

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантовая хромодинамика и распределения частиц по множественности

И.М. Дремин

В рамках квантовой хромодинамики (КХД) рассмотрена проблема распределений вторичных частиц по множественности при соударениях частиц высоких энергий. Приведены решения КХД-уравнений для производящих функций распределений по множественности в глюонных и кварковых струях как для фиксированной, так и для бегущей константы связи. Найдена новая характеристика, весьма чувствительная к форме распределения. Предсказания сопоставляются с экспериментальными данными. Указано изменение распределений по множественности при уменьшении области анализируемого фазового объема. Оно обсуждается в связи с понятиями о перемежаемости и фрактальности. Кратко описаны и некоторые другие эффекты, предсказанные КХД.

PACS numbers: 12.38. - t

Содержание

1. Введение (785).
 2. Определения и обозначения (787).
 3. Феноменология (789).
3.1. КНО-скейлинг и F -скейлинг. 3.2. Простейшие распределения. 3.3. Физические модели.
 4. Уравнения квантовой хромодинамики (793).
 5. Глюодинамика (794).
5.1. Приближенное решение для фиксированной константы связи и форма КНО-функции. 5.2. Высшие приближения с бегущей константой связи.
 6. Приближенные решения уравнений КХД с бегущей константой связи (796).
 7. Точные решения уравнений КХД с фиксированной константой связи (794).
7.1. Низшие моменты и отношение средних множественностей в глюонных и кварковых струях. 7.2. Ширины распределений в струях и высшие моменты.
 8. Эксперимент (801).
 9. Эволюция распределений с уменьшением фазового объема – перемежаемость и фрактальность (804).
 10. Краткое обсуждение других эффектов КХД (807).
 11. Выводы (807).
- Список литературы (808).

1. Введение

Квантовая хромодинамика (КХД) уже давно признана теорией сильных взаимодействий. Несомненны ее успехи в описании статических характеристик адронов (особенно тяжелых кваркониев), симметричных свойств их взаимодействий, правил сумм. С открытием свойства асимптотической свободы квантовой хромодинамики были заложены теоретические основы дотоле феноменологической партонной модели и открыт путь к использованию теории возмущений в применении к упругим и неупругим адронным процессам с большими передачами импульса, где роль партонных взаимодействий играют кварки и глюоны [1–5]. Несомненно, на конечной стадии необходимо учитывать превращение кварков и глюонов в наблюдаемые адроны, и пока еще мы не способны извлечь однозначный рецепт этого перехода из квантовой хромодинамики, поскольку не знаем решения проблемы удержания (конфайнмента) кварков, хотя теоретические расчеты на решетках дают нам основания сказать, что это свойство заложено в лагранжиане КХД. Однако простейшие оценки показывают, что часто либо этот этап не меняет существенно конечных характеристик, либо его влияние оказывается не зависящим от энергии и поэтому оценивается из других процессов при различных энергиях. На феноменологическом уровне распределения партонных и адронов оказываются весьма схожими. В этой ситуации исследование партонной стадии процесса приобретает решающее значение, поскольку именно ею в значительной степени определяются конечные характеристики адронов, рождающихся в неупругих процессах при высоких энергиях.

Для выяснения динамики процессов первостепенную роль играет распределение неупругих событий по числу рождающихся в них частиц (или, как говорят, распреде-

ление по множественности). Феноменологические подходы к его описанию обычно ограничиваются простейшими идеями об излучении отдельными источниками с применением распределений, широко используемых в теории вероятности (см., например, [6]). Среди них наибольшей популярностью пользуется отрицательное биномиальное распределение, обычно неплохо описывающее основные черты экспериментальных данных о распределениях частиц по множественности в разных реакциях в достаточно широком интервале энергий при выборе соответствующих значений параметров, хотя и отмечено некоторое разногласие при наивысших доступных энергиях. Привлекательной чертой отрицательного биномиального распределения является наличие асимптотического КНО-скейлинга при высоких энергиях, т.е. при стремящейся к бесконечности средней множественности. Согласно КНО-гипотезе (названной так по начальным буквам фамилий ее авторов [7]) распределения по множественности зависят лишь от отношения числа частиц к их среднему числу (подробнее см. ниже). В общих чертах это свойство также довольно хорошо подтверждается экспериментом (за исключением, пожалуй, лишь данных при самых высоких энергиях).

Что же говорит квантовая хромодинамика о распределениях по множественности? Попытке ответа на этот вопрос и посвящены те работы, которые составили основу предлагаемой обзорной статьи. Оказалось, что в высших приближениях теории возмущений квантовая хромодинамика на партонном уровне способна предсказать весьма тонкие особенности распределений по множественности, которые сохраняют основные качественные черты и для адронных распределений. Предваряя детальное изложение полученных выводов, укажем на лежащие на этом пути "подводные камни" и кратко опишем историю развития вопроса.

Прежде всего следует подчеркнуть, как это уже делалось выше, что квантовая хромодинамика приводит к выводам о распределениях партонов, а не конечных адронов. Нужны дополнительные гипотезы, чтобы сделать заключения об адронных распределениях. Одной из них является гипотеза о локальной партон-адронной дуальности [8], которая сводит проблему к простой перенормировке распределений, не меняющей их формы. Она восходит к идее о "мягком прекофайнменте" [9], когда партоны группируются в бесцветные кластеры, не меняя изначальных спектров. Следует подчеркнуть, что эта гипотеза обычно применяется лишь к инклюзивным распределениям, а не к корреляционным характеристикам, где, как полагают, необходима значительно большая осторожность. Феноменологические модели процесса адронизации партонов используются в монтекарловских версиях неупругих процессов и чаще всего поддерживают приближенное свойство локальной партон-адронной дуальности, хотя, как будет указано ниже, кое-где заметны количественные отличия от следствий этой гипотезы.

Другой проблемой, в конечном счете тесно связанной с первой, являются пределы применимости используемого приближения теории возмущений. Формально можно использовать теорию возмущений лишь в случае, когда константа связи очень мала, а это условие выполняется в квантовой хромодинамике только при очень больших переданных импульсах. Но в каждом процессе по мере эволюции партонов их энергии умень-

шаются и необходим корректный учет мягких партонов, их отдачи в процессе взаимодействия и законов сохранения. В низшем порядке теории возмущений всеми этими эффектами пренебрегают, рассматривая лишь процессы, в которых энергии и углы излучения сильно меняются на каждом этапе эволюции (так называемое дваждылогарифмическое приближение). Учет мягких партонов и строгого углового упорядочения происходит в следующих членах разложения. Это модифицированное приближение ведущих логарифмов и члены более высокого порядка по константе связи, в которых сказываются также эффекты отдачи и законов сохранения. Чаще всего эти поправки довольно хорошо контролируются и оказываются порядка десятка процентов. Однако несмотря на их относительно небольшой интегральный вклад, они часто оказываются весьма важными и меняют картину на качественном уровне в той области, где соответствующие функции малы. Так, без правильного учета этих членов нельзя понять истинную картину протекания процессов с большой множественностью. Математически это сказывается в появлении нового параметра разложения, равного произведению константы связи (точнее, квадратного корня из нее) на ранг момента распределения. Этот параметр велик при большом ранге (т.е. большой множественности). Связанные с ним проблемы мы обсудим подробнее в разделах 3 — 5.

Таким образом, естественно, что первые результаты о распределении по множественности партонов в квантовой хромодинамике были получены в дваждылогарифмическом приближении (см. обзоры в [5,10]). Они оказались настолько же впечатляющими, насколько и обескураживающими. Прежде всего из них следовало свойство асимптотического КНО-скейлинга распределений по множественности. При этом само распределение не зависело от константы связи [11]. Это наталкивало на мысль о большей общности полученного результата. Рост средней множественности с энергией (при бегущей константе связи) был быстрее любого логарифмического закона и медленнее любого степенного, что неплохо согласовывалось с экспериментом. Вместе с тем конкретная форма КНО-функции получилась явно противоречащей всем экспериментальным данным — теоретическое распределение было намного шире всех, известных из эксперимента. Лишь недавно удалось снять остроту данной проблемы [12, 13] путем учета эффектов высшего порядка, о которых мы упоминали выше. Во всяком случае, сейчас можно утверждать, что согласие с экспериментом достигнуто, по крайней мере, на качественном уровне. Вместе с тем, некоторые предсказания, полученные с помощью пертурбативной квантовой хромодинамики, оказываются неожиданно хорошо оправдывающимися и для "мягких" процессов адронных взаимодействий. С одной стороны, это озадачивает, хотя и понятно, что высшие поправки должны были бы учитывать последовательно вклад все более "мягкой" компоненты, а с другой — это указывает на большую общность мягких и жестких процессов, чем это предполагается в разных теоретических модельных построениях и заставляет задуматься над общим происхождением изучаемых эффектов (приводящих, в частности, к наблюдаемым распределениям по числу частиц). Кроме того, решение уравнений КХД подсказало новую характеристику, весьма чувствительную к тонким особенностям функции распределения. Современное состояние

вопроса о распределениях по множественности в кварковых и глюонных струях, описываемых квантовой хромодинамикой, служит основным предметом изложения в данном обзоре (см. разделы 5—8).

Что касается значений средней множественности, то здесь большие дискуссии вызывает величина отношения множественностей частиц в глюонных и кварковых струях. Первоначальное предсказание, полученное из дваждылогарифмического приближения, давало для отношения множественностей партонов значение $9/4$, что существенно превосходило все экспериментальные оценки. Учет простейших поправок несколько снижает эту величину, а высшие поправки, как и точное решение уравнений при фиксированной константе связи, приводят к еще меньшему значению. Эти выводы и их соответствие эксперименту обсуждаются в разделах 6, 7. Здесь же будет обсуждена и зависимость средней множественности от энергии.

