Сентябрь 1994 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 164, № 9*

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Проблема аппроксимируемости электромагнитного поля

Б.З. Каценеленбаум

Исследуется связь между геометрическими свойствами поверхности и свойствами электромагнитного поля, создаваемого любым распределенным на ней током. Существует континуально много поверхностей, для которых таким полем нельзя даже приблизить почти любую заданную диаграмму или любое поле в ближней зоне. Изучение этих поверхностей основывается на том, что они являются нулевыми поверхностями некоторого вспомогательного электромагнитного поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла. Даже близость поверхности к какой-либо поверхности с этим свойством приводит к нетривиальным особенностям полей, созданных индуцированными на них токами.

PACS numbers: 41.10.F

Содержание

Б.З. Каценеленбаум. Институт радиотехники и электроники РАН, 103907, Москва, ул. Моховая, 11
Тел. (095) 203-48-36
Факс (095) 203-84-14

Статья поступила 22 сентября 1993 г., после доработки 6 июня 1994 г.

1. Введение

1.1. Вводные замечания

В статье изучаются свойства электромагнитных полей, созданных токами, распределенными на некоторых — особых — поверхностях, т.е. индуцированными на некоторых металлических телах.

Для некоторых простых поверхностей эти свойства полей очевидны; оказалось, что поверхностей, обладающих этими свойствами, "очень много". Свойство это состоит в том, что любая полная система токов на такой поверхности создает неполную систему полей, в частности — неполную систему диаграмм. Поэтому этими полями нельзя даже приблизить "очень много" полей — точнее, все поля, не удовлетворяющие некоторому условию. Из этого, как оказывается, вытекает ряд нетривиальных физических следствий.

В разделах 1–4 изучаются двумерные скалярные поля, созданные токами, распределенными на линиях. В этой модели все формулировки и математический аппарат проще, а основные результаты переносятся на трехмерные векторные поля почти автоматически (см. особенно п. 5.1) — за одним только исключением (п. 5.3). В статье рассматриваются только электрические токи и только монохроматические поля ($\sim \exp(\mathrm{i}\omega t)$). Некоторые результаты были опубликованы в [1, 2].

Изучается связь между полем $u(r,\varphi)$ и линией C, на которой расположены токи, создающие это поле. Поле $u(r,\varphi)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1.1}$$

($k = \omega/c$); условию излучения Зоммерфельда

$$u(r,\varphi) \to \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{\sqrt{kr}} f(\varphi)\ , \tag{1.2}$$

где $f(\varphi)$ — диаграмма, и условию, что на C само поле непрерывно, а его нормальная производная $\partial u/\partial N$ терпит разрыв, равный заданному току $j(s)$ (s — координата вдоль C). Диаграмма $f(\varphi)$ получается из $j(s)$ интегральным преобразованием

$$f(\varphi) = \int_C \mathcal{K}(s,\varphi) j(s)\, \mathrm{d}s\,, \tag{1.3а}$$

$$\mathcal{K}(s,\varphi) = \exp[-\mathrm{i}kr(\vartheta)\cos(\varphi-\vartheta)]\,, \tag{1.3б}$$

где $r = r(\vartheta)$ — уравнение линии C, $\vartheta = \vartheta(s)$. В (1.3б) опущен несущественный множитель; далее в аналогичных случаях это не будет оговариваться.

Если $f(\varphi)$ задано, то (1.3а) — известное интегральное уравнение первого рода для $j(s)$; по определению, оно имеет решение, если норма тока

$$N = \left(\int_C |j(s)|^2\, \mathrm{d}s\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

конечна ($N < \infty$). Диаграммы, создаваемые любыми токами на C, мы будем называть диаграммами, создаваемыми линией C.

Для справедливости большей части полученных ниже результатов требование $N < \infty$ не является необходимым. Ток может иметь особенности, при которых $|j(s)|^2$ неинтегрируемо; нужно лишь, чтобы существовал интеграл, стоящий слева в (2.6) (см. ниже), а для этого достаточно, чтобы интегрируем был сам ток. Это условие выполняется и для тока вблизи границы полуплоскости (при любой поляризации), и для $j(s) \sim \sim \delta(s-s_0)$, т.е. в приближении, обычно применяемом в теории антенных решеток. Мы примем требование $N < \infty$, чтобы не усложнять изложение, особенно в разделе 4.

1.2. Реализуемость, аппроксимируемость, амплитудная аппроксимируемость

Возможны следующие соотношения между диаграммами, созданными линией C, и какой-либо функцией $F(\varphi)$:

а) Реализуемость. Существует ток, создающий диаграмму $F(\varphi)$. Уравнение (1.3а) имеет решение при замене $f(\varphi)$ на $F(\varphi)$.

б) Аппроксимируемость. Для любого $\delta > 0$ существует такой ток, что расстояние (в среднеквадратичной метрике) между созданной им диаграммой и $F(\varphi)$ не больше δ:

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|F(\varphi) - f(\varphi)\right|^2 \mathrm{d}\varphi\right)^{1/2} \leqslant \delta\,. \tag{1.5}$$

в) Амплитудная аппроксимируемость. Существует такая вещественная функция $\psi(\varphi)$ ("фаза"), что функция $F(\varphi)\exp(-\mathrm{i}\psi(\varphi))$ аппроксимируема.

г) Амплитудная неаппроксимируемость. Амплитуды всех диаграмм, создаваемых линией, не близки к $|F(\varphi)|$.

Можно, разумеется, при определении аппроксимируемости использовать не квадратичную, а какую-либо другую метрику.

Реализуемость зависит от аналитических свойств функции $F(\varphi)$ [3], и сколь угодно малым изменением можно сделать реализуемую функцию нереализуемой и наоборот. Аппроксимируемость есть свойство более грубое; вместе с какой-либо функцией им обладают (или не обладают) и все близкие к ней функции.

2. Неаппроксимируемые диаграммы

2.1. Неаппроксимируемость и нулевые линии волнового поля

Линия C, для которой существуют неаппроксимируемые ею функции, обладает следующим свойством — ей соответствует некоторая функция $\widehat{F}(\varphi)$, нормируемая с квадратом модуля на интервале $(0,\, 2\pi)$, которая ортогональна всем диаграммам $f(\varphi)$, создаваемым линией C. Ортогональность функций $f(\varphi)$ и $\widehat{F}(\varphi)$ означает, что равно нулю произведение этих функций $(f, \widehat{F})$, равное, по определению, интегралу

$$(f,\, \widehat{F}) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\widehat{F}^*(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi\,. \tag{2.1}$$

Условие нормируемости означает, что произведение $(\widehat{F},\, \widehat{F})$ конечно; мы будем нормировать $\widehat{F}(\varphi)$ уравнением $(\widehat{F},\, \widehat{F}) = 1$.

Известно [4], что если функции $f(\varphi)$ удовлетворяют условию $(f,\, \widehat{F}) = 0$, то между ними и любой функцией $F(\varphi)$, для которой $(F,\, \widehat{F}) \neq 0$, существует конечное расстояние

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|F(\varphi) - f(\varphi)\right|^2 \mathrm{d}\varphi\right)^{1/2} \geqslant \left|(F,\, \widehat{F})\right|\,. \tag{2.2}$$

Если, кроме того, потребовать, чтобы как $F(\varphi)$, так и все функции $f(\varphi)$ тоже были пронормированы на единицу, т.е. чтобы $(F,\, F) = 1$, $(f, f) = 1$, то минимальное расстояние между $F(\varphi)$ и $f(\varphi)$ будет больше, чем правая сторона (2.2), и будет равно

$$\Delta = \left(2 - 2\sqrt{1 - \left|(F,\, \widehat{F})\right|^2}\,\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Линии C, для которых все создаваемые ими диаграммы обладают этим свойством, мы будем называть особыми и обозначать $\widehat{C}$.

Существуют такие линии $\widehat{C}$, которым соответствует не одна функция $\widehat{F}(\varphi)$, а несколько функций $\widehat{F}_p(\varphi)$ $(p = 1, 2, \ldots, P)$. Все эти функции образуют ортогональное дополнение в пространстве диаграмм. Их можно сделать ортонормированными, $(\widehat{F}_p,\, \widehat{F}_q) = \delta_{pq}$. Тогда в формуле (2.3) для "ширины щели" между $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$ надо $|(f, \widehat{F})|^2$ заменить на сумму по всем p квадратов таких произведений и ввести аналогичное изменение в (2.2). Необходимым и достаточным условием аппроксимируемости какой-либо функции $F(\varphi)$ особой линией $\widehat{C}$ является равенство нулю всех произведений $(F,\, \widehat{F}_p)$. Существование одной или нескольких функций ортогонального дополнения означает, что полная система токов на $\widehat{C}$ создает неполную систему диаграмм.

Покажем, что все особые линии являются нулевыми линиями какого-либо волнового поля, а все нулевые линии любого волнового поля являются особыми линиями.

