Ноябрь 1995 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 165, № 11*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Парадоксы вращения сверхтекучей жидкости

Д.А. Киржниц, С.Н. Юдин

Явление сверхтекучести (как и родственное ему явление сверхпроводимости) имеет квантовую природу и потому уже само по себе парадоксально с точки зрения классического или общечеловеческого опыта. Достаточно сказать, что в этих явлениях мы сталкиваемся с абсолютным исчезновением таких характеристик, как вязкость или сопротивление (поэтому, например, циркуляция сверхпроводящего тока по замкнутой цепи без источников если и затухла бы, то за время, много большее возраста Вселенной). Вместе с тем, целый ряд необычных или неожиданных особенностей присущ и конкретным явлениям физики сверхтекучести. О некоторых из них пойдет речь в этой статье.

PACS numbers: **97.60.Gb**

Содержание

1. Предварительные сведения

Мы рассматриваем лишь медленное вращение сверхтекучей жидкости (СЖ), угловая скорость которого ниже порога Ω_c образования первой вихревой нити [1, 2]. Вращение считается стационарным и происходящим при фиксированном моменте системы. Параметр порядка СЖ предполагается скалярным. Обсуждается лишь случай нерелятивистской сверхтекучей среды, давление которой мало сравнительно с плотностью энергии покоя.

В дальнейшем под СЖ понимаются электронейтральные среды — жидкий ^{4}He и нейтронная жидкость. Последняя, как известно (см., например, [3]), служит веществом сердцевины нейтронных звезд — пульсаров. Однако выводы этой статьи непосредственно к пульсарам не применимы: реальная угловая скорость пульсаров на много порядков превышает величину Ω_c и в их сердцевине имеется развитая система вихревых нитей [4].

Д.А. Киржниц, С.Н. Юдин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53, Россия
Тел. (095) 135-75-11
E-mail: kirzhnit@lpi.ac.ru

Статья поступила 11 августа 1995 г.

Тем не менее, мы будем использовать некоторые факты пульсарной физики как исходный пункт при формулировке обсуждаемых ниже парадоксов, которые имеют в действительности существенно более общий характер.

В этом, носящем вводный характер разделе приводятся общеизвестные утверждения, касающиеся вращения жидкости (в том числе СЖ) в сосуде. Скорость точек твердого сосуда, вращающегося с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, определяется элементарной формулой

$$\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega}\,\mathbf{r}]. \tag{1}$$

Тем же законом "твердотельного вращения" описывается режим вращения жидкости, который обеспечивает минимум величины $E - \mathbf{\Omega M}$, т.е. энергии E при заданном моменте $\mathbf{M}$. При этом на границе жидкости и сосуда выполняется условие непрерывности вектора скорости (для вязкой жидкости) или его нормальной к поверхности сосуда компоненты (для СЖ).

Закон (1) реально выполняется при вращении вязкой жидкости. Однако, отвечая непотенциальному течению $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\mathbf{\Omega}$, для СЖ он выполняться не может, так как скорость СЖ $\mathbf{v}_s$ обязана подчиняться условию

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0 \tag{2}$$

(см. Приложение I). В обсуждаемом в этом разделе случае осесимметричного сосуда нормальная компонента его скорости равна нулю и СЖ остается неувлеченной вращением сосуда:

$$\mathbf{v}_s = 0\,, \tag{3}$$

что прямо соответствует отсутствию сил трения в СЖ.

Это, однако, правильно лишь в случае достаточно медленного вращения $\Omega < \Omega_c$. Дело в том, что, как уже говорилось, минимуму энергии отвечает не покой жидкости (3), а ее твердотельное вращение (1), причем уже частичное увлечение жидкости приведет при достаточно большом Ω к выигрышу энергии. Такого рода увлечение действительно возникает при $\Omega \geqslant \Omega_c$, когда на оси вращения образуется тонкий нормальный "кор" вихревой нити, а в образовавшейся неодносвязной области СЖ приходит в состояние потенциального "ирротационного" вращения. С увеличением угловой скорости число вихревых нитей растет, а усредненная скорость возникающего сложного течения приближается к величине (1) [1, 2].

