Январь 1995 г. *Том 165, № 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Коллективные эффекты в тормозном излучении частиц плазмы

В.Н. Цытович

Тормозное излучение в классическом приближении соответствует рассеянию виртуальных полей сталкивающихся электрона и иона на налетающем электроне. Коллективные эффекты в тормозном излучении коренным образом могут изменить сечения тормозного излучения из-за того, что рассеяние виртуальных полей сталкивающихся частиц происходит на экранирующих дебаевских зарядах, причем рассеяние на ионах (которое ничтожно для столкновений отдельных частиц) становится значительным. Поэтому коллективные эффекты могут качественно изменить процессы тормозного излучения в плазме. Показывается, как современная теория флуктуаций в плазме с учетом нелинейных флуктуаций приводит к точным сечениям тормозного излучения с учетом коллективных эффектов.

PACS numbers: 41.60; **52.20.–j**; 52.25.Gj; **52.90.+z**

Содержание

В.Н. Цытович. Институт общей физики РАН
117942 Москва, ул. Вавилова 38
Тел. (095) 135-02-47
Факс (095) 135-02-70
E-mail: tsyt@ewm.gpi.msk.su

Статья поступила 21 сентября 1994 г., после доработки 5 октября 1994 г.

1. Введение

Часто встречающееся заблуждение состоит в том, что считается достаточным знать сечения процессов для предсказания кинетики эволюции физических систем, состоящих из большого числа частиц. В действительности, ансамбль взаимодействующих частиц может в корне изменить сечения процессов. Эти эффекты признано называть коллективными. (В настоящей статье мы полностью отвлечемся от других коллективных процессов, обязанных неустойчивостям.) Пример простейшей системы почти свободных частиц, каковой является плазма, здесь наиболее яркий. И хотя этот факт, в общем, известен тем, кто непосредственно работает в таких областях, как плазменная диагностика, теория плазмы или астрофизика, до сих пор даже в учебниках встречается терминология, которая явно говорит о том, что имеется не только терминологическое "несоответствие", но подчас отсутствует ясное понимание физики явлений.

Самое характерное явление такого рода — изменение сечений рассеяния в плазме для длин волн, больших радиуса дебаевского экранирования, когда электроны и ионы при наличии плазмы как бы меняются местами. В вакууме (для отдельных изолированных частиц) рассеяние электромагнитных волн на электронах в m_e^2/m_i^2 раз меньше рассеяния на ионах, тогда как в плазме при доминировании коллективных эффектов рассеяние на ионах примерно в то же число раз больше рассеяния на электронах.

Объяснение этому, на первый взгляд, очень простое. Электромагнитная волна приводит в движение в основном электроны. Как электроны, так и ионы экранированы электронами и ионами: электроны — недостатком электронов и избытком ионов, а ионы — недостатком ионов и избытком электронов. Для длин волн, намного больших характерной длины экранирования (дебаевской длины), и достаточно высоких частот "центральный" электрон и его экранирующее поляризационное облако почти нейтральны. При высоких частотах в основном смещаются электроны поляризационного облака и волна почти не создает дипольного рассеянного излучения, тогда как для ионов в основном колеблется электронное облако и, так как заряд его равен (или, точнее, почти равен) заряду иона, ион рассеивает примерно так же, как электрон в вакууме.

В действительности, однако, такое простое объяснение подразумевает, что все частицы плазмы заэкранированы "другими" частицами. Но "другие" частицы — это те же частицы плазмы. Поэтому требуется строго показать правильность этого "простого" объяснения, т.е. правильность того, что каждая частица является центром рассеяния и участвует в экранировании полей других частиц. Это можно сделать только на основе представлений о флуктуациях, когда в усредненных движениях частица выступает как рассеивающий центр, а во флуктуациях она экранирует другие частицы. Оказывается, что данное объяснение соответствует действительности.

Интересно, что такая картина, как было показано ранее, распространяется не только на рассеяние, но и на столкновения частиц и, как будет показано ниже, на излучение волн при столкновениях частиц, т.е. на тормозное излучение. Поэтому вышеизложенные представления являются общими для всех изменений сечений из-за коллективных процессов.

Следует подчеркнуть, что само экранирование оказывается динамическим, т.е. при больших скоростях "центральных" частиц их поляризационные "шубы" как бы автоматически размываются и экранирование становится малым. При этом сечения стремятся к тем значениям, которые соответствуют пренебрежению коллективными процессами. При малых скоростях (меньших средней тепловой) экранирование является полным и статическим.

Один важный момент стоит отметить прежде, чем начать обсуждение коллективных процессов в тормозном излучении. Он касается самой сути процесса изменения сечений и лучше всего иллюстрируется для процесса рассеяния волн на ионах. Рассеивают в данном случае как бы электроны "шубы", но при этом энергию и импульс (разность энергии и импульса падающей и рассеянной волн) получает только ион. Это видно из всех соотношений, получаемых в теории флуктуаций, в частности из уравнений для изменения распределения ионов при рассеянии.

Из этих уравнений непосредственно следует, что изменение суммарной энергии и импульса волн равно со знаком минус изменению энергии и импульса ионов. В этом, быть может, корень заблуждений или недоговоренностей, существующих в литературе, когда рассеяние приписывают флуктуациям электронной компоненты. Если считать распределение ионов заданным и не учитывать отдачу и получение энергии и импульса при рассеянии, то можно думать, что рассеяние обязано флуктуациям электронов. Но электроны экранирующего облака служат только "промежуточным звеном", а вся энергия и весь импульс передаются ионам.

В этом плане стоит напомнить проблему, рассмотренную И.Е. Таммом [1], а именно, излучение быстрой частицы, движущейся со скоростью, большей скорости света в среде. Вопрос, поставленный в [1], заключается в следующем: излучает сама частица излучение Вавилова–Черенкова или излучает окружающая частицу поляризация? Ответ на этот вопрос состоит в том, что излучает сама частица.

Напомним и результат рассмотренного впервые В.Л. Гинзбургом [2] вопроса о квантовой теории излучения Вавилова–Черенкова. В последнем случае просто очевидно, что энергию и импульс теряет сама частица. Для рассеяния сохраняются те же утверждения, только вместо частоты и импульса волны должны фигурировать разности частот и импульсов падающей и рассеянной волн. В этом отношении в литературе по рассеянию также существует путаница: предпочитают говорить о коллективных эффектах в рассеянии и избегают говорить о том, что рассеивают-то ионы (может быть, из-за опасения, как бы не напутать!). Вместе с тем рассеяние на ионах фигурирует во всех, даже самых первых (см. [3–5, 14]), работах по рассеянию в плазме.

Четкое утверждение о том, что рассеяние происходит именно на ионах, и ясная физическая интерпретация этого явления были впервые сделаны в [6]. Затем был предложен независимый способ подсчета дополнительной амплитуды рассеяния, обязанной поляризационным "шубам" [7, 8]. В монографии [9] предложен простой способ нахождения дополнительных матричных элементов в тормозном излучении частиц, обязанных наличию в плазме их поляризационных "шуб".

В настоящей статье будет показано, как эти матричные элементы возникают из теории флуктуаций, т.е. будет доказана правильность описания динамически экранированных частиц применительно к процессам тормозного излучения. Нужно сказать, что эффекты тормозного излучения рассматривались и ранее, в общей теории флуктуаций [13]. Однако, так же как и для рассеяния, не было выявлено то, что суммарный эффект выражается через вероятность тормозного излучения, содержащую квадрат полного матричного элемента, который включает обычное тормозное излучение и тормозное излучение, обязанное поляризационным "шубам". После того, как такое доказательство было дано, намного облегчается анализ самих процессов тормозного излучения и, в частности, тех новых процессов, которые возникают из-за коллективных эффектов, таких, как тормозное излучение при ион-ионных столкновениях и т.п.

2. Качественное описание коллективных процессов в тормозном излучении

2.1. Почему представление о тормозном излучении "голых" частиц ошибочно при любой плотности плазмы?

Под "голыми" частицами мы подразумеваем такие, которые представляют собой одиночные изолированные частицы в вакууме. Казалось бы, в случае, если излучение происходит в плазме, то при стремлении плотности плазмы к нулю мы будем иметь дело именно с "голыми" частицами. Однако это оказывается неверным.

Действительно, коллективные эффекты должны проявляться наиболее ярко при длинах волн, много больших характерного масштаба длины экранирования. Длина экранирования, как известно, обратно пропорциональна $\sqrt{n}$, где n — плотность плазмы. Поэтому с уменьшением плотности плазмы просто увеличиваются значения длин волн, для которых коллективные эффекты проявляются наиболее ярко.

Вышеприведенное утверждение становится очевидным для тех волн, которые могут существовать, только если их длины намного превосходят длину экранирования. Таковыми являются большинство продольных электростатических волн, например ленгмюровские или ионно-звуковые волны. Для них роль коллективных эффектов не является малой при любой плотности плазмы.

Длина волны электромагнитных волн превосходит электронный дебаевский радиус при

$$\omega \gg \omega_{pe} \frac{c}{v_{Te}} \ ,$$

где ω_{pe} — электронная плазменная частота, c — скорость света, v_{Te} — средняя тепловая скорость электронов. Интервал частот от ω_{pe} до $\omega_{pe}c/v_{Te}$ реально достаточно велик.

2.2. Почему для нерелятивистских частиц тормозное излучение продольных волн является преобладающим?

Почему-то, когда говорят о тормозном излучении, неявно подразумевают тормозное излучение электромагнитных волн. Но все волны, как собственные моды системы, могут также излучаться в столкновениях частиц. К их числу относятся и продольные электростатические волны. При этом в условиях, когда движение частиц является нерелятивистским, скорость света, очевидно, не может входить в интенсивность тормозного излучения электростатических волн, так как она не входит ни в возмущение движения частиц волной, ни в работу поля волны над возмущенным движением частиц, ни в дисперсионные характеристики электростатических волн.

Для излучения электромагнитных волн нерелятивистскими частицами скорость света тоже не входит ни в возмущение движения частиц волной (если, конечно, не касаться исключительно больших интенсивностей, когда скорости осцилляций частиц в поле волны становятся релятивистскими), ни в работу поля волны над возмущенным движением частиц.

Для тормозного излучения электромагнитных волн известно, что фактор c^3 входит в знаменатель обычной формулы тормозного излучения электроном, имеющим импульс $\mathbf{p}$:

$$Q_{\mathbf{p},\,\omega} = \frac{16 e_\alpha^4 e_\beta^2 n_\beta}{3 m_\alpha^2 v_\alpha c^3} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \ . \tag{1}$$

Здесь $Q_{\mathbf{p},\,\omega}$ — мощность излучения в интервале $\mathrm{d}\omega$, e_α — заряд налетающей частицы (электрона), m_α — масса налетающей частицы, e_β — заряд тяжелой частицы (иона), n_β — плотность тяжелых частиц, v_α — скорость налетающей частицы (определяемая ее импульсом $\mathbf{p}$), $\rho_{\max}/\rho_{\min}$ — отношение максимального и минимального прицельных параметров. Фактор c^3 возникает только из дисперсионных соотношений для электромагнитных волн $\omega = kc$.

Из соображений размерностей представляется очевидным, что для электростатических волн в формулу тормозного излучения вместо $1/c^3$ войдет $1/v_{\mathrm{ph}}^3$, где $v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$ — фазовая скорость электростатических волн. Но это означает, что чем меньше фазовая скорость волны, тем больше интенсивность тормозного излучения. Продольные волны характеризуются именно тем, что они могут иметь довольно низкие фазовые скорости. Так, для ленгмюровских волн они могут принимать значения, близкие к тепловой скорости электронов, для ионно-звуковых волн, соответственно, — близкие к тепловой скорости ионов.

Из вышеприведенной оценки прямо следует, что тормозное излучение электростатических волн нерелятивистскими частицами должно намного превосходить тормозное излучение электромагнитных волн. Для нерелятивистских частиц, если специально не интересоваться излучением электромагнитных волн, можно ограничиться рассмотрением тормозного излучения электростатических плазменных волн. Кстати, потери энергии нерелятивистских частиц на тормозное излучение будут определяться в основном именно продольными волнами, так как вклад поперечных волн будет малым. Это обстоятельство практически не учитывается в приложениях тормозного излучения как при интерпретации космических источников излучения, так и в лабораторных экспериментах.

В литературе отсутствует подробное изложение вопроса о тормозном излучении продольных волн. Поэтому мы должны начать с самых простых оценок.

2.3. Тормозное излучение продольных волн "голыми" частицами

Для продольных волн пренебрежение коллективными процессами строго не является законным, так как их длины всегда больше длины экранирования. Однако при сопоставлении с результатами по коллективному тормозному излучению важно иметь выражение для тормозного излучения "голых", неэкранированных, частиц. Мы здесь рассмотрим случай, когда обе сталкивающиеся частицы (электрон и ион) не экранированы, а излучение обязано только тому, что ион своим полем отклоняет электрон от прямолинейного движения, т.е. буквально тот процесс, который обычно имеют в виду при тормозном излучении электромагнитных волн.

Для нахождения мощности излучения подсчитаем работу поля излучаемой волны над током, обязанным изменению траектории электрона, усредненную по всем положениям ионов $\mathbf{r}_\beta$, которые встречаются на пути электрона, имеющего начальный импульс $\mathbf{p}$:

$$Q_{\mathbf{p}} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathrm{d}\mathbf{r}_\beta\, (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})\, n_\beta\,. \qquad (2)$$

Плотность тока $\mathbf{j}$ может быть выражена через изменение плотности заряда $\delta\rho$, а электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через то же $\delta\rho$ с помощью уравнения Пуассона. Это дает

$$Q_{\mathbf{p}} = 4\pi i (2\pi)^3 \int \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega' \frac{\omega' n_\beta}{k^2 \epsilon_{\mathbf{k},\omega}} \times \\ \times \exp(i\omega t - i\omega' t) \int \mathrm{d}\mathbf{r}_\beta\, \delta\rho_{\mathbf{k},\omega}\, \delta\rho_{-\mathbf{k},-\omega'}\,. \qquad (3)$$

Возмущение движения электрона находится из уравнения движения

$$m_\alpha \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = e_\alpha \mathbf{E}^\beta = -\frac{i e_\alpha e_\beta}{2\pi^2} \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \frac{\mathbf{q}}{q^2} \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\beta)\,. \qquad (4)$$

Для далеких столкновений в нулевом приближении движение электрона является прямолинейным: $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, а в следующем приближении оно слабо возмущается на

$$\delta\mathbf{r} = \frac{i e_\alpha e_\beta}{2\pi^2 m_\alpha} \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \frac{\mathbf{q}}{q^2 (\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2} \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}t - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\beta)\,. \qquad (5)$$

Компоненты Фурье плотности произвольно движущегося заряда имеют вид

$$\rho_{\mathbf{k},\omega} = \frac{e_\alpha}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}t\, \exp\big(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t) + i\omega t\big)\,, \qquad (6)$$

а их возмущение, обязанное $\delta\mathbf{r}$, есть

$$\delta\rho_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{i e_\alpha}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}t\, (\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{r}) \exp(i\omega - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,. \qquad (7)$$

Отсюда при подстановке (5) получаем

$$\delta\rho_{\mathbf{k},\omega} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta}{\pi (2\pi)^4 m_\alpha} \times \\ \times \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\beta)}{q^2 (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\, \delta\big(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\,. \qquad (8)$$

Соотношение (8) позволяет вычислить искомую плотность заряда, усредненную по положениям ионов:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}_\beta\, \delta\rho_{\mathbf{k},\omega}\, \delta\rho_{-\mathbf{k},-\omega'} = \frac{e_\alpha^4 e_\beta^2}{\pi^2 (2\pi)^5 m_\alpha^2}\, \delta(\omega - \omega') \times \\ \times \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2}{q^4 (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\, \delta\big(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\,. \qquad (9)$$

В мощность излучения (3) войдет только мнимая часть обратной диэлектрической проницаемости

$$\mathrm{Im}\, \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}} = -\frac{i\pi\omega}{|\omega|}\, \delta(\mathrm{Re}\, \epsilon_{\mathbf{k},\omega}) = \\ = -\frac{i\pi\omega}{|\omega|}\, \frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})}{\big(\partial\epsilon_{\mathbf{k},\omega}/\partial\omega\big)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\,. \qquad (10)$$

Окончательно для мощности тормозного излучения продольных волн получаем

$$Q_{\mathbf{p}} = \frac{2 e_\alpha^4 e_\beta^2}{\pi^2 m_\alpha^2} \times \\ \times \int \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{d}\mathbf{q}\, \frac{\omega_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2 n_\beta}{k^2 q^4 (\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\, \frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}} - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v})}{(\partial\epsilon_{\mathbf{k},\omega}/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\,. \qquad (11)$$

Интегрируя это выражение по углам векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$, а также величинам q и считая $\omega \gg k v_{Te}$, для ленгмюровских колебаний (когда $\partial\epsilon/\partial\omega \approx 2/\omega_{pe}$) имеем

$$Q_{\mathbf{p}} = \int \mathrm{d}k\, Q_{\mathbf{p},k}\,, \qquad (12)$$

где

$$Q_{\mathbf{p},k} = \frac{8 e_\alpha^4 e_\beta^2 k^2 n_\beta}{3 m_\alpha^2 \omega_{pe}^2 v}\, \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\,. \qquad (13)$$

В формулу (13) мы подставили $q \approx 1/\rho$, $q_{\max} \approx 1/\rho_{\min}$, $q_{\min} \approx 1/\rho_{\max}$. Величина q или, точнее, $\hbar q$ в процессах тормозного излучения играет роль передаваемого импульса.