Надо доказать эквивалентность условия, что все диаграммы, создаваемые линией $\widehat{C}$, ортогональны некоторой функции $\widehat{F}(\varphi)$, и условие, что существует поле $\widehat{u}(r,\varphi)$, равное нулю на $\widehat{C}$:

$$\widehat{u}(r,\varphi)\Big|_{\widehat{C}} = 0\,. \tag{2.4}$$

Поле $\widehat{u}(r,\varphi)$ должно удовлетворять тому же однородному волновому уравнению (1.1), что и поле $u(r,\varphi)$, и не иметь особенностей на всей плоскости. При $r \to \infty$ оно содержит, кроме уходящей цилиндрической волны, как в (1.2), еще и приходящую ("незоммерфельдовскую") волну, фактически и являющуюся источником поля $\widehat{u}(r,\varphi)$, т.е. ее асимптотика при $r \to \infty$ имеет вид

$$\widehat{u}(r,\varphi) \to \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{\sqrt{kr}}\,\Phi(\varphi) + \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{\sqrt{kr}}\,\widehat{F}^*(\varphi)\,. \tag{2.5}$$

Здесь $\widehat{F}(\varphi)$ — функция, к которой, как окажется, ортогональны все диаграммы, созданные токами на линии $\widehat{C}$, участвующей в условии (2.4). Функция $\Phi(\varphi)$ несущественна в дальнейших расчетах; если, как это обычно бывает, $\widehat{u}(r,\varphi)$ — вещественно, то $\Phi(\varphi) = \widehat{F}(\varphi)$.

Доказательство эквивалентности обоих условий совершенно элементарно, оно представляет собой скалярный вариант леммы Лоренца для двух полей — поля $u(r,\varphi)$, созданного током $j(s)$ на $\widehat{C}$, и поля $\widehat{u}(r,\varphi)$, созданного приходящей цилиндрической волной с амплитудой $\widehat{F}^*(\varphi)$. Применим вторую формулу Грина на всей плоскости к этим полям. Линию $\widehat{C}$ надо исключить дополнительным контуром (двусвязным, если $\widehat{C}$ замкнуто). Так как оба поля удовлетворяют уравнению (1.1), то в этой формуле останутся только интеграл по этому контуру, т.е. интеграл по $\widehat{C}$, и интеграл по бесконечности. Согласно (1.2) и (2.5) и условию для $u(r,\varphi)$ на $\widehat{C}$, она примет вид

$$\int_{\widehat{C}} \widehat{u}(r,\varphi) j(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\widehat{F}^*(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{2.6}$$

Если выполняется (2.4), то $(f, \widehat{F}) = 0$ при любых токах. И, наоборот, если $(f, \widehat{F}) = 0$ при любых токах, то применяя (2.6) к какой-либо полной системе токов на $\widehat{C}$, получим, что значение $\widehat{u}(r,\varphi)$ на $\widehat{C}$ ортогонально (в очевидном смысле) полной системе функций, т.е. что справедливо (2.4).

Существенным в приложениях свойством линии $\widehat{C}$ является неравенство (2.2), т.е. неаппроксимируемость "почти всех" функций. Оно непосредственно следует из свойства $(f, \widehat{F}) = 0$, но прямая проверка этого свойства обычно невозможна. Доказанная эквивалентность означает, что (2.2) является следствием существования некоего поля $\widehat{u}(r,\varphi)$ со свойством (2.4) на $\widehat{C}$, и часто можно либо доказать существование этого поля (иногда — просто его построением), либо невозможность его существования.

Таким образом, вопрос об аппроксимируемости связан с аналитическими свойствами полей — решений однородного волнового уравнения. Особые линии — нулевые линии полей, а функции ортогонального дополнения, характеризующие степень неаппроксимируемости какой-либо функции $F(\varphi)$ (т.е. правую часть неравенства (2.2) или выражение (2.3)), участвуют в асимптотике этих полей. Этот результат является исходным пунктом этой статьи. В ней исследуются свойства полей $\widehat{u}(r,\varphi)$ и их нулевых линий $\widehat{C}$, а также физические следствия явления неаппроксимируемости.

2.2. Свойства особых линий

Функция $\widehat{F}(\varphi)$ и поле $\widehat{u}(r,\varphi)$ однозначно связаны друг с другом. Всякое решение однородного волнового уравнения без особенностей можно представить в виде

$$\widehat{u}(r,\varphi) = \sum C_n J_n(kr)\cos n\varphi\,, \tag{2.7}$$

где для простоты записи мы ограничились четными по φ полями. Тогда $\widehat{F}(\varphi)$ представима в виде ряда Фурье с теми же коэффициентами; точнее,

$$\widehat{F}(\varphi) = \sum_n C_n(-\mathrm{i})^n \cos n\varphi\,. \tag{2.8}$$

Обычно функция, имеющая нулевую линию, вещественна. Тогда C_n тоже вещественны, и $\widehat{F}(\varphi)$ удовлетворяет условию $\widehat{F}(\varphi + \pi) = \widehat{F}^*(\varphi)$.

Утверждение — особых линий "очень много" — следует, по существу, из того, что различных полей $\widehat{u}(r,\varphi)$ "очень много". В любой геометрической окрестности особой линии существуют другие особые линии. Точнее, если уравнение линии C_1 есть $r = r_1(\varphi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить линию $\widehat{C}_2$ с уравнением $r = r_2(\varphi)$, где $|r_2(\varphi) - r_1(\varphi)| \leqslant \varepsilon$, причем функции $\widehat{F}_1(\varphi)$ и $\widehat{F}_2(\varphi)$ не сводятся друг к другу смещением или поворотом системы координат. Аналогично этому в любой окрестности (в среднеквадратичной метрике) любой функции $\widehat{F}_1(\varphi)$ существует другая функция $\widehat{F}_2(\varphi)$. Если известны две особые линии с различными функциями $\widehat{F}(\varphi)$, то можно построить последовательность линий $\widehat{C}$, непрерывно зависящих от параметра.

Любая дуга особой линии есть особая линия. Замкнутая особая линия образует резонансный контур, т.е. в его внутренней области существует отличное от нуля решение уравнения (1.1), равное нулю на контуре. Через любые точки на плоскости можно провести сколь угодно много особых линий и т.д.

2.3. Примеры особых линий. "Запрещенные" формы антенн

Практический интерес представляет связь между $\widehat{C}$ и $\widehat{F}(\varphi)$, поле $\widehat{u}(r,\varphi)$ является вспомогательной функцией. Однако в примерах, иллюстрирующих связь $\widehat{C}$ и $\widehat{F}(\varphi)$, удобно задавать именно это поле и по нему находить $\widehat{C}$ (вообще говоря, с помощью ЭВМ) и $\widehat{F}(\varphi)$. Несложно также по заданному $\widehat{F}(\varphi)$ найти $\widehat{u}(r,\varphi)$ (например, сопоставляя (2.7) и (2.8)) и $\widehat{C}$. Более сложную задачу представляет собой построение $\widehat{u}(r,\varphi)$ и $\widehat{F}(\varphi)$ по заданной линии $\widehat{C}$ (см. п. 3.3).

В качестве первого примера примем

$$\widehat{u}(r,\varphi) = J_n(kr)\sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Линия $\widehat{C}$ состоит из резонансных окружностей $r = \mu_{nm}/k$ $(m = 1, 2, \ldots)\pi$ и $2n$ лучей $\varphi = m\pi/n$ $(m = 0, 1, \ldots, 2n-1)$; μ_{nm} — m-й корень n-й функции Бесселя. Всем этим линиям соответствует функция

$$\widehat{F}(\varphi) = \sin n\varphi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ .$$

Диаграммы, создаваемые зеркальной цилиндрической антенной в виде дуги резонансной окружности, соответствующей некоторому значению индекса n, не могут (при соответствующей поляризации) аппроксимировать любую функцию, ряд Фурье которой содержит $\sin n\varphi$ или $\cos n\varphi$.

Невозможность приблизить функцию, содержащую $\sin n\varphi$, диаграммами токов на любой из указанных прямых можно рассматривать и как следствие очевидного факта — функция $\sin n\varphi$ нечетна относительно прямой, а все диаграммы четны относительно прямой, на которой расположены создающие их токи. Вообще соотношение между собой линией и $\widehat{F}(\varphi)$ можно рассматривать как обобщение свойств симметрии полей, создаваемых токами на прямой. Нетривиально, по существу, лишь то, что особыми линиями отнюдь не являются только такие простые линии.

Две прямые, на которых обращается в нуль $\widehat{u}(r,\varphi)$ (2.9), пересекаются под углом, который является рациональной частью π, т.е. имеет вид $\alpha = \pi t/n$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$. Если же угол α между двумя прямыми не имеет такого вида, то эти прямые не образуют особую линию, токи на них создают полную систему диаграмм. Противопоставление этих двух случаев представляется нефизичным, так как любое число α/π может быть приближено рациональной дробью. Кажущийся парадокс снимается тем, что при больших n правая часть неравенства (2.2) мала, так что и при $\alpha = \pi t/n$, но при большом n, неаппроксимируемости практически нет.