Описанная картина укладывается в рамки общей аналогии вращательных и магнитных явлений, восходящей к теореме Лармора [5], которая устанавливает возможность заменить воздействие слабого магнитного поля с индукцией B переходом к вращающейся с угловой скоростью $\Omega = eB/2mc$ системе отсчета. Соответствие $\Omega \Leftrightarrow B$, $M \Leftrightarrow H$ (подобно моменту M магнитное поле H, т.е. поле внешних источников, фиксировано) позволяет сопоставить картину вращения СЖ и поведение сверхпроводника 2-го рода в магнитном поле [1]: с возрастанием $\mathbf{H}\,(\mathbf{M})$ полное выталкивание поля $\mathbf{B}$ (угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$), т.е. эффект Мейсснера (неувлечение СЖ), сменяется появлением сначала одной, а затем многих вихревых нитей, вплоть до полного проникновения в систему поля $\mathbf{B}$ (ротора скорости).

2. Неосесимметричное вращение

Если ось вращения не совпадает с осью аксиальной симметрии СЖ, то нормальная к поверхности сосуда компонента его скорости отлична от нуля и СЖ оставаться в покое не может. Однако, увлекаясь сосудом, СЖ должна двигаться потенциальным образом (см. (2)). Это требует вращения СЖ относительно сосуда в сторону, противоположную его вращению, с тем чтобы роторы скорости этих двух движений компенсировали друг друга [1].

Конкретно будут рассмотрены три задачи (рис. 1): а) центральное вращение неравноосного эллипсоида (или эллиптического цилиндра), б) эксцентричное вращение шара (или кругового цилиндра) с осью вращения внутри тела, в) то же с осью вращения вне тела. Эти задачи возникают при описании, соответственно, несферического атомного ядра, стакана с гелием на Северном полюсе, чуть сдвинутого относительно земной оси и участвующего в суточном вращении Земли, пульсара, входящего в состав двойной системы и участвующего в орбитальном движении вокруг центра масс системы. Охватывая перечисленные задачи, будем считать границу СЖ и сосуда поверхностью 2-го порядка

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + b_1 x + b_2 y = c\,,$$

где (квадратичная) зависимость от z перенесена в правую часть. Интересуясь лишь картиной линий тока установившегося течения, можно ограничиться рассмотрением того момента времени, когда оси x и y совпадают с осями симметрии (главными осями) системы (см. книгу [6], § 10, где приведено решение задачи а)). Ось z совмещена с осью вращения.

Поскольку, как оказывается, течение имеет плоский характер (оно происходит в плоскостях, параллельных плоскости xy) и жидкость считается несжимаемой ($\operatorname{div}\mathbf{v}_s = 0$), удобно использовать метод комплексного потенциала [6]. Он состоит в определении аналитической функции $w = \varphi + i\psi$ переменной $\zeta = x + iy$, где φ — потенциал скорости (пропорциональный фазе конденсата, см. Приложение I), ψ — функция тока, определяющая линии тока уравнением $\psi = \mathrm{const}$. Условие на границе СЖ и сосуда требует, чтобы в системе покоя последнего (для перехода к ней нужно из скорости вычесть величину $[\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{r}]$) эта граница совпадала с одной из линий тока. Всем этим условиям удовлетворяет выражение

$$w = \frac{\Omega}{a_1 + a_2}\left[\frac{i\,(a_1 - a_2)}{2}\,\zeta^2 + (b_2 + ib_1)\,\zeta + \mathrm{const}\right], \qquad (4)$$

аналитичность которого исключает возможность частичного покоя СЖ (см. предыдущую сноску).