Для полноты картины следует сказать и о других интересных фактах из физики неупругих взаимодействий частиц высоких энергий, в описании (а часто и в предсказании) которых квантовая хромодинамика также оказалась весьма успешной. Эффекты, предсказываемые квантовой хромодинамикой, очень изящны, порою неожиданны и всегда поучительны. Продолжая изучение распределений по множественности, можно поставить вопрос об их поведении не только в полном фазовом объеме, но и в ограниченных (и даже малых) его областях. Как известно, эти исследования весьма популярны в последние годы и связываются с явлением перемежаемости и с фрактальностью распределений частиц в фазовом объеме, обуславливающих большие флуктуации в малых областях (см. обзор в [14]). Это свойство проявляется в относительном уширении распределения при уменьшении объема области, что приводит к росту моментов распределения, причем степенной рост прямо говорит о перемежаемости и фрактальности. Такие закономерности были наблюдаемы на опыте. Квантовая хромодинамика описывает явление роста моментов, непосредственно связывает показатели перемежаемости (фрактальность) с аномальной размерностью и указывает пределы применимости этих законов, четко выделяя те размеры, где важно учитывать бегущую константу связи и где этим свойством можно пренебречь. Мы кратко обсудим эти результаты в разделе 8.

Квантовомеханическую природу взаимодействующих партонов подчеркивают интерференционные эффекты, приводящие к "горбтому" плато в распределении по быстротам, корреляциям частиц по энергиям и азимутальному углу, так называемому эффекту струны (или "увлечения" частиц) в трехструйных событиях и при рождении тяжелых бозонов и лептонов, подавлению излучения вперед при рождении тяжелых (быстро распадающихся) кварков. Мы кратко обсудим их в разделе 9.

Вне поля нашего зрения, к сожалению, останутся интересные особенности взаимодействия с ядрами, а также взаимодействия поляризованных кварков, которые заслуживают отдельного рассмотрения.

Нашей основной целью является изучение распределений по множественности и связанных с ними характеристик. Я прошу извинения у всех авторов многочисленных статей по этому предмету, чей вклад не будет упомянут. Меня может оправдать только то, что здесь

рассмотрен лишь подход в рамках квантовой хромодинамики. Однако, к сожалению, даже при этой ограниченной постановке задачи возможны упущения, за которые я приношу мои извинения.

2. Определения и обозначения

Распределение неупругих событий по числу рожденных в них частиц называется распределением по множественности и задается формулой

$$P_n = \frac{\sigma_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n}, \quad (1)$$

где σ_n — сечение рождения n частиц (так называемое топологическое сечение) и суммирование ведется по всем возможным n , так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1. \quad (2)$$

Часто распределение по множественности P_n удобно характеризовать его моментами, фактически заменяя ряд чисел P_n на другой ряд чисел по определенному алгоритму. Все они могут быть получены с помощью так называемой производящей функции, определяемой по формуле

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (1+z)^n \quad (3)$$

и позволяющей изучать аналитическую функцию вместо ряда чисел P_n . В дальнейшем мы будем использовать чаще всего (нормированные) факториальные моменты F_q и кумулянты K_q , задаваемые соотношениями

$$F_q = \frac{\sum_n P_n n(n-1)\dots(n-q+1)}{(\sum_n P_n n)^q} = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \frac{d^q G(z)}{dz^q} \Big|_{z=0}, \quad (4)$$

$$K_q = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \frac{d^q \ln G(z)}{dz^q} \Big|_{z=0}, \quad (5)$$

где

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n n \quad (6)$$

— средняя множественность. Выражение для $G(z)$ можно переписать в виде

$$G(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \langle n \rangle^q F_q \quad (F_0 = F_1 = 1), \quad (7)$$

$$\ln G(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \langle n \rangle^q K_q \quad (K_1 = 1). \quad (8)$$

Само распределение P_n и его обычные моменты C_q могут быть выражены через производящую функцию $G(z)$ следующим образом:

$$P_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n} \Big|_{z=-1}, \quad (9)$$

$$C_q = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_n n^q}{\langle n \rangle^q} = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \frac{d^q G(e^z - 1)}{dz^q} \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Все моменты связаны друг с другом определенными соотношениями, легко получаемыми путем использования их определений через производящую функцию. Так, например, факториальные моменты и кумулянты однозначно выражаются друг через друга с помощью формулы

$$F_q = \sum_{m=0}^{q-1} C_{q-1}^m K_{q-m} F_m, \quad (11)$$

указывающей на связь производных от некоторой функции и от ее логарифма в точке, где эта функция обращается в единицу. Здесь

$$\begin{aligned} C_{q-1}^m &= \frac{(q-1)!}{m!(q-m-1)!} = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(m+1)\Gamma(q-m)} = \\ &= \frac{1}{mB(q, m)} \end{aligned} \quad (12)$$

— биномиальные коэффициенты, а Γ и B — гамма- и бета-функции соответственно. Таким образом, в соотношениях (11) содержатся лишь числовые коэффициенты, и последовательная итеративная процедура их решения (удобная при компьютерных расчетах) позволяет воспроизвести все кумулянты, если известны факториальные моменты (и наоборот). В этом смысле факториальные моменты и кумулянты равноправны. Физический смысл тех и других опять-таки легко понять из их определений, если выразить их в виде интегралов от корреляционных функций. Однако мы не будем здесь этого делать (см., например, обзор [14]), а сошлемся лишь на похожие соотношения в квантовой теории поля, где формулы, аналогичные (4) и (5), определяют, соответственно, весь набор фейнмановских диаграмм и подсистему связанных графов (см., например, [1]). Поэтому нетрудно понять, что факториальные моменты являются интегральными характеристиками всевозможных корреляций частиц, а кумулянты q -го ранга отвечают "истинным" q -частичным корреляциям, не сводимым к произведениям корреляций более низкого порядка¹. Точнее, в q -м кумулянте все q частиц связаны друг с другом и не могут быть разбиты на группы, между которыми нет корреляции. По аналогии с майеровским кластерным разложением в статистической механике можно сказать, что они образуют q -частичный кластер, не делящийся на меньшие кластеры.

Обычно факториальные моменты и кумулянты распределений, с которыми имеют дело в физике частиц, довольно быстро растут с увеличением ранга. Поэтому удобно рассматривать также их отношение

$$H_q = \frac{K_q}{F_q}, \quad (13)$$

которое обладает более "спокойным" поведением при больших рангах q , подчеркивая вместе с тем характерные качественные особенности в зависимости кумулянтов от их ранга.

Из определения факториальных моментов (4) легко усмотреть, что их можно выразить через обычные

моменты C_q того же и низшего рангов, но с коэффициентами, зависящими от средней множественности. Например,

$$F_2 = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = C_2 - \langle n \rangle^{-1}. \quad (14)$$

Это приводит к усложнениям, связанным с необходимостью пересчета при каждой заданной энергии. Поэтому мы не будем использовать обычные моменты в дальнейшем. Однако в асимптотике обычные и факториальные моменты совпадают.

Следует отметить, что весь объем физической информации, содержащийся в распределении по множественности P_n , может быть представлен в виде производящей функции $G(z)$ или заданием моментов C_q, F_q, K_q (либо их отношения H_q) при определенной средней множественности $\langle n \rangle$. Важно отметить, что моменты высшего ранга подчеркивают особенности распределения при все более высоких множественностях. Только множественности $n > q$ дают вклад в факториальный момент (целочисленного) ранга q , как следует из формулы (4).

Если распределение обрезано на множественности $n = n_{\max}$, то все факториальные моменты ранга $q > n_{\max}$ равны нулю. При меньших q они всегда положительны. Кумулянты же могут быть как положительными, так и отрицательными.

До сих пор, не оговаривая этого особо, мы предполагали, что порядок (ранг) момента является целым положительным числом. Однако их определения (4), (5), (10) можно обобщить [15] и на нецелочисленные моменты. Это легко понять, если записать, например, F_q в виде формулы

$$F_q = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-q+1)}, \quad (15)$$

применимой при любом вещественном q и позволяющей вычислять дробные факториальные моменты по экспериментальным данным о P_n .

С другой стороны, эти величины можно находить по формулам обобщенного (дробного) дифференцирования, если известна производящая функция. Правила обобщенного дифференциального исчисления выражают производную произвольного (вещественного) порядка через производные целого порядка следующим образом [16]:

$$D_z^q G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1+z)^{m-q} G^{(m)}(-1)}{\Gamma(m-q+1)}, \quad (16)$$

где $G^{(m)}(-1)$ — производные целого порядка m от функции $G(z)$, определенной формулой (3), в точке $z = -1$.

Нетрудно видеть, что определение факториальных моментов (4) переписывается для нецелых q в виде

$$F_q = \frac{1}{\langle n \rangle^q} D_z^q G(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G^{(m)}(-1)}{\Gamma(m-q+1)}. \quad (17)$$

Как видно, формулы (9), (15), (17) легко трансформируются друг в друга. Тем самым устанавливается однозначное соответствие экспериментального определения F_q по формуле (15) его теоретическому определению (17)

¹ Эта интерпретация справедлива фактически лишь для моментов, порядок (ранг) которых q меньше средней множественности при данной энергии (см. подробнее в обзоре [14]).

как дробной производной от производящей функции. При целочисленных значениях q эти моменты совпадают с обычными моментами целого порядка. Поэтому в общем случае их часто называют дробными моментами. Использование дробных моментов позволяет в некоторых случаях более детально различать разнообразные распределения, как это будет видно на простейших примерах, приведенных в разделе 3.2.