Поверхность антенны не должна быть особой. В частности, стенки рупорных антенн не должны пересекаться под углами вида $\alpha = \pi t/n$ при малых n. Надо избегать углов раскрыва, равных (или близких, см. п. 4.4) углам

$$\alpha = 90^\circ\ (n = 2);\ 60^\circ,\ 120^\circ\ (n = 3);\ 45^\circ,\ 135^\circ\ (n = 4)\,. \tag{2.10}$$

В эллиптической системе координат можно задать поле $\widehat{u}$ в таком же элементарном виде, как в (2.9), — в виде произведения двух функций Матье. Особыми линиями при этом будут дуги эллипсов и гипербол. Эксцентриситеты этих эллипсов будут зависеть от частоты, точнее, от параметра kc, где $2c$ — расстояние между фокусами. Например, эллипс с эксцентриситетом 0,91 будет особой линией при $kc = 3,86$, с эксцентриситетом 0,63 — при $kc = 1,73$ и т.д. Гиперболы удобно характеризовать углом между асимптотами β. Например, при $kc = 2,0$ и $kc = 6,3$ особыми линиями будут гиперболы, для которых угол β равен соответственно 106°, 66°, 124°, $99^\circ \ldots$ и 144°, 116°, 146°, $118^\circ \ldots$ Этим особым линиям соответствуют функции ортогонального дополнения, равные функциям Матье от φ. Эллиптические и гиперболические зеркала с соответствующими эксцентриситетами или углами β создают диаграммы, которыми можно аппроксимировать только функции, ортогональные этим функциям.

Резонансный прямоугольник не является особой линией. Поле, нулевыми линиями которого будут стороны прямоугольника $a \times b$ $(\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2 = k^2)$, во всей плоскости описывается формулой

$$\widehat{u}(x, y) = \cos\frac{\pi x}{a} \cdot \cos\frac{\pi y}{b} \ .$$

Это поле есть результат интерференции четырех приходящих плоских волн, а потому функция $\widehat{F}(\varphi)$ содержит δ-функции, т.е. она ненормируема. Хотя все диаграммы, создаваемые такой линий, и удовлетворяют условию $(f, \widehat{F}) = 0$ (что можно доказать и непосредственно из соображений симметрии), из этого не следует неравенство (2.2) — неаппроксимируемости нет. По той же причине не образуют особую линию и две параллельные прямые, если расстояние между ними больше половины длины волны, а также равносторонний резонансный треугольник (и несколько других резонансных треугольников [5]), на которых обращается в нуль поле, возникающее при интерференции шести плоских волн. Заметим уже здесь, что для ближних полей — а не для диаграмм — эти резонансные контуры образуют особые линии (при некотором расширении этого термина).

2.4. Пример амплитудной неаппроксимируемости

Особая линия из двух прямых, образующих угол $\alpha = \pi t/n$, является нулевой линией счетного множества полей $\widehat{u}(r,\varphi)$, которым соответствуют различные функции ортогонального дополнения

$$\widehat{F}_p = \sin pn\varphi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad (p = 1, 2, \ldots)\ .$$

Функция $F(\varphi)$ аппроксимируема, если выполняется система условий $(F, \widehat{F}_p) = 0$. Если бы число функций $\widehat{F}_p(\varphi)$ было конечно $(p = 1, 2, \ldots, P)$, то для любой функции $F(\varphi)$ можно было бы выбором фазы $\psi(\varphi)$ обеспечить выполнение этих равенств для $F(\varphi)\exp(-\mathrm{i}\psi(\varphi))$, т.е. амплитудную аппроксимируемость функции $F(\varphi)$. Чем больше P и чем уже диаграмма $|F(\varphi)|$, тем более изрезанной будет эта фаза и больше норма соответствующего тока. Когда $P = \infty$, то для узких диаграмм эта норма может оказаться бесконечной, т.е. возникнет амплитудная неаппроксимируемость.

Можно показать, что при $P = \infty$ все равенства $(F,\ \widehat{F}_p) = 0$ могут быть выполнены выбором фазы, если $2n$ неотрицательных функций $|F(\varphi - 2s\alpha)|$, $|F(2s\alpha - \varphi)|$, $s = 0, 1, \ldots, 2n-1$ при всех φ обладают свойством: бóльшая из них не больше суммы остальных. Например, при $n = 2$ (токи распределены на двух перпендикулярных прямых) для гауссовой диаграммы

$$\exp\left[-A \sin^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]$$

(максимум направлен по биссектрисе $\varphi = \pi/4$) это условие выполняется, т.е. амплитудная аппроксимируемость имеет место, только если $A < 1,76$, что соответствует полуширине больше 53°. Полуширина так же направленной П-образной диаграммы должна быть больше 90°. Более узкие диаграммы нельзя сделать аппроксимируемыми выбором их фазы.

2.5. Об определении формы тела по его диаграмме рассеяния

Измерив только диаграмму рассеяния и не зная освещающего поля, можно высказать некоторые вероятностные соображения о форме рассеивающего тела. Во-первых, можно установить степень достоверности гипотезы: "Форма тела близка к данной особой линии $\widehat{C}$, которой соответствует функция $\widehat{F}(\varphi)$". Если эта гипотеза справедлива, то при любом освещении должно быть $|(f,\,\widehat{F})| \ll 1$ (при $(f,f)=1$); если хотя бы при одном освещении $|(f,\,\widehat{F})|$ не мал, то гипотеза ошибочна. Во-вторых, измерив $f(\varphi)$, можно найти функцию $\widehat{F}(\varphi)$, к ней близкую, т.е. такую, что $|(f,\,\widehat{F})| \cong 1$. Контур тела не близок к особой линии, соответствующей этой функции $\widehat{F}(\varphi)$. В-третьих, по измеренной диаграмме $f(\varphi)$ можно построить функции $\widehat{F}(\varphi)$, к ней ортогональные, т.е. такие, что $(f,\,\widehat{F})=0$. Контур тела может быть близок к особой линии, соответствующей одной из этих функций.

Каждый из этих выводов становится более информативным, если произведено несколько измерений, соответствующих различным освещениям и положениям тела. Так как вычисляется сглаживающий (интегральный) функционал (2.1) от $f(\varphi)$, то малые ошибки в измеренной диаграмме не скажутся заметно на результатах, и, кроме того, возможно применение некорректных методов восстановления фазы $f(\varphi)$ по измеренной амплитуде $|f(\varphi)|$. Метод применим и при рассеянии на тонких экранах; их можно рассматривать как незамкнутые линии. Могут быть использованы и результаты измерения рассеяния немонохроматических сигналов.

3. Неаппроксимируемость ближних полей

3.1. Неполнота системы ближних полей

Полная система токов на особой линии $\widehat{C}$ образует неполную систему полей не только на бесконечности, но и на любом контуре Σ, окружающем $\widehat{C}$.

Существует функция $\widehat{W}(\sigma)$ (σ — координата на контуре Σ) такая, что $(u,\,\widehat{W})=0$, где $u(\sigma)$ — поле, созданное на Σ линией $\widehat{C}$, а скалярное произведение определено аналогично (2.1), но интеграл берется не по φ, а по σ. Поэтому любая заданная на Σ функция $U(\sigma)$ может быть аппроксимирована полями $u(\sigma)$ не точнее, чем согласно неравенству

$$\big((U-u,\,U-u)\big)^{1/2} \geqslant \big|(U,\,\widehat{W})\big|\,, \tag{3.1}$$

аналогичному (2.2). В (3.1) поля $u(\sigma)$ ненормированы, а $(\widehat{W},\,\widehat{W})=1$. Если контур Σ уходит на бесконечность, то $\widehat{W}(\sigma)$ переходит в $\widehat{F}^*(\varphi)\exp(\mathrm{i}kr)/\sqrt{kr}$.

Для нахождения функции $\widehat{W}(\sigma)$ построим вне Σ решение волнового уравнения, удовлетворяющее условию излучения и принимающее на Σ то же значение, что и поле $\widehat{u}(r,\varphi)$, нулевой линией которого является $\widehat{C}$. Обозначим через $\widehat{w}(r,\varphi)$ поле, внутри Σ равное $\widehat{u}(r,\varphi)$, а вне — этому решению. Единственная особенность поля $\widehat{w}(r,\varphi)$ — разрыв его нормальной производной на Σ, который мы назовем $\widehat{W}^*(\sigma)$. Применим формулу Грина на всей плоскости к полям $u(r,\varphi)$ и $\widehat{w}(r,\varphi)$. Они оба удовлетворяют условию излучения, так что интеграл по бесконечности выпадает, и равны друг другу два интеграла — по $\widehat{C}$ от произведения $j(s)$ на $\widehat{w}(r,\varphi)$ и по Σ — от произведения $\widehat{W}^*(\sigma)$ на $u(\sigma)$. Первый равен нулю согласно (2.4), что и доказывает основную формулу $(u,\,\widehat{W})=0$.

Неполную систему функций на Σ образуют не только $u(\sigma)$, но и $\partial u/\partial N$. Для доказательства надо вне Σ строить поле $\widehat{w}(r,\varphi)$ не по условию Дирихле на Σ, а по условию Неймана (т.е. обеспечивая непрерывность нормальной производной), и вновь применить формулу Грина на всей плоскости.

3.2. Контур Σ и особенности поля $\widehat{u}(r,\varphi)$

Функция $\widehat{W}(\sigma)$ более гладкая, чем соответствующая тому же полю $\widehat{u}(r,\varphi)$ функция $\widehat{F}(\varphi)$. Если Σ — окружность ($\sigma\equiv\varphi$), то коэффициенты Фурье функции $\widehat{W}(\varphi)$ убывают с ростом номера медленнее, чем для функции $\widehat{F}(\varphi)$, и если заданные гладкие функции $F(\varphi)$ и $U(\varphi)$, то $|(F,\,\widehat{F})| > |(U,\,\widehat{W})|$. Из сопоставления (2.2) и (3.1) следует, что явление неаппроксимируемости ослабляется с удалением от линии, на которой расположен ток. Оно может и совсем исчезнуть на бесконечности, как в случае резонансных прямоугольников и треугольников, когда $\widehat{F}(\varphi)$ становится ненормируемым (неаппроксимируемости нет), а $\widehat{W}(\sigma)$, как легко проверить, нормируемо, т.е. на любом контуре Σ, находящемся на конечном расстоянии, неаппроксимируемость есть.