Сравнивая формулы (1) и (13), мы видим, что, действительно, интенсивность тормозного излучения возрастает с ростом волнового числа (т.е. с уменьшением фазовой скорости волн ω_{pe}/k) и что излучение продольных волн намного превосходит излучение электромагнитных волн. Если ввести нормировку энергии на единицу частотного интервала, то надо разделить (13) на $\partial\omega_k/\partial k$. Вместе с фактором k^2/ω_k^2 это дало бы для электромагнитных волн как раз c^3 в знаменателе. Фактор $1/2$ в (13) по сравнению с (1) связан с другой поляризацией волн: вместо среднего значения $(1+\cos^2\theta)/2$, равного $2/3$, в (13) входит среднее значение $\cos^2\theta$, равное $1/3$.

Вышепроведенный расчет интересует нас не только как иллюстрация того обстоятельства, что излучение продольных волн доминирует для нерелятивистских частиц, но и как возможность ввести вероятности тормозного излучения и показать ошибочность пренебрежения эффектами экранирования и неправомочность приближения "голых" частиц плазмы при расчете тормозного излучения. В случае тормозного излучения продольных волн эффекты экранирования выступают наиболее ярко.

2.4. Вероятности тормозного излучения волн

Предположим, что в процессе тормозного излучения частица β теряет импульс $\mathbf{q}$ (ее начальный импульс $\mathbf{p}'$, конечный импульс равен $\mathbf{p}' - \mathbf{q}$), а частица α изменяет импульс на $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ (ее начальный импульс $\mathbf{p}$, конечный импульс равен $\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}$), причем импульс $\mathbf{k}$ забирается излучаемым тормозным квантом (волной).

Закон сохранения энергии в элементарном акте тормозного излучения будет ($\hbar = 1$, для энергии частицы α мы используем точное релятивистское выражение $\epsilon_{\mathbf{p}}^\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 c^4 + c^2 p^2}$)

$$\epsilon_{\mathbf{p}}^\alpha + \epsilon_{\mathbf{p}'}^\beta = \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\alpha + \epsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\beta + \omega_{\mathbf{k}}\,. \qquad (14)$$

В случае, когда передаваемый импульс и импульс волны малы по сравнению с импульсом частиц, закон сохранения (14) упрощается:

$$\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}' - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{15}$$

Именно этот закон сохранения в пределе $\mathbf{v}'=0$ входит под знаком δ-функции в выражение (11).

Можно ввести вероятности тормозного излучения любого типа волн в плазме, включая продольные и электромагнитные волны или любые другие собственные моды плазмы. Здесь мы не будем приписывать какого-либо индекса вероятности излучения какой-либо моды, имея в виду, что эта вероятность соответствует одной из них. Вероятность тормозного излучения отдельной частицы, имеющей импульс $\mathbf{p}$, отнесем к единице фазового объема волн $\mathrm{d}\mathbf{k}/(2\pi)^3$ и нормируем на единицу фазового объема передаваемых моментов $\mathrm{d}\mathbf{q}/(2\pi)^3$. Определить вероятность $w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q})$ можно из выражения для мощности излучения

$$Q_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^9}\,\omega_{\mathbf{k}}\,w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q})\,\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}\,, \tag{16}$$

где $\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}$ — функция распределения частиц β, нормированная на фазовый объем импульсов $\mathbf{p}'$, причем

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'} = n_\beta\,. \tag{17}$$

Из сопоставления (11) и (16) находим вероятность тормозного излучения продольных волн "голыми" частицами α, которую удобно выразить через матричный элемент M:

$$w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q}) = \frac{16\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 (2\pi)^3}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \\ \times |M|^2\,\delta\big(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}' - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big). \tag{18}$$

Здесь $M = M^{\alpha}_{\mathrm{noncoll}}$, где

$$M^{\alpha}_{\mathrm{noncoll}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha q}\,\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\,. \tag{19}$$

Индекс "noncoll" поставлен для того, чтобы подчеркнуть, что коллективные эффекты в этом выражении не учитываются.

Как уже говорилось, приближение "голых" частиц непригодно при описании тормозного излучения продольных электростатических волн, для которых существенны коллективные эффекты экранирования. Эти эффекты не сводятся просто к замене поля "голого" иона на поле иона с учетом его дебаевского экранирования плазмой. Если бы это было так, то в выражении для матричного элемента (19) достаточно было бы учесть в знаменателе диэлектрическую проницаемость, получающуюся из уравнения Пуассона, а именно, достаточно было бы ввести в знаменатель $\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}$ (экранирование считается дебаевским только для покоящегося иона; для движущегося иона частота ω соответствует $\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'$):

$$M^{\alpha}_{\mathrm{noncoll}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha q}\,\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\,\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,. \tag{20}$$

Выражение (20) также является неверным, так как оно не учитывает эффекты, связанные с поляризационной "шубой", и, в частности, те, которые дает излучение самой "шубы", возмущаемой сталкивающимися частицами. Это есть так называемое переходное тормозное излучение (см. [9]).

Для нахождения вероятности тормозного излучения из теории флуктуаций мы учитываем связь между коэффициентом поглощения волн из-за эффекта обратного тормозного излучения и вероятностью тормозного излучения. Используя уравнения баланса для прямых и обратных процессов, получаем декремент затухания волн $\gamma_{\mathbf{k}}$ из-за обратных процессов тормозного излучения (который включает в себя не только процессы индуцированного поглощения, но и процессы индуцированного излучения, т.е. не является, строго говоря, обратным процессом, хотя часто применяется такая терминология):

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^9}\,w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q})\times \\ \times\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\,\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'} + \mathbf{q}\cdot\frac{\partial\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\,\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\right). \tag{21}$$

Соотношение (21), естественно, верно как в случае, когда учитываются коллективные процессы, так и в случае, когда они не учитываются. Эти случаи отличаются значениями вероятностей тормозного излучения, и мы можем сравнить выражение для вероятности тормозного излучения, получаемое из теории флуктуаций и учитывающее коллективные процессы, с выражениями (18) и (19), в которых коллективные эффекты не учитываются.

2.5. Качественные отличия тормозного излучения "одетых" и "голых" частиц. Эффективный заряд, участвующий в генерации тормозного излучения

Каждый заряд в плазме экранируется как электронами, так и ионами (положительный заряд — избытком электронов и недостатком ионов, а отрицательный заряд — избытком ионов и недостатком электронов). Если заряд иона Ze, то эффективный заряд экранирующих электронов (в единицах заряда электрона $-e$) будет

$$Z_{\mathrm{eff}} = Z\,\frac{1/d_e^2}{1/d_e^2 + 1/d_i^2}\,, \tag{22}$$

где d_e и d_i — электронный и ионный дебаевские радиусы соответственно.

Для длин волн, намного больших дебаевского радиуса (а все электростатические волны удовлетворяют этому критерию), экранирующий заряд представляет собой как бы точечный заряд, и можно рассматривать его смещение как целого в поле налетающего заряда (электрона). Так как заряд (22) тоже электронный, то он будет возмущаться полем налетающего заряда аналогично тому, как налетающий электрон возмущался полем покоящегося иона в предыдущем разделе.

В данном случае можно перейти в другую систему отсчета, а именно, в систему отсчета налетающего заряда. Тогда картина будет буквально той же, за исключением того, что излучающий электронный заряд может быть больше, чем заряд отдельного электрона (если у иона $Z>1$). Тем самым может быть больше и интенсивность излучения. Короче, пренебрегать этим излучением нельзя, так как оно может даже превосходить обычное тормозное излучение.

Самая простая оценка этого эффекта состояла бы в том, чтобы в формулу тормозного излучения (18) ввести множитель Z_{eff}^2. Но это также дает ошибочный результат. Дело в том, что оба механизма тормозного излучения интерферируют между собой и частично гасят друг друга. Последнее ясно из следующих соображений.

Рассмотрим быстрый электрон, скорость которого много больше тепловой электронной скорости. Тогда для высоких частот, которые он излучает, столкновение с электронами экранирующей оболочки соответствует столкновению свободных электронов. Как известно, в таких столкновениях в дипольном приближении тормозное излучение отсутствует, т.е. интерференция должна гасить амплитуды обоих механизмов тормозного излучения. В конкретных условиях гашение является частичным. Кроме того, экранирующую "шубу" имеют обе сталкивающиеся частицы. Поэтому нужно учитывать излучение экранирующего заряда налетающей частицы и связанные с ним интерференционные эффекты.

Таким образом, благодаря поляризационным эффектам тормозное излучение в электрон-ионных столкновениях может коренным образом видоизмениться. Правда, такое изменение приводит к большим факторам только для неравновесных распределений. Для равновесных распределений изменение сечения в несколько раз из-за коллективных эффектов вполне возможно.

Вместе с тем ясно, что возникает совершенно новый эффект тормозного излучения при столкновениях тяжелых частиц (ионов), который был пренебрежимо малым без учета поляризационных эффектов. Поляризационные "шубы" ионов дают как раз излучение, обязанное заряду Z_{eff}, и здесь интерференционные эффекты не возникают. Изменяются, наконец, и процессы тормозного излучения в электрон-электронных столкновениях. Для "голых" частиц таким излучением обычно пренебрегают, так же как и излучением при ион-ионных столкновениях.

Для того чтобы записать дополнительный матричный элемент в тормозном излучении, обязанный поляризационным "шубам" обеих сталкивающихся частиц, воспользуемся подходом, изложенным в [9]. А именно, будем пренебрегать в первом приближении изменением траекторий двух сталкивающихся частиц, а колебания их "шуб" учтем тем, что рассчитаем возмущения полей каждой из частиц под действием поля другой сталкивающейся частицы.

Это возмущение для нерелятивистских частиц определяется уравнением Пуассона с учетом нелинейной плотности заряда ρ^{N}, причем

$$\rho^{\mathrm{N}}_{\mathbf{k},\,\omega} = \int \mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\nu\;\rho^{\mathrm{N},\,2}_{\mathbf{q},\,\nu;\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,\omega-\nu}\,E_{\mathbf{q},\,\nu}\,E_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,\omega-\nu}\,, \tag{23}$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} = (\mathbf{k}/k)E_{\mathbf{k},\,\omega}$.

Подставляя в (23) значения полей равномерно движущихся сталкивающихся зарядов, можно тем же методом, что и выше, найти дополнительную мощность тормозного излучения, обязанную экранирующим "шубам" (см. [9]). Правильному результату, однако, соответствует не сложение интенсивностей, а сложение матричных элементов.

Из интенсивности излучения, определяемой только (23), можно получить матричный элемент, описывающий излучение "шуб". Его знак надо еще определить. Для этого нужно подсчитать полную интенсивность излучения с учетом интерференционных эффектов, обязанную как изменению траекторий обеих сталкивающихся частиц, так и колебаниям их поляризационных "шуб". Это дает два дополнительных матричных элемента, которые должны быть добавлены к (20): M^{β}, обязанный изменению траекторий заряда β (выше мы пренебрегали этим, так как считали ион очень тяжелым, теперь мы должны учесть это для определения коллективных эффектов в тормозном излучении, например, при электрон-электронных или ион-ионных столкновениях), и $M^{\alpha,\,\beta}$, обязанный обеим поляризационным "шубам" сталкивающихся частиц:

$$M^{\beta} = \frac{e_{\beta}}{m_{\beta}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')^2}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,, \tag{24}$$

$$M^{\alpha,\,\beta} = -\frac{8\pi\rho^{\mathrm{N},\,2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{kq|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,. \tag{25}$$

Обе частицы равноправны, что можно усмотреть путем замены импульса виртуального кванта $\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{k}-\mathbf{q}$.

Как уже говорилось, все вышеприведенные соотношения можно рассматривать, в определенном смысле, как полученные из наводящих соображений, так как истинные соотношения можно строго получить только из теории флуктуаций. Интересно отметить, что теория флуктуаций как раз подтверждает их, т.е. устанавливает, что каждая частица плазмы в своем усредненном движении является одной из сталкивающихся частиц, а в процессе флуктуаций она успевает производить экранирование полей других сталкивающихся частиц. Короче, описанная простая картина столкновений динамически экранированных частиц полностью соответствует истинной картине излучения плазмы из-за столкновений ее частиц. Доказать это утверждение является задачей последующего изложения.

3. Нелинейное взаимодействие электростатических волн с флуктуациями частиц и полей плазмы

3.1. Флуктуации частиц и полей в плазме

Будем исходить из того, что функция распределения любых частиц α состоит из регулярной, усредненной, компоненты $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ и флуктуационной компоненты $\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}$. Если бы у частиц не было заряда, их флуктуации описывались бы как флуктуации независимых частиц.

