris, 1882...1ère série — the date of the memoir is 1815]
3. Stokes G G *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 8 441 (1849); *Mathematics and Physics Papers* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1880) Vol. 1, p. 197
4. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932)
5. Bernoulli D *Hydrodynamica* (Argentorati, 1738)
6. Thomson W *Cambridge and Dublin Math. J.* February issue (1848)
7. Green G *Cambridge Trans.* VII 279 (1839)
8. Airy G B *Tides and Waves* Section 382 (1845); *Encycl. Metropolitana* Vol. 5, p. 241
9. Poisson S D *Mémoire sur la Théorie des Ondes*. Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences I (1816)
10. Rayleigh (Lord) *Phil. Mag.* I 257 (1876); *Sci. Pap.* I 251 (1876)
11. Popoff A *Liouville* (2) III 251 (1858)
12. Levi-Civita T *Math. Annalen* 93 264 (1925)
13. Struik D J *Math. Annalen* 95 595 (1926)
14. Gerstner F J *Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. and Gilbert's. Annalen d. Physic XXXII* (1809)
15. Rankine W J H *Phil. Trans.* p. 481 (1863)
16. Boussinesq M J *Acad. Sc. Paris, Comptes Rendus* 72 755 (1871)
17. Boussinesq M J *Acad. Sc. Paris, Comptes Rendus* 73 256 (1871)
18. Boussinesq M J *J. Math. Pures et Appl.* (2) 17 55 (1872)
19. Boussinesq M J *Essai sur la Théorie des Eaux Courantes*. Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences — Institut de France (série 2) 23 1 (1877); 24 1 (1877)
20. de Saint-Venant B *Théorie du Mouvement non permanent des Eaux*. Institut de France, Acad. des Sci. de Paris 73 (3) 147 (1871); 73 (4) 237 (1871)
21. Russell J S *Report on Waves* 14th Meeting of the British Association Report (York, 1844) p. 311
22. Miles J W *Ann. Rev. Fluid Mech.* 12 11 (1980)
23. Ursell F *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 49 685 (1953)
24. Korteweg D J, deVries G *Phil. Mag.* 39 422 (1895)
25. Zabusky N S, Kruskal M D *Phys. Rev. Lett.* 15 240 (1965)
26. Stokes G G *Phil. Mag.* 31 314 (1891); *Math. Phys. papers* 5 160 (1891)
27. Newell A C *Solitons in Mathematics and Physics* (Philadelphia: SIAM, 1985)

²⁰ О чем см. [98], с. 242–252. О бифуркациях волн большой амплитуды также см. [98], с. 252–255.