Более содержательна другая ситуация, когда $\widehat{C}$ есть нулевая линия поля $\widehat{u}(r,\varphi)$, не имеющего особенностей только в конечной области. Мы сохраним и за такими линиями название особых и обозначение $\widehat{C}$. На любом контуре Σ, лежащем в этой области, система полей не полна. Если контур Σ расширяется и внутрь него попадает хотя бы одна особая точка поля $\widehat{u}(r,\varphi)$, то система полей на Σ становится полной (если $\widehat{C}$ не является нулевой линией еще и другого поля с большей областью аналитичности). При этом удаление Σ от $\widehat{C}$ не просто ослабляет дефект системы полей, созданных токами на $\widehat{C}$ (т.е. неполноту), но полностью снимает его.

Дуга нерезонансной окружности является примером такой особой линии. Не может существовать поле $\widehat{u}(r,\varphi)$, равное на ней нулю и не имеющее особенностей внутри окружности. Если $\widehat{u}(r,\varphi)$ равно нулю на дуге окружности, то оно равно нулю на всей окружности, так как и нулевая линия, и окружность — аналитические кривые, а две такие кривые, имеющие общую дугу, совпадают. Однако поле, равное нулю на нерезонансной окружности, должно иметь внутри нее особенность. Легко проверить, что особой точкой является центр окружности. Токи на дуге нерезонансной окружности создают неполную систему полей на любом контуре, не содержащем центр окружности; система полей становится полной, если центр попадает внутрь контура.

3.3. Восстановление волнового поля по его нулевой линии

Таким образом, в проблеме аппроксимации возникает следующая задача теории аналитических свойств волновых полей: надо определить, является ли данная линия нулевой линией какого-либо поля, и если ответ положительный (т.е. линия — особая), то найти это поле и, в частности, область, в которой оно не имеет особенностей.

Для того чтобы линия была особой, во всяком случае необходимо, чтобы она состояла из дуг аналитических кривых, и в точках излома угол между ними должен быть рациональной частью π. Замкнутая особая линия должна быть резонансным контуром. Оба эти условия не являются достаточными.

Если $\widehat{C}$ совпадает с координатной линией системы координат, в которой уравнение (1.1) разделяется, то легко явно построить поле $\widehat{u}(r,\varphi)$, удовлетворяющее условию (2.4). Например, если $\widehat{C}$ — дуга окружности, то можно принять $\widehat{u}(r,\varphi)$ равным $J_\nu(kr)\cos\nu\varphi$ или $N_\nu(kr)\cos\nu\varphi$ и найти индекс ν из уравнения $J_\nu(ka)=0$ или $N_\nu(ka)=0$, где a — радиус окружности. Аналогично строится поле, равное нулю на эллипсах или гиперболах.

Если $\widehat{C}$ — незамкнутая линия, то ее многими способами можно дополнить до замкнутого резонансного контура C_0. Тогда задача состоит в аналитическом продолжении вне C_0 поля собственного колебания, т.е. в построении поля, на C_0 равного нулю и имеющего то же значение нормальной производной. Это — задача Коши вне C_0, поставленная для таких значений $\widehat{u}$ и $\partial\widehat{u}/\partial N$ на C_0, при которых эта задача внутри C_0 имеет решение без особенностей. Аналитическое продолжение может не существовать, может иметь особенности на конечном расстоянии от C_0 (C_0 — криволинейный четырехугольник из дуг двух концентрических нерезонансных окружностей и отрезков двух радиусов), на бесконечности (C_0 — прямоугольник) и не иметь их на всей плоскости (резонансная окружность). Замкнутая линия может быть особой только на счетном множестве частот, незамкнутая — в полосе частот.

3.4. Аналитическое продолжение поля собственного колебания

Эта задача исследовалась в ряде математических работ. Для определенного вида контуров C_0 в них применялись методы аналитической теории решения волнового уравнения как функции двух комплексных переменных $x=x'+ix''$, $y=y'+iy''$ [6]. В области комплексных x,y эллиптическое уравнение (1.1) имеет, подобно гиперболическому уравнению, характеристики (комплексные), вдоль которых переносятся особые точки поля. Особые точки с вещественными координатами можно рассматривать как "след" этих характеристик.

Другой метод может быть построен по следующей схеме: выберем некоторую нерезонансную окружность с центром в начале координат, целиком лежащую внутри C_0. Поле $\widehat{u}(r,\varphi)$ на ней представимо в виде ряда $\widehat{u}(a,\varphi)=\sum_n B_n\cos n\varphi$ (a — радиус окружности), где B_n известны, ибо известно поле $\widehat{u}(r,\varphi)$. При всех (r,φ), при которых сходится и почленно дифференцируем ряд, отличающийся от ряда для $\widehat{u}(a,\varphi)$ множителями $J_n(kr)/J_n(ka)$, он представляет искомое аналитическое продолжение, и вопрос сводится к установлению области сходимости этого ряда. Применяя к $J_n(kr)$ и к $J_n(ka)$ дебаевскую асимптотику, найдем, что при любом конечном r этот ряд сходится одновременно с рядом $\sum_n B_n(r/a)^n$. Если число

$$l=\lim_{n\to\infty}|B_n|^{1/n}$$

не равно нулю, то общий его член имеет порядок $(rl/a)^n$, так что ближайшая особая точка аналитического продолжения находится на расстоянии a/l — тем ближе, чем больше l, т.е. чем медленнее убывают коэффициенты B_n. Если же B_n убывают настолько быстро, что $l=0$, то аналитическое продолжение не имеет особенностей на конечном расстоянии. Для определения сходимости его на бесконечности надо применить для $J_n(kr)$ ханкелевскую асимптотику. При $r\to\infty$ ряд для аналитического продолжения сходится одновременно с рядом $\sum(a_0/a)^n$, где

$$a_0=\frac{2}{\mathrm{e}k}\lim_{n\to\infty}\left(n|B_n|^{1/n}\right),\qquad \mathrm{e}=2,7\ldots \tag{3.2}$$

(ср. [7], где рассматривались аналогичные задачи). Аналитическое продолжение имеет особенности на бесконечности (диаграммы аппроксимируемы), если $a_0\geqslant a$, и не имеет их (диаграммы неаппроксимируемы), если $a_0<a$.

Описанные методы некорректны (точнее, корректны только для аналитических деформаций C_0). Это — не дефект методов, а результат принятой выше постановки задачи об особых линиях. Однако в разделе 4 мы покажем, что с физической точки зрения два утверждения "C — особая линия" и "C близко́ к особой линии" тождественны. В этом смысле "грубость" намеченного ниже вычислительного способа построения $\widehat{u}(r,\varphi)$ по его нулевой линии можно рассматривать как достоинство.

Этот способ основан на методе вспомогательных источников Купрадзе в варианте, развитом, например, в [8]. Поле $\widehat{u}(r,\varphi)$ ищется в виде суммы цилиндрических волн $a_nH_0^{(2)}(k\rho_n)$ $(n=1,2,\ldots,N)$, где ρ_n — расстояние от n-го источника; все источники расположены на некотором контуре Σ, окружающем C. Амплитуды a_n находятся из требования, чтобы $\widehat{u}(r,\varphi)$ было равно нулю в N точках на C. Если внутри Σ нет особых точек этого поля, то система N однородных уравнений для a_n имеет нетривиальное решение, устойчивое при $N\to\infty$. Если линия C замкнута, то такое решение возможно только на дискретных резонансных частотах; метод применим и для незамкнутых C.

Легко показать, что функция $\widehat{W}_N(\sigma)$, определенная на Σ уравнением

$$\widehat{W}_N(\sigma)=\frac{l_\Sigma}{N}\sum^N a_n\delta(\sigma-\sigma_n)\ , \tag{3.3}$$

где l_Σ — длина контура, а σ_n — координата n-го источника, играет роль "дискретной функции ортогонального дополнения" в том смысле, что для поля $u(\sigma)$, созданного на Σ любыми токами на C, справедливо дискретное условие ортогональности в форме $\sum_n u(\sigma_n)a_n=0$. Можно ввести нормируемую (не содержащую δ-функций) функцию $\widehat{W}(\sigma)$, в некотором смысле равную пределу $\widehat{W}_N(\sigma)$ при $N\to\infty$, условием, что ее значение при $\sigma=\sigma_n$ равно a_n. Эта функция имеет при $N\to\infty$ тот же смысл, что и в разделе 3.1.

Это обобщение метода [8] применимо для определения $\widehat{u}(r,\varphi)$ и $\widehat{F}(\varphi)$ и в случае, когда $\widehat{C}$ есть нулевая линия поля, не имеющего особенностей на всей плоскости. Тогда $\widehat{u}(r,\varphi)$ надо искать в виде суммы плоских (а не цилиндрических) волн

$$\widehat{u}(r,\varphi)=\frac{2\pi}{N}\sum_{n=1}^N a_n\exp\left[\mathrm{i}kr\cos(\varphi-\varphi_n)\right]\ . \tag{3.4}$$

Если $\widehat{u}(r,\varphi)$ аналитично всюду, то система уравнений для a_n имеет нетривиальное решение и устойчива при $N\to\infty$. Можно построить функцию $\widehat{F}_N(\varphi)$, аналогичную $\widehat{W}_N(\sigma)$ (3.3) ($l_\Sigma\to 2\pi$, $\sigma_n\to\varphi_n$), и найти ее "предел" при $N\to\infty$, т.е. нормируемую функцию $\widehat{F}(\varphi)$, задав ее в N точках условием $\widehat{F}(\varphi)=a_n$. Эта функция имеет тот же смысл, что и в разделе п. 2.