Определение дробных кумулянтов по известной производящей функции, соответственно, можно производить с помощью формулы [17]

$$K_q = \frac{1}{\langle n \rangle^q} D_z^q \ln G(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{\langle n \rangle^q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln G(z))^{(m)}|_{z=-1}}{\Gamma(m-q+1)}. \quad (18)$$

К сожалению, при этом заметно усложняется связь между дробными факториальными моментами и дробными кумулянтами. Именно эта связь при целых рангах (см. (11)) служит для вычисления кумулянтов по экспериментально определенным факториальным моментам.

Памятуя о том, что кумулянты оказываются очень чувствительной функцией вида распределений при низких рангах (как это будет подробно обсуждаться ниже), можно попытаться получить аналогичные функции из эксперимента, заменяя связь (11), например, такой формулой:

$$F_q = \sum_{m=0}^{[q-1]} (mB(q, m))^{-1} K_{q-m}^{(a)} F_m, \quad (19)$$

где суммирование идет до целой части величины $q-1$ (обозначено $[q-1]$), а $K_{q-m}^{(a)}$ можно назвать "аналитическим продолжением" кумулянтов на нецелые ранги. Эту формулу удобно использовать и экспериментаторам, и теоретикам (хотя здесь имеется неоднозначность с определением кумулянтов около точки $q=1$). Правда, при этом теряется теоретическая основа в виде формулы (18).

3. Феноменология

3.1. КНО-скейлинг и F -скейлинг

Одним из наиболее успешных предположений о форме распределений по множественности при высоких энергиях была гипотеза о том, что вся энергетическая зависимость определяется поведением средней множественности таким образом, что P_n имеет вид

$$P_n = \frac{1}{\langle n \rangle} f(n \langle n \rangle^{-1}). \quad (20)$$

Это свойство было названо КНО-скейлингом по имени авторов [7], которые обосновывали его путем изучения фейнмановского плато в быстротных распределениях частиц. Нормировочное условие (2) отвечает соотношению

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (21)$$

Ясно, что обычные моменты КНО-распределения (20) не зависят от энергии, а являются лишь функциями их ранга q :

$$C_q = \int_0^{\infty} x^q f(x) dx = \text{const}(E). \quad (22)$$

В то же время факториальные моменты этого распределения меняются с энергией, поскольку они отличаются (см. формулу (14)) от обычных моментов корреляциями низшего порядка, подавленными средней множественностью в соответствующей степени. Поэтому поправочные члены вымирают с ростом энергии и факториальные моменты совпадают с обычными при асимптотически высоких энергиях. Постоянство факториальных моментов мы будем называть F -скейлингом. F -скейлинг и КНО-скейлинг эквивалентны в асимптотике. Как ясно видно из всего вышесказанного и из определений (3), (7), (8), производящая функция в обоих случаях зависит от начальной энергии только через $\langle n \rangle$.

В квантовой хромодинамике с фиксированной константой связи (см. раздел 7) предпочтительным кажется F -скейлинг. Однако, поскольку теоретические расчеты проводятся обычно в предположении очень высокой энергии, отличием от КНО-скейлинга пренебрегают. Предасимптотические поправки для второго момента изучались в работе [18].

В дваждылогарифмическом приближении уравнения для факториальных моментов оказываются не зависящими от энергии и от константы связи. Функция $f(x)$ экспоненциально спадает [5] при больших x :

$$f(x) \sim 2C(Cx - 1 + \frac{1}{3Cx} + \dots) \exp(-Cx), \quad Cx \gg 1, \quad (23)$$

где $C \approx 2,553$, а при малых x ведет себя, как

$$f(x) \sim x^{-1} \exp(-\frac{1}{2} \ln^2 x). \quad (24)$$

Хотя демонстрация асимптотического КНО-скейлинга (или F -скейлинга) и его независимости от константы связи в низшем порядке являются сами по себе большим достижением квантовой хромодинамики [11], конкретная форма скейлинговой функции (23), (24) оказывается не удовлетворяющей экспериментальным данным. В эксперименте функция $f(x)$ оказывается заметно уже теоретической. Учет поправок с помощью модифицированного приближения ведущих логарифмов указывал на то, что результирующее теоретическое распределение должно быть менее широким [19]. Вышние поправки, действительно, меняют форму функции $f(x)$, но теперь она становится зависящей от константы связи. Эти вопросы рассмотрены подробнее в разделах 5—7.

До сих пор, говоря о распределениях по множественности, мы неявно имели в виду распределения событий по полному числу частиц во всем фазовом объеме. Вместе с тем закономерно поставить вопрос о том, как будут меняться эти распределения при наложении тех или иных ограничений на изучаемую область фазового объема, например, при разбиении полного интервала быстрот на меньшие интервалы. В этом случае моменты распределения становятся, вообще говоря, функциями не только ранга, но и размера рассматриваемого интервала (см. обзор [14]). В частности, их поведение на очень малых интервалах связывают с явлением перемежаемости и фрактальностью, которые мы кратко обсудим в разделе 9. Приближенный F -скейлинг сохраняется и в этом случае.

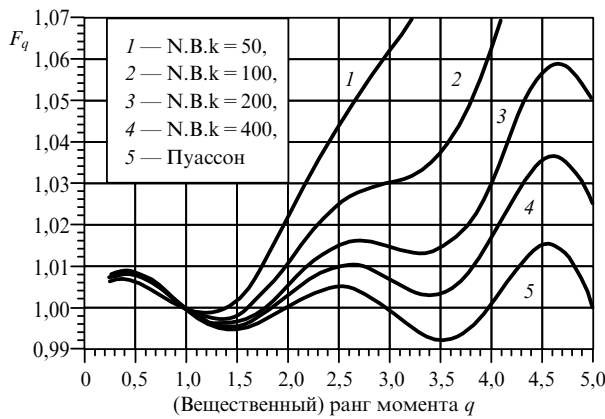


Рис. 1. Дробные факториальные моменты [15] пуассоновского (кривая 5) и отрицательного биномиального распределений (кривые 1–4, соответствующие разным значениям параметра k) при средней множественности $\langle n \rangle = 2$. Осцилляции резко падают с ростом $\langle n \rangle$ и уменьшением k

3.2. Простейшие распределения

Мы рассмотрим три примера распределений, для которых можно получить аналитические выражения для производящих функций и всех моментов [20, 21]. Они послужат нам "отправными точками" при дальнейшем анализе КХД-распределений. В следующих подразделах вначале мы будем рассматривать целочисленные моменты, а потом покажем, к чему приводит обобщение на произвольные (дробные, отрицательные, комплексные) моменты.

3.2.1. Пуассоновское распределение

Наличие корреляций в процессе обычно принято характеризовать мерой отличия типичного для него распределения от распределения Пуассона, которое задается формулой

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \exp(-\langle n \rangle). \quad (25)$$

Производящая функция имеет вид (см. (3))

$$G(z) = \exp(\langle n \rangle z), \quad (26)$$

и согласно (4), (5) получаем

$$F_q = 1, \quad K_q = H_q = \delta_{q1}. \quad (27)$$

Значит, мерой корреляций служит отличие факториальных моментов от единицы и кумулянтов (кроме тривиального первого), а также отношения H_q от нуля. Имеет место F -скейлинг и асимптотический КНО-скейлинг.

Дробные (отрицательные, комплексные) факториальные моменты пуассоновского распределения выглядят следующим образом [15]:

$$F_q = \frac{\exp(-\langle n \rangle)}{\langle n \rangle^q \Gamma(1-q)} \Phi(1, 1-q; \langle n \rangle), \quad (28)$$

где Φ — вырожденная гипергеометрическая функция. При целочисленных положительных значениях q , как и следует, они обращаются в единицу, а в промежутках осциллируют с переменной амплитудой, зависящей от q и от $\langle n \rangle$, как это показано на рис. 1 (кривая 5).

Можно записать и выражение для кумулянтов [17] согласно формуле (18):

$$K_q = \frac{q}{\langle n \rangle^{q-1} \Gamma(2-q)}. \quad (29)$$

Соответственно, отношение H_q имеет вид

$$H_q = \frac{q}{1-q} \frac{\langle n \rangle \exp(\langle n \rangle)}{\Phi(1, 1-q; \langle n \rangle)}. \quad (30)$$

При целых положительных значениях q выражения (28), (29), (30) переходят в (27). Амплитуда осцилляций моментов в промежутках между целыми положительными q быстро падает с ростом средней множественности. Сами "осцилляции" вызваны весьма простым обстоятельством — поведением гамма-функций в знаменателях F_q и K_q .

При большой средней множественности факториальные моменты стремятся к единице во всей комплексной плоскости q . Однако кумулянты стремятся к нулю лишь при $\text{Re } q > 1$ и растут по абсолютной величине при $\text{Re } q < 1$ с ростом средней множественности при высоких энергиях. Качественные особенности такого типа характерны и для других распределений, рассмотренных ниже.