Картина линий тока в системе покоя сосуда изображена на рис. 2 и соответствует тому относительному движению СЖ, которое восстанавливает потенциальность течения (см. выше). Аналогичная картина в лабораторной системе изображена на рис. 3. Особенно неожиданным кажется ответ в случае эксцентричного вращения (рис. 3б, в): потенциальность достигается тем, что СЖ течет как монолит с постоянной скоростью, не зависящей от расстояния до оси вращения:

$$v_x = \frac{\Omega b_2}{2a}, \qquad v_y = -\frac{\Omega b_1}{2a} \quad (a = a_1 = a_2)\,. \qquad (4а)$$

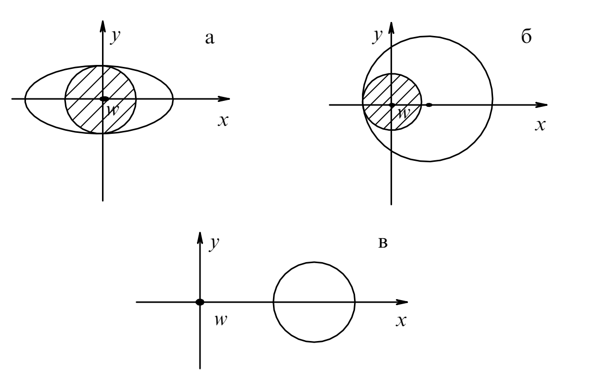

Рис. 1

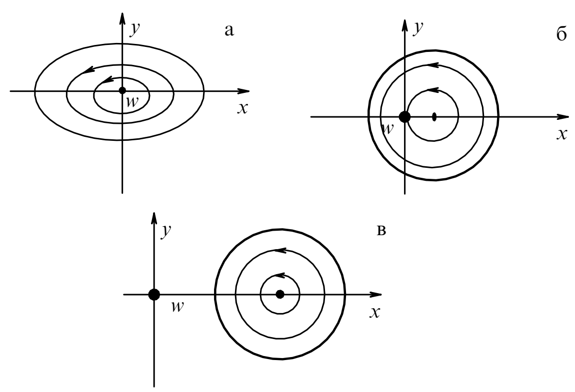

Рис. 2

[1] Предполагаемая иногда картина течения, в котором непосредственно не увлекаемая сосудом часть СЖ (заштрихованная на приводимом ниже рис. 1) покоится, в действительности не верна (см. ниже).

В заключение этого раздела мы отметим несколько фактов, относящихся к эксцентричному вращению кругового цилиндра. Можно показать, что критическая угловая скорость образования первой вихревой нити

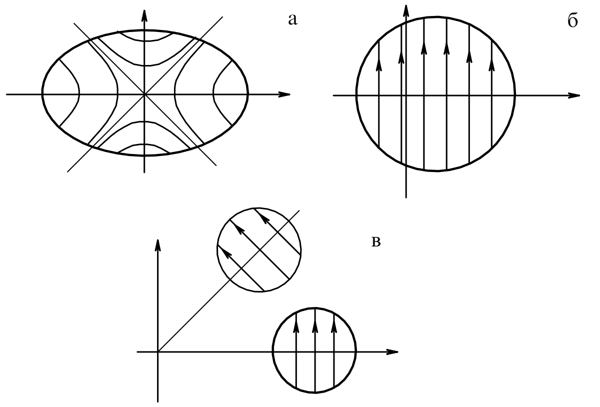

Рис. 3

(которая возникает по оси цилиндра, так как при вращении в системе покоя сосуда только эта точка СЖ покоится (см. выше)) не изменится по сравнению с Ω_c для симметричного вращения (см. [1, 2]). Если предположить, что угловая скорость эксцентричного вращения кругового цилиндра $\Omega \gg \Omega_c$ и существует вихревой массив, то суперпозиция усредненной скорости, вызываемой вихревым массивом, и скорости (4а) приводит к твердотельному вращению СЖ относительно эксцентричной оси.

3. Бесконтактное вращение сверхтекучей жидкости

Передача вращения от сосуда к СЖ может происходить не только благодаря их прямому контакту, но и под воздействием дальнодействующего поля, созданного вращением сосуда (или некоторой его части). Рассмотрение этого круга вопросов будет вестись применительно к простейшему осесимметричному случаю (см. [7]).