4. Норма тока

Введение понятия аппроксимируемости в теорию поля — реакция на некорректность свойства реализуемости. Для физика нет различия между реализуемостью и нереализуемостью данной диаграммы, ибо во втором случае существуют сколь угодно близкие к ней реализуемые диаграммы[1]. Однако и понятие аппроксимируемости, обобщающее понятие реализуемости, с точки зрения физика тоже уязвимо, хотя и в меньшей мере. Во-первых, иногда малое — хотя и конечное — возмущение диаграммы может обеспечить ее аппроксимацию током с небольшой нормой (1.4) ($N \cong 1$), и при этом не очень существенно, была ли первоначальная диаграмма неаппроксимируема ($N = \infty$) или аппроксимируема, но с большой нормой ($N < \infty$, но $N \gg 1$). Во-вторых, малое возмущение особой линии может сделать ее не особой, т.е. сделать неаппроксимируемые ($N = \infty$) диаграммы аппроксимируемыми (но с $N \gg 1$), что с физической точки зрения практически тождественно. Понятия оптимального токового синтеза и области влияния особой линии, рассматриваемые в этом параграфе, обобщают понятия "аппроксимируемость" и "особая линия" и делают математическую модель более физичной.

4.1. Минимальная норма тока при заданной точности аппроксимации

Даны линия C и диаграмма $F(\varphi)$; все упоминаемые в этом параграфе диаграммы нормированы на единицу по модулю. Задача оптимального токового синтеза состоит в том, чтобы заменить $F(\varphi)$ на реализуемую диаграмму $\widetilde{F}(\varphi)$, отстоящую от $F(\varphi)$ не более чем на некоторое расстояние δ и такую, чтобы норма $N(\delta)$ создающего ее тока была наименьшей среди норм всех токов, создающих такие диаграммы. Если уже при небольших δ ($\delta \lesssim 1/2$) значение $N(\delta)$ станет небольшим, то — независимо от того, было ли $N(0) = \infty$ или было $N(0) < \infty$, но $N(0) \gg 1$, — целесообразно синтезировать не $F(\varphi)$, а $\widetilde{F}(\varphi)$.

Функция $N(\delta)$, разумеется, невозрастающая. При малых δ ее вид зависит от того, реализуема ли первоначальная диаграмма $F(\varphi)$ линией C или нет. Если $F(\varphi)$ нереализуема, но аппроксимируема, то $N(0) = \infty$, но при любом $\delta > 0$ $N(\delta) < \infty$; кривая $N(\delta)$ имеет вертикальную асимптоту $\delta = 0$. Если C — особая линия, а $F(\varphi)$ неаппроксимируема ($(F, \widehat{F}) \neq 0$), то в интервале $0 < \delta < \varDelta$ реализуемых диаграмм нет; здесь ширина щели $\varDelta$ дается формулой (2.3), в которой надо заменить $(f, \widehat{F})$ на $(F, \widehat{F})$. Ближайшая к $F(\varphi)$ аппроксимируемая функция (ненормированная) есть $F(\varphi) - (F, \widehat{F})\widehat{F}(\varphi)$. Если она реализуема, т.е. нижняя граница расстояния между $F(\varphi)$ и $\widetilde{F}(\varphi)$ достижима, то $N(\varDelta) < \infty$. Если она нереализуема, то при любом $\varepsilon > 0$ $N(\varDelta + \varepsilon) < \infty$, т.е. кривая $N(\delta)$ имеет вертикальную асимптоту $\delta = \varDelta$.

Для всякой линии C можно указать реализуемую диаграмму (обозначим ее $\widetilde{F}_{\min}(\varphi)$), для которой норма создающего ее тока минимальна среди норм всех токов на C, создающих нормированные на единицу диаграммы. Когда δ становится больше расстояния между $F(\varphi)$ и $\widetilde{F}_{\min}(\varphi)$, то задача оптимального токового синтеза становится бессодержательной, $N(\delta)$ перестает уменьшаться с ростом δ, а оптимальная функция $\widetilde{F}(\varphi)$ остается равной $\widetilde{F}_{\min}(\varphi)$.

[1] Автор с благодарностью вспоминает недавно скончавшегося Анатолия Федоровича Чаплина, энергично пропагандировавшего эту мысль, что в немалой степени инициировало работы в этом направлении.

4.2. Системы ортогональных функций для токов и диаграмм

Опишем математический аппарат, который позволит для произвольной линии C дать формальное решение задачи оптимального токового синтеза. Введем [9] две системы функций $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$, полные и ортонормированные соответственно на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и на C:

$$(\psi_m, \psi_q) = \delta_{mq} \,, \tag{4.1а}$$

$$(j_n, j_p) = \delta_{np} \tag{4.1б}$$

— такие, что каждый ток $j_n(s)$ порождает по формуле (1.3а) диаграмму, пропорциональную одной из функций системы $\psi_m(\varphi)$. Скалярное произведение в (1.4б) строится аналогично (2.1), но интеграция производится не по φ, а по s.

Запишем связь диаграммы с током в виде $F = Kj$, где K — интегральный оператор в (1.3а,б), и введем сопряженный ему относительно скалярных произведений, участвующих в (4.1), оператор K^C, т.е. такой оператор, переводящий диаграмму в ток (точнее — в функцию на C), что для любых функций $F(\varphi)$ и $j(s)$ справедливо тождество

$$(K^C F, j) = (F, Kj) \,. \tag{4.2}$$

Интегральный оператор K^C отличается от (1.3а,б) тем, что в нем интеграция производится не по s, а по φ, а ядро $\mathcal{K}$ заменено на комплексно сопряженное.

Функции $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$ определим как собственные функции самосопряженных операторов KK^C и $K^C K$ соответственно. Они принадлежат собственным значениям μ_m и λ_n, неотрицательным и стремящимся к нулю при $m \to \infty$ и при $n \to \infty$. Эти числа попарно равны друг другу в том смысле, что каждому номеру m соответствует номер n (обозначим его $n(m)$) такой, что $\lambda_{n(m)} = \mu_m$; одновременно введем $m(n)$ так, чтобы $\mu_{m(n)} = \lambda_n$. Легко проверить, что $Kj_{n(m)} = \sqrt{\mu_m}\psi_m(\varphi)$ и $K^C\psi_{m(n)} = \sqrt{\lambda_n}\, j_n(s)$.

В наших задачах особенно интересны линии C, для которых среди собственных значений есть нулевые. Поэтому функции $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$ будем нумеровать не в порядке убывания соответствующих собственных значений, — так как при этом функция, соответствующая нулевому собственному значению, не имела бы номера, — а в порядке их усложнения, например, в порядке роста интеграла от квадрата модуля их производной.

Если линия C обладает тем свойством, что среди чисел μ_m есть равное нулю ($\mu_q = 0$), то C — особая линия. Любой ток на C создает диаграммы, которые не аппроксимируют функцию $F(\varphi)$, если $(F, \psi_q) \neq 0$. В этом формализме совершенно естественно рассматривать и симметричную ситуацию — среди чисел λ_n есть равное нулю ($\lambda_p = 0$). При этом, очевидно, на C возможен неизлучающий ток $\widehat{j}(s)$, т.е. такой ток, что $K\widehat{j} \equiv 0$ ($\widehat{j}(s) = j_p(s)$). Это означает, что C — резонансный контур, ибо ток, протекающий по такому контуру на его собственном колебании (и равный $\partial\widehat{u}/\partial N$), не создает поля вне C. Любая приходящая из бесконечности цилиндрическая волна создает на резонансном контуре поле, которое не аппроксимирует функцию $J(s)$, если $(J, j_p) \neq 0$.

Эти два симметричных свойства линий независимы (хотя для простых контуров типа эллипса они возникают на одних и тех же частотах). Действительно, для незамкнутой особой линии $\mu_q = 0$, но неизлучающий ток на ней не существует, $\lambda_n \neq 0$ при всех n. Если $\mu_q = 0$, но $\lambda_n \neq 0$, то это означает, что $n(q) = \infty$; на такой особой линии "неизлучающий ток" $\widetilde{j}(s)$ бесконечно быстро меняется вдоль C и потому не создает поля. С другой стороны, резонансный контур ($\lambda_p = 0$), образованный неаналитической линией, не является особым, при всех m $\mu_m \neq 0$. Если $\lambda_p = 0$, но $\mu_m \neq 0$, то $m(p) = \infty$; для такого резонансного контура "функция ортогонального дополнения" $\widehat{F}(\varphi)$ будет бесконечно быстро меняться с ростом φ и потому будет ортогональна любой функции.