3.2.2. Отрицательное биномиальное распределение

Отрицательное биномиальное распределение заслуживает особого внимания, так как в течение нескольких последних лет оно широко использовалось для фитирования экспериментальных распределений по множественности и оказалось довольно успешным. В частности, существует широко распространенное мнение, что это распределение описывает при высоких энергиях неупругие реакции взаимодействия частиц (за исключением данных при самых высоких энергиях: e^+e^- -взаимодействия при 91 ГэВ (ДЕЛФИ, ОПАЛ) и протон-антипротонные взаимодействия при энергиях от 200 до 900 ГэВ (UA5), которые будут обсуждены ниже). Оно имеет вид

$$P_n = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k)} \left(\frac{\langle n \rangle}{k} \right)^n \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{k} \right)^{-n-k}, \quad (31)$$

где k — подгоночный параметр. В частности, при $k = 1$ получается обычное распределение Бозе–Эйнштейна. Распределение Пуассона получится из (31) в пределе $k \rightarrow \infty$. Производящая функция имеет вид

$$G(z) = \left(1 - \frac{z\langle n \rangle}{k} \right)^{-k}, \quad (32)$$

а моменты при целых значениях q записываются так:

$$F_q = \frac{\Gamma(k+q)}{\Gamma(k)k^q}, \quad (33)$$

$$K_q = \frac{\Gamma(q)}{k^{q-1}}, \quad (34)$$

$$H_q = \frac{\Gamma(q)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+q)} = kB(q, k). \quad (35)$$

При заданном значении k факториальные моменты растут с ростом q быстрее экспоненты. Кумулянты

всегда положительны, сначала быстро падают, достигают минимума при $q \approx k$ и растут при больших значениях q . Интересно отметить, что кумулянты остаются положительными даже для произведения производящих функций отрицательных биномиальных распределений с разными параметрами. Отношение H_q монотонно падает с ростом q (пропорционально q^{-k} при больших q) и тоже всегда положительно.

Все эти характерные особенности демонстрируются на рис. 2, где приведены функции $\ln F_q, \ln K_q, \ln H_q$ при $q \leq 20$ для двух значений параметра $k = 5$ и 10 . Поскольку увеличение параметра k приводит к более узкому распределению, рост F_q при $k = 10$, как и ожидается, оказывается медленнее, нежели при $k = 5$. Зависимость от k еще более яркая в поведении кумулянтов K_q и частично компенсируется в H_q . Но эти особенности специфичны для отрицательного биномиального распределения и не столь проявляют себя в квантовой хромодинамике.

Подчеркнем, что отрицательное биномиальное распределение при фиксированном параметре k обладает F -скейлингом (моменты не зависят от $\langle n \rangle$) и асимптотическим (при больших n) КНО-скейлингом. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях k имеем для КНО-функции

$$f(x) = \frac{k^k}{(k-1)!} x^{k-1} \exp(-kx). \quad (36)$$

Производящая функция (32) обладает сингулярностью в точке $z = k/\langle n \rangle \rightarrow 0$ при $\langle n \rangle \rightarrow \infty$ и $k = \text{const}$. Таким образом, вычисляя ее производные в точке $z = 0$ (факториальные моменты!), мы работаем в непосредственной близости к этой сингулярности, все более приближаясь к точке $z = 0$ по мере роста энергии.

Общие выражения для моментов, справедливые во всей комплексной плоскости q , имеют вид

$$F_q = \frac{(kv)^k F(1, k; 1 - q; v)}{\langle n \rangle^{q+k} \Gamma(1 - q)} = \frac{F(k, -q; 1 - q; -\langle n \rangle/k)}{\langle n \rangle^q \Gamma(1 - q)}, \quad (37)$$

$$K_q = \frac{k}{\langle n \rangle^q \Gamma(1 - q)} \left(\frac{v}{1 - q} F(1, 1; 2 - q; v) + \ln \frac{kv}{\langle n \rangle} \right), \quad (38)$$

$$H_q = k \left(\frac{\langle n \rangle}{kv} \right)^k \frac{v(1 - q)^{-1} F(1, 1; 2 - q; v) + \ln \frac{kv}{\langle n \rangle}}{F(1, k; 1 - q; v)}, \quad (39)$$

где $v = \langle n \rangle / (\langle n \rangle + k)$. Осцилляции моментов между целочисленными положительными q вымирают с увеличением средней множественности (т.е. они малы при высоких энергиях) и уменьшением параметра k . Последнее свойство демонстрируется на рис. 1 (1–4). Осцилляции факториальных моментов идут на фоне их быстрого роста с q .

При отрицательных значениях q моменты растут с увеличением средней множественности. В комплексной плоскости заметны осцилляции моментов (например, вдоль линий, параллельных вещественной оси).

3.2.3. Фиксированная множественность

Этот пример мы рассмотрим здесь для того, чтобы показать, что поведение моментов (даже при их целочисленных рангах) может кардинально отличаться от того, что наблюдается для изученных выше распределений. Кроме того, он продемонстрирует нам, сколь важной

может оказаться процедура отбора событий на эксперименте. Дело в том, что иногда выбирают для анализа только события с заданным числом конечных частиц (так называемые полуинклюзивные события), т.е. имеют дело с распределением вида

$$P_n = \delta_{mn_0} \quad (n_0 = \text{const}). \quad (40)$$

Тогда

$$G(z) = (1 + z)^{n_0}. \quad (41)$$

Поскольку при этом $\langle n \rangle = n_0$, имеем при целочисленных q

$$F_q = \frac{n_0!}{n_0^q (n_0 - q)!} = \frac{\Gamma(n_0) n_0^{1-q}}{\Gamma(n_0 - q + 1)}, \quad 1 < q \leq n_0, \quad (42)$$

$$F_q = 0, \quad q > n_0, \quad (43)$$

$$K_q = (-n_0)^{1-q} (q - 1)! = (-n_0)^{1-q} \Gamma(q), \quad (44)$$

$$H_q = (-1)^{1-q} n_0 B(q, n_0 - q + 1). \quad (45)$$

Все F_q обращаются в нуль при $q > n_0$, и потому H_q можно вычислять лишь при $q \leq n_0$. Характерной чертой этого бесконечно узкого распределения являются осцилляции кумулянтов (в целых точках!), которые положительны при нечетных значениях q и отрицательны при четных. Амплитуда осцилляций уменьшается при росте q от 1 до n_0 , а затем монотонно растет. В дальнейшем, нечто

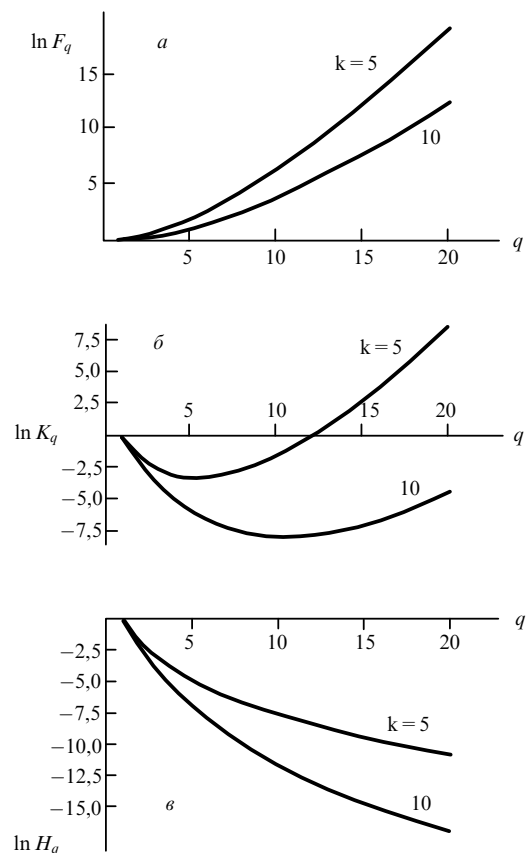


Рис. 2. Зависимость (целочисленных) факториальных моментов [21] (а), кумулянтов (б) и их отношения (в) (в логарифмической шкале) для отрицательного биномиального распределения при $k = 5$ и 10 от ранга моментов q . Кривые плавно соединяют целые точки и приведены лишь для наглядности

подобное мы будем наблюдать и при анализе распределений, возникающих в результате решения уравнений квантовой хромодинамики, хотя "периоды" осцилляций будут существенно разными. В то же время, факториальные моменты здесь падают монотонно с ростом q до n_0 , что совсем не типично для квантовой хромодинамики.

Вышесказанное демонстрируется на рис. 3, где приведены значения F_q, K_q, H_q при $n_0 = 10$, а на вставках изображены функции $\ln |K_q|$ и $\ln |H_q|$ при целых значениях q . Сплошные линии лишь соединяют значения функций при целочисленных q и проведены только для наглядности. Хотелось бы подчеркнуть, что появление осцилляций может быть связано в данном случае только с процедурой отбора событий, а отнюдь не с динамикой их взаимодействия. Это легко понять, если, скажем, отобрать лишь 10-частичные события из набора, подчиняющегося распределению Пуассона (или какому-либо другому). Вместо строго равных нулю кумулянтов мы получим осциллирующие значения, меняющие знак на каждом последовательном значении q . Только амплитуда этих осцилляций связана с исходным распределением, если сохранить его нормировку.