Начнем с хорошо изученной задачи о поведении сверхпроводника во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$, созданном вращательным движением электронов в обмотке электромагнита со скоростью $\mathbf{v}_e$. Это поле создает противоток электронов сверхпроводника (образующих заряженную СЖ), экранирующий источник внешнего поля и выталкивающий последнее из объема сверхпроводника (эффект Мейсснера). Количественно воздействие магнитного поля описывается "удлиненным" градиентом параметра порядка $\nabla - ie\mathbf{A}$ в выражении для сверхпроводящего тока, что ведет к соотношению Лондонов $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = -e\mathbf{B}/m$, или, в калибровке $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, к формуле

$$\mathbf{v}_s = -\frac{e}{m}\,\mathbf{A}\,. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал, e и m — заряд и масса электрона. Мы видим, таким образом, что в отличие от случая незаряженной СЖ (см. (3)) воздействие на СЖ поля, "удлиняющего" градиент параметра порядка, вовлекает СЖ во вращение. Тем самым, устанавливается прямая динамическая связь между электронами "сосуда" (обмоток электромагнита) и СЖ.

Этот вывод мог бы иметь значение для физики пульсаров. Хорошо известно, что период пульсара, монотонно нарастая на масштабах порядка сотен — тысячи лет, испытывает время от времени внезапные сбои, после которых релаксирует за время порядка месяцев — года [3]. Столь гигантская величина времени релаксации свидетельствует об аномальной слабости динамической связи коры пульсара (ее вращение и задает период) и его сердцевины (в ней находится основная масса звезды). Эта аномалия и служит свидетельством сверхтекучести нейтронного вещества сердцевины как результата куперовского спаривания нуклонов за счет ядерных сил.

Важно подчеркнуть, что это объяснение требует достаточно малой эффективности иных, отличных от вязкости механизмов динамической связи сердцевины и коры. Один из таких механизмов подобен только что рассмотренному механизму связи внешнего и сверхпроводящего токов и основан на учете магнитоподобных (зависящих от скорости) сил в общей теории относительности (ОТО), порожденных вращением коры. Такие гравимагнитные силы определяются компонентами $g_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) метрического тензора и ведут к появлению эффектов Лензе–Тирринга [5, 8].

Оценка эффективности этого механизма применительно к реальному пульсару должна, конечно, вестись с учетом развитой системы вихревых нитей (см. раздел 1). Мы ограничимся в оставшейся части этой статьи обсуждением выходящего за рамки физики пульсаров более простого вопроса: вращается ли СЖ под действием гравимагнитных сил (как сверхпроводящая жидкость под действием магнитного поля) или же остается в покое (как незаряженная СЖ типа ^{4}He). Парадоксально, что одновременно реализуются обе эти возможности.

4. Гравимагнитное вращение сверхтекучей жидкости

Переходя к обсуждению только что поставленного вопроса, мы сразу же сталкиваемся с противоречиями. Соображения, связанные со структурой градиента параметра порядка (раздел 3), говорят в пользу отсутствия вращения СЖ: "удлинение" в ОТО состоит в переходе от обычной производной к ковариантной, а в применении к скалярному параметру порядка ψ последняя совпадает с обычной производной (см. формулу (П. 2)). Отсюда, как и в случае гелия, вытекает неподвижность СЖ и справедливость соотношения (3).

Однако, с другой стороны, известно существование близкого подобия уравнений ОТО (для слабого поля) и электродинамики, проявляющегося при замене (для поперечных компонент полей)

$$e\,\mathbf{A} \Leftrightarrow m\mathbf{g} \quad (g_\alpha = g_{0\alpha})\,, \tag{6}$$

$$e^2 \to -4m^2 G\,, \tag{7}$$

где G — постоянная Ньютона. Применительно к (5) эта замена ведет к соотношению Девитта [9]

$$\mathbf{v}_s = -\mathbf{g}\,, \tag{8}$$

применительно к уравнению $\Delta\mathbf{A} = 4\pi e\rho\mathbf{v}/m$ (ρ — плотность) — к гиромагнитному аналогу уравнения Лондонов теории сверхпроводимости

$$(\Delta + \varkappa_s^2)\,\mathbf{g} = \varkappa_n^2\mathbf{v}_n \quad (\varkappa^2 = 16\pi G\rho)\,, \tag{9}$$

где s и n — индексы сверхтекучей и нормальной компонент вещества.