28. Kruskal M D *Proc. IBM Sci. Computing Symposium on Large-Scale Probl. in Phys.* (New York: IBM Data Processing Div., White Plains, 1965) p. 43
29. Kruskal M D, in *Nonlinear Wave Motion* (Ed. A C Newell) Lectures in Appl. Math. **15** (Providence: AMS, 1974) RI p. 61
30. Zabusky N S *J. Comput. Phys.* **43** 195 (1981)
31. Drazin P G, Johnson R S *Solitons: an Introduction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
32. Dodd R K et al. *Solitons and Nonlinear Equations* (London: Academic Press, 1982)
33. Freeman N C, Davey A *Proc. Roy. Soc. London* **A344** 427 (1975)
34. Кадомцев Б Б, Петвиашвили В И *ДАН СССР* **192** 753 (1970) [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192** 753 (1970)]
35. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **00** 000 (1972) [*Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)]
36. Hasimoto H, Ono H *J. Phys. Soc. Japan* **33** 805 (1972)
37. Захаров В Е *ЖПМТФ* **2** 190 (1968)
38. Benney D J, Roskes G J. *Stud. Appl. Math.* **48** 377 (1969)
39. Davey A, Sterwatson K *Proc. Roy. Soc. London* **A338** 101 (1974)
40. Djordjevic V D, Redekopp L G J. *Fluid Mech.* **79** 703 (1977)
41. Ablowitz M, Segur H *J. Fluid Mech.* **92** 691 (1979)
42. Craik A D D *Wave Interactions and Fluid Flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985)
43. Mei C C *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves* (New York: John Wiley and Sons, 1983)
44. Infeld E, Rowlands G *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
45. Zeytounian R Kh *J. Engineering Math.* **28** 261 (1994)
46. Peregrine O H *J. Fluid Mech.* **27** 815 (1967); **25** 311 (1966)
47. Ono H *J. Phys. Soc. Japan* **32** 332 (1972)
48. Johnson R S *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **73** 183 (1973)
49. Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
50. Gardner C S et al. *Comm. Pure Appl. Math.* **27** 97 (1974)
51. Masden O S, Mei C C *J. Fluid Mech.* **39** 781 (1969)
52. Knickerbocker C J, Newell A C *J. Fluid Mech.* **98** 803 (1980)
53. Freeman N C *Adv. Applied Mechanics* **20** 1 (1980)
54. Rosales R R, Papnicolaou G C *Studies Appl. Math.* **68** 89 (1983)
55. Benilov E S *Studies Appl. Math.* **87** 1 (1992)
56. Xue-Nong Chen *Phys. of Fluids* **A1** (12) 2058 (1989)
57. Sugimoto N, Kakutani T *J. Phys. Soc. Japan* **43** 1469 (1977)
58. Jeffrey A, Kawahara T *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory* (London: Pitman, 1982)
59. Shinbrot M *Lectures on Fluid Mechanics* (New York: Gordon and Breach Science Publ., 1973)
60. Friedrichs K O, Hyers D H *Comm. Pure Appl. Math.* **7** 517 (1954)
61. Gerber R *Journal de Mathématiques* **34** 185 (1955)
62. Lighthill J *Waves in Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979)
63. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974)
64. Debnath L "Bifurcation and nonlinear instability in applied mathematics", in *Nonlinear Analysis* (Ed. Th M Rassias) (Singapore: World Scientific Publ. Co., 1987) p. 161
65. a. Zeytounian R Kh *Nonlinear Long Surface Waves in Shallow Water*. Université de Lille 1, LML, Preprint (1993) 224 p.;
b. Zeytounian R Kh *Notes sur les Ecoulements Rotationnels de Fluides Parfaits* (Lecture Notes in Physics, Vol. 27) (Heidelberg: Springer-Verlag, 1974)
66. Luke J C J. *Fluid Mech.* **27** 395 (1967)
67. Бреховских Л М, Гончарова В В *Введение в механику сплошных сред (в приложениях к теории волн)* (М.: Наука, 1985)
68. Satsuma J J. *Phys. Soc. Japan* **40** 286 (1976)
69. Segur H, Finkel A *Studies Applied Math.* **73** 183 (1985)
70. Miles J W J. *Fluid Mech.* **79** 157 (1977)
71. Chu V C, Mei Ch C J. *Fluid Mech.* **41** 873 (1970)
72. Whitham G B J. *Fluid Mech.* **27** 399 (1967)
73. Davey A J. *Fluid Mech.* **53** 769 (1972)
74. Benjamin T D, Feir J E J. *Fluid Mech.* **27** 417 (1967)
75. Johnson R S *Proc. Roy. Soc. London* **A357** 131 (1977)
76. Anker D, Freeman N C *Proc. Roy. Soc. London* **A360** 529 (1978)
77. Захаров В Е, Шабат А Б *Функц. анал. прилож.* **8** 226 (1974)
78. Johnson R S, in *Nonlinear Waves* (Ed. L Debnath) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983) p. 25
79. Liu P L-F, Yoon S B, Kirby J T J. *Fluid Mech.* **153** 185 (1985)
80. Kakutani T *J. Phys. Soc. Japan* **30** 272 (1971)
81. Johnson R S *J. Fluid Mech.* **60** 813 (1973 b)
82. Kaup D J, Newell A C *Proc. Roy. Soc. London* **A361** 413 (1978)
83. Scott Russell J "Report on Waves", in *Report 14th Meeting of the British Assoc. for the Adv. of Sci. York* (London: John Murray, 1844) pp. 311–390 + 57 plates
84. Lax P D *Comm. Pure Applied Math.* **21** 467 (1968)
85. Захаров В Е, Фадеев Л Д *Функц. анал. прилож.* **5** 280 (1972)
86. Jeffrey A, Kakutani T *SIAM Review* **14** 582 (1972)
87. Scott A C, Chu F Y F, McLaughlin D W *The Soliton: a New Concept on Applied Science*. Proc. IEEE **61** (10) 1443 (1973)
88. Miura R M *SIAM Review* **18** 412 (1976); Miura R M *Bäcklund Transformation, the Inverse Scattering Method, Solitons, and their Applications* (Lecture Notes in Mathematics **515**) (Berlin: Springer, 1976)
89. Calogero F *Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform Method* (London: Pitman, 1978)
90. Bhatnagar P L *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1979)
91. Kadomtsev B B *Phénomènes collectifs dans les plasmas* (Moscou: Mir, 1979)
92. Miles J W J. *Fluid Mech.* **106** 131 (1981)
93. Lamb C L *Elements of Soliton Theory* (New York: John Wiley Press, 1980)
94. Bullough R K, Caudry P W *Solitons* (Berlin: Springer, 1980)
95. Захаров В Е, Манаков С В, Новиков С П, Пятаевский Л П *Теория солитонов. Метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980); Novikov S P, Manakov S V, Pitayevski L P, Zakharov V E *Theory of Solitons, the Inverse Scattering Method* Consultant Bureau (New York, London: Plenum, 1984)
96. Ablowitz M J, Segur H *Solitons and the Inverse Spectral Transform* (Philadelphia: SIAM, 1981)
97. Taniuti T, Nishihara K *Nonlinear Waves* (London: Pitman, 1983)
98. Debnath L *Nonlinear Waves* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983)
99. Debnath L *Advances in Nonlinear Waves* Vol. I, II (London: Pitman, 1984)
100. Atiyah M, Gibbon J D, Wilson G *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A315** 333 (1985)
101. Тахтаджян Л А, Фадеев Л Д *Гамильтонов подход в теории солитонов* (М.: Наука, 1980)
102. Ablowitz M J, Fuchssteiner B, Kruskal M *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations* (Singapore: World Scientific, 1987)
103. Drazin P G *Solitons* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983)
104. Gel'fand I M, Levitan B M *Amer. Math. Soc. Translation* **1** 253 (1955)
105. Wahlquist H D, Estabrook F B *Phys. Rev. Lett.* **31** 1386 (1973)
106. Eisenhart L P A *Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Ginn and Co) (reprinted by Dover, New York, 1960) (1909)
107. Hirota R *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192 (1971)
108. Hopf E *Comm. Pure Appl. Math.* **3** 201 (1950)
109. Cole J D *Quart. Appl. Math.* **9** 225 (1951)
110. Красовский Ю П *ЖВММФ* **1** 5 (1961)
111. Лаврентьев М А *Сиб. мат. журн.* **III** (5) 715 (1962)
112. Лаврентьев М А *Журн. мат. анал.* **XIX** 217 (1967)
113. Тер-Крикоров А М *ПММ* **24** 622 (1960)
114. Тер-Крикоров А М *ЖВММФ* **1** (1961)
115. Тер-Крикоров А М *Journal de Mécanique* **11** (3) 351 (1963)
116. Ovsianikov L V *Actes. Congrès Intern. Maths.* **3** 137 (1970)
117. Моисеев Н Н, в кн. *Механика в СССР за 50 лет* Т. 2 (М.: Наука, 1970) с. 55
118. Showalter R E *J. Mahs. Pure Appl.* **56** (2) 123 (1977)
119. Keady G, Norbury J *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **83** 137 (1978)
120. Овсянников Л В, в кн. *Труды — 75 лет академику Петровскому* (М.: Московский университет, 1978)
121. Kano T, Nishida T *J. Math. Kyoto Univ.* **19** 335 (1979)
122. Berger N *SIAM J. Applied Math.* **31** 438 (1976)