Знакопеременность моментов при целочисленных q действительно является проявлением осцилляций, как это наглядно видно, если вычислить их и при произвольных q :

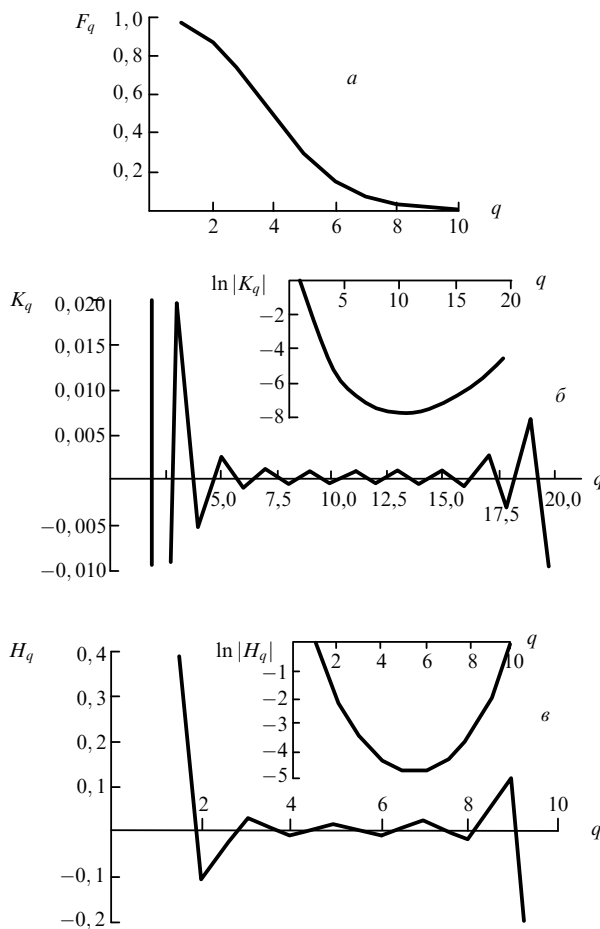


Рис. 3. Моменты распределения с фиксированной множественностью [21] для $n_0 = 10$. а — F_q , б — K_q , в — H_q . Как и на рис. 2, кривые лишь соединяют целочисленные точки и приведены для наглядности

$$F_q = n_0^{1-q} \frac{B(n_0, 1-q)}{\Gamma(1-q)}, \quad (46)$$

$$K_q = n_0^{1-q} \frac{\psi(1) - \psi(1-q)}{\Gamma(1-q)}, \quad (47)$$

$$H_q = \frac{\psi(1) - \psi(1-q)}{B(n_0, 1-q)}. \quad (48)$$

При $n_0 \rightarrow \infty$ $F_q \rightarrow 1$, $K_q \rightarrow 0$, $H_q \rightarrow 0$ (для фиксированного q). Хотелось бы подчеркнуть здесь, что во всех рассмотренных выше случаях значения моментов при нецелых q отнюдь не получаются "прямолинейным" (согласно (19)) аналитическим продолжением формул, выведенных при целых q , а даются совершенно другими выражениями (сравним (27) с (28)–(30), (33)–(35) с (37)–(39) или (42)–(45) с (46)–(48)), получающимися при вычислении производных дробного порядка согласно формулам (17), (18). Общим свойством рассмотренных осцилляций является смена максимума на минимум при изменении ранга всего на единицу. Однако если для пуассоновского и отрицательного биномиального распределений в целочисленных точках находятся узлы, то при фиксированной множественности — именно максимумы и минимумы. К сожалению, указанные осцилляции малы при больших множественностях и могут реально быть полезными лишь для распределений с малой средней множественностью (т.е. в малых областях фазового объема, рассмотренных в разделе 9).

В то же время рост отрицательных моментов с увеличением средней множественности может оказаться полезным при анализе распределений в полном фазовом объеме.

3.3. Физические модели

Теоретическое описание процессов множественного рождения на диаграммном языке кажется различным для e^+e^- - и hh -процессов. В первом случае основными оказываются диаграммы древесного типа (бремштралунг), когда эволюция начинается с сильно-виртуального партона, а во втором — последовательность лестничных диаграмм мультипериферического типа, где виртуальности малы. Большая общность этих процессов проявляется при рассмотрении струн, натягивающихся между цветными зарядами в процессе взаимодействия (модель Лунда [22, 23], дуальная топологическая модель [24, 25] или модель кварк-глюонных струн [26, 27]), а также при изучении кластеризации конечных частиц (мультипериферическая кластерная модель [28], кланы [6, 29] и т.п.). Распределения частиц по множественности в этих моделях чаще всего не сводятся к какому-либо одному распределению известного типа, а являются наложением таких распределений. Например, мультипериферическая модель с одной "лестницей" приводит к пуассоновскому распределению центров рождения частиц (резонансов, фэйрболов, кластеров, кланов...). В общем случае конечное распределение получается путем свертки пуассоновского распределения источников с распределением их при распаде и может быть весьма близким к экспериментальному при удачной догадке о свойствах распадов. Если, скажем, задать логарифмическое распределение частиц по множественности внутри каждого кластера, то свертка его с пуассоновским распределением приведет к отрицательному биномиальному распределению конечных частиц по множественности. В то же время последовательное рождение несколь-

ких таких лестниц (или струн) с интегрированием по доступному для них спектру энергий приводит уже к сложному распределению, грубо аппроксимируемому суммой отрицательных биномиальных распределений с различающимися параметрами. Заметим, что в результате могут получаться распределения с "плечами" или "квазиосцилляциями" вокруг более гладких распределений. Возможная связь таких осцилляций с обсуждаемым в этом обзоре поведением отношения H_q рассмотрена в работе [30]. Аналогичным образом отдельная струя в e^+e^- -аннигиляции может приводить к отрицательному биномиальному распределению по множественности, а наложение нескольких струй описывать отклонения от него в полном распределении частиц [31]. Детальное изучение этих моделей проводится обычно с помощью монтекарловских программ на компьютерах.

4. Уравнения квантовой хромодинамики

В квантовой хромодинамике процессы множественного рождения обусловлены взаимодействиями кварков и глюонов, приводящими к рождению новых кварков и глюонов, из которых, в конце концов, и формируются конечные адроны. Характерные черты этих процессов связаны с векторной природой глюонов и безразмерностью константы связи. Наличие цветового заряда у глюонов приводит к тому что они в отличие от фотонов в квантовой электродинамике способны сами испускать глюоны, а не только превращаться в кварк-антикварковую пару. Поэтому основными объектами при изучении множественных процессов в квантовой хромодинамике являются кварковые и глюонные струи. Их развитие описывается уравнениями эволюции. В качестве параметра эволюции используется угловой раствор струи, или, точнее, произведение импульса струи на угол раствора конуса, внутри которого летят его партоны. Последовательные излучения глюонов идут внутри конусов со все меньшим раствором, они не перекрываются, и это обстоятельство позволяет сформулировать вероятностную схему развития струи, уравнения эволюции которой напоминают хорошо известные схемы "рождения и смерти" ("матери-дочери"). Подробное обоснование этой схемы, базирующееся на явлении когерентности, читатель может найти в книге [5].

Система двух уравнений для производящих функций G_F и G_G кварковой и глюонной струй, соответственно, записывается в виде ($A, B, C = F, G$) [1, 5]

$$G_A(y, z) = \exp(-w_A(y))z + \frac{1}{2} \sum_{B,C} \int_0^y dy' \int_0^1 dx \exp(-w_A(y) + w_A(y')) \times \\ \times \frac{\alpha_S}{2\pi} K_A^{BC}(x) G_B(x, y') G_C((1-x), y'), \quad (49)$$

где $y = \ln(p\Theta/Q_0)$, p — начальный импульс, Θ — угол раствора струи, $Q_0 = \text{const}$, α_S — константа связи. Первое слагаемое в правой части равенства отвечает распространению партона-прародителя без излучения, подавленному формфактором $\exp(-w_A(y))$, а второй член описывает рождение двух новых струй B и C с долями энергии x и $1-x$, после того как прародитель расщепился на них в вершине K_A^{BC} на уровне параметра

эволюции y' , до которого он дошел, не делясь (фактор $\exp(-w_A(y) + w_A(y'))$).

Умножив обе части уравнения на $\exp(w_A(y))$ и продифференцировав по y , мы полностью исключим из рассмотрения все формфакторы и получим окончательно систему уравнений в явном виде [1, 5]

$$G'_G(y) = \int_0^1 dx K_G^G(x) \gamma_0^2 [G_G(y + \ln x) G_G(y + \ln(1-x)) - G_G(y)] + \\ + n_f \int_0^1 dx K_G^F(x) \gamma_0^2 [G_F(y + \ln x) G_F(y + \ln(1-x)) - G_G(y)], \quad (50)$$

$$G'_F(y) = \int_0^1 dx K_F^G(x) \gamma_0^2 [G_G(y + \ln x) G_F(y + \ln(1-x)) - G_F(y)], \quad (51)$$

где $G'(y) = dG/dy$, n_f — число активных ароматов,

$$\gamma_0^2 = \frac{6\alpha_S}{\pi}, \quad (52)$$

а ядра уравнений имеют вид

$$K_G^G(x) = \frac{1}{x} - (1-x)[2-x(1-x)], \quad (53)$$

$$K_G^F(x) = \frac{1}{4N_c} [x^2 + (1-x)^2], \quad (54)$$

$$K_F^G(x) = \frac{C_F}{N_c} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2} \right), \quad (55)$$

где $N_c = 3$ — число цветов и $C_F = \frac{N_c}{2} (1 - N_c^{-2}) = 4/3$.

Мы опустили переменную z в производящих функциях. Однако следует помнить, что при получении из (50), (51) соответствующих уравнений для моментов необходимо использовать разложения (7), (8) и приравнивать коэффициенты при членах одинаковой степени z .

Характерной чертой теории поля с безразмерной константой связи, к числу которых принадлежит и квантовая хромодинамика, является наличие сингулярных по x членов (при $x \rightarrow 0$) в ядрах (53), (55). Они подчеркивают неравноправный дележ энергии между вновь образующимися струями и играют важную роль в эволюции струи, как это будет видно из дальнейшего.

Хотя система уравнений для производящих функций (50), (51) выглядит весьма убедительно, она не является абсолютно точной, выведенной из первых принципов квантовой хромодинамики. Легко убедиться в этом, хотя бы заметив, что она не содержит четырехглюонного взаимодействия, имеющегося в лагранжиане КХД. Это оправдано в низших приближениях теории возмущений, так как такой член не приводит к сингулярностям в ядрах уравнений. Вместе с тем эта система достаточно хорошо воспроизводит модифицированный ряд теории возмущений (с трехпартонными вершинами) вплоть до членов высокого порядка на уровне двух- и трехпетлевых поправок. Добавочные члены, которые могли бы появиться в уравнениях (50), (51), должны содержать, как показано в [5], по крайней мере, произведение пяти производящих функций. Физическая интерпретация соответствующих диаграмм отвечает появлению "цвет-

товой поляризуемости" струи. Имеются также проблемы с определением параметра эволюции, предасимптотических поправок и т.п. (см., например, [32]). Хотя все вышесказанное не исключает необходимости дальнейшего количественного изучения разнообразных поправок к уравнениям (50), (51), однако представляется разумным исследовать их решения с возможно большей точностью, поскольку имеются убедительные основания считать, что поправочные члены, опущенные при выводе уравнения, окажутся малыми.