Обозначим соответствующую флуктуационную часть функции распределения через $\delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}}$. Эти флуктуации носят характер неких "нулевых" флуктуаций, на фоне которых развиваются процессы столкновений частиц и интересующие нас процессы излучения волн при столкновениях частиц. Учет в первом приближении зарядов частиц приводит к известному интегралу столкновений (см. [10]). "Нулевые" флуктуации удовлетворяют, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}} = 0\,. \tag{26}$$

Регулярная компонента $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ в первом приближении удовлетворяет тому же уравнению, так как она предполагается однородной и стационарной. Флуктуационная компонента неоднородна и нестационарна. Каждый член в (26) довольно велик, но оба они компенсируют друг друга. "Нулевые" флуктуации, по сути дела, соответствуют тому, что квадрат флуктуаций числа частиц в заданном объеме равен среднему числу частиц в этом объеме. Математически это может быть записано в виде соотношения для среднего значения произведения флуктуационных компонент функции распределения (см. [10]):

$$\left\langle \delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}\, \delta f^{\beta(0)}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}',\omega'} \right\rangle = \\ = \Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\, \delta_{\alpha,\beta}\, \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\, \delta(\omega+\omega')\, \delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). \tag{27}$$

"Нулевые" флуктуации распределения частиц приводят согласно уравнению Пуассона к "нулевым" флуктуациям электрических полей. Обозначим эти поля через $\mathbf{E}^{(0)}$. Из (27) нетрудно получить формулу для усреднения полей "нулевых" флуктуаций:

$$\left\langle E^{(0)}_{i,\mathbf{k},\omega}\, E^{(0)}_{j,\mathbf{k}',\omega'} \right\rangle = \frac{k_i k_j}{k^2} \left|E^{(0)}\right|^2_{\mathbf{k},\omega} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\, \delta(\omega+\omega'), \tag{28}$$

где

$$\left|E^{(0)}\right|^2_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\alpha} \frac{16\pi^2 e_\alpha^2}{k^2 |\epsilon_{\mathbf{k},\omega}|^2} \int \mathrm{d}\mathbf{p}'\, \delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')\, \Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}'}\,. \tag{29}$$

Вышеприведенные соотношения полностью определяют свойства как "нулевых" флуктуаций произвольных распределений частиц, так и полей "нулевых" флуктуаций. На фоне этих флуктуаций развиваются все процессы. Взаимодействие с флуктуациями является нелинейным процессом. На это обстоятельство ранее не обращалось внимание. Даже обычное линейное поглощение волн с этой точки зрения может рассматриваться как нелинейный процесс взаимодействия распространяющейся волны с "нулевыми" флуктуациями, описанными выше.

Нас здесь интересуют процессы, линейные по полю распространяющейся волны. Обозначим ее поле через E^{σ}, где σ — индекс, указывающий на тип (моду) распространяющейся волны (электромагнитную или электростатическую; в нашем случае такой модой будет электростатическая волна). Частоту распространяющейся волны обозначим, как и прежде, через $\omega_{\mathbf{k}}$. Частоты и волновые числа "нулевых" флуктуаций обозначим индексом нуль: ω_0 и $\mathbf{k}_0$.

Нелинейные взаимодействия с необходимостью создают поля на комбинационных частотах, которые, как правило, не соответствуют частотам и волновым числам распространяющихся волн: $\omega_{\mathbf{k}} \pm \omega_0$ и $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$. Назовем поля на этих частотах виртуальными и обозначим их как $\mathbf{E}^{\mathrm{v}}$. Таким образом, полное поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\sigma} + \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{\mathrm{v}}. \tag{30}$$

Построим теорию возмущений по полному полю (30), взяв за нулевое приближение распределение $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}} + \delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}}$. Приближение i-го порядка по полю обозначим через $\delta f^{\alpha(i)}_{\mathbf{p}}$. Выделим из него ту часть, которая связана с начальным регулярным распределением $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ (обозначим ее $\delta f^{\alpha(\mathrm{R},i)}_{\mathbf{p}}$), и ту часть, которая связана с начальным флуктуационным распределением $\delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}}$ (обозначим ее $\delta f^{\alpha(0,i)}_{\mathbf{p}}$):

$$\delta f^{\alpha(i)}_{\mathbf{p}} = \delta f^{\alpha(\mathrm{R},i)}_{\mathbf{p}} + \delta f^{\alpha(0,i)}_{\mathbf{p}}.$$

Последовательность уравнений теории возмущений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \delta f^{\alpha(1)}_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \delta f^{\alpha(1)}_{\mathbf{p}} = -e_\alpha \mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, \Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\,, \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \delta f^{\alpha(\mathrm{R},i)}_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \delta f^{\alpha(\mathrm{R},i)}_{\mathbf{p}} = \\ = -e_\alpha \mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, \delta f^{\alpha(\mathrm{R},i-1)}_{\mathbf{p}} + \left\langle e_\alpha \mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, \delta f^{\alpha(\mathrm{R},i-1)}_{\mathbf{p}} \right\rangle, \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \delta f^{\alpha(0,i)}_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \delta f^{\alpha(0,i)}_{\mathbf{p}} = \\ = -e_\alpha \mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, \delta f^{\alpha(0,i-1)}_{\mathbf{p}} + \left\langle e_\alpha \mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, \delta f^{\alpha(0,i-1)}_{\mathbf{p}} \right\rangle. \tag{33}$$

Здесь $\delta f^{\alpha(0,0)}_{\mathbf{p}} = \delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}}$.

Практически в уравнениях (33) достаточно ограничиться $i = 1, 2$. Это связано с тем, что нас интересуют только вклады низшего порядка по нелинейностям, т.е. кубические нелинейности по полному полю, линейный вклад по полю волны и, следовательно, квадратичный вклад по "нулевым" флуктуациям. Первая часть вклада (32) не связана с флуктуациями частиц плазмы, которые представляют для волн естественные неоднородности показателя преломления. Рассеяние на них дает дополнительное излучение.

3.2. Нелинейные взаимодействия, не связанные с флуктуациями частиц плазмы

Мы учтем эффекты, обусловленные только полями "нулевых" флуктуаций, т.е. вклад регулярной составляющей распределения частиц $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$. При этом разложение по полному полю соответствует стандартной процедуре получения нелинейных уравнений (см. [11]). Используем обозначения из этой стандартной нелинейной теории:

$$E_1 = E_{\mathbf{k}_1,\omega_1}, \qquad E_2 = E_{\mathbf{k}_2,\omega_2}, \qquad E_3 = E_{\mathbf{k}_3,\omega_3},$$
$$k = \{\mathbf{k},\omega\}, \qquad \mathrm{d}k = \mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\omega,$$
$$\mathrm{d}_{1,2} = \mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, \delta(\omega-\omega_1-\omega_2),$$
$$\mathrm{d}_{1,2,3} = \mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2\,\mathrm{d}\mathbf{k}_3\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2\,\mathrm{d}\omega_3 \times \\ \times \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\, \delta(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3),$$
$$\rho^{\mathrm{N},2}_{1,2} = \rho^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2}, \qquad \rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3} = \rho^{\mathrm{N},3}_{\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2;\mathbf{k}_3,\omega_3}\,.$$

Здесь $\rho^{\mathrm{N},2}_{1,2}$ и $\rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3}$ — стандартные нелинейные отклики плазмы, описывающие квадратичные и кубические нелинейные плотности заряда соответственно и выражающиеся через $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$.

В принятых обозначениях стандартное нелинейное уравнение для полей в плазме с учетом квадратичных и кубических нелинейностей имеет вид

$$ik\epsilon_k E_k = 4\pi\rho^{\mathrm{N}}_k = 4\pi \int \mathrm{d}_{1,2}\, \rho^{\mathrm{N},2}_{1,2} \big(E_1 E_2 - \langle E_1 E_2 \rangle\big) + \\ + 4\pi \int \mathrm{d}_{1,2,3}\, \rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3} \big(E_1 E_2 E_3 - E_1 \langle E_2 E_3 \rangle - \langle E_1 E_2 E_3 \rangle\big). \tag{34}$$

Не нарушая общности, можно считать, что нелинейный отклик второго порядка симметризован по индексам 1 и 2, а нелинейный отклик третьего порядка — по индексам 2 и 3. Для полноты картины выпишем известные нелинейные отклики плазмы, которые можно и непосредственно получить из системы уравнений (32):

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{1,2} = -\sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{2k_1k_2}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\omega_2-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\right\}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}, \quad (35)$$

$$\rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3} = \sum_\alpha \frac{ie_\alpha^4}{2k_1k_2k_3}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left((\omega-\omega_1)-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\omega_3-\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\left(\mathbf{k}_3\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\mathbf{k}_3\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\omega_2-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\right\}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}. \quad (36)$$

В общем нелинейном уравнении (34) фигурирует полное поле. Нас интересует получение из него линейного уравнения для поля волны E^σ. В соответствии с этим можно усреднить уравнение по флуктуациям, оставив в правой части только члены, линейные по полю волны. Член с кубической нелинейностью должен тогда содержать в качестве остальных двух полей только поля флуктуаций, описываемые (28) и (29), так как виртуальные поля соответствуют более высоким нелинейностям (и, соответственно, выражаются через квадратичные комбинации полей; см. ниже).

Легко видеть, что после линеаризации последнего члена (34) по полю волны и усреднения по флуктуациям не равным нулю будет лишь член, где поле волны стоит в виде E_2. Для квадратичной нелинейности ни одно из двух полей не может быть полем волны, так как второе поле в этом случае будет виртуальным. По определению, виртуальное поле составляется из поля волны и поля флуктуаций. При этом результат будет квадратичным по полю волны, а мы интересуемся эффектами, линейными по полю волны. (Вторым полем не может быть и поле флуктуаций, так как после усреднения по флуктуациям результат будет равным нулю.)

Таким образом, в квадратичную нелинейность может войти только виртуальное поле и поле флуктуаций. Учитывая симметрию нелинейных откликов, мы приходим к уравнению

$$ik\epsilon_k\,E_k = 8\pi\int \mathrm{d}_{1,1'}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{1,1'}\,E^{(0)}_1\,E^{\mathrm{v}}_{1'}+$$
$$+\,8\pi\int \mathrm{d}_{1,2,3}\,\rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3}\,E^{(0)}_1\,E^\sigma_2\,E^{(0)}_3. \quad (37)$$

Существенно, что при нахождении виртуальных полей возникает отличие от стандартной нелинейной теории. Действительно, в данном случае виртуальное поле можно найти не только из нелинейных уравнений (34), когда отклики определяются регулярной частью функции распределения частиц. Имеется еще и возможность того, что виртуальное поле будет определяться через флуктуационную часть распределения частиц $\delta f^{\alpha(0)}_{\mathbf{p}}$. Обозначим первую часть виртуального поля через $E^{\mathrm{v}(1)}_k$, а вторую — через $E^{\mathrm{v}(2)}_k$ и отложим рассмотрение второй части до следующего раздела. Мы увидим, что отличие настоящего рассмотрения от стандартной нелинейной теории сведется к ряду дополнительных вкладов в нелинейную диэлектрическую проницаемость, среди которых будет и вклад, связанный с дополнительным виртуальным полем.

Сейчас же мы запишем результат, соответствующий стандартной нелинейной теории. Для этого при нахождении виртуального поля используем нелинейное уравнение (34):

$$ik'\epsilon_{k'}E^{\mathrm{v}(1)}_{k'} = 8\pi\int \mathrm{d}_{2,3}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{2,3}\,E^\sigma_2\,E^{(0)}_3. \quad (38)$$

Подстановка этого соотношения в (37) приводит к уравнению

$$ik\epsilon_k E^\sigma_k = 8\pi\int \mathrm{d}_{1,2,3,}\,\rho^{\mathrm{eff}}_{1,2,3}\,E^{(0)}_1\,E^\sigma_2\,E^{(0)}_3, \quad (39)$$

где

$$\rho^{\mathrm{eff}}_{1,2,3} = \rho^{\mathrm{N},3}_{1,2,3} + \frac{8\pi}{i|\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3|\epsilon_{2+3}}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{1,2+3}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{2,3}. \quad (40)$$

Этот результат соответствует стандартной нелинейной теории [11].

Усреднение (39) по флуктуациям дает уравнение для поля волны:

$$\left(\epsilon_k+\epsilon^{\mathrm{N},1}_k\right)E^\sigma_k = 0, \quad (41)$$

которое содержит дополнительный вклад в нелинейную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon^{\mathrm{N},1}_k = \frac{8\pi}{ik}\int \mathrm{d}k_1\,\rho^{\mathrm{eff}}_{k,k_1,-k_1}\left|E^{(0)}\right|^2_{k_1}. \quad (42)$$

Мы обозначили этот вклад в нелинейную диэлектрическую проницаемость индексом 1, так как возникают и другие вклады, приводящие к отличию от стандартной нелинейной теории. В общем случае в (41) войдет полная нелинейная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon^{\mathrm{N}}_k = \sum_i \epsilon^{\mathrm{N},i}_k. \quad (43)$$

3.3. Флуктуации виртуальных полей

Теперь рассмотрим вклад в виртуальные поля от флуктуаций частиц, т.е. найдем $E^{\mathrm{v}(2)}_k$. Фактически дополнительное виртуальное поле обязано сильным неоднородностям распределения частиц "нулевого" приближения, связанного с описанными "нулевыми" флуктуациями. Стандартная нелинейная теория это не учитывает, так как предполагает, что либо основное состояние однородно и стационарно, либо изменения основного состояния происходят медленно в пространстве и во времени.

Резкие изменения распределений частиц, возникающие из-за флуктуаций, могут происходить на масштабах, сравнимых с обратным волновым числом волны, и на характерных временах, сравнимых или меньших обратной частоты волны. Таким образом, речь идет о процессах излучения и поглощения, известных как переходное излучение и переходное поглощение. Флуктуации обеспечивают возникновение таких процессов.

При расчете дополнительного виртуального поля воспользуемся первым приближением теории возмущений для случайной компоненты распределения частиц, определяемой "нулевыми" флуктуациями частиц, т.е. используем первое уравнение из системы уравнений (33) для флуктуационной части функции распределения, в которое вместо поля **E** подставим поле волны.

Обозначим соответствующий вклад через $\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\sigma)}$, подчеркивая индексом σ, что этот вклад определяется полем волны. Именно он будет единственным ненулевым вкладом в нелинейном уравнении (34). В результате мы имеем

$$\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\sigma)} = \frac{e_\alpha}{i}(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)^{-1}\times \times \int \mathrm{d}k_1\, E_{k_1}^{\sigma}\,\frac{1}{k_1}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{\alpha(0)}. \tag{44}$$

Это дает

$$E_k^{\mathrm{v}(2)} = \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha}{ik\epsilon_k}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1)} = = -\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k\epsilon_k}(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)^{-1}\times \times\int\frac{\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,E_{k_2}^{\sigma}\,\frac{1}{k_2}\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f_{\mathbf{p},k-k_2}^{\alpha(0)}. \tag{45}$$

Подставляя выражение (45) для виртуального поля в квадратичную нелинейность в уравнении (34), получаем дополнительный вклад в нелинейную диэлектрическую проницаемость плазмы

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},2} = -\frac{8\pi}{ikE_k^{\sigma}}\int \mathrm{d}k_1\,\rho_{k_1,k-k_1}^{\mathrm{N},2}\left\langle E_{k_1}^{(0)}E_{k-k_1}^{\mathrm{v}(2)}\right\rangle = = \sum_\alpha\frac{32\pi^2 e_\alpha^2}{ikE_k^{\sigma}}\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\rho_{k_1,k-k_1}^{\mathrm{N},2}\,E_{k_2}^{\sigma}\times \times\frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\epsilon_{k-k_1}}\left(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\frac{1}{k_2}\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left\langle E_{k_1}^{(0)}\,\delta f_{\mathbf{p},k-k_1-k_2}^{\alpha(0)}\right\rangle. \tag{46}$$

Усреднение можно произвести при помощи формулы (27) с использованием уравнения Пуассона, а именно:

$$\left\langle E_k^{(0)}\,\delta f_{\mathbf{p},k'}^{\alpha(0)}\right\rangle = \frac{e_\alpha}{2\pi^2 ik\epsilon_k}\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\,\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,\delta(k+k'). \tag{47}$$

Окончательно получаем

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},2} = -\sum_\alpha\frac{16 e_\alpha^3}{k^2}\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\rho_{k_1,k-k_1}^{\mathrm{N},2}\times \times\frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|k_1\epsilon_{k-k_1}\epsilon_{k_1}}\left(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\,\delta(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}), \tag{48}$$

что завершает вычисление дополнительного вклада флуктуаций виртуальных полей в стандартно вычисляемую нелинейную диэлектрическую проницаемость. Однако виртуальные поля (причем обе обсуждаемые компоненты) могут давать вклад в то дополнительное нелинейное взаимодействие, которое непосредственно производится флуктуациями частиц.