Формулы (8), (9) свидетельствуют о сходстве гравимагнитного и сверхпроводящего случаев: в обоих случаях под действием соответствующего поля СЖ приходит во вращение, которое в свою очередь порождает вторичное поле и т.д. Однако существенным различием этих случаев служит "неправильный" знак перед вторым членом в скобках (9), порожденный знаком "минус" в (7) (одноименные заряды, т.е. массы, в гравитации притягиваются, а не отталкиваются, как в электродинамике). Поэтому в гравимагнитном случае возникает увлечение, а не противоток СЖ, вторичное поле не ослабляет, а усиливает первичное (идеальный парамагнетизм, см. [10], гл. 9). В динамических уравнениях, отвечающих (9), возник бы тахионный спектр возбуждений $\omega^2 = k^2 - \varkappa_s^2$, что могло бы привести к "самораскрутке" системы (вращательный аналог нестабильности Джинса).

Для разрешения противоречия между (3) и (8) нужно учитывать различие ко- и контравариантных компонент скорости, одна из которых может обратиться в нуль при конечности другой именно в случае $g_{0\alpha} \neq 0$. Кроме того, нужно избавиться от превышения точности в (9) (второй член в скобках имеет лишний порядок по G). Все это достигается переходом к последовательному в смысле ОТО описанию сферического тела (задача Шварцшильда), приведенного в состояние медленного вращения, в линейном по Ω приближении. В сферических координатах $x^\alpha = (r, \theta, \varphi)$ с осью по оси вращения отличны от нуля лишь компоненты векторов с пространственным индексом 3, причем в силу осевой симметрии физические величины не зависят от координаты x^3.

Отлична от нуля, в частности, нормальная скорость, отвечающая твердотельному вращению (1) $x^3 = x_0^3 + \Omega t$,

$$v_n^3 = \dot{x}^3 h^{-1/2} = \Omega h^{-1/2} \quad (h = g_{00}) .$$

Что же касается скорости СЖ, то в равенстве (3) фигурирует *ковариантная* компонента вектора 4-скорости [5]

$$u_i = (h^{1/2}, 0, 0, v_3), \qquad u^i = (h^{-1/2}, 0, 0, v^3) ,$$

а само это равенство записывается в виде

$$v_{s3} = 0 . \tag{3a}$$

Это следствие того факта, что градиент фазы параметра порядка (см. Приложение I) пропорционален именно величине u_i, причем равенство (3а) прямо следует из осевой симметрии системы. Само это равенство, записанное в виде $g_{3i} u^i = 0$, определяет контравариантную компоненту 4-скорости соотношением, обобщающим (8):

$$v_s^3 = -g^3 h^{-1/2} \qquad (g^3 = g_{03}/g_{33}) . \tag{8a}$$

Таким образом, входящая в (8) скорость — *контравариантная* компонентна 4-скорости.

5. Гравимагнитное вращение сверхтекучей жидкости (физические аспекты)

Формально разрешив возникшее противоречие утверждением о том, что подобно сверхпроводнику ведет себя СЖ с точки зрения контравариантной компоненты ее скорости, а подобно сверхтекучему ^{4}He — с точки зрения ковариантной компоненты, перейдем к рассмотрению нетривиальных физических аспектов этого утверждения.