5. Глюодинамика

Естественно начать с наиболее простого случая глюодинамики, когда кварков нет, а рассматриваются взаимодействия глюонов. При этом система уравнений (50), (51) сводится к одному уравнению

$$G'(y) = \int_0^1 dx K(x) \gamma_0^2 [G(y + \ln x) G(y + \ln(1-x)) - G(y)] \quad (56)$$

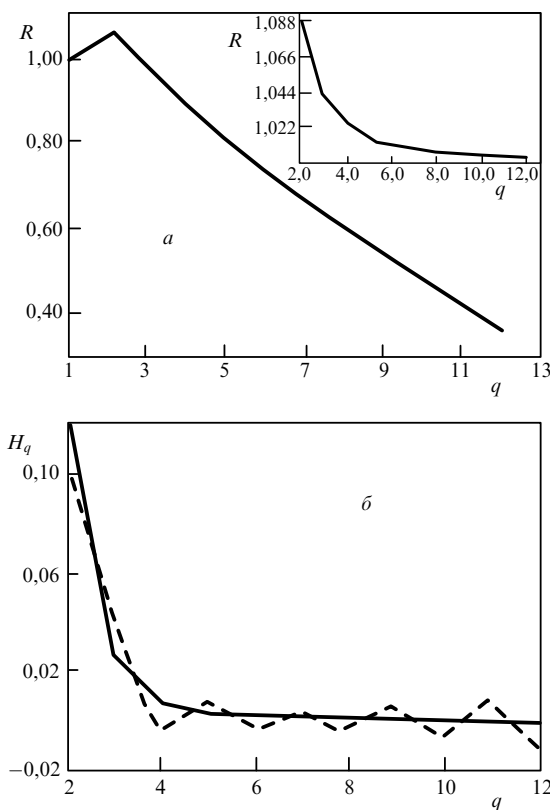


Рис. 4. Моменты распределения по множественности, вычисленные в соответствии с различными формулами работы [12]. Численное решение уравнения (5) для факториальных моментов, их асимптотическое значение (7) и КНО-функция (15) с учетом поведения при малых x дают разные поведения отношений H_q . Номера формул приведены по работе [12]. *a* — Отношение факториальных моментов F_q , вычисленных по формуле (5), к их асимптотическому значению (7) R приведено на вставке, а отношение факториальных моментов КНО-функции на рис. 5 к асимптотике (7) приведено в основной части рисунка. *б* — Отношение H_q для отрицательного биномиального распределения ($k = 7$, $\langle n \rangle = 30$ — сплошная линия) и такое же отношение, вычисленное по КНО-функции рис.5, приведено в виде пунктирной линии

с $G(y) \equiv G_G(y)$, $K(x) \equiv K_G^G(x)$.

Это — нелинейное интегродифференциальное уравнение со смещенными аргументами в нелинейном члене, учитывающими закон сохранения энергии. Простейшее дваждылогарифмическое приближение отвечает учету наиболее сингулярных членов в ядре K и в выражении, стоящем в квадратных скобках. Тогда в ядре сохраняется лишь член $1/x$, а в $\ln(1-x)$ подставляется $x = 0$ и γ_0^2 выбирается постоянной².

5.1. Приближенное решение для фиксированной константы связи и форма КНО-функции

Формально допущения дваждылогарифмического приближения, сделанные в каждом из трех членов под знаком интеграла в (56), равноправны в том смысле, что во всех случаях пренебрегается вкладами, не являющимися ведущими. Во многих работах [9–13, 21, 32–37] был проведен анализ каждого из этих допущений по отдельности или же в разных комбинациях. При этом чаще всего рассматривались лишь низшие моменты распределений — средняя множественность и дисперсия. Было отмечено, что роль законов сохранения, выражающаяся в сдвиге аргументов производящих функций, пожалуй, наиболее существенна. В работе [12] было впервые показано, что их можно учесть точно. Однако при этом было сохранено предположение о постоянстве константы связи и оставлен лишь сингулярный член в ядре K . К сожалению, были опущены некоторые другие члены и пренебрежено отличием величин γ_0 (52) и "аномальной размерности" γ , определяющей рост средней множественности с энергией согласно формуле

$$\langle n \rangle = \exp \int^y \gamma(y') dy'. \quad (57)$$

В разделе 7 мы покажем, что уравнения (50), (51) имеют точные решения при фиксированной константе связи без всех этих дополнительных предположений. Вместе с тем имеет смысл обсудить и приближенное решение, так как в рамках таких допущений получается аналитическое выражение для КНО-функции, весьма наглядно демонстрирующее влияние законов сохранения и отличающееся от формулы дваждылогарифмического приближения (23) заметно меньшей шириной, что качественно сближает ее с данными эксперимента. Чтобы вывести его, запишем систему рекуррентных соотношений для факториальных моментов, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z после подстановки соотношений (7) в уравнение (56):

$$(q - q^{-1})F_q = \gamma \sum_{l=1}^{q-1} C_q^l B(\gamma l, \gamma(q-l) + 1) F_{q-l} F_l. \quad (58)$$

Эту систему можно решить численно³ с учетом начальных условий $F_0 = F_1 = 1$. На вставке в рис. 4, *a* приведено

² Несколько непоследовательно иногда рассматривают бегущую константу связи в этом приближении (см. [5]).

³ Полное решение системы уравнений для глюонных и кварковых струй см. в разделе 7.2.

отношение полученных таким способом факториальных моментов к асимптотическому решению соотношений (58), имеющему вид [12]

$$F_q^{as} = \frac{(\Gamma(1+\gamma))^q 2q\Gamma(q+1)}{\Gamma(1+\gamma q) C^q}. \quad (59)$$

При $q\gamma \ll 1$ нетрудно получить

$$F_q \approx \frac{2\mu D^{-q}}{\sqrt{2\pi\gamma}} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{q}{\mu}\right), \quad (60)$$

где

$$\mu = (1-\gamma)^{-1}, D = C\gamma^\gamma(1-\gamma)^{1-\gamma}/\Gamma(1+\gamma).$$

Зная асимптотику F_q , можно восстановить и асимптотику КНО-функции $f(x)$ в виде

$$f(x) \cong \frac{2\mu^2(Dx)^{3\mu/2}}{x\sqrt{2\pi\gamma}} \exp[-(Dx)^\mu], \quad (\mu-1)(Dx)^\mu \gg 1. \quad (61)$$

Отсюда видно, что хвост функции распределения при больших множественностях подавлен значительно сильнее, нежели в дваждылогарифмическом приближении. Вместо обычной экспоненты происходит "почти гаусово" подавление, если учесть, что практически существенные значения показателя заметно больше единицы $\mu \cong 1,6$. Таким образом, при учете законов сохранения распределение партонов по множественности становится заметно более узким. Это наглядно видно на рис. 5, где модифицированное распределение (с учетом поведения при малых множественностях [12] — сплошная кривая) сопоставляется с тем, что было получено в низшем приближении (пунктир), а также аппроксимируется отрицательным биномиальным распределением с параметром $k=7$ (точки). По сплошной кривой рис. 5 можно вычислить "истинные" (с учетом поправок при малых множественностях) факториальные моменты. Их отношение к асимптотическим значениям (59) приведено на основном поле рис. 4, а. Сравнение двух кривых на этом рисунке показывает роль изменений, внесенных учетом малых множественностей. Зная "истинные" факториальные моменты, нетрудно вычислить кумулянты и отношение H_q (оно приведено на рис. 4, б — пунктир — и сопоставлено с отрицательным биномиальным распределением — сплошная линия).

Интересно отметить, что хотя отличие от отрицательного биномиального распределения в самом распределении очень небольшое, разница в поведении отношений H_q исключительно велика и проявляется даже на качественном уровне. Вместо плавного монотонного поведения H_q получается кривая с осцилляциями. Функции такого типа мы еще будем неоднократно обсуждать в последующем.

5.2. Высшие приближения с бегущей константой связи

Уравнение для производящей функции в глюодинамике можно решить и в несколько иных приближениях [13], полностью учитывая все члены (в том числе несингулярные) ядра K , принимая во внимание, что константа связи зависит от параметра эволюции и γ_0 не равна "аномальной размерности" γ , но приближенно учитывая зависимость от x производящих функций путем последователь-

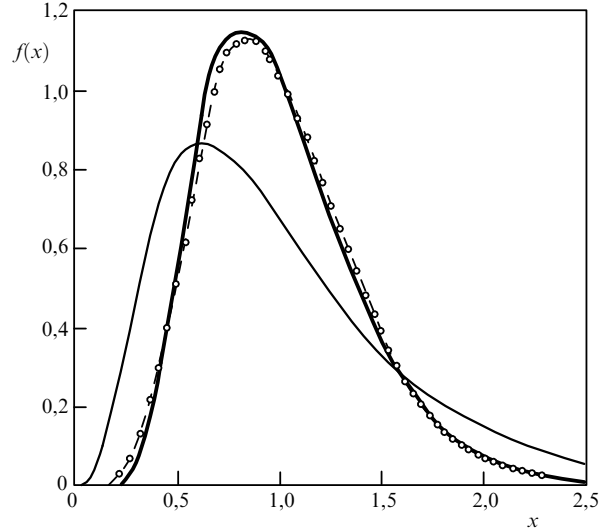


Рис. 5. Модифицированная КНО-функция [12] (сплошная кривая) при $\gamma = 0,4$ заметно уже функции низшего приближения (пунктирная кривая) и сопоставима с результатами отрицательного биномиального распределения при $k=7$ (точки)

льного рассмотрения высших членов разложения их в ряд Тэйлора при больших y :

$$G(y+\epsilon) \cong G(y) + G'(y)\epsilon + \frac{1}{2}G''(y)\epsilon^2 + \dots \quad (62)$$

На этом пути отчетливо видно различие между всевозможными ранее использованными предположениями, их относительное влияние и качественные изменения, производимые учетом высших поправок.