3.4. Взаимодействия, обязанные флуктуациям частиц. Вклад виртуальных полей

Выше в выражении для части функции распределения частиц, обусловленной "нулевыми" флуктуациями, в качестве возмущающего поля было рассмотрено поле волны (см. (44)). Если же в качестве такого поля рассматривать виртуальное поле, то сразу возникнут члены, кубические по полю (до сих пор кубические члены мы не рассматривали). В этом случае вклад будут вносить оба виртуальных поля.

Обозначим соответствующий вклад через $\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\mathrm{v})}$ (в отличие от вклада $\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\sigma)}$, рассмотренного в предыдущем разделе и обязанного полю волны). Искомое выражение для $\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\mathrm{v})}$ получается из (44) заменой $E_{k_1}^{\sigma}$ на $E_{k_1}^{\mathrm{v}}$:

$$\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\mathrm{v})} = \frac{e_\alpha}{i}(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0)^{-1}\times \times\int\mathrm{d}k_1\,E_{k_1}^{\mathrm{v}}\,\frac{1}{k_1}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{\alpha(0)}. \tag{49}$$

Подставляя в (49) виртуальное поле $E_k^{\mathrm{v}(1)}$, имеем

$$\rho_k^{(0,1,\mathrm{v}(1))} = \sum_\alpha e_\alpha\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1,\mathrm{v})} = = -\sum_\alpha 8\pi e_\alpha^2\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\rho_{k_2,k_1-k_2}^{\mathrm{N},2}\,\frac{E_{k_2}^{\sigma}}{k_1^2\epsilon_{k_1}}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left\langle E_{k_1-k_2}^{(0)}\delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{(0)}\right\rangle. \tag{50}$$

Это дает в нелинейную диэлектрическую проницаемость вклад

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},3} = -\frac{4\pi}{ikE_k^{\sigma}}\,\rho_k^{(0,1,\mathrm{v}(1))} = = -\sum_\alpha\frac{16 e_\alpha^3}{k}\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\rho_{k,k_1-k}^{\mathrm{N},2}\times \times\frac{1}{k_1^2\epsilon_{k_1}}\,\frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\epsilon_{k_1-k}}\left(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta\left(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\right)\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}. \tag{51}$$

Подставляя в (49) виртуальное поле $E_k^{\mathrm{v}(2)}$, получаем

$$\delta f_{\mathbf{p}',k}^{(0,1,\mathrm{v}(2))} = -\sum_\beta\frac{4\pi e_\beta^2 e_\alpha}{i}\left(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\int\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\frac{E_{k_2}^{\sigma}}{k_1^2 k_2\epsilon_{k_1}}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}'}\right)\left(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times \times\left(\mathbf{k}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left\langle\delta f_{\mathbf{p},k_1-k_2}^{\beta(0)}\,\delta f_{\mathbf{p}',k-k_1}^{\alpha(0)}\right\rangle. \tag{52}$$

Усреднение по флуктуациям дает окончательно еще один вклад в нелинейную диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},4} = -\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha}{ikE_k^\sigma} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \delta f_{\mathbf{p},k}^{(0,1,\mathrm{v}(2))} =$$

$$= -\sum_\alpha \frac{2e_\alpha^4}{\pi m_\alpha^2} \int \frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2 \epsilon_k} \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0\right)^{-4} \times$$

$$\times\, \delta\big(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)\, \Phi_{\mathbf{p}}^\alpha\,. \tag{53}$$

Этим мы закончили вычисление вкладов виртуальных полей в рамках используемого приближения.

3.5. Непосредственное взаимодействие с флуктуациями частиц

Теперь вычислим вклады флуктуаций, связанные с непосредственным возмущением распространяющейся волны полем. Они определяются согласно (33)

$$\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,2)} = \frac{e_\alpha}{i} \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0\right)^{-1} \int \mathrm{d}k_1 \frac{1}{k_1} \left(\mathbf{k}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right) \times$$

$$\times \left(E_{k_1}\, \delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{\alpha(0,1)} - \left\langle E_{k_1}\, \delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{\alpha(0,1)} \right\rangle\right). \tag{54}$$

В это выражение нужно подставить решение для $\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,1)}$, которое для интересующих нас аргументов имеет вид

$$\delta f_{\mathbf{p},k-k_1}^{\alpha(0,1)} = \frac{e_\alpha}{i} \left(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v} + i0\right)^{-1} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}k_2 \frac{1}{k_2} \left(\mathbf{k}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right) \times$$

$$\times \left(E_{k_2}\, \delta f_{\mathbf{p},k-k_1-k_2}^{\alpha(0)} - \left\langle E_{k_2}\, \delta f_{\mathbf{p},k-k_1-k_2}^{\alpha(0)} \right\rangle\right). \tag{55}$$

В результате остается только одно поле, которое следует положить равным полю волны.

Итак, получаем

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},5} = -\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha}{ikE_k^\sigma} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha(0,2)} =$$

$$= -\sum_\alpha \frac{2e_\alpha^2}{\pi} \int \frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 k_1^2 \epsilon_{k_1}} \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\mathbf{k}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right) \left(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v} + i0\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right) \delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v})\, \Phi_{\mathbf{p}}^\alpha\,. \tag{56}$$

Тем самым мы закончили расчет всех вкладов в нелинейную диэлектрическую проницаемость, которые определяют коллективные процессы в тормозном излучении, а также, как оказывается, и коллективные эффекты в рассеянии.

С помощью полученных из теории флуктуаций выражений можно строго доказать, что приведенная выше наглядная картина тормозного излучения на динамически экранированных частицах отвечает точному результату, касающемуся излучения плазмы из-за естественных статистических флуктуаций.

4. Коллективные эффекты в тормозном излучении продольных волн

4.1. Вычисление вероятностей тормозного излучения из нелинейной диэлектрической проницаемости для взаимодействия волн с флуктуациями частиц и полей

Нелинейные диэлектрические проницаемости, рассчитанные в предыдущем разделе, содержат полную информацию о распространении и поглощении волн в плазме, точнее, об эффектах распространения линейных по амплитуде волн, в том числе и тех, которые обязаны обращенному эффекту тормозного излучения.

В процессе тормозного излучения сталкивающиеся частицы обмениваются импульсом, причем одна из сталкивающихся частиц теряет некий импульс, а другая его приобретает.

Если частица β до столкновения имела импульс $\mathbf{p}'$, а после столкновения ее импульс стал $\mathbf{p}' - \mathbf{q}$, т.е. она потеряла импульс $\mathbf{q}$, то импульс частицы α должен измениться на $\mathbf{k} - \mathbf{q}$, где $\mathbf{k}$ — импульс излучаемой при столкновении волны. Если начальный импульс частицы α был $\mathbf{p}$, то конечный импульс будет $\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}$.

Закон сохранения энергии в элементарном акте тормозного излучения, как уже говорилось, имеет вид

$$\epsilon_{\mathbf{p}}^\alpha + \epsilon_{\mathbf{p}'}^\beta = \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\alpha + \epsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\beta + \omega_{\mathbf{k}}\,. \tag{57}$$

Мы повторили этот вывод, с тем чтобы фиксировать те процессы, которые мы желаем выделить из общего выражения для нелинейной диэлектрической проницаемости.

А именно, мы будем сейчас интересоваться только теми вкладами, которые будут содержать δ-функции, описывающие закон сохранения энергии при тормозном излучении волн.

Выше была вычислена продольная составляющая нелинейной диэлектрической проницаемости. С ее помощью можно найти вероятности тормозного излучения продольных волн.

Такая же процедура может быть выполнена и при нахождении вероятностей тормозного излучения электромагнитных волн. Для этого нужно использовать поперечную составляющую нелинейной диэлектрической проницаемости, которую мы не находили и не выписывали.

Изложенная процедура вычисления продольной составляющей легко обобщается на получение поперечной составляющей, однако принципиальные моменты могут быть выявлены на примере тормозного излучения продольных волн, тем более что нерелятивистские частицы с наибольшей вероятностью излучают именно продольные волны.

Начнем с выражения для $\epsilon_k^{\mathrm{N},1}$ (см. (39)) и, в частности, с вклада кубической нелинейной плотности $\rho^{\mathrm{N},3}$ (см. (40)).

Подставляя в $\epsilon_k^{\mathrm{N},1}$ корреляционную функцию флуктуационных полей (29) и член с ρ^{eff}, имеем

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},1} = \epsilon_k^{\mathrm{N}(3),1} + \epsilon_k^{\mathrm{N}(2),1}, \tag{58}$$

где индексами N(3) и N(2) обозначены вклады первого члена (40), содержащего $\rho^{\mathrm{N},3}$, и второго члена (40), содержащего $\rho^{\mathrm{N},2}$, соответственно. При этом

$$\epsilon_k^{\mathrm{N}(3),1} = \sum_\alpha \frac{2(4\pi)^3 e_\alpha^2}{ik} \times \\ \times \int \mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}k_1\, \frac{\rho^{\mathrm{N},3}_{k_1,k,-k_1}}{k_1^2|\epsilon_{k_1}|^2}\,\delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}')\,\Phi^\alpha_{\mathbf{p}'}\,.$$

Для $\rho^{\mathrm{N},3}$ мы используем соотношение (36), считая, что для каждой из волн условие черенковского резонанса не выполнено, но резонанс рассеяния, естественно, может быть выполнен. (Говорить о рассеянии можно лишь условно, так как рассеяние, фактически, происходит для виртуальных полей, а не для реальных волн; о рассеянии распространяющихся волн см. следующий раздел.) Полагая $k_1 = -\{\mathbf{q}, \omega_1\}$, получаем

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i}\,\rho^{\mathrm{N},3}_{k_1,k,-k_1}\right) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^4\pi}{2q^2km_\alpha^2}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\times \\ \times\,\delta\big(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right). \qquad (60)$$

Из выражения (60) можно найти вклад в затухание волн из-за взаимодействия с флуктуациями полей. (Он соответствует только части общего выражения, тем не менее поучительно выявить именно эту часть и сопоставить ее с предыдущими выражениями для поглощения и вероятностей тормозного излучения.) Обозначим этот вклад через $\gamma^{\mathrm{N},1}_{\mathbf{k}}$, причем полное поглощение

$$\gamma^{\mathrm{N}}_{\mathbf{k}} = \sum_i \gamma^{\mathrm{N},i}_{\mathbf{k}} \qquad (61)$$

(все члены суммы (61) будут получены далее).

По определению,

$$\gamma^{\mathrm{N},1}_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N}(3),1}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = \sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi^4 e_\alpha^4 e_\beta^2}{m_\alpha^2(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \\ \times\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\,\frac{\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)}{q^2|\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\times \\ \times\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\right)^2\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi^\beta_{\mathbf{p}'}\,. \qquad (62)$$

Считая, что найденный вклад отвечает первому члену (21) в уравнении баланса, можно вычислить соответствующий вклад в вероятность тормозного излучения. (В дальнейшем мы получим и все остальные члены в соотношении (21).) Любопытно, что полученный таким образом "кусок" вероятности (который не обязан, вообще говоря, выражаться через квадрат модуля матричного элемента) описывается, тем не менее, в виде некой вероятности

$$w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q}) = \frac{16\pi\,e_\alpha^4 e_\beta^2(2\pi)^3}{m_\alpha^2(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \\ \times\,\frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v})}{q^2|\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\right)^2. \qquad (63)$$

Выражение (63) полностью соответствует формулам (18) и (20), которые учитывают экранировку поля частицы β, но полностью игнорирует колебания экранирующего заряда. Заметим, что соотношение (20) было "получено" из (19) на основе качественных физических соображений и строгого доказательства этого соотношения не было дано. Результат (63) содержит такое доказательство.

Существенно, что формула (63) содержит лишь часть полного эффекта и, в частности, помимо колебаний экранирующего заряда частиц β, не учитывает экранирующий заряд чатиц α. Но даже правильность "куска" вероятности (63) еще не доказана, в том смысле, что мы получили только первый член в выражении для декремента затухания (21), пропорциональный производной от функции распределения частиц α, но не получили второй член, содержащий производную от функции распределения частиц β.

Для того чтобы доказать наличие такого члена в общих соотношениях для нелинейной диэлектрической проницаемости, обратимся к формуле (53) для $\epsilon_k^{\mathrm{N},4}$. Запишем мнимую часть $1/\epsilon_{k_1}$, полагая $k_1 = \{\mathbf{q}, \omega_1\}$:

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{\epsilon_{k_1}} = -\mathrm{Im}\,\frac{\epsilon_{k_1}}{|\epsilon_{k_1}|^2} = \\ = \sum_\beta\frac{4\pi^2e_\beta^2}{q^2}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{\delta(\omega_1-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}')}{|\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2}\left(\mathbf{q}\cdot\frac{\partial\Phi^\beta_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\right). \qquad (64)$$

Подстановка соотношения (64) в (53) дает следующий вклад в поглощение волн:

$$\gamma^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},4}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = \\ = \sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi e_\alpha^4 e_\beta^2}{m_\alpha^2(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^6}\times \\ \times\,\frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v})}{q^2|\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\right)^2\left(\mathbf{q}\cdot\frac{\partial\Phi^\beta_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\right)\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}\,. \qquad (65)$$

Сопоставляя это выражение со вторым членом (21), мы получаем ту же формулу для вероятности (63). Тем самым показано, что действительно указанная вероятность входит в полное выражение для поглощения (21).

Рассмотрим теперь остальные члены нелинейной диэлектрической проницаемости, до сих пор не учтенные. В первую очередь вернемся к выражению для $\epsilon^{\mathrm{N}(2),1}$, описывающему вклады в $\epsilon^{\mathrm{N},1}$, обязанные квадратичным нелинейным плотностям заряда. В отсутствие черенковского резонанса путем интегрирования по частям общих выражений (35) для квадратичных нелинейных плотностей заряда нетрудно установить соотношение

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k,-k_1} = \frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}{k}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}\,. \qquad (66)$$

Запишем соотношение (66) в виде

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k,-k_1} = \frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}{k}\,\rho^{\mathrm{N},2*}_{k_1,k-k_1} + 2i\,\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}{k}\,\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}\,. \qquad (67)$$

Выделим в $\epsilon^{\mathrm{N}(2),1}$ ту часть, которая обязана первому члену (67). Обозначая ее вклад в поглощение волн через

$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},3}$, имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},3}=\frac{(8\pi)^2}{k^2(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \times\int \mathrm{d}k_1\,|E^{(0)}|^2_{k_1}\,|\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}|^2\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\epsilon_{k-k_1}}\,. \quad (68)$$

Мнимую часть диэлектрической проницаемости, входящую в (68), представим как

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{\epsilon_{k-k_1}}=\sum_{\alpha}\frac{4\pi^2e_\alpha^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\times \times\frac{\delta\big(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)}{|\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}|^2}\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right). \quad (69)$$

В результате формула (68) приобретает вид

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},3}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{(8\pi)^2e_\alpha^2e_\beta^2}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^6}\times \times\frac{|\rho^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}|^2}{k^2q^2|\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2|\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}|^2}\times \times\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2}\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi^\beta_{\mathbf{p}'}\,. \quad (70)$$

Выражение (70) симметрично относительно замены $\alpha\leftrightarrow\beta$, $\mathbf{q}\leftrightarrow\mathbf{k}-\mathbf{q}$, $\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{p}'$. Поэтому для конкретных значений α и β в (70) при суммировании по α и β нужно выделить члены, в которых α равно интересующему нас значению α, а β равно интересующему нас значению β, а также выделить члены, в которых α равно интересующему нас значению β, а β равно интересующему нас значению α. В силу отмеченной симметрии два возникающих члена дают как раз оба члена (21) со следующим выражением для вероятности:

$$w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q})=\frac{16\pi e_\alpha^2e_\beta^2(2\pi)^3(8\pi)^2}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \times\frac{|\rho^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}|^2}{k^2q^2|\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|^2\,|\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}|^2}\times \times\frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2}\,\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big). \quad (71)$$

Легко видеть, что формула (71) записана в виде, предписанном соотношением (18), с матричным элементом, равным (25). Таким образом, формула (18), которая описывает тормозное излучение, возникающее из-за возмущений поляризационных зарядов сталкивающихся частиц, также является строго доказанной.