Между аппаратом, описанным в этом пункте, и тем аппаратом, который основан на аналитических свойствах полей $u(r, \varphi)$ и $\widehat{u}(r, \varphi)$, существует простая связь. Если в операторе K заменить ядро (1.3б) на $H_0^{(2)}(k\rho)$, где ρ — расстояние от точки на C до любой точки, то действие этого оператора на $j(s)$ даст поле $u(r, \varphi)$ на всей плоскости. Если в операторе K^C в ядре (1.3б) заменить $r(\vartheta)$ на координату любой точки, то действие этого оператора на функцию $\widehat{F}(\varphi)$ даст поле $\widehat{u}(r, \varphi)$ на всей плоскости. Одновременное использование обоих методов анализа облегчает изучение свойств как функций $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$ и чисел μ_m, λ_n, так и полей $u(r, \varphi)$ и $\widehat{u}(r, \varphi)$.

Для построения систем $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$ мы применяли оператор K, переводящий ток в диаграмму, и эти системы, естественно, удобны для решения задачи синтеза по заданной диаграмме. Для задач, связанных с ближним полем, целесообразно было бы таким же образом строить системы функций на Σ и на C, используя оператор, переводящий ток в поле в ближней зоне [10].

4.3. Общее решение задачи об оптимальном токовом синтезе

Обозначим коэффициенты Фурье разложения $F(\varphi)$ и $\widetilde{F}(\varphi)$ в ряды по функциям $\psi_m(\varphi)$ соответственно через A_m и $\widetilde{A}_m$, так что $A_m = (F, \psi_m)$, $\widetilde{A}_m = (\widetilde{F}, \psi_m)$. Норма тока, реализующего диаграмму $\widetilde{F}(\varphi)$, и расстояние между $F(\varphi)$ и $\widetilde{F}(\varphi)$, выраженные через эти коэффициенты, будут

$$N = \left(\sum_m \left| \widetilde{A}_m \right|^2 \mu_m^{-1} \right)^{1/2} , \qquad (4.3а)$$

$$\delta = \left(\sum_m \left| A_m - \widetilde{A}_m \right|^2 \right)^{1/2} . \qquad (4.3б)$$

Согласно (4.3а) функция $\psi_m(\varphi)$, соответствующая максимальному значению μ_m, есть диаграмма, названная нами $\widetilde{F}_{\min}(\varphi)$.

Числа A_m заданы, надо найти числа $\widetilde{A}_m$, обеспечивающие минимум функционала N (4.3а) при заданной единичной норме $\widetilde{F}(\varphi)$ и заданном расстоянии δ. Сводя эту задачу о поиске условного экстремума методом Лагранжа к задаче о поиске безусловного экстремума некоторого более сложного функционала, получим

$$\widetilde{A}_m = A_m \frac{\alpha}{1 + \beta \mu_m^{-1}} , \qquad (4.4)$$

где α, β — вещественные постоянные, зависящие от всех A_m и от δ. Их надо найти, подставляя (4.4) в условие (4.3б) и в условие нормировки.

При переходе от $F(\varphi)$ к $\widetilde{F}(\varphi)$ меняются, согласно (4.4), все коэффициенты Фурье, меньше всего — коэффициент, соответствующий наибольшему μ_m, больше всего — коэффициенты с малыми значениями μ_m, особенно — далекие члены ряда. Если C — особая линия, т.е. $\mu_q = 0$, то $\widetilde{A}_q = 0$, как это и должно быть для реализуемой диаграммы $\widetilde{F}(\varphi)$. При $\delta < \Delta$ (2.3) решения с конечной нормой тока не существует, а при $\delta = \Delta$ $\widetilde{F}(\varphi)$ отличается от $F(\varphi)$ только отсутствием слагаемого $A_q \psi_q(\varphi)$ и пропорциональным изменением других коэффициентов Фурье.

Можно применить и другой метод решения задачи оптимального токового синтеза [11], выражая как N, так и условие (4.3б) и условие нормировки в виде квадратичных функционалов непосредственно от тока, создающего искомую диаграмму ($N^2 = (\widetilde{j}, \widetilde{j}\,)$ и т.д.). Метод Лагранжа приводит к уравнению Эйлера для $\widetilde{j}(s)$

$$\widetilde{j} + l_1 K^C K \widetilde{j} + l_2 (K^C K \widetilde{j} - K^C F) = 0 , \qquad (4.5)$$

где l_1 и l_2 — множители Лагранжа. Их надо найти, решая (4.5) совместно с условиями (4.3б) и нормировки. Уравнение (4.5) можно решать как разложением $\widetilde{j}(s)$ в ряд по $j_n(s)$ — тогда вновь получится основная формула (4.4), — так и каким-либо другим методом. В этом варианте введение в теорию операторов K^C и $K^C K$ происходит совершенно естественно. Уравнения Эйлера типа (4.5) можно получить и для более сложных, чем (1.4), норм тока, содержащих и интеграл от $|\mathrm{d}\widetilde{j}/\mathrm{d}s|^2$.

Описанными методами, основанными на формулах (4.4) и (4.3а), были найдены [1] зависимость $N(\delta)$ для нескольких функций $F(\varphi)$ и для линий C в виде нерезонансной ($ka = 1$) и резонансной ($ka = 3,83$) окружностей и в виде их дуг. Для такой резонансной окружности и для ее дуги $\widehat{F}(\varphi) = \cos \varphi$.

Для $ka = 1$, как и следовало ожидать, $N(\delta)$ тем быстрее убывает с δ, чем шире диаграмма. Например, для П-образной (т.е. нереализуемой) диаграммы ($N(0) = \infty$) шириной $2\gamma = 3,0$ радиана, уже́ при $\delta^2 = 0,1$ $N^2 = 2,1$, а к более узкой диаграмме шириной $2\gamma = 2$ можно без больших токов ($N^2 \lesssim 2$) приблизиться лишь примерно до $\delta^2 = 0,3$. То же относится к гауссовой диаграмме $F(\varphi) \sim \exp(-A \sin^2 \varphi/2)$. Хотя она реализуема токами на окружности $ka = 1,0$ только при $A < 2$, а более узкие диаграммы с $A > 2$ нереализуемы, но уже́ при $\delta^2 = 0,1$ различие между N^2 для таких диаграмм ($A = 1,51$; $N(0) < \infty$ и $A = 2,2$; $N(0) = \infty$) практически отсутствует. Даже для очень узкой диаграммы ($A = 5,67$, $N(0) = \infty$) диаграмма, отличающаяся от нее на $\delta^2 = 0,1$, может быть создана не очень большими токами. Кривые $N(\delta)$ для дуги окружности имеют такой же характер, как и для полной окружности. Норма тока, необходимая для приближения с заданной (конечной) точностью к какой-либо диаграмме, для дуги, разумеется, больше, чем для окружности.

Для особой линии, т.е. для резонансной окружности или для ее дуги, ситуация более сложная. Кривые $N(\delta)$ для П-образной диаграммы имеют вертикальные асимптоты $\delta = \Delta$, а значение Δ, зависящее от произведения $(F, \widehat{F})$, немонотонно изменяется с шириной диаграммы. Например, при $\gamma = 0,5$ $\Delta = 0,51$, при $\gamma = 1,0$ $\Delta = 0,72$, при $\gamma = 1,5$ $\Delta = 0,69$ (для полной окружности). С расширением диаграммы от $\gamma = 0,5$ до $\gamma = 1,0$ щель становится шире, т.е. вертикальная асимптота сдвигается в сторону больших δ. Хотя чем шире диаграмма, тем, вообще говоря, быстрее убывает N с увеличением δ (при $\delta > \Delta$), это смещение асимптоты приводит к тому, что если токи расположены на особой линии, то может оказаться, что к более узкой диаграмме можно приблизиться на заданное расстояние δ с меньшим током, чем к более широкой.

Если C не есть особая линия, то кривые $N(\delta)$ имеют для всех П-образных диаграмм одну и ту же асимптоту $\delta = 0$. Однако если кривая C геометрически близка к резонансной окружности или к ее дуге, то описанная выше инверсия расположения кривых $N(\delta)$ для разных γ сохранится, во всяком случае для не слишком больших δ. Вообще, поля, созданные линией, близкой к $\widehat{C}$, обладают некоторыми свойствами, близкими к свойствам полей, созданных $\widehat{C}$.

Возможны и другие постановки задачи об оптимальном токовом синтезе. Например, можно требовать не близости полученной диаграммы к заданной, а максимальной концентрации энергии в заданном телесном углу [12]. Если излучение происходит не в свободном пространстве, а в волноводе, то аналогичным требованием является максимализация энергии в заданную совокупность волноводных волн — при фиксированной форме тока. В последней задаче можно в качестве базиса использовать собственные функции оператора, аналогичного оператору K [13, 14].