Заменяя в уравнении (56) производящие функции в подынтегральном выражении на их ряды Тэйлора, поделив обе части уравнения на $G(y)$ и продифференцировав по y , получим

$$(\ln G(y))'' = \gamma_0^2 \left[G(y) - 1 - 2h_1 G'(y) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n h_n G^{(n)}(y) + \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} h_{mn} \left(\frac{G^{(m)} G^{(n)}}{G} \right)' \right], \quad (63)$$

где

$$h_1 = \frac{11}{24}, \quad h_n = |2 - 2^{-n} - 3^{-n} - \zeta(n)|, \quad \zeta(n) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-n}, \quad n \geq 2, \quad (64)$$

$$h_{mn} = \left| \frac{1}{m!n!} \int_0^1 dx K(x) \ln^n x \ln^m(1-x) \right|. \quad (65)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в скобках с правой стороны равенства, имеем хорошо известное [5] уравнение дваждылогарифмического приближения, получающееся при описанной выше процедуре сохранения самих сингулярных членов. Член с h_1 соответствует модифицированному приближению ведущих логарифмов, а член с h_2 учитывает поправки более высокого порядка по сравнению с ведущими логарифмами. Отметим, что зависимостью γ_0 под знаком интеграла от y мы здесь пренебрегаем, так как она приводит к поправкам

порядка $O(\gamma_0^2)$ к выписанным выше членам, но учтем ее в дальнейшем, где она входит в произведение с рангом момента q .

Непосредственное решение уравнения (63) представляется затруднительным, даже если учитываются только члены с h_1 и h_2 . Однако это выглядит очень просто для моментов распределений, связанных с производящей функцией формулами (7), (8). Используя эти формулы с учетом приближенного F -скейлинга и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим

$$H_q = \frac{K_q}{F_q} = \frac{\gamma_0^2 [1 - 2h_1 q \gamma + h_2 (q^2 \gamma^2 + q \gamma')]}{q^2 \gamma^2 + q \gamma'}. \quad (66)$$

Здесь введена "аномальная размерность" γ согласно соотношению (57). Из условия $F_1 = K_1 = 1$ нетрудно получить связь γ с γ_0 :

$$\gamma \cong \gamma_0 - \frac{1}{2} h_1 \gamma_0^2 + \frac{1}{8} (4h_2 - h_1^2) \gamma_0^3 + O(\gamma_0^4), \quad (67)$$

которая показывает, что рост средней множественности с энергией (см. (57)) в модифицированном приближении ведущих логарифмов слабее, нежели в дваждылогарифмическом приближении, так как член с h_1 входит с отрицательным знаком в (67). Однако высшие приближения опять слегка повышают его ($4h_2 - h_1^2 > 0$), причем все поправки оказываются небольшими. В формуле (67) уже учтено, что γ_0 является бегущей константой связи:

$$\gamma_0' \cong -h_1 \gamma_0^3 + O(\gamma_0^5), \quad (68)$$

и потому

$$\gamma' \cong -h_1 \gamma_0^3 (1 - h_1 \gamma_0) + O(\gamma_0^5). \quad (69)$$

Поучительным уроком, вытекающим из формулы (66), является тот факт, что во всех так называемых "поправочных" членах (содержащих h_1, h_2, \dots) параметр разложения γ входит в виде произведения $q\gamma$, которое становится большим с ростом ранга q . Это означает, что при больших множественностях надо принимать в расчет члены все более высокого порядка по γ . На это обстоятельство обращали внимание уже давно [5], но лишь теперь начато его детальное изучение.

Формула дваждылогарифмического приближения

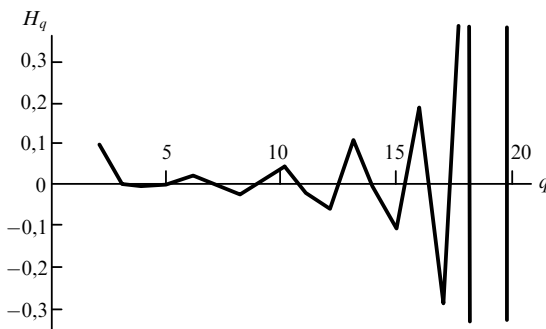


Рис. 6. Поведение отношения H_q в функции от q приобретает характер "квазиосцилляций" в высших приближениях теории возмущений КХД [39] (кривая проведена для энергий Z-бозона, 91 ГэВ). Первый минимум слегка смещен к $q=4$

получается из (63), если положить $h_1 = h_2 = 0, \gamma = \gamma_0$ и $\gamma' = 0$. В этом случае

$$H_q \sim q^{-2}, \quad (70)$$

т.е. напоминает асимптотику отрицательного биномиального распределения со сравнительно малым параметром k , а значит, довольно широким распределением по множественности (см. (23)), так как, например, экспериментальные данные дают значения k в интервале от 3,5 до ~ 100 .

Но, пожалуй, более интересным представляется изменение качественной картины поведения H_q при учете высших членов. Сохранив член с h_1 (при $h_2 = 0$) в формуле (63), мы обнаружим, что H_q пересекает ось абсцисс, приобретает минимум при

$$q_{\min} \approx \frac{1}{h_1 \gamma_0} + \frac{1}{2} \cong 5 \quad (71)$$

и асимптотически приближается снизу к оси абсцисс по закону $-q^{-1}$. Учет члена с h_2 не меняет положения минимума, но приводит к появлению второго нуля у функции H_q и асимптотическому стремлению ее к положительному постоянному значению $h_2 \gamma_0^2$.

С аналогичной ситуацией мы столкнулись бы, попытавшись разлагать в ряд Тэйлора $\cos x$. Поэтому неудивительно, что учет последующих членов разложения с коэффициентами h_3 и h_{11} в формуле (63) привел [39] к выводу об осцилляционном поведении функции H_q , первым проявлением которого при сравнительно малых q и служит обнаруженный выше минимум. Это изображено на рис. 6. Но здесь минимум оказывается смещенным к $q=4$, что указывает на чувствительность H_q к разным приближениям. Заметим, что величины амплитуд в экстремумах и частота колебаний также существенно иные, чем на рис. 1–4. Аналогичное поведение H_q мы обнаружим при точном решении уравнений КХД с фиксированной константой связи (см. раздел 7.2).

Итак, мы продемонстрировали в этом разделе, что учет законов сохранения и других вкладов высшего порядка в рамках глюодинамики приводит к резкому сужению распределений по множественности и качественно образом меняет картину поведения отношения кумулянтных и факториальных моментов.

6. Приближенные решения уравнений КХД с бегущей константой связи

Переходя вновь от глюодинамики к квантовой хромодинамике, где помимо глюонов рождаются кварк-антикварковые пары, надо вместо одного уравнения (56) использовать систему двух уравнений (50), (51) для производящих функций кварков и глюонов. Однако их структура принципиально не отличается от уже исследованного уравнения глюодинамики. Поэтому мы не будем заниматься здесь детальным описанием получаемых соотношений (см. подробнее в [40, 41]), а изложим кратко лишь результативную часть.

Опять-таки с учетом высших членов разложения в ряд Тэйлора получается система зацепляющихся соотношений для кумулянтов и факториальных моментов, которая численно решалась [40] в полной аналогии с тем, как это описано выше в случае глюодинамики. Оказалось, что свойства глюонных струй остаются практически

теми же. Их факториальные моменты и кумулянты меняются очень слабо при учете кварков. Глюонное отношение H_q имеет минимум все при том же значении q . Однако кварковые факториальные моменты оказываются заметно больше глюонных, т.е. распределение по числу партонов в кварковой струе шире, чем в глюонной. Первый минимум кварковых кумулянтов и их отношения к факториальным моментам появляются при больших значениях q .

Если попытаться применить полученные результаты к реальному процессу электрон-позитронной аннигиляции, то надо задать связь его производящей функции с тем, что известно о струях. Имея в виду фейнмановскую диаграмму с рождением двух кварков, обычно эту связь задают в простейшей форме

$$G_{e^+e^-} \cong G_F^2, \quad (72)$$

хотя и указывают на дальнейшие поправки [32]. В этом случае кумулянты кварковой струи и e^+e^- -аннигиляции пропорциональны друг другу и их нули должны совпадать, так как логарифмы производящих функций, определяющие кумулянты, пропорциональны. Поскольку для кварковых струй первый нуль появляется при $5 < q < 6$, то минимум не может лежать при $q < 6$. Как будет видно в дальнейшем при обсуждении экспериментальных данных, нам понадобится либо изменить соотношение (72), либо учесть высшие члены разложения по сравнению с принятыми во внимание. Последняя возможность представляется маловероятной, поскольку точное решение уравнений с фиксированной константой приводит к аналогичному результату (см. раздел 7). Независимо от этого представляется, что при современном состоянии проблемы наиболее существенным все же является вывод о наличии минимумов и максимумов у отношения H_q , которые чередуются через несколько целочисленных рангов, а не сменяют друг друга на каждом q .