Однако возникает, естественно, интерференция двух указанных механизмов тормозного излучения, и полная интенсивность тормозного излучения не равна сумме интенсивности обычного тормозного излучения, обязанного отклонению в траекториях сталкивающихся частиц, и интенсивности, обязанной возмущению поляризационных зарядов полем сталкивающихся зарядов. Складываться должны матричные элементы, а не интенсивности, т.е. полная интенсивность тормозного излучения должна определяться квадратом суммы матричных элементов (20), (24) и (25).

Заметим, что в предыдущем анализе при получении вероятности (63) из соотношения (62) следует еще учесть в сумме по α член с $\alpha=\beta$. Путем замены $\mathbf{q}$ на $\mathbf{k}-\mathbf{q}$ мы приводим δ-функцию, описывающую закон сохранения энергии при тормозном излучении, к форме, соответствующей соотношению (18), с вероятностью, содержащей квадрат модуля матричного элемента (24). Таким образом, квадраты всех трех матричных элементов мы получили.

Покажем, что фактически вероятность описывается соотношением (18), содержащим квадрат полного матричного элемента

$$M=M^\alpha+M^\beta+M^{\alpha,\beta}\,, \quad (72)$$

где M^α соответствует (20). Выявим все интерференционные члены. В первую очередь рассмотрим вклад неучтенного до сих пор второго члена (67). Обозначая вклад его в поглощение волн через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},4}$, получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},4}=\frac{2(8\pi)^2}{k(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times \times\int\mathrm{d}k_1\,|E^{(0)}|^2_{k_1}\,\mathrm{Im}\,\frac{\rho^{\mathrm{N},2}_{k,-k_1}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\,\mathrm{Re}\,\frac{\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}}{\epsilon_{k-k_1}}\,. \quad (73)$$

Из определения (35) для квадратичного нелинейного заряда имеем

$$\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k,-k_1}=\sum_\alpha\frac{e_\alpha^3\pi}{2m_\alpha}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{kk_1}\,\frac{1}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\times \times\delta\big(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right). \quad (74)$$

Подстановка этого выражения в (73) дает

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},4}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi e_\alpha^2e_\beta^2(2\pi)^3}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^9}\times \times\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\,\Phi^\beta_{\mathbf{p}'}\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right)\times \times2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{8\pi\rho^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{kq|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\right)\times \times\frac{e_\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m_\alpha q^2k\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,. \quad (75)$$

Нетрудно показать, что соотношение (75) содержит часть интерференционных членов квадрата модуля полного матричного элемента M:

$$|M|^2=|M^\alpha|^2+|M^\beta|^2+|M^{\alpha,\beta}|^2+ +2\,\mathrm{Re}\,\{M^\alpha M^{\alpha,\beta}\}+2\,\mathrm{Re}\,\{M^\beta M^{\alpha,\beta}\}+ +2\,\mathrm{Re}\,\{M^\alpha M^\beta\}. \quad (76)$$

Три первых члена, содержащих квадраты модулей матричных элементов, уже были получены. Соотношение (75) содержит часть двух членов (76), а именно, часть $2\,\mathrm{Re}\{M^\alpha M^{\alpha,\beta}\}$ и $2\,\mathrm{Re}\{M^\beta M^{\alpha,\beta}\}$.

Действительно, для тех членов суммы по α и β в (75), для которых значение α совпадает с интересующим нас значением α, а значение β совпадает с интересующим нас значением β, соотношение (75) содержит как раз $2\,\mathrm{Re}\{M^{\beta}M^{\alpha,\beta}\}$, но при этом оно дает только первый член (21) (второй член с $\mathbf{q}\cdot(\partial\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}/\partial\mathbf{p}')\,\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ отсутствует). Для тех же членов суммы по α и β в (75), для которых значение α совпадает с интересующим нас значением β, а значение β совпадает с интересующим нас значением α, соотношение (75) содержит тоже $2\,\mathrm{Re}(M^{\beta}M^{\alpha,\beta})$, но при этом оно дает только второй член (21) (первый член с $(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot(\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}/\partial\mathbf{p})\,\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}$ отсутствует). Эти два недостающих члена содержатся в $\epsilon_k^{\mathrm{N},3}$ (см. (51)) и частично в $\epsilon_k^{\mathrm{N},2}$ (см. (48)).

Путем интегрирования по частям указанные нелинейные диэлектрические проницаемости можно записать в виде

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},3}=\sum_{\alpha}\frac{16e_\alpha^3}{m_\alpha}\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{kk_1^2|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\,\epsilon_{k_1}\epsilon_{k_1-k}}\times$$
$$\times\frac{\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,\delta\big(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)\,\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\,,\qquad(77)$$

$$\epsilon_k^{\mathrm{N},2}=\sum_{\beta}\frac{16e_\beta^3}{m_\beta}\int\frac{\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)}{k_1k^2|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\,\epsilon_{k-k_1}\epsilon_{k_1}}\times$$
$$\times\frac{\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')^2}\,\delta(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}')\,\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}\,.\qquad(78)$$

В (77) мы подставим первый член из соотношения

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}=\frac{k_1}{k}\,\rho^{\mathrm{N},2*}_{k_1,k-k_1}+2i\,\frac{k_1}{k}\,\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}\,.\qquad(79)$$

Соответствующий вклад в затухание волн, обязанный $\mathrm{Im}\,(1/\epsilon_{k_1})$ обозначим через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},5}$. Член с $\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}$ мы рассмотрим отдельно (кстати, удвоенное его значение в (79) плюс его отрицательное значение из $\rho^{\mathrm{N},2*}$ в сумме дают просто его значение без коэффициента 2). В (78) мы учтем только мнимую часть $1/\epsilon_{k-k_1}$, оставив член с $\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,k-k_1}$ также для последующего рассмотрения. Соответствующий вклад в затухание волн обозначим через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},6}$.

С учетом вышесказанного мы получаем оба вклада в виде

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},5}=-\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},3}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi e_\alpha^2e_\beta^2(2\pi)^3}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times$$
$$\times\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^9}\,\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\times$$
$$\times\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{q}\cdot\frac{\partial\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\right)\left(-\frac{8\pi\,\rho^{\mathrm{N},2*}_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{kq\epsilon^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\epsilon^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\right)\times$$
$$\times\frac{e_\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq^2m_\alpha\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,,\qquad(80)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},6}=-\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},2}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi e_\alpha^2e_\beta^2(2\pi)^3}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\times$$
$$\times\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^9}\,\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\times$$
$$\times\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}\left((\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(-\frac{8\pi\,\rho^{\mathrm{N},2}_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}';\,\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{kq\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\right)\times$$
$$\times\frac{e_\beta\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2m_\beta\epsilon^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')^2}\,.\qquad(81)$$

Из приведенных выражений легко видеть, что (80) содержит произведение $M^{\alpha,\beta*}$ на M^{α}, а (81) содержит произведение $M^{\alpha,\beta}$ на $M^{\beta*}$. Путем замены α на β (выделяя соответствующие члены в сумме по α и β) и $\mathbf{q}\leftrightarrow\mathbf{k}-\mathbf{q}$ можно показать, что (80) содержит произведение $M^{\alpha,\beta*}$ на M^{β}. Путем замены α на β (выделяя соответствующие члены в сумме по α и β) и $\mathbf{q}\leftrightarrow\mathbf{k}-\mathbf{q}$ можно показать, что (81) содержит произведение $M^{\alpha,\beta}$ на $M^{\alpha*}$.

Таким образом, мы действительно строго установили наличие в поглощении волн всех интерференционных членов, соответствующих вкладу $2\mathrm{Re}\,M^{\alpha,\beta}(M^{\alpha}+M^{\beta})$ в квадрате матричного элемента. Осталось доказать наличие интерференционных членов, соответствующих вкладу $2\mathrm{Re}\,M^{\alpha}M^{\beta}$ в квадрате матричного элемента. Этот вклад возникает из оставшихся членов в $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},3}$ и $\epsilon^{\mathrm{N},2}$, пропорциональных $\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}$.

Используя

$$\mathrm{Im}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}=-\sum_{\beta}\frac{e_\beta^3\pi}{2k|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')^2}\times$$
$$\times\delta(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}')\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\right)-$$
$$-\sum_{\alpha}\frac{e_\alpha^3\pi}{2k|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\times$$
$$\times\delta\big(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right),\qquad(82)$$

мы учтем первый член (82) в (77) и второй член (82) в (78), с тем чтобы рассмотреть только δ-функции, описывающие законы сохранения при тормозном излучении. В результате оказывается, что при той же, что и выше, замене α на β указанные мнимые части в точности дают вклад в поглощение, соответствующий вкладу $2\mathrm{Re}\,M^{\alpha}M^{\beta}$ в квадрате матричного элемента. Обозначая этот вклад через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},7}$, получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{N},7}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{8\pi e_\alpha^2e_\beta^2(2\pi)^3}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^9}\times$$
$$\times\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big)\,\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{q}\cdot\frac{\partial\Phi^{\beta}_{\mathbf{p}'}}{\partial\mathbf{p}'}\right)\times$$
$$\times2\mathrm{Re}\left(\frac{e_\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq^2m_\alpha\,\epsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\right)\times$$
$$\times\frac{e_\beta\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2m_\beta\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')^2}\,.\qquad(83)$$

Тем самым мы завершили построение общей теории тормозного излучения с учетом коллективных эффектов.

При помощи флуктуационного подхода мы провели расчет, иллюстрирующий принципиальные моменты, и поэтому для простоты выбрали пример тормозного излучения продольных волн. Полученные результаты легко трансформируются на случай тормозного излучения волн произвольной поляризации.

4.2. Анализ матричных элементов тормозного излучения продольных волн

Самым простым является случай, наиболее близкий к вакуумному, при котором коллективные эффекты мало существенны. Хотя фактически для продольных волн такой случай трудно осуществляется, его рассмотрение полезно в сравнении с тем, когда коллективные эффекты учитываются.

Для указанных целей пренебрежем матричным элементом $M^{\alpha,\beta}$, а в матричных элементах M^{α} и M^{β} будем пренебрегать доплеровскими поправками $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ по сравнению с частотой $\omega_{\mathbf{k}}$. Будем также считать импульс волны малым по сравнению с передаваемым импульсом. Тогда

$$M^{\alpha}+M^{\beta}\approx\frac{1}{q\omega_{\mathbf{k}}^{2}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\left(\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}}-\frac{e_{\beta}}{m_{\beta}}\right), \tag{84}$$

что приводит к известному результату — равенству нулю излучения при $e_{\alpha}/m_{\alpha}-e_{\beta}/m_{\beta}=0$.

Ясно, что этот результат не может сохраниться при учете коллективных эффектов в тормозном излучении, во-первых, потому, что указанная сумма не равна нулю вследствие того, что имеет место экранирование полей сталкивающихся частиц, и, во-вторых, потому, что матричный элемент $M^{\alpha,\beta}$ при столкновениях одинаковых частиц не равен нулю. Для того чтобы это явно показать, запишем матричные элементы M^{α} и M^{β}, пренебрегая только доплеровскими поправками:

$$M^{\alpha}\approx\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\mathbf{k}}^{2}q\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\,, \tag{85}$$

$$M^{\beta}\approx\frac{e_{\beta}}{m_{\beta}\omega_{\mathbf{k}}^{2}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,. \tag{86}$$

Даже при $k\ll q$ обращение в нуль матричного элемента возникает для $\alpha=\beta$ только при скоростях частиц, много меньших средних тепловых скоростей, когда для экранирования можно использовать дебаевское приближение. Однако матричный элемент, обязанный колебаниям поляризационного заряда, при этом в нуль не обращается даже для столкновений двух тяжелых частиц, когда матричные элементы M^{α} и M^{β} малы в силу больших масс частиц.

Действительно, получим приближенные выражения для матричного элемента $M^{\alpha,\beta}$. Будем считать, что в нелинейную плотность заряда основной вклад вносят электроны плазмы (это оправдано для высокочастотных продольных волн, таких, как ленгмюровские волны) и что доплеровскими поправками можно пренебречь по сравнению с частотой волн. Тогда в общем выражении для нелинейного отклика (заряд электрона принят раным $-e$)

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,\,k-k_1}=\frac{e^{3}}{2k_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^{3}}\,\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\times$$
$$\times\left\{\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\times\right.$$
$$\times\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)+\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v}+i0\right)^{-1}\left(\mathbf{k}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\right\}\Phi^{e}_{\mathbf{p}} \tag{87}$$

можно взять по частям первую из производных в подынтегральном выражении, а затем пренебречь доплеровскими поправками по сравнению с частотой волн.

В результате мы приходим к соотношению

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k_1,\,k-k_1}\approx-\frac{e\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}{8\pi k_1 m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}}\left(\epsilon^{(e)}_{k-k_1}-1\right)-$$
$$-\frac{e\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)k_1}{8\pi|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}}\left(\epsilon^{(e)}_{k_1}-1\right), \tag{88}$$

где $\epsilon^{(e)}$ — электронная часть диэлектрической проницаемости (т.е. та часть, которая получается, если считать, что массы всех частиц, кроме электронов, бесконечно велики). Заметим, что ϵ содержит вклады всех частиц плазмы. Используя результат (88), можно записать матричный элемент $M^{\alpha,\beta}$ в достаточно простом виде:

$$M^{\alpha,\beta}\approx\frac{e}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}q\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\,\frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}-1}{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}+$$
$$+\frac{e}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,\frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}-1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\cdot \tag{89}$$

Первый член (89) отличается от M^{α} (см. (85)) множителем, содержащим отношение электронной части диэлектрической проницаемости без единицы (т.е. электронной поляризуемости) к полной диэлектрической проницаемости (обе для волнового числа и частоты, определяющих изменение импульса и энергии частицы β). Второй член (89) отличается от M^{β} (см. (86)) множителем, содержащим, опять-таки, отношение электронной части диэлектрической проницаемости без единицы (т.е. электронной поляризуемости) к полной диэлектрической проницаемости (обе для волнового числа и частоты, определяющих изменение импульса и энергии частицы α).

Полученный результат означает, что тормозное излучение, обязанное возмущениям поляризационного заряда, может быть того же порядка, что и обычное тормозное излучение. Более того, в сумме матричных элементов возможна существенная компенсация (сокращение) отдельных вкладов. Это видно из того, что для электронов $e_{\alpha}=-e$, $m_{\alpha}=m_e$. При столкновениях тяжелых частиц основной вклад вносит $M^{\alpha,\beta}$.

4.3. Тормозное излучение продольных волн при электрон-электронных столкновениях

Покажем, что коллективные процессы сильно меняют сечения тормозного излучения при электрон-электронных столкновениях. Полный матричный элемент легко находится из вышеприведенных соотношений:

$$M=-\frac{e}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}\,\frac{\epsilon^{(i)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}-$$
$$-\frac{e}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^{2}\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{k|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\,\frac{\epsilon^{(i)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,, \tag{90}$$

где $\epsilon^{(i)}$ — ионная часть диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon^{(i)}_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \sum_i \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \times \\ \times \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)^{-1}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi^i_{\mathbf{p}}\,, \tag{91}$$

причем суммирование в (91) производится по всем сортам ионов i.