Равенство нулю ковариантной компоненты скорости (см. (3а)) не может не привести к исчезновению хотя бы части динамических проявлений вращения СЖ. Это относится, в частности, к генерации гравимагнитного поля вращающимся веществом: источником такой генерации служит вращение лишь нормальной, но не сверхтекучей компоненты вещества. Это прямо видно из уравнения Эйнштейна (p — давление)

$$R_{03} - \frac{1}{2}\, g_{03} R = \frac{\varkappa^2}{2}\, u_0 v_3 - 8\pi G p g_{03} ,$$

в котором источник, отвечающий СЖ, равен нулю. Если же выводить уравнение, аналогичное (9), из уравнения Эйнштейна для R_0^3, то можно показать (см. Приложение II), что источнику $(\varkappa^2/2)\, u_0 v_s^3$ в правой части будет соответствовать в левой части геометрический член высшего порядка по G, точно компенсирующий благодаря (8а) этот источник. Соответственно будет отсутствовать и вклад вращения СЖ в асимптотику гравимагнитного поля g^3 на больших расстояниях от тела, которая определяет величину момента системы (см. [5])

$$g^3 \to -2GM/r^3 \qquad (r \to \infty) .$$

Таким образом, вращение СЖ не дает вклада в момент системы.

Однако такое вращение, т.е. отличие от нуля скорости v_s^3 (см. (8а)), проявляется в следующем порядке по Ω в возникновении мениска на свободной поверхности СЖ (если бы она имелась). Это прямо следует из уравнения Бернулли для потенциального течения, которое (уравнение) можно вывести из уравнений гидродинамики ОТО и которое имеет в пределе малых скоростей, нерелятивистского вещества и слабого поля свой стандартный вид

$$p + \rho\, \frac{v^2}{2} + \chi = \text{const}, \qquad h = 1 + 2\chi + \ldots ,$$

где $v^2 = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$ (нельзя путать v_{s3} с величиной $g_{3\alpha}\, v_s^3$, так как первая представляет собой ковариантную компоненту 4-вектора, вторая — 3-вектора).

Сказанное становится более ясным, если ввести новую систему отсчета (относящиеся к ней величины обозначены штрихом), вращающуюся относительно исходной (галилеевой на бесконечности) с угловой скоростью ω вокруг той же оси. Поскольку $x^{3'} = x^3 + \omega t$ (остальные координаты в обеих системах совпадают), справедлив следующий закон преобразования для тензора g_{ik}:

$$\begin{aligned} &h' = h - 2\omega g^3 g_{33} + \omega^2 g_{33}, \\ &g^{3\prime} = g^3 - \omega, \qquad g'_{33} = g_{33}, \end{aligned} \tag{10}$$

и компонент 4-скорости (см. раздел 4):

$$\begin{aligned} &u'_0 = u_0 - \omega v_3, \qquad v'_3 = v_3; \\ &u^{0\prime} = u^0, \qquad v^{3\prime} = v^3 + \omega u^0. \end{aligned} \tag{11}$$

При выборе $\omega = g^3$, как видно из (10), $g^{3\prime} = 0$, что означает компенсацию ускорения Кориолиса (член $-\omega$ в (10)) с ускорением сил Лензе–Тирринга (член g^3 там же).

В этом смысле выбранная система может считаться инерциальной и потому часто говорят об увлечении инерциальной системы вращением массивного тела в ОТО.

Существенно, что в такой системе, как видно из последнего равенства (11) и (8а), $v^{3\prime} = 0$. Одновременно в силу равенства $g^{3\prime} = 0$ исчезает и компонента $v_3^\prime = g_{33}\, v^{3\prime}$. Поэтому вращение массивного тела увлекает и СЖ, которая покоится в инерциальной системе. Последнее обстоятельство и означает отсутствие каких-либо физических проявлений вращения СЖ, причем, согласно второму равенству (11), это справедливо во всех системах отсчета, в том числе и в исходной [2].

Почему же такие соображения не запрещают появления мениска? По той же причине, по какой теорема Лармора справедлива лишь в первом порядке по угловой скорости. Дело в том, что и свойство инерциальности вращающейся системы отсчета справедливо лишь в том же порядке: квадратичное по ω ускорение (в том числе центробежное — последний член в первом равенстве (10)) не компенсируется соответствующими гравимагнитными членами и остается отличным от нуля в новой системе отсчета. Между тем, мениск, в отличие от других обсуждаемых эффектов, — эффект 2-го порядка по ω.