4.4. Область влияния особой линии

Характеристикой близости линии C к какой-либо особой линии $\widehat{C}$ могла бы служить величина наименьшего μ_m, соответствующего линии C, так как для $\widehat{C}$ существует нулевое собственное значение μ_q. Однако применение систем $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$ удобно только в теоретических построениях, а в прикладных задачах нахождение функций $\psi_m(\varphi)$ и чисел μ_m для данной линии C приводит к громоздким вычислениям. Удобнее пользоваться какой-либо простой ортонормированной системой функций $\chi_m(\varphi)$ (например, тригонометрическими функциями), не связанной с линией C. Для того чтобы при этом оценить влияние близости C к особой линии, не решая интегральное уравнение для $j(s)$, применим для нормы тока, создающего диаграмму $F(\varphi)$, неравенство

$$N^2 \geqslant \frac{|(\Phi,\, F)|^2}{(K^C\Phi,\, K^C\Phi)}\ . \tag{4.6}$$

Его легко получить, умножив уравнение $K_j = F$ на $\Phi(\varphi)$, используя определение (4.2) сопряженного оператора K^C и неравенство Коши $(f_1, f_1)\cdot(f_2, f_2) \geqslant |(f_1, f_2)|^2$. В (4.6) $\Phi(\varphi)$ — любая функция. Если задать ее в виде

$$\Phi(\varphi) = \sum_m^M C_m \chi_m(\varphi)\ ,$$

то (4.6) примет вид

$$N^2 \geqslant \left(\sum^M\sum A_m A_n^* C_n C_m^*\right)\left(\sum^M\sum \beta_{nm} C_n C_m^*\right)^{-1}, \tag{4.7}$$

где A_n — коэффициенты разложения $F(\varphi)$ в ряд по $\chi_n(\varphi)$, а $\beta_{nm} = (K^C\chi_n,\, K^C\chi_m)$.

Выбором функции $\Phi(\varphi)$, т.е. коэффициентов C_n $(n = 1, 2, \ldots, M)$, можно максимизировать правую часть неравенства (4.7). Как известно, значение максимума этого отношения двух квадратичных форм — обозначим его $X^{(M)}$ — есть наибольший корень алгебраического уравнения M-го порядка

$$\det\left|A_m A_n^* - X^{(M)}\beta_{mn}\right|_M = 0\ . \tag{4.8}$$

Неравенство (4.6) означает, что $N^2 \geqslant X^{(M)}$. С ростом M $X^{(M)}$ возрастает (не убывает), и это неравенство становится более информативным, т.е. позволяет точнее оценить N^2. Существенно, что, как можно доказать, при $M \to \infty$ оно превращается в равенство. Значение $X^{(M)}$ характеризует норму тока, который необходимо распределить на C, чтобы аппроксимировать диаграмму $F(\varphi)$.

Если система $\chi_m(\varphi)$ совпадает с $\psi_m(\varphi)$, то $\beta_{nm} = \mu_m\delta_{nm}$, и если $\mu_q = 0$, т.е. линия C — особая, то при $M \geqslant q$ уравнение (4.8) имеет корень $X^{(M)} = \infty$ (если $A_q \neq 0$). Это просто означает, что диаграмма, ряд Фурье которой содержит $\psi_q(\varphi)$, неаппроксимируема. Область, окружающая особую линию, в которой еще чувствуется ее влияние (т.е. N велико), зависит от степени сложности диаграммы $F(\varphi)$, точнее — от относительного значения ее высоких коэффициентов Фурье. Если M есть номер наибольшего значимого коэффициента, т.е. слагаемого, после которого можно ряд оборвать, мало возмутив $F(\varphi)$, то характеристикой этой области будет число $X^{(M)}$.

Можно дать оценку нормы N, не зависящую от конкретного вида функции $F(\varphi)$ и зависящую только от этого числа M. Уравнение (4.8) имеет корень $X^{(M)} = \infty$, если выполняется условие $\det|\beta_{nm}|_M = 0$. Разумеется, при $M \to \infty$ оно выполняется для любой линии C, что просто означает, что для создания очень изрезанной диаграммы нужны большие токи. Однако если с ростом M значение этого детерминанта становится малым при не очень больших M и вычисление его остается устойчивым, то C близко к какой-то особой линии.

Несколько более точную, чем значение $\det|\beta_{nm}|_M$, характеристику для N, тоже зависящую только от M, а не от конкретной функции $F(\varphi)$, можно получить, усилив неравенство (4.6) тем, что в числителе заменить $(\Phi,\, F)$ на $(\Phi,\, \Phi)$; при этом надо принять, что $(F,\, F) = 1$. Наибольшее значение правой части будет при этом наибольшим корнем $Y^{(M)}$ уравнения M-го порядка

$$\det\left|\delta_{nm} - Y^{(M)}\beta_{nm}\right|_M = 0\ . \tag{4.9}$$

При больших $Y^{(M)}$ можно в стоящем слева многочлене M-го порядка сохранить только два старших слагаемых. Значение $Y^{(M)}$ велико для любой линии вблизи $\widehat{C}$ и убывает тем медленнее, чем больше M. Размер области влияния особой линии зависит от класса аппроксимируемых функций. Простейшей характеристикой этого класса является число M, и величины $X^{(M)}$, $\det|\beta_{nm}|_M$ и $Y^{(M)}$ явно зависят от него.

5. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла

5.1. Основной результат

Для скалярной задачи выше было показано, что если некоторая линия C обладает одним из сформулированных ниже свойств, то она обладает и вторым свойством:

а) Любые токи, распределенные на $\widehat{C}$, создают на замкнутой линии Σ, окружающей $\widehat{C}$, электромагнитное поле u, которым всякая заданная на Σ функция U может быть аппроксимирована не точнее, чем согласно неравенству (3.1).

б) Существует решение $\widehat{u}$ однородного уравнения Гельмгольца, не имеющее особенностей внутри Σ, такое, что на $\widehat{C}$ выполняется условие (2.4).

Вся развитая выше теория основывалась на этом утверждении. Доказательство его элементарно и использует только формулу Грина. Обобщение на трехмерные скалярные задачи требует лишь замены слова "линия" на слово "поверхность".

Аналогичное утверждение для трехмерной векторной задачи является основой теории аппроксимируемости векторного поля. Доказывается оно столь же элементарно, только вместо формулы Грина надо использовать лемму Лоренца. Мы не будем приводить это доказательство, приведем только формулировку результата. Несмотря на внешнюю громоздкость этой формулировки, она лишь повторяет приведенную выше формулировку для скалярного случая. В абзаце, следующем за формулой (5.2), повторены построения, описанные после (3.1), только вместо решения внешней задачи Дирихле используется решение первой граничной задачи для уравнений Максвелла. Последний абзац этого пункта содержит перенесение результатов с ближних полей на дальние поля.

Если некоторая поверхность $\widehat{C}$ обладает одним из двух сформулированных ниже свойств, то она обладает и другим.

а) Любые токи, распределенные на $\widehat{C}$, создают на замкнутой поверхности Σ, окружающей $\widehat{C}$, электрическое поле $\mathbf{e}$, которым всякую заданную на Σ пару функций $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$ (σ — координата точки на Σ) можно приблизить не точнее, чем согласно неравенству

$$\int\limits_{\Sigma}\left(\left|E_1 - e_{t_1}\right|^2 + \left|E_2 - e_{t_2}\right|^2\right)\mathrm{d}\sigma \geqslant \left|\int\limits_{\Sigma}\left(E_1\widehat{F}_1^* + E_2\widehat{F}_2^*\right)\mathrm{d}\sigma\right|^2 , \tag{5.1}$$

где t_1 и t_2 — два тангенциальных к Σ направления, а функции $\widehat{F}_1(\sigma)$ и $\widehat{F}_2(\sigma)$ определены на Σ, не зависят от токов и пронормированы условием, что интеграл, получающийся при замене справа в (5.1) E_1 и E_2 на $\widehat{F}_1$ и $\widehat{F}_2$ соответственно, равен единице.

б) Существует решение $\widehat{\mathbf{E}}$, $\widehat{\mathbf{H}}$ однородного уравнения Максвелла, не имеющее особенностей внутри Σ, такое, что на $\widehat{C}$ обе тангенциальные компоненты поля $\widehat{\mathbf{E}}$ равны нулю:

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\mathrm{tang}}\Big|_{\widehat{C}} = 0 \, . \tag{5.2}$$

Функции $\widehat{F}_1(\sigma)$ и $\widehat{F}_2(\sigma)$ в (5.1) и поле $\widehat{\mathbf{E}}$ в (5.2) однозначно связаны между собой. Эти функции равны разности значений на Σ тангенциальных компонент двух магнитных полей — пóля $\widehat{\mathbf{H}}$ (внутри Σ), и другого, получающегося вне Σ из задачи об электромагнитном поле, удовлетворяющем условию излучения и имеющем на Σ то же значение тангенциальной компоненты электрического поля, что и $\widehat{\mathbf{E}}$. А поле $\widehat{\mathbf{E}}$ внутри Σ равно полю, создаваемому распределенными на Σ токами с компонентами $-\widehat{F}_2(\sigma)$ и $\widehat{F}_1(\sigma)$.

Если поле $\widehat{\mathbf{E}}$, $\widehat{\mathbf{H}}$ со свойством (5.2) не имеет особенностей во всем пространстве, то (5.1) применимо не только для поля $\mathbf{e}$ на конечном от $\widehat{C}$ расстоянии, но и для диаграмм, и тогда в (5.1) σ переходит в (ϑ, φ); $E_1(\vartheta, \varphi)$ и $E_2(\vartheta, \varphi)$ — заданная диаграмма (ее ϑ- и φ-компоненты), а $\widehat{F}_1(\vartheta, \varphi)$, $\widehat{F}_2(\vartheta, \varphi)$ — угловые зависимости тех слагаемых в асимптотике при $r \to \infty$ поля $\widehat{\mathbf{E}}$, которые соответствуют сходящейся сферической волне.

Для многих поверхностей можно доказать существование поля, удовлетворяющего условиям (5.2). Эквивалентность (5.2) и (5.1) означает, что для таких поверхностей имеет место также и неаппроксимируемость.