В случае, когда скорости электронов намного превосходят средние тепловые скорости ионов и

$$q \gg \frac{\omega_{pi}}{v} \tag{92}$$

($\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e_i^2 n_i/m_i}$ — ионная плазменная частота, v — абсолютная скорость электронов), можно положить ионную часть диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(i)}$ в (90) равной единице. Тогда

$$M \approx -e\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}/q^2 + \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})/(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{k m_e \omega_{\mathbf{k}}^2\,\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,. \tag{93}$$

В пределе $k \ll q$ закон сохранения энергии в элементарном акте тормозного излучения дает

$$q > \frac{\omega_{pe}}{u}\,, \tag{94}$$

где $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ — относительная скорость двух сталкивающихся электронов. Следовательно, при значениях u порядка v выполнение условия (92) обеспечено соотношением (94).

Кстати, в рассматриваемом случае тормозного излучения в плазме существенны абсолютные значения скоростей частиц относительно плазмы (именно поэтому в соотношение (92) входит абсолютное значение скорости электронов).

Пренебрежение доплеровскими поправками означает $k \ll \omega_{pe}/v$, что при u порядка v совместно с (94) дает $k \ll q$.

В пределе полного пренебрежения коллективными эффектами матричный элемент равен

$$M_{\mathrm{noncoll}} = -\frac{e}{k m_e \omega_{\mathbf{k}}^2}\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q^2} + \frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right). \tag{95}$$

Запишем мощность излучения при столкновении двух электронов согласно (16) и (18) в виде ($k = |\mathbf{k}|$)

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\omega_{pe}\,Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(k)\,\Phi^e_{\mathbf{p}'}\,, \tag{96}$$

где для ленгмюровских волн

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(k) = 8\pi e^4 \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}\,\omega_{pe}^2 k^2\,|M|^2\,\delta(\omega_{pe} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}), \tag{97}$$

причем $\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}$ — элемент телесного угла вектора $\mathbf{k}$.

Существенно то, что матричный элемент неколлективного тормозного излучения быстро падает с ростом передаваемого импульса q и основной вклад дают импульсы, близкие к наименьшему возможному значению $q = \omega_{pe}/u$. Интегрируя (97) по q и телесному углу $\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}$, для неколлективного тормозного излучения имеем

$$Q^{(e,e)\,\mathrm{noncoll}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(k) = \frac{28 e^6 k^4 u}{15 m_e^2 \omega_{pe}^4}\,. \tag{98}$$

Для коллективного тормозного излучения результат зависит от того, больше или меньше скорости сталкивающихся электронов их средних тепловых скоростей. Для скоростей, меньших средних тепловых, при расчете диэлектрической проницаемости можно использовать приближение дебаевского экранирования:

$$\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}} \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{q^2 v_{Te}^2}\,.$$

При $q \ll \omega_{pe}/v_{Te}$ матричный элемент мал, а при $q \gg \omega_{pe}/v_{Te}$ он практически совпадает с неколлективным. Поскольку $q_{\min} = \omega_{pe}/u \gg \omega_{pe}/v_{Te}$, при столкновении медленных электронов коллективные эффекты малы.

Уже в случае столкновений медленного электрона ($v' \ll v_{Te}$) с быстрым электроном ($v \gg v_{Te}$) коллективные эффекты весьма важны. Так как $v \gg v'$, то закон сохранения при тормозном излучении дает $\omega_{pe} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}$ и для диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}}$ можно использовать приближенное выражение:

$$\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2} - \frac{3\omega_{pe}^2 q^2 v_{Te}^2}{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^4} \approx \frac{3 q^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}\,, \tag{99}$$

в то время как для диэлектричекой проницаемости $\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}$ можно использовать приближение дебаевского экранирования. В этом случае мы приходим к выражению

$$Q^{(e,e)\,\mathrm{coll}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(k) = \frac{28 e^6 k^4 v}{9\cdot 15 m_e^2 \omega_{pe}^4}\,, \tag{100}$$

которое в девять раз меньше результата, получаемого в пределе $v \gg v'$ из (98).

Наконец, в пределе, когда оба электрона быстрые ($v,\,v' \gg v_{Te}$), для обеих диэлектрических проницаемостей нужно использовать первое из приближенных выражений (99). Тогда

$$Q^{(e,e)\,\mathrm{coll}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(k) = \frac{28 e^6 k^4}{15 m_e^2 \omega_{pe}^2} \int \frac{\mathrm{d}q^2}{q^4}\,F(q^2), \tag{101}$$

где

$$F(q^2) = \left[\frac{\delta\big(\omega_{pe} - \mathbf{q}\cdot(\mathbf{v}'-\mathbf{v})\big)}{\big(1 - \omega_{pe}^2/(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2 - 3\omega_{pe}^2 q^2 v_{Te}^2/(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^4\big)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\big(1 - \omega_{pe}^2/(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}')^2 - 3\omega_{pe}^2 q^2 v_{Te}^2/(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}')^4\big)^2}\right]_{\mathrm{av}}. \tag{102}$$

Квадратные скобки с индексом "av" означают угловое усреднение.

Чтобы не загромождать изложение, приведем результат углового усреднения и последующего интегрирования по q^2 для случая $v \gg v'$ (напоминаем, что

$v,\, v' \gg v_{Te}$):

$$Q_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}^{(e,\,e)\,\mathrm{coll}}(k) = \frac{28 e^6 k^4 v}{15 m_e^2 \omega_{pe}^4}\,\frac{v'^4}{9 v_{Te}^4}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}\cos^4\chi + \frac{1}{2}\sin^2\chi\cos^2\chi + \frac{1}{8}\sin^4\chi\right), \quad (103)$$

где χ — угол между скоростями $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$. Заметим, что $v'^4/v_{Te}^4 \gg 1$. Поэтому коллективные эффекты существенно увеличивают интенсивность тормозного излучения быстрых электронов при электрон-электронных столкновениях.

Таким образом, коллективные эффекты могут значительно изменить не только числовые коэффициенты в мощности тормозного излучения, но и основные качественные характеристики тормозного излучения.

4.4. Тормозное излучение продольных волн при ион-ионных столкновениях

При столкновениях ионов с ионами матричные элементы M^{α} и M^{β} малы из-за большой массы ионов и излучение определяется матричным элементом $M^{\alpha,\,\beta}$ (см. (89)).

Рассмотрим вначале случай, когда скорости ионов меньше средней тепловой скорости электронов: $v,\, v' \ll v_{Te}$. Тогда для электронной части диэлектрической проницаемости в числителе (89) можно использовать приближение дебаевского экранирования. Это дает

$$M^{\alpha,\,\beta} \approx \frac{ek}{T_e q^2 (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\,\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,. \quad (104)$$

В силу того что $q_{\min} = \omega_{pe}/u \gg \omega_{pe}/v_{Te}$, диэлектрические проницаемости в (104) можно положить равными единице вне зависимости от соотношения между скоростями рассматриваемых ионов и средними тепловыми скоростями ионов. Действительно, в случае, когда скорости ионов меньше средней тепловой скорости ионов, в диэлектрическую проницаемость входит полный дебаевский радиус d и $q_{\min} \gg 1/d$. В случае же, когда скорости ионов много больше средней тепловой скорости ионов, но (по условию) много меньше средней тепловой скорости электронов, в диэлектрические проницаемости входит дебаевский радиус электронов d_e, но все равно $q_{\min} \gg 1/d_e$.

Таким образом, в случае $k \ll q$ матричный элемент тормозного излучения при ион-ионных столкновениях можно приближенно записать в виде

$$M \approx \frac{ek}{T_e q^4}\,, \quad (105)$$

а интенсивность тормозного излучения определяется соотношением

$$Q_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}^{(i,\,i)\,\mathrm{coll}}(k) = \frac{4 k^4 u^5 e^6 Z_\alpha^2 Z_\beta^2}{9 T_e^2 \omega_{pe}^6}\,. \quad (106)$$

Отсюда видно, что при $T_e \approx T_i$ коллективное тормозное излучение ионов для $v \gg v_{Ti}$ намного превосходит оценку, получаемую без учета коллективных процессов. Если же скорость ионов v порядка v_{Te}, то тормозное излучение при ион-ионных столкновениях того же порядка, что и тормозное излучение при электрон-электронных столкновениях.

Рассмотрои теперь случай быстрых ионов, когда $v \gg v_{Te}$. В этом случае для электронной части диэлектрической проницаемости в матричном элементе можно использовать выражение $\epsilon^e_{\mathbf{q},\,\omega} - 1 \approx -\omega_{pe}^2/\omega^2$. Мощность излучения в этих условиях падает с ростом скорости ионов как $1/v^5$. Таким образом, мощность излучения при ион-ионных столкновениях максимальна при v порядка v_{Te}.

4.5. Тормозное излучение продольных волн при электрон-ионных столкновениях

Этот процесс является основным в приближении, когда можно пренебречь коллективными эффектами, и он фактически остается основным при учете коллективных эффектов. Однако коллективные эффекты существенно видоизменяют процесс тормозного излучения.

Без учета коллективных эффектов матричный элемент тормозного излучения определяется соотношением (19), которое при $k \ll q$ записывается в виде

$$M_{\mathrm{noncoll}} = -\frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m_e \omega_{pe}^2 k q^2}\,. \quad (107)$$

Если из физических соображений об экранировании (которое, строго говоря, должно быть получено при учете коллективных эффектов) ввести в знаменатель диэлектрическую проницаемость, то нужно было бы использовать (20):

$$M_{\mathrm{noncoll}} = -\frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m_e \omega_{pe}^2 k q^2\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,. \quad (108)$$

В действительности же правильное выражение, получаемое из вышеприведенных формул (в том же приближении, в котором записаны соотношения (107) и (108)), имеет вид

$$M_{\mathrm{coll}} = -\frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m_e \omega_{pe}^2 k q^2\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\frac{\epsilon^{(i)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}} +$$
$$+\frac{e\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{m_e \omega_{pe}^2 k (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'} - 1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,. \quad (109)$$

Рассмотрим предел, когда скорость электрона намного превосходит среднюю тепловую скорость ионов, скорость иона намного меньше средней тепловой скорости электронов, а $k \ll q$. В этом случае в (109) можно $\epsilon^{(i)}$ с хорошей точностью положить равной единице, а для $\epsilon^{(e)}$ использовать приближение дебаевского экранирования. Если, кроме того, скорость электрона много меньше средней тепловой скорости электронов, то $\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'} - 1 \approx \omega_{pe}^2/k^2 v_{Te}^2 < v^2/v_{Te}^2 \ll 1$ и вторым членом в (109) можно пренебречь. Но тогда и в остальных диэлектрических проницаемостях можно использовать приближение $\epsilon = 1$, и мы получим матричный элемент тормозного излучения в приближении, когда коллективные эффекты не учитываются.

В более общем случае для произвольных скоростей электрона (но больших средней тепловой скорости ионов) при $k \ll q$ имеем

$$M_{\mathrm{coll}} \approx -\frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m_e k q^2 \omega_{pe}^2\,\epsilon^{(e)}_{-\mathbf{q},\,-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{1 + 1/q^2 d_e^2}{1 + 1/q^2 d^2}\,, \quad (110)$$

где d — полный дебаевский радиус, а d_e — дебаевский радиус электронов, причем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{d_e^2} + \frac{1}{d_i^2}\ .$$

В случае, когда скорость электрона намного превосходит средние тепловые скорости электронов, наибольший вклад дают значения q, много меньшие обратного дебаевского радиуса, а $\epsilon_{-\mathbf{q},\,-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}}$ может быть аппроксимирована выражением $-3q^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2$. Тогда матричный элемент можно приближенно записать в виде

$$M_{\mathrm{coll}} \approx \frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}d^2}{3T_e k q^4 d_e^2}\ , \tag{111}$$

а интенсивность тормозного излучения определяется соотношением

$$Q_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}^{(e,\,i)\,\mathrm{coll}}(k) = \frac{4k^2u^3e^6Z_i^2}{27T_e^2\omega_{pe}^4}\ . \tag{112}$$

Сравнение с формулой (106) показывает, что в (106) (справедливой при $u \ll v_{Te}$, тогда как (112) справедлива при обратном неравенстве) содержится, вообще говоря, малый множитель k^2u^2/ω_{pe}^2. Но, во-первых, на пределе применимости этот множитель мог бы быть порядка единицы, а во-вторых, опять-таки, на пределе применимости указанные формулы можно сравнивать при v порядка v_{Te}. (Напомним, что при $v \gg v_{Te}$ интенсивность тормозного излучения при ион-ионных столкновениях быстро падает с ростом скорости ионов.)

И все же при всех сделанных оговорках указанное сравнение дает удивительный результат: излучения при ион-ионных и электрон-ионных столкновениях сопоставимы по порядку величины. (Заметим, что без учета коллективных эффектов тормозное излучение при ион-ионных столкновениях по крайней мере в m_e^2/m_i^2 раз меньше тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях.)

Другой важный вывод, который вытекает из проведенного анализа, состоит в том, что излучение быстрых частиц сильно видоизменяется коллективными эффектами, что может также, на первый взгляд, вызвать удивление, так как быстрые частицы не имеют заметного поляризационного заряда. Более того, именно излучение медленных частиц может быть более близким к тому, которое соответствует неколлективному процессу излучения. Объяснение этого состоит в том, что существенными являются колебания экранирующего заряда иона, скорости которого довольно малы. При больших скоростях электронов излучение ионов, обязанное изменению их траекторий при столкновениях, интерферирует с излучением, обязанным возмущениям электронов в поляризационном заряде, окружающем ион.

5. Рассеяние продольных волн в плазме

5.1. Рассеяние как резонансное тормозное излучение

Поглощение, обязанное обращенному эффекту тормозного излучения, и рассеяние тесно связаны между собой. Действительно, в условиях, когда частота поля (осуществляющего передачу импульса и энергии от одной сталкивающейся частицы к другой сталкивающейся частице) близка к собственной частоте волн, эта волна дополнительно излучается помимо "тормозного кванта", т.е. происходит рассеяние волн. Это следует также из закона сохранения (15), который можно записать в виде

$$(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{v} - \omega + \omega_{\mathbf{k}} = 0, \tag{113}$$

где

$$\omega = \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'. \tag{114}$$

В условиях, когда $\omega = \omega_{\mathbf{q}}$, формула (113) выражает закон сохранения при рассеянии. Для вакуума эта ситуация невозможна, так как виртуальные волны никогда не соответствуют реальным на массовой поверхности. В среде же, где фазовые скорости могут быть довольно малыми, и, в особенности, в плазме для продольных волн такая ситуация не только возможна, но и встречается довольно часто.

Нелинейная диэлектрическая проницаемость, полученная в разделе 3, описывает и процессы рассеяния. При этом рассеяние соответствует резонансному условию, когда $\epsilon_{\mathbf{q},\,\omega}$ близка к нулю, а

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\omega}} \approx -\pi\,\frac{\omega}{|\omega|}\,\delta(\epsilon_{\mathbf{q},\,\omega})\,. \tag{115}$$

Именно благодаря соотношению (115) частота поля с волновым вектором $\mathbf{q}$ равна собственной частоте волны (в данном случае плазменной волны) $\omega_{\mathbf{q}}$, которая является решением дисперсионного уравнения для продольных волн $\epsilon_{\mathbf{q},\,\omega_{\mathbf{q}}} = 0$.

В разделе 3 было найдено выражение для диэлектрической проницаемости волны малой интенсивности с учетом нелинейных флуктуаций частиц и полей. В линейном по амплитуде волн приближении процессы рассеяния описываются двумя членами. Один из них описывает появление рассеянных волн и пропорционален амплитуде рассеиваемых волн, а второй пропорционален интенсивности рассеиваемых волн и описывает их экстинкцию (затухание) из-за рассеяния.