Приложения

I. Гидродинамика сверхтекучей жидкости в ОТО

Исходим из общерелятивистского уравнения Клейна–Гордона для скалярной волновой функции конденсата ψ (см., например, [12])

$$D^i D_i\, \psi + F(|\psi|^2)\, \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_i \left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\, \partial_k \psi\right) + F(|\psi|^2)\, \psi = 0\,, \qquad (\Pi.1)$$

где D_i — символ ковариантной производной, g — детерминант метрического тензора. Переходим к гидродинамической формулировке квантовой механики (представлению Маделунга), подставляя в (П.1) $\psi = v e^{i\alpha}$. Мнимая часть полученного выражения дает уравнение непрерывности

$$D_i j^i = 0\,, \qquad j_i = \frac{i}{2}\,(\partial_i \bar\psi \psi - \bar\psi\, \partial_i \psi) = v^2 \partial_i \alpha\,, \qquad (\Pi.2)$$

действительная часть — соотношение

$$\partial_i \alpha\, \partial^i \alpha = k^2 = F(v^2) + \frac{D^i D_i v}{v}\,. \qquad (\Pi.3)$$

Вектор тока $j_i = n u_i$ определяет с учетом условия $u_i u^i = 1$ и (П.3) выражения для концентрации n и 4-скорости u_i:

$$n = k v^2, \qquad u_i = \frac{\partial_i \alpha}{k}\,. \qquad (\Pi.4)$$

Как видно из (П.4), в общем случае потенциалом обладает не скорость, а величина $w/n u_i$, где с приходящейся на одну частицу тепловой функцией w/n отождествлена величина $k = \sqrt{F + D_i D^i v / v}$ (см. [6]). Лишь в нерелятивистском пределе, когда $k \to m$, мы приходим к потенциальному в обычном смысле этого термина течению и к соотношениям (2), (3).

Дифференцирование (П.3) с использованием (П.4) дает уравнение Эйлера [6]

$$(u^k D_k)\, u_i = \left(\partial_i - (u^k \partial_k)\, u_i\right) \ln \frac{w}{n}\,. \qquad (\Pi.5)$$

Из него в интересующем нас случае $\partial_0 = 0$ и $u_\alpha = 0$ можно получить общерелятивистское уравнение Бернулли. Для этого нужно использовать общие соотношения

$$g^{00} = \frac{\gamma^2}{g_{00}}\,, \qquad g^{0\alpha} = -\gamma^2 g^{-1}_{\alpha\beta}\, \frac{g_{0\beta}}{g_{00}}\,,$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{-1}_{\alpha\beta} + \gamma^2 g^{-1}_{\alpha\mu} g_{0\mu}\, g^{-1}_{\beta\nu}\, \frac{g_{0\nu}}{g_{00}}\,;$$

$$u_0 = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\gamma}\,, \qquad u_\alpha = 0;$$

$$u^0 = \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad u^\alpha = -\gamma g^{-1}_{\alpha\beta}\, \frac{g_{0\beta}}{\sqrt{g_{00}}}\,,$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{1/2}$, $v^2 = -g_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$. Уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\gamma}\, \frac{w}{n} = \mathrm{const} \qquad (\Pi.6)$$

и переходит в случае слабых полей, малой скорости движения и нерелятивистского уравнения состояния в стандартное уравнение Бернулли (см. раздел 5).