Уравнения для низших моментов позволяют сделать выводы об аномальной размерности γ и отношении средних множественностей в глюонных и кварковых струях $r = \langle n_G \rangle / \langle n_F \rangle$ [41]. Они были представлены в виде

$$\gamma = \gamma_0(1 - a_1\gamma_0 - a_2\gamma_0^2), \quad (73)$$

$$r = \frac{N_c}{C_F}(1 - r_1\gamma_0 - r_2\gamma_0^2). \quad (74)$$

Коэффициенты a_i, r_i были вычислены [41]. Они приведены в табл. I вместе со значениями r и γ_0 при разных значениях числа ароматов $n_f = 3, 4, 5$.

На рис. 7 показано поведение γ , полученное в результате решения уравнений в обсуждавшемся выше приближении, а на рис. 8 соответствующее энергетическое поведение средней множественности.

Для сравнения мы показываем, как ведет себя средняя множественность при фиксированной константе связи. Сначала она растет медленно с ростом y , а потом ее асимптотическое поведение сказывается и она превосходит множественность при бегущей константе.

Это понятно, так как константа была фиксирована на довольно большой энергии (массе Z^0) при $y_{Z^0} = 6,67$, т.е. ее величина мала. В реальной ситуации она должна расти по мере эволюции струи, но число активных ароматов падает. Эти две тенденции несколько компенсируют друг друга.

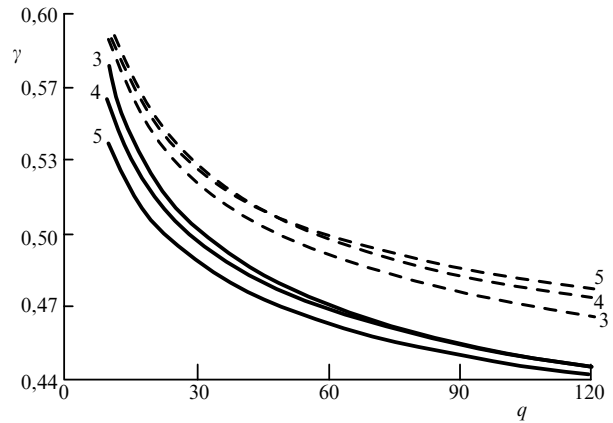


Рис. 7. q -зависимость аномальной размерности γ (сплошные линии) для случая бегущей константы связи γ_0 (пунктир) [41]. Цифры у кривых указывают число активных ароматов

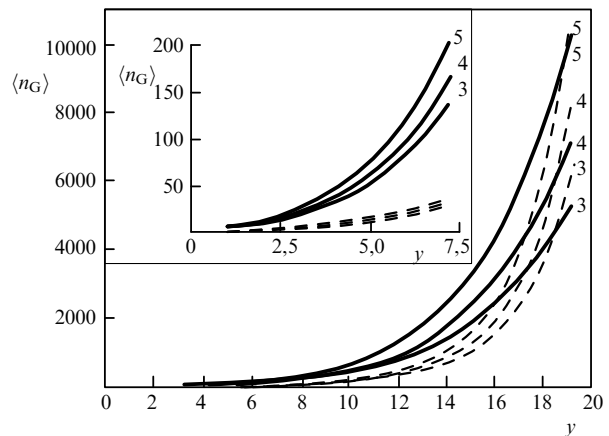


Рис. 8. y -зависимость средней множественности [41]. Сплошные линии — для бегущей константы, штриховые — для фиксированной. Цифры у кривых указывают число активных ароматов

Отношение средних множественностей в глюонных и кварковых струях оказывается заметно меньшим [41], чем его величина в дваждылогарифмическом приближении, равная $9/4$ (в среднем примерно на 20 %). Аналогичная ситуация имеет место при фиксированной константе связи. Поэтому мы рассмотрим это отношение более подробно в следующем разделе.

7. Точные решения уравнений КХД с фиксированной константой связи

Опыт работы с уравнениями КХД в различных приближениях, описанных выше, подсказывает, что важнее учесть точно законы сохранения и несингулярные члены ядра, нежели зависимость константы связи от параметра эволюции. В этом разделе мы покажем, что система уравнений (50), (51) имеет точное решение [21, 42], если фиксировать константу связи γ_0 . Никаких дополнительных предположений при этом не требуется. Решения получаются для моментов произвольного ранга, но мы начнем с низших.

7.1. Низшие моменты и отношения средних множественностей в глюонных и кварковых струях

Уравнения для средних множественностей (ненормированных моментов первого порядка) получаются из системы уравнений (50), (51), если подставить туда производящие функции в виде рядов (7) и приравнять члены, линейные по z , учитывая, что $F_0 = F_1 = \Phi_0 = \Phi_1 = 1$. (Факториальные моменты кварковой струи мы будем обозначать как Φ_q , а их кумулянты как Ψ_q .) При фиксированной константе связи средние множественности ведут себя [1, 5] как

$$\langle n_G(y) \rangle = \exp(\gamma y), \quad \langle n_F(y) \rangle = \exp(\gamma y) r^{-1}, \quad (75)$$

где аномальная размерность γ и отношение r постоянны. Эти свойства вытекают из уравнений (50), (51), если мы заметим, что

$$\langle n_{G,F}(y + \ln x) \rangle / \langle n_{G,F}(y) \rangle = x^\gamma, \quad (76)$$

$$\langle n_{G,F}(y) \rangle' = \gamma \langle n_{G,F}(y) \rangle \quad (77)$$

и перепишем эти уравнения в виде системы двух алгебраических уравнений для двух величин γ и r

$$\gamma = \gamma_0^2 [M_1^G + n_f r (M_1^F - M_0^F)], \quad (78)$$

$$\gamma = \gamma_0^2 (L_2 - L_0 + r L_1), \quad (79)$$

где

$$M_1^G = \int_0^1 dx K_G^G [x^\gamma + (1-x)^\gamma - 1],$$

$$M_1^F = \int_0^1 dx K_G^F [x^\gamma + (1-x)^\gamma],$$

$$M_0^F = \int_0^1 dx K_G^F = \frac{1}{2} M_1^F(\gamma = 0),$$

$$L_1 = \int_0^1 dx K_F^G x^\gamma,$$

$$L_2 = \int_0^1 dx K_F^G (1-x)^\gamma,$$

$$L_0 = \int_0^1 dx K_F^G = L_1(\gamma = 0).$$

Коэффициенты M_i, L_i вычисляются явно через бета-функции Эйлера и пси-функции и зависят лишь от γ . При фиксированном γ_0 как γ , так и r постоянны. Следует сразу же подчеркнуть, что γ отлично от γ_0 даже в глюодинамике при $n_f = 0$, так как M_1^G отличается от $1/\gamma$. Приближенное равенство справедливо при $\gamma_0 \ll 1$, но пертурбативное разложение для γ отличается от соответствующей формулы (67) для бегущей константы связи и имеет вид

$$\gamma \cong \gamma_0 - h_1 \gamma_0^2 + \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2) \gamma_0^3 + O(\gamma_0^4), \quad (80)$$

т.е. первая поправка оказывается вдвое большей.

Поскольку отношение r входит линейным образом в соотношения (78), (79), а зависимость от γ довольно сложная, удобно переписать их в наглядном виде

$$r(\gamma) = b(\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma_0^2} - a(\gamma) \right)^{-1}, \quad (81)$$

$$r(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0^2} - d(\gamma) \right) \frac{1}{c(\gamma)}, \quad (82)$$

где

$$a = \psi(1) - \psi(\gamma + 1) + B(\gamma, 1) - 2B(\gamma + 1, 2) - 2B(\gamma + 2, 1) + B(\gamma + 2, 3) + B(\gamma + 3, 2) + \frac{11}{12} - \frac{n_f}{6N_c},$$

$$b = \frac{n_f}{2N_c} [B(\gamma + 3, 1) + B(\gamma + 1, 3)],$$

$$c = \frac{C_F}{N_c} [B(\gamma, 1) - B(\gamma + 1, 1) + \frac{1}{2} B(\gamma + 2, 1)],$$

$$d = \frac{C_F}{N_c} \left(\psi(1) - \psi(\gamma + 1) - B(\gamma + 1, 1) + \frac{1}{2} B(\gamma + 1, 2) + \frac{3}{4} \right).$$

Заметим, что все бета-функции легко переписываются в виде обратных полиномов по γ , но эта запись оказывается просто более громоздкой. Совместное решение алгебраических уравнений (81), (82) позволяет найти γ и r , как функции γ_0 и n_f .

На рис. 9 показано поведение γ в функции от γ_0 для $n_f = 3, 4, 5$. Разница для разных n_f едва заметна, укладываясь в толщину линий на рисунке. Отметим, что γ существенно отличается от γ_0 , что еще раз подтверждает сказанное выше. Их можно связать приближенно подгоночной линейной формулой

$$\gamma = 0,077 + 0,62\gamma_0. \quad (83)$$

Или же, имея в виду теоретическую связь (78), была получена компьютерная формула

$$\gamma = 0,97\gamma_0 - 0,48\gamma_0^2 + 0,2\gamma_0^3, \quad (84)$$

в интервале γ_0 от 0,48 до 0,6 достаточно хорошо соответствующая формуле (80). Отметим также, что при изменении γ_0 величина γ меняется относительно слабо. Сама по себе эта величина не особенно интересна, хотя она связывается с энергетическим ростом средней множественности. Однако степенной рост с энергией, даваемый формулами (75) при фиксированной константе связи, заменяется более медленным при бегущей константе (см. рис. 8). Хотя пониженное значение γ и отражает этот факт, но зависимости (75) нельзя использовать асимптотически, а (может быть?) только лишь в ограниченных интервалах энергии.