В подходе, использованном для расчета нелинейной диэлектрической проницаемости, мы учитывали только эффекты, пропорциональные амплитуде рассматриваемой волны, т.е. с ее помощью можно определить коэффициент экстинкции. Так как этот коэффициент однозначно связан с вероятностью рассеяния, то можно исследовать и все коллективные эффекты в рассеянии. При этом из соображений баланса коэффициент затухания (коэффициент экстинкции) варажается через вероятность $w_{\mathbf{p}}^{\mathrm{sc},\,\alpha}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ рассеяния рассеиваемых волн $\mathbf{k}$ на частице α с импульсом $\mathbf{p}$, нормированную на единичный фазовый объем $\mathrm{d}\mathbf{k}'/(2\pi)^3$ рассеянных волн $\mathbf{k}'$, следующим образом:

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_{\mathbf{k},\,\omega}^{\mathrm{N}}}{\left(\partial(\mathrm{Re}\,\epsilon_{\mathbf{k},\,\omega})/\partial\omega\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}'\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^6}\,w_{\mathbf{p}}^{\mathrm{sc},\,\alpha}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\,. \tag{116}$$

Определим вероятность рассеяния через матричный элемент рассеяния $M^{\rm sc}$:

$$w_{\mathbf{p}}^{\mathrm{sc},\alpha}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = 4e_\alpha^2(2\pi)^3|M^{\rm sc}|^2\times \times\frac{\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}(\partial\epsilon_{k_1}/\partial\omega_1)_{\omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}\,. \tag{117}$$

В общем случае коллективные эффекты существенно видоизменяют матричный элемент рассеяния. Он состоит из двух частей:

$$M^{\rm sc} = M^{\rm sc}_{\rm noncoll} + M^{\rm sc}_{\rm coll}\,. \tag{118}$$

Покажем, как указанные составляющие матричного элемента возникают из теории флуктуаций.

5.2. Сечения рассеяния продольных волн

Начнем с использования выражения (53) для нелинейной диэлектрической проницаемости $\epsilon_k^{\mathrm{N},4}$, так как из нее можно получить вероятность рассеяния, в которой как раз не учтены коллективные эффекты. При вычислении мнимой части $\epsilon_k^{\mathrm{N},4}$ мы использовали общее выражение для $\mathrm{Im}\,(1/\epsilon_k)$, однако в условиях резонанса удобнее ипользовать (115) (или, точнее, соотношение (115), в котором $\mathbf{q}=\mathbf{k}$). Конечно, это приближенное соотношение получится и из более точного, использованного выше, но только в условиях, когда мы интересуемся частотами, близкими к резонансу.

Обозначая соответствующий вклад в затухание волн через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(1)}$, имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(1)} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},4}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = -\sum_\alpha\frac{2e_\alpha^4}{m_\alpha^2}\times \times\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)^2\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{k^2k_1^2(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^4}\times \times\frac{\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}(\partial\epsilon_{k_1}/\partial\omega_1)_{\omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}\,. \tag{119}$$

Это выражение дает матричный элемент неколлективного рассеяния

$$M^{\rm sc}_{\rm noncoll} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{kk_1}\,\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,. \tag{120}$$

Полученное выражение описывает томсоновское рассеяние продольных волн и отличается от известного выражения для томсоновского рассеяния электромагнитных волн только поляризационными векторами (в данном случае в (120) входит скалярное произведение единичных векторов вдоль распространения продольных волн).

Обратимся теперь к выражению (51) для $\epsilon_k^{\mathrm{N},3}$. Резонанс $1/\epsilon_{k-k_1}$ соответствут поправкам к черенковскому взаимодействию. Мы рассмотрим только резонанс, связанный с $1/\epsilon_{k_1}$. Обозначая соответствующее выражение, получаемое для этого резонанса из $\epsilon_k^{\mathrm{N},3}$, через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(2)}$, имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(2)} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},3}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = \mathrm{Re}\sum_\alpha\frac{16\pi e_\alpha^3}{m_\alpha}\times \times\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{kk_1(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\,\frac{\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\epsilon_{k_1-k}}\times \times\frac{\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{v}\big)}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}(\partial\epsilon_{k_1}/\partial\omega_1)_{\omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}\,. \tag{121}$$

Вводя обозначение

$$M^{\rm sc}_{\rm coll} = \frac{8\pi\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}}{k_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\epsilon_{k_1-k}}\,, \tag{122}$$

мы видим, что формула (121) содержит в вероятности часть квадрата модуля полного матричного элемента $|M^{\rm sc}|^2$, равную $\mathrm{Re}\,\{M^{\rm sc}_{\rm coll}M^{\rm sc}_{\rm noncoll}\}$, т.е. половину интерференционного эффекта, описываемого $2\,\mathrm{Re}\,\{M^{\rm sc}_{\rm coll}M^{\rm sc}_{\rm noncoll}\}$.

Вторая половина возникает из выражения (48) для $\epsilon_k^{\mathrm{N},2}$, если в нем заменить k_1 на $k-k_1$, проинтегрировать по частям по импульсам и воспользоваться соотношением (115). Обозначая результат, получаемый из (48) для резонансного случая, через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(3)}$, имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(3)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(2)}\,. \tag{123}$$

Наконец, квадрат матричного элемента коллективного рассеяния определяется из резонансного затухания, описываемого $\epsilon_k^{\mathrm{N},1}$. Резонансные эффекты содержатся только во втором члене (40). Обозначая декремент резонансного затухания, описываемый этим членом, через $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(4)}$ и используя для резонанса соотношение (115), получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mathrm{sc}(4)} = -\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_k^{\mathrm{N},1}}{(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = = 64\pi^3\int\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\frac{|E^{(0)}|^2_{k-k_1}\,\rho^{\mathrm{N},2}_{k-k_1,k_1}\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k}}{kk_1(\partial\epsilon_k/\partial\omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}(\partial\epsilon_{k_1}/\partial\omega_1)_{\omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}\,. \tag{124}$$

Воспользовавшись выражением (29) для флуктуаций полей и соотношением (66) с заменой в нем k_1 на $k-k_1$, убеждаемся в том, что формула (124) описывает эффект, соответствующий $|M^{\rm sc}_{\rm coll}|^2$ в вероятности рассеяния.

Таким образом, мы строго показали, как теория флуктуаций приводит к выражениям для сечений рассеяния, содержащих квадрат модуля матричных элементов с учетом коллективных эффектов. Существенно, что через соответствующие квадраты матричных элементов выражаются как вероятности тормозного излучения, так и вероятности рассеяния, но в матричные элементы коллективные эффекты входят аддитивно. Для рассеяния и тормозного излучения интерференционные эффекты могут значительно снижать или увеличивать сечения процессов.

Если для нелинейного отклика воспользоваться приближенным выражением, справедливым в пренебрежении доплеровскими поправками,

$$\rho^{\mathrm{N},2}_{k,k_1-k} \approx \frac{e(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}{8\pi km_e\omega_{pe}^2}\left(\epsilon^{(e)}_{k_1-k}-1\right), \tag{125}$$

то мы получим известные вероятности рассеяния ленгмюровских волн на электронах и ионах (см. [8, 9]). В частности, по сравнению с томсоновским сечением из-за отмеченных интерференционных эффектов в сечение рассеяния для электронов входит малый фактор

$$\left|\frac{\epsilon^{i}_{k_1-k}}{\epsilon_{k_1-k}}\right|^2,$$

а в сечение рассеяния для ионов входит масса электронов и фактор

$$\left|\frac{\epsilon^{e}_{k_1-k}-1}{\epsilon_{k_1-k}}\right|^2$$

порядка единицы. В результате сечение рассеяния на ионах в плазме порядка томсоновского сечения рассеяния, а сечение рассеяния на электронах в плазме намного меньше томсоновского сечения рассеяния.

6. Коллективные эффекты в тормозном излучении электромагнитных волн

6.1. Вероятности тормозного излучения волн произвольной поляризации нерелятивистскими частицами

Для измеряемого в экспериментах электромагнитного излучения из плазмы важен вопрос: как сказываются коллективные эффекты на тормозном излучении поперечных волн? Попытки включения эффектов, связанных с ролью тормозного излучения электронов в тормозном излучении при электрон-ионных столкновениях, делались еще Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румером [12]. Однако только сейчас этот сложный процесс может быть описан достаточно подробно как для плазмы, так и для других сред. Что касается плазмы, то электроны экранирующего заряда являются свободными и описание процесса здесь наиболее просто. Будем исходить из той физической картины, которая была подробно проиллюстрирована на примере продольных волн.

Существенно, что вероятность тормозного излучения может быть выражена через квадрат матричного элемента тормозного излучения, для нахождения которого совсем не нужно рассматривать общую теорию флуктуаций. Именно на базе общей теории флуктуаций рассматривалась теория тормозного излучения и рассеяния в большинстве научных публикаций до сих пор [13]. Столь громоздкий путь подчас не позволяет увидеть непосредственно, что результат определяется квадратом матричного элемента. Как правило, для этого требуются довольно трудоемкие вычисления, хотя такое доказательство всегда может быть проведено. Однако достаточно провести его лишь один раз, а затем удобнее исследовать эффекты в самих матричных элементах, так как именно в них возникает сокращение различных членов, связанное с вышеупомянутой интерференцией.

Новое, вносимое спецификой поперечных волн, сводится фактически к трем эффектам:

1) поляризационные векторы электромагнитных волн являются поперечными;

2) в силах, действующих на частицы плазмы, нужно учитывать силу Лоренца;

3) в случаях, когда частицы являются релятивистскими, нужно учитывать виртуальные поперечные поля.

Общая формула для вероятности тормозного излучения волны произвольной поляризации имеет вид (ср. с (18))

$$w^{\alpha,\beta}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q}) = \frac{16\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 (2\pi)^3}{\left(\partial\epsilon^{\sigma}_{k}\omega^2/\partial\omega\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\,|\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}^{\sigma}_{\mathbf{k}}|^2\omega^2\times$$
$$\times\,\delta\big(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}\big). \qquad (126)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — векторный матричный элемент, $\mathbf{e}^{\sigma}_{\mathbf{k}}$ — единичный вектор поляризации излучаемых волн, $\epsilon^{\sigma}_{k} = \epsilon_{i,j}(k)\,e^{\sigma}_{i,\mathbf{k}}e^{\sigma}_{j,\mathbf{k}}$ (где $\epsilon_{i,j}(k)$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы).

Выражения для векторных матричных элементов, справедливые при любых релятивистских распределениях частиц, даны в [9] (их определение в приведенной ссылке отличается множителем $\omega_{\mathbf{k}}$, а в определении вероятности отсутствует множитель $\omega^2_{\mathbf{k}}$). Мы приведем здесь приближенные выражения для векторных матричных элементов, справедливые для нерелятивистских частиц, когда можно считать виртуальные поля продольными и пренебречь доплеровскими поправками по сравнению с частотой волн.

Эти выражения очень близки к полученным для продольных волн (или, точнее, умножение векторных матричных элементов на продольные единичные векторы поляризации дает уже использованные выше выражения), так что приводимые ниже векторные матричные элементы обобщают результат на случай волн произвольной поляризации:

$$\mathbf{M}^{\alpha} = \frac{e_\alpha\mathbf{q}}{m_\alpha\omega^2_{\mathbf{k}}q^2\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,, \qquad (127)$$

$$\mathbf{M}^{\beta} = \frac{e_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{m_\beta\omega^2_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,, \qquad (128)$$

$$\mathbf{M}^{\alpha,\beta} \approx \frac{e\mathbf{q}}{m_e\omega^2_{\mathbf{k}}q^2\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,\frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}-1}{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}+$$
$$+\frac{e(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{m_e\omega^2_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\,\frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}-1}{\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,, \qquad (129)$$

где ϵ — продольная диэлектрическая проницаемость, т.е.

$$\epsilon_k = \epsilon_{i,j}(k)\,\frac{k_i k_j}{k^2}\,. \qquad (130)$$

Полученный результат является новым и ранее в литературе не фигурировал. Выводится он довольно громоздко (из общих соотношений, содержащихся в [9]), но он удобен в различных приложениях. Его можно использовать, в частности, для анизотропного распределения частиц, когда разделить диэлектрическую проницаемость на продольную и поперечную составляющие не удается. Условия применимости (127)–(129): $v, v' \ll c$ и $\omega_{\mathbf{k}} \gg kv,\, kv'$.

Приведенный результат пригоден также для плазмы во внешних полях, причем к перечисленным условиям применимости добавляется условие незамагниченности движения частиц: $kv, kv' \gg \omega_{H,\alpha}$ и $qv, qv' \gg \omega_{H,\alpha}$ (где $\omega_{H,\alpha} = e_\alpha H/m_\alpha c$ — циклотронная частота частиц). При этом условие на передаваемый импульс не является жестким, если максимальные передаваемые импульсы велики. Коллективные эффекты, как мы видели на примере продольных волн, усиливают тормозное излучение в таких процессах, как столкновения одинаковых или тяжелых частиц, когда эффективные передаваемые импульсы определяются либо скоростью частиц, либо дебаевским радиусом. В этом случае указанное ограничение существенно.

6.2. Тормозное излучение поперечных волн при электрон-электронных и ион-ионных столкновениях

Отличие электромагнитных волн от продольных в первую очередь состоит в дисперсии электромагнитных волн (зависимости частоты волн от их волнового числа)

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c^2k^2}\ . \tag{131}$$

В определенном отношении волны с $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{pe}$ при $k \ll \omega_{pe}/c$ сходны с продольными волнами и иногда называются поперечными плазмонами. Мы поэтому рассмотрим их отдельно. Волны с $\omega_{\mathbf{k}} \gg \omega_{pe}$, когда $\omega_{\mathbf{k}} \approx kc$, сходны с электромагнитными волнами в вакууме. Мы тоже рассмотрим их отдельно и будем в дальнейшем называть просто электромагнитными волнами.

Векторный матричный элемент для электрон-электронных столкновений легко восстанавливается из (90). Имея в виду то, что в вероятность входит квадрат матричного элемента, можно заключить, что для суммы двух поперечных поляризаций вероятность будет содержать квадрат векторного произведения векторного матричного элемента на волновой вектор волны $\mathbf{k}$. Поэтому, не нарушая общности, можно использовать в качестве векторного матричного элемента его векторное произведение на единичный вектор $\mathbf{k}/k$.

Если скорости электронов намного превышают тепловые скорости ионов, то для поперечных волн вместо (93) мы получаем

$$\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right] \approx -e\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{q}]}{k}\,\frac{1/q^2 - 1/(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^2\,\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\ . \tag{132}$$

Если же скорости электронов много меньше средней тепловой скорости электронов, то, как было выяснено выше, диэлектрические проницаемости можно положить равными единице. При $k \ll q$ это дает

$$\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right] \approx -e\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{q}]}{kq^4}\,\frac{2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{km_e\omega_{\mathbf{k}}^2}\ . \tag{133}$$

Для поперечных плазмонов удобно сохранить определение мощности на единичный интервал волновых чисел, но учесть дисперсию поперечных плазмонов

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^{\mathrm{t.pl}} \approx \omega_{pe} + \frac{k^2c^2}{2\omega_{pe}}\ .$$

Вместо (97) используем

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(k) = 8\pi e^4 \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}\times \\ \times \left|\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]\right|^2 \omega_{pe}^2 k^2\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\mathrm{t.pl}} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}). \tag{134}$$

Результат интегрирования (134) по углам приводит к соотношению, отличающемуся от (98), только числовым множителем:

$$Q^{(e,e)\,\mathrm{t.pl}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(k) = \frac{32e^6k^4u}{15m_e^2\omega_{pe}^4}\ . \tag{135}$$

Для электромагнитных волн удобно ввести интенсивность, нормированную на единичный интервал частоты:

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^3}\,Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(\omega)\,\Phi^{(e)}_{\mathbf{p}'}\ , \tag{136}$$

где

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(\omega) = 8\pi \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}\times \\ \times \left|\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]\right|^2 \frac{\omega^4e^4}{c^3}\,\delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}). \tag{137}$$

В случае медленных электронов соотношение (137) не зависит от k, т.е. от ω, что дает

$$Q^{(e,e)}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(\omega) = \frac{32e^6u}{15c^5m_e^2}\ . \tag{138}$$

Как видно из сравнения (138) и (135), спектральная плотность тормозного излучения увеличивается с ростом k (частоты) и выходит на постоянное значение при $k \gg \omega_{pe}/c$.