5.2. Тривиальные обобщения

Результат, приведенный в предыдущем пункте, является переформулировкой для трехмерной векторной задачи одного из результатов, полученных выше для двумерной скалярной модели. Вообще, при таком перенесении возникает только одно принципиальное усложнение; его мы обсудим в п. 5.3. Нетривиальным является именно автоматизм этого перенесения. Он означает, что подобные же результаты могут быть сформулированы и для акустических, сейсмических и других полей, описываемых линейными уравнениями. По существу, эти результаты являются следствием лишь теоремы взаимности. Их следует учитывать, если источники поля сосредоточены в области, размерность которой ниже размерности области, занятой полем.

Приведем два следствия для поверхностей, удовлетворяющих условию (5.2), а потому — и условию (5.1), т.е. таких, что полная система токов на них порождает неполную систему диаграмм.

а) Поверхность антенны не должна быть особой или близкой к ней. В применении к коническому рупору это означает, что половина угла раскрыва α не должна быть корнем уравнений (5.3а) или (5.3б):

$$P_n^m(\cos\alpha) = 0 \, , \tag{5.3а}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\bigg|_{\vartheta=\alpha} = 0 \, , \tag{5.3б}$$

где P_n^m — присоединенные функции Лежандра, m $(m = 0, 1, \ldots)$ определяет зависимость диаграммы $(\sim \cos m\varphi)$ от азимутального угла φ, а n — небольшое целое число. Для $m = 0$ "запрещенные" углы будут: $\alpha = 55^\circ$ $(n = 2)$; 39°, 63° $(n = 3)$ и т. д. Для $m = 1$, соответственно, $\alpha = 63^\circ$, 31° $(n = 3)$ и т.д.

б) Если некоторая поверхность $\widehat{C}$ обладает высокой степенью симметрии, то для узких диаграмм возможна амплитудная неаппроксимируемость, когда никаким выбором фазы невозможно сделать ее аппроксимируемой диаграммами токов, распределенных на $\widehat{C}$. Например, если $\widehat{C}$ состоит из трех взаимно перпендикулярных плоскостей и диаграмма имеет амплитуду $\exp[-A\sin^2(\vartheta'/2)]$, где угол ϑ' отсчитывается от направления, составляющего равные углы со всеми тремя линиями пересечения плоскостей, — то амлитудная аппроксимируемость будет иметь место только для диаграмм, полуширина которых больше 34°. Это ограничение оказалось мягче, чем в аналогичной двумерной задаче (п. 2.4).

5.3. Свойства особых поверхностей

Многие свойства особых поверхностей повторяют аналогичные свойства особых линий. Замкнутая особая поверхность — обязательно резонансная; обратное, вообще говоря, может не иметь места. Особых поверхностей континуально много и т.д.

Однако в отличие от скалярного случая для произвольного векторного поля $\widehat{\mathbf{E}}$, даже вещественного, не существует, как известно, поверхностей, в каждой точке перпендикулярных $\widehat{\mathbf{E}}$, т.е. таких, на которых выполняются оба условия (5.2). Условие, при котором такие поверхности существуют, содержит $\operatorname{rot}\widehat{\mathbf{E}}$. Для полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, оно имеет вид $\widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{H}} = 0$. Если оно выполняется в некотором объеме, то оно не только необходимо, но и достаточно для существования особых поверхностей. Класс таких полей (он исследован в [15]) относительно узок. Более типична другая ситуация, когда $\widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{H}} = 0$ лишь на какой-либо поверхности. Однако тогда это условие является только необходимым для того, чтобы она была особой поверхностью.

Поэтому задача построения $\widehat{C}$ по двум заданным функциям ортогонального дополнения $\widehat{F}_1(\vartheta, \varphi)$ и $\widehat{F}_2(\vartheta, \varphi)$ значительно сложнее, чем в скалярном случае. Если эти функции заданы независимо, то в восстановленном по ним поле $\widehat{\mathbf{E}}$ не будет существовать поверхностей со свойством (5.2), даже если $\widehat{\mathbf{E}}$ будет вещественно. Для того чтобы $\widehat{C}$ существовало, надо, чтобы на поверхности, на которой $\widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{H}} = 0$, выполнялись также условия (5.2). Произвольно (лишь с некоторыми ограничениями, аналогичными указанному после формулы (2.6)) задать можно только одну из функций $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$. Более всего это обстоятельство усложняет реализацию одного из описанных выше методов нахождения поверхности рассеивателя по измеренной диаграмме рассеяния. В двух вариантах этого метода находятся функции ортогонального дополнения, либо близкие к диаграмме, либо ортогональные к ней, а затем строятся соответствующие особые линии. При этом $\widehat{F}(\varphi)$ должно быть подчинено лишь очень мягкому ограничению, обеспечивающему вещественность поля $\widehat{u}(r, \varphi)$. В трехмерных векторных задачах функции $\widehat{F}_1(\vartheta, \varphi)$ и $\widehat{F}_2(\vartheta, \varphi)$ должны быть еще связаны упомянутым образом, чтобы образовать элемент пространства ортогонального дополнения, т.е. пару функций, которым соответствует особая поверхность.

Найти эту связь в аналитическом виде не удается. Заметим, что такая же проблема возникла в другой задаче — о конструктивном синтезе резонаторных антенн [16]. Это — одна из математических задач, упомянутых в статье, простых по постановке, но сложных по существу, к которым приводят конкретные проблемы высокочастотной электродинамики, связанные с задачами синтеза в различных постановках.

Список литературы

1. Каценеленбаум Б З, Шалухин М Ю *Радиотехн. и электрон.* **33** (9) 1878 (1988); Шалухин М Ю *Радиотехн. и электрон.* **35** (2) 313 (1990)
2. Каценеленбаум Б З, Шалухин М Ю *Письма ЖТФ* **14** (21) 2012 (1988); *Радиотехн. и электрон.* **34** (2) 225 (1989); Каценеленбаум Б З *Радиотехн. и электрон.* **34** (7) 1370 (1989); *Письма ЖТФ* **15** (11) 17 (1989); Шалухин М Ю *Радиотехн. и электрон.* **35** (3) 493 (1990); Каценеленбаум Б З, Шалухин М Ю *Письма ЖТФ* **16** (5) 60 (1990); Каценеленбаум Б З *Радиотехн. и электрон.* **35** (11) 2427 (1990); **37** (1) 71 (1992); **38** (6) 998 (1993); Katsenelenbaum B Z, Schalukhin M Yu *IEICE Trans* (*Japan*) **74** (9) 2910 (1991)
3. Апельцин В Ф, Кюркчан А Г *Аналитические свойства волновых полей* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990)
4. Колмогоров А Н, Фомин С В *Элементы теории функций и функционального анализа* (М.: Наука, 1981)
5. Overfelt P, White D *IEEE Trans.* **MTT-34** (1) 161 (1986)
6. Кюрчан А Г, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *Радиотехн. и электрон.* **37** (5) 777 (1992); Савина Т В, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *Радиотехн. и электрон.* **38** (2) 229 (1993); Sternin B Yu, Shatalov V E *Springer Lect. Notes Math.* **1520** 237 (1992)
7. Каценеленбаум Б З, Полищук И М *Радиотехн. и электрон.* **35** (11) 2363 (1990)
8. Заридзе Р С, Каркашадзе Д Д В кн. *IX Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн* (Тбилиси, 1985) т. 2, с. 287; Поповиди-Заридзе Р С, Каркашадзе Д Д, Ахвледиани Г З, Хатиашвили Д Ш *Радиотехн. и электрон.* **26** (2) 254 (1981)
9. Inagaki N, Garbacz R, Posar D *IEEE Trans.* **AP-30** (4) 571 (1982)
10. Lin D, Garbacz R, Posar D *IEEE Trans.* **AP-38** (6) 860 (1990)
11. Бахрах Л Д, Кременецкий С Д *Синтез излучающих систем; теория и методы расчета* (М.: Сов. радио, 1974); Андрейчук М М, Войтович Н Н *Радиотехн. и электрон.* **30** (2) 276 (1985)
12. Бондаренко Н Г, Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **7** (2) (1964)
13. Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **28** (7) 872 (1985)
14. Вдовичева Н К, Таланов В И, Фикс И Ш, Шерешевский И А В кн. *Акустика океанской среды* (Под ред. Бреховских Л М, Андреевой И Б) (М.: Наука, 1989) с. 169
15. Худак Ю Н *Радиотехн. и электрон.* **32** (2) 225 (1987)
16. *Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями. Методы конструктивного синтеза* (Под ред. Каценеленбаума Б З, Сивова А Н) (М.: Наука, 1989)

THE APPROXIMOBILITY PROBLEM FOR ELECTROMAGNETIC FIELD

B.Z. Katsenelenbaum
Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences
11, Ulitsa Mokhovaya, 103907, Moscow, Russia
Tel. (*7-095*) *203-4836*
Fax (*7-095*) *203-8414*

The connection between the geometrical properties of a surface and the properties of electromagnetic fields generated by surface monochromatic current is considered. The is a continual cardinality of surfaces for with almost every field (and patterns) cannot be approximated by this fields whetever surface currents we take. The stady of such surfaces is based on the fact that they are zero-surfaces of a non-propagating (real) electromagnetic field satisfied Maxwell equations. Even the neerness of any surface to the surface with such properties lead to nontrivial properties of field of currents inducted on this surface.

Bibliography — 16 references

Received 22 September 1993, revised 6 June 1994