123. Shen M C, in *Nonlinear waves* (Ed. L Debnath) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983) p. 69
124. Kato T *Lectures Notes in Mathematics* **448** 25 (1975)
125. Kato T *Research Notes in Mathematics* **53** 293 (1980)
126. Amick C J, McLeod J B *SAACM* **1** (2) 127 (1991)
127. Kirchgässner K *Adv. Appl. Mech.* **26** 135 (1988)
128. Kano T, Nishida T *Osaka J. Math.* **23** 389 (1986)
129. Craig W *Commun. Part. Diff. Eq.* **10** 787 (1985)
130. Kevorkian J, Cole J D *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (New York: Springer-Verlag, 1981)
131. Craig W, Sulem C, Sulem P L *Nonlinearity* **5** 497 (1992)
132. Налимов В И *Динам. сплош. сред* **18** 104 (1974)
133. Yosihara H *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **18** 49 (1982)
134. Coifman R R, Meyer Y *Proc. Symp. Pure Math. Soc.* **43** 71 (1985)
135. Keulegan G H, Patterson G W *J. Res. Natl., Bur. Stand.* **24** 47 (1940)
136. Benjamin T B *J. Fluid Mech.* **25** 241 (1966)
137. Benjamin T B "Nonlinear Wave Motions", in *Lectures in Applied Mathematics* Vol. 15 (Ed. A C Newell) (Providence: AMS, 1974) p. 3
138. Benjamin T B, Bona J G, Mahoney J J *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A272** 47 (1972)
139. Whitham G B *J. Fluid Mech.* **22** 273 (1965)
140. Whitham G B *J. Fluid Mech.* **44** 373 (1970)
141. Jimenez J, Whitham G B *Proc. Roy. Soc. London* **A349** 277 (1976)