В случае быстрых электронов значения диэлектрических проницаемостей соответствуют (99), однако приближенное равенство (99) можно использовать только при $k \ll v_{Te}\omega_{pe}/cu$. В этом пределе интенсивности излучения продольных и поперечных плазмонов отличаются только числовым множителем (32 вместо 28 в соотношении (103)).

При больших значениях k роль коллективных эффектов падает в интервале $v_{Te}\omega_{pe}/cu \ll k \ll \omega_{pe}/c$ и большой множитель порядка v^4/v_{Te}^4 в интенсивности тормозного излучения исчезает. При $k \gg \omega_{pe}/c$ диэлектрические проницаемости можно положить равными единице и коллективные эффекты сказываются слабо. В этом случае можно использовать соотношение (138).

Таким образом, как при скоростях, меньших средней тепловой скорости электронов, так и при скоростях, много больших средней тепловой скорости электронов, но при $\omega \gg \omega_{pe}$, справедлива формула (138). Легко видеть, что она справедлива и при любых других промежуточных скоростях. Полная мощность излучения единицы объема плазмы для максвелловского распределения электронов по скоростям будет отличаться от (138) на множитель n_e^2, а скорость u должна быть заменена на ее среднее значение $2v_{Te}/\sqrt{\pi}$.

Тормозное излучение поперечных волн при ион-ионных столкновениях, вообще говоря, много меньше, чем для продольных волн. Это связано с тем, что при скоростях ионов, много меньших средней тепловой скорости электронов (когда для электронной диэлектрической проницаемости можно в первом приближении использовать аппроксимацию дебаевского экранирования), матричный элемент $M^{\alpha,\beta}$ обращается в нуль. В следующем же приближении матричный элемент $M^{\alpha,\beta}$

содержит малый параметр, равный отношению скорости ионов к средней тепловой скорости электронов:

$$\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} - 1 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{k v_{Te}}\right).$$

Несмотря на это тормозное излучение при ион-ионных столкновениях определяется полностью коллективными эффектами, так как квадрат матричного элемента содержит малый (порядка m_e/m_i) параметр v^2/v_{Te}^2, а неколлективный процесс содержит этот параметр в квадрате.

6.3. Тормозное излучение поперечных волн при электрон-ионных столкновениях

Коллективные эффекты в тормозном излучении при электрон-ионных столкновениях остаются основным механизмом тормозного излучения, так как, несмотря на существенное увеличение тормозного излучения из-за ион-ионных столкновений или модификацию тормозного излучения из-за электрон-электронных столкновений, указанные процессы не превосходят тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях.

Качественное изменение тормозного излучения из-за коллективных эффектов, проиллюстрированное в предыдущих разделах для излучения продольных волн, сохраняется и для электромагнитных волн. Отличие состоит лишь в том, что в соответствующих матричных элементах фигурируют векторные произведения вместо скалярных. Так, вместо (108) и (109) нужно использовать соотношения

$$\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]_{\text{noncoll}} = -\frac{e[\mathbf{k}\times\mathbf{q}]}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^2 k q^2\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,, \tag{139}$$

$$\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]_{\text{coll}} = -\frac{e[\mathbf{k}\times\mathbf{q}]}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^2 k\,\epsilon_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\times$$
$$\times\left(\frac{\epsilon^{(i)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}{q^2} + \frac{\epsilon^{(e)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'} - 1}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right). \tag{140}$$

Если скорости электронов намного превышают тепловую скорость ионов, то ионную диэлектрическую проницаемость при электронных скоростях можно положить равной единице, а для электронной диэлектрической проницаемости при ионных скоростях можно использовать приближение дебаевского экранирования. Тогда при $k \ll q$ получим

$$\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]_{\text{coll}} = -\frac{e[\mathbf{k}\times\mathbf{q}]}{m_e\omega_{\mathbf{k}}^2 k q^2\,\epsilon^{(e)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{v}}}\times$$
$$\times\frac{1+\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2 + \epsilon^{(i)}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}'}}\,. \tag{141}$$

В принятых условиях мощность тормозного излучения определяется соотношением

$$Q^{(e,i)}_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}(\omega) = 8\pi\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{M}\right]^2\frac{\omega^4 e^4 Z_i^2}{c^3}\,\delta(\omega-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}), \tag{142}$$

где Z_i — заряд иона (в единицах заряда электрона).

Анализ вышеприведенных соотношений легко выявляет роль коллективных эффектов. Мы проиллюстрируем их роль, усредняя мощность тормозного излучения по тепловому распределению электронов и ионов. При этом для интегрирования по тепловому распределению ионов мы используем соотношение, получаемое из флуктуационно-диссипативной теоремы (можно, конечно, убедиться в правильности такого соотношения и непосредственным интегрированием ионной диэлектрической проницаемости):

$$\beta\sum_i Z_i^2 n_i\int\frac{\mathrm{d}y_i}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\exp(-y_i^2)}{\left|\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2 + \sum_i \epsilon^{(i)}_{q,\,y_i}\right|^2} =$$
$$= \frac{\beta\sum_i Z_i n_i}{(1+\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2)\big(1+(1+\beta)\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2\big)}\,. \tag{143}$$

Здесь суммирование производится по всем сортам ионов i, ионная диэлектрическая проницаемость считается зависящей от q,

$$y_i = \frac{\omega}{q\sqrt{2}v_{Ti}}$$

(v_{Ti} — тепловая скорость ионов сорта i), параметр

$$\beta = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{\sum_i Z_i n_i} \tag{144}$$

(n_i — плотность ионов сорта i).

Полная мощность тормозного излучения единицы объема плазмы при электрон-ионных столкновениях, усредненная по тепловому распределению электронов и ионов, имеет вид

$$Q^{(e,i)\,\text{coll}}(\omega) = \frac{32e^6n_e^2\beta}{3m_e^2c^3}(1-\omega_{pe}^2/\omega^2)^{1/2}\int\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\frac{\exp(-y^2)\,\delta(\omega - qv_{Te}\sqrt{2}y)}{\left|1+W(y)\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2\right|^2}\times$$
$$\times\frac{1+\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2}{1+(1+\beta)\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2}\,, \tag{145}$$

где

$$W(y) = 1 - y\exp(-y^2)\int_0^y \mathrm{d}t\,\exp t^2 + i\sqrt{\pi}y\exp(-y^2). \tag{146}$$

Для сравнения приведем результат, полученный без учета коллективных эффектов, но с учетом дебаевского экранирования поля иона:

$$Q^{(e,i)\,\text{noncoll}}(\omega) = \frac{32e^6n_e^2\beta}{3m_e^2c^3}\,(1-\omega_{pe}^2/\omega^2)^{1/2}\int\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\frac{\exp(-y^2)\,\delta(\omega-qv_{Te}\sqrt{2}y)}{\left|1+\omega_{pe}^2/q^2v_{Te}^2\right|^2}\,. \tag{147}$$

Отличие (147) от (145) состоит не только в том, что в случае, когда коллективные эффекты не учитываются, можно пренебречь отличием от единицы фактора

$$\frac{1+\omega_{pe}^2/q^2 v_{Te}^2}{1+(1+\beta)\omega_{pe}^2/q^2 v_{Te}^2} ,$$

для чего нет никаких оснований, но и в отсутствии функции $W(y)$, которая стоит под знаком квадрата модуля в знаменателе и качественно меняет характер тормозного излучения. Так, при $y \gg 1$, т.е. для надтепловых электронов, наличие $W(y)$ приводит к тому, что экранирование практически отсутствует (фактор внутри знаков модуля равен единице). Без учета коллективных эффектов такого процесса "раздевания" иона не происходит.

Анализ также показывает, что коллективные эффекты наиболее существенны, когда частоты излучения порядка или близки к собственным частотам плазмы. Это видно из δ-функции в (147), так как при $\omega \gg \omega_{pe}$ имеем $q \gg \omega_{pe}/v_{Te}$. При наличии магнитных полей коллективные эффекты сказываются особенно сильно, если частоты тормозного излучения близки, например, к верхнегибридным или нижнегибридным частотам.

7. Заключение

В заключение отметим те пункты, которые являются новыми в этой статье и касаются области, довольно широко обсуждаемой в оригинальных исследованиях.

1. Теория флуктуаций, расссеяния и излучения плазмы из-за флуктуаций является широко развитой областью исследований. Однако до сих пор не было показано, что все эффекты рассеяния и тормозного излучения могут быть выражены через вероятности рассеяния и тормозного излучения, содержащие квадраты модулей матричных элементов рассеяния и тормозного излучения.

Не было также показано, как линейное поглощение волн может определяться нелинейными процессами при взаимодействии пробной волны с флуктуациями полей и частиц. Наличие такого доказательства сильно упрощает исследование конкретных процессов.

Доказательство легко обобщается с учетом любых релятивистских эффектов, если добавить процессы, происходящие через виртуальные поперечные волны. Выше мы ограничивались рассмотрением продольных виртуальных волн, однако все результаты для продольных виртуальных волн релятивистки-инвариантны. К ним в общем случае должны быть добавлены процессы, происходящие через виртуальные поперечные волны.

Общее доказательство сведения всех коллективных эффектов к дополнительным матричным элементам в вероятностях является весьма удобным при конкретном исследовании коллективных эффектов в тормозном излучении и рассеянии, особенно если требуются достаточно точные расчеты этих процессов для сравнения с экспериментами. В обычном подходе достаточно трудно усмотреть, что результат может быть выражен через квадрат модуля довольно громоздкого выражения.

2. Дана наглядная физическая картина коллективных эффектов, что позволяет при необходимости использовать простые оценки. Ранее в литературе была дана физическая картина новых процессов переходного тормозного излучения и переходного рассеяния [9]. Было сделано утверждение, что полные матричные элементы тормозного излучения и рассеяния должны содержать вклады переходного тормозного излучения и переходного рассеяния. Это заключение делалось в [9] из физических соображений. Теперь это утверждение доказано для плазмы из теории флуктуаций.

Новое содержание состоит и в том, что, помимо переходного излучения и переходного рассеяния, нет каких-либо дополнительных эффектов, возникающих из-за флуктуаций в плазме. Конечно, в более сложных средах также возникают процессы переходного излучения и переходного рассеяния. Поэтому физическое содержание указанных процессов значительно шире, нежели в плазме. Для плазмы можно показать, как такие процессы непосредственно возникают из флуктуаций.

3. Явно показано, как процессы рассеяния и тормозного излучения связаны между собой. Показано также, что коллективные эффекты особенно велики вблизи собственных плазменных мод, даже если эти эффекты не сводятся к процессам рассеяния.

4. Для распределений с быстрыми частицами показано, что тормозное излучение может быть усилено на много порядков вблизи собственных мод плазмы. Наблюдение мощного излучения из плазмы вблизи собственных частот отнюдь не означает развитие в ней неустойчивостей, как можно было бы подумать при беглом ознакомлении с экспериментальными данными. Просто это может означать наличие надтепловых устойчивых распределений быстрых частиц в плазме. Такое замечание важно при интерпретации данных по излучению, например, термоядерной плазмы или плазмы солнечной короны.

5. В случае нерелятивистских распределений частиц даны общие выражения для матричных элементов тормозного излучения волн любой поляризации при наличии внешних магнитных полей.

6. Впервые подробно проанализированы процессы тормозного излучения при ион-ионных и электрон-электронных столкновениях. Показано, что коллективные процессы сильно видоизменяют и усиливают процессы излучения, однако в нерелятивистской плазме они остаются много меньшими процессов тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях. Коллективные эффекты существенно меняют количественно и качественно процессы тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях, но только на частотах, не сильно отличающихся от плазменных.

7. Показано, что динамика изменения распределения частиц из-за тормозного излучения в основном определяется процессами излучения продольных волн, которые для нерелятивистских частиц намного эффективнее процессов тормозного излучения электромагнитных волн.

В силу перечисленных выше причин (изложение нового строгого вывода известных соотношений и доказательство возможности записи известных результатов в компактной форме, удобной для приложений) ниже приведены ссылки лишь на общие обзоры, в которых цитируются оригинальные работы в этой области. Исключение сделано только для некоторых пионерских работ, важных при изложении принципиальных вопросов.

Список литературы

1. Тамм И Е *УФН* **68** 387 (1959)
2. Гинзбург В Л *Теоретичекая физика и астрофизика* (М.: Наука, 1986) [Ginzburg V L *Theoretical Physics and Astrophysics* (London, N.Y.: Pergamon Press, 1988)]
3. Salpeter E E *Phys. Rev.* **120** 1528 (1960)
4. Dougherty J P, Farley D T *Proc. R. Soc. A* **259** 79 (1960)
5. Rosenbluth M N, Rostoker N *Phys. Fluids* **5** 776 (1962)
6. Гайлитис А К, Цытович В Н *ЖЭТФ* **46** 1726 (1964) [Gailitis A K, Tsytovich V N *Sov. Phys. JETP* **19** 1165 (1964)]
7. Цытович В Н *УФН* **90** 435 (1966) [Tsytovich V N *Sov. Phys. Usp.* **9** 805 (1967)]
8. Цытович В Н *Нелинейные эффекты в плазме* (М.: Наука, 1967) [Tsytovich V N *Nonlinear Effects in Plasma* (N.Y.: Consultant Bureau, 1970)]
9. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984) [Ginzburg V L, Tsytovich V N *Transition Radiation and Transition Scattering* (Bristol, N.Y.: Adam Hilrger, 1991)]
10. Цытович В Н *УФН* **159** 337 (1989) [Tsytovich V N *Sov. Phys. Usp.* **35** 701 (1989)]
11. Цытович В Н *Теория турбулентной плазмы* (М.: Атомиздат, 1971) [Tsytovich V N *Theory of Turbulent Plasma* (N.Y.: Consultant Bureau, 1977)]
12. Landau L D, Rumer G *Proc. R. Soc. A* **166** 213 (1938)
13. Ситенко А Г *Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме* (Киев: Наукова думка, 1977) [Sitenko A G *Fluctuations and Nonlinear Interactions in Plasmas* (N.Y.: Pergamon Press, 1982)]
14. Evans D E, Katzenstein J *Rep. Prog. Phys.* **32** 207 (1969)

COLLECTIVE EFFECTS IN BREMSSTRAHLUNG OF PLASMA PARTICLES

V.N. Tsytovich
General Physics Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Vavilova 38, 117942 Moscow
Tel. (*7-095*) *135-0247*
Fax (*7-095*) *135-0270*
E-mail: *tsyt@ewm.gpi.msk.su*

In the classical limit the bremsstrahlung corresponds to a scattering of virtual fields of colliding electron and ion on the incident electron. This is no more correct in the case when the collective effects in bremsstrahlung are taken into acount. The collective effects in bremsstrahlung can change drastically the cross-sections of bremsstrahlung due to an important role of scattering of virtual waves on the Debye shielding shells of colliding particles. In particulare the scattering on ions (their Debye shielding clouds) is important (while in absence of collective effects the scattering on a single ion is negligible). In the present article it is shown how the present theory of fluctuations in a plasma, with the nonlinear fluctuations taken into acount, leeds to the cross-sections of bremsstrahlung which takes into acount all collective effects.

PACS numbers: 41.60; **52.20.–j**; 52.25.Gj; **52.90. + z**
Bibliography — 14 references

Received 21 September 1994, revised 5 October 1994