II. Уравнение для гравимагнитного поля

Статические уравнения Эйнштейна, линейные по угловой скорости вращения сферически симметричного тела, имеют вид (см. [5], § 95)

$$D_\beta f^{\alpha\beta} + 3 \partial_\beta \ln \sqrt{h}\, f^{\alpha\beta} = -\frac{\varkappa^2}{2\sqrt{h}}\, v^\alpha\,, \qquad (\Pi.7)$$

где

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\, \tilde g_\beta - \partial_\beta\, \tilde g_\alpha\,, \qquad \tilde g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,.$$

Уравнение (П.7) приводится к виду

$$\left[\beta\left(\partial_r^2 + \frac{4}{r}\, \partial_r\right) - \frac{1}{4}\,(\varkappa_n^2 + \varkappa_s^2)\, r \partial_r - \varkappa_n^2\right] g^3 = \varkappa_n^2 \Omega\,, \qquad (\Pi.8)$$

где

$$\beta = -g^{-1}_{11} = 1 - \frac{1}{2r} \int_0^r \mathrm{d}r\, r^2 (\varkappa_n^2 + \varkappa_s^2)\,.$$

Как видно, член, описывающий генерацию поля g вращающейся СЖ, действительно выпадает из уравнения.

Уравнение (П.8) может быть решено в случае сверхтекучей сердцевины тела (масса M_s, радиус R) и тонкой нормальной коры (масса M_n), если плотности $n_{s,n}$ постоянны. Постоянной оказывается и величина g^3 в сердцевине. Обозначая $\lambda = r_g / R$, $r_g = 2GM$,

[2] Отсутствие момента у тела, покоящегося во вращающейся инерциальной системе, хорошо известно (см., например, [11]).

$\theta = (1-\sigma)/(1-\sigma/4)$, $\sigma = [1-\lambda_n/(1-\lambda_s)]^{1/2}$, находим выражение для момента

$$M = \frac{\theta R^3 \Omega}{2G} \tag{П.9}$$

и для эффективной угловой скорости конденсата

$$\frac{\Omega_{\mathrm{ef}}}{\Omega} = \frac{v_s^3}{v_n^3} = g^3 = \theta \,. \tag{П.10}$$

При $\lambda_n \ll \lambda_s$

$$M = \frac{2}{3}\, M_n R^2 \, \frac{\Omega}{1-\lambda_s} \,, \qquad \frac{\Omega_{\mathrm{ef}}}{\Omega} = \frac{2}{3}\, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_s} \,,$$

где знаменатель имеет чисто геометрический смысл, будучи связан с величиной β в (П.8), входящей в лапласиан в кривом пространстве.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика*. Ч. II (М.: Наука, 1978)
2. Халатников И М *Теория сверхтекучести* (М.: Наука, 1971); Тилли Д Р, Тилли Дж *Сверхтекучесть и сверхпроводимость* (М.: Мир, 1977)
3. Манчестер Р Н, Тейлор Дж Х *Пульсары* (М.: Мир, 1980)
4. Гинзбург В Л, Киржниц Д А *ЖЭТФ* **47** 2006 (1964)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
7. Андреев А Ю, Киржниц Д А, Юдин С Н *Письма в ЖЭТФ* **61** 825 (1995)
8. Вейнберг С *Гравитация и космология* (М.: Мир, 1975)
9. De Witt B S *Phys. Rev. Lett.* **16** 1092 (1966)
10. *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости* Под ред. В.Л. Гинзбурга и Д.А. Киржница (М.: Наука, 1977)
11. *Черные дыры, мембранный подход* Ред. К. Торн, Р. Прайс, Д.Макдональд (М.: Мир, 1988)
12. Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях* (М.: Атомиздат, 1980)

THE PARADOXES OF SUPERFLUID LIQUID ROTATION

D.A. Kirzhnits, S.N. Yudin
P. N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 117924 Moscow, Russia
Tel. (*7-095*) *135-75 11*
E-mail: kirzhnit@lpi.ac.ru

The phenomenon of superfluidity (like the related phenomenon of superconductivity) has a quantum nature, and so is a paradox from the point of view of classical physics and human experience. It is enough to say that in these phenomena one encounters the disappearance of such characteristics as viscosity and resistance (so, for example, the damping of the circulation of a superconductive current along a closed circuit without sources would need more time then the age of the universe). At the same time the concrete phenomenon of superfluidity physics has plenty of unusual and unexpected features, some of which are discussed.

PACS numbers: **97.60.Gb**

Bibliography — 12 references

Received 11 August 1995