Дополнительная литература

- Batchelor G K *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970)
- Crapper G D *Introduction to Water Waves* (England, Chichester: Ellis Horwood Limited Publ., 1984)
- Dai Shi-quiang *Appl. Mathematics Mechanics* (Wuhan, China) **3** (6) 777 (1982) (English ed.)
- Hemholtz H *Phil. Mag.* Nov. (1868)
- Itoh N I *Proc. Roy. Soc. London* **A375** 565 (1981)
- Keller J B *J. Fluid Mech.* **4** 607 (1958)
- Leibovich S, Seebass A R (Eds.) *Nonlinear Waves* (Cornell Univ. Press, USA, 1974)
- Miles J W *Phys. of Fluids* **19** 1063 (1976)
- Nayfeh A H *Introduction to Perturbation Techniques* (New York: Wiley, 1981)
- Rayleigh (Lord) *Proc. London Math. Soc.* (1) x. 4 (Papers i.361) (1879)
- Riabouchinsky D *Acad. Sci. de Paris Comptes Rendus* **195** 998 (1932)
- Scorer J J *Water Waves* (New York: Interscience, 1953)
- Shrira V I *Izvestiya AN SSSR. Phisika Atmosfery i Okeana* **17** (1) 76 (1981)
- Usher J R, Craik A D D *J. Fluid Mech.* **66** 209 (1974)

NONLINEAR LONG WAVES ON WATER AND SOLITONS

R.Kh. Zeytounian

*Université des Sciences et Technologies de Lille 1,
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées,
Département de Mécanique Fondamentale, Bâtiment M 3,
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE
Tel. (1-033) 42-36-64-98
E-mail: vipavlov@omega.univ-lille1.fr (for Prof. R.Kh. Zeytounian)*

The water — wave problem has been pivotal in the history of nonlinear wave theory. This problem is one of most interesting and successful applications of nonlinear hydrodynamics (NLHD). Waves on the free surface of a body of water (perfect liquid) have always been a fascinating subject, for they represent a familiar yet complex phenomenon, easy to observe but very difficult to describe! The archetypal model equations of Kordeweg and de Vries (KdV) and of Boussinesq, for example, were originally derived as approximations for water waves, and research into the problem has been sustained vigorously up to the present day. In the present paper, the derivation of model equations are given in depth, with the rational use of asymptotic methods. Indeed, it is important (from our point of view) to understand that in some cases the establishment of these approximate equations is intuitive and heuristic and in fact it is not clear how to insert the model equation, under the consideration, into a hierarchy of rational approximations which in turn result from the exact formulation of the water — wave problem chosen at the beginning.

PACS numbers: 43.25.Fe, 43.25.Rq

Bibliography — 141 references

Received 5 October 1994, translated version into Russian 20 July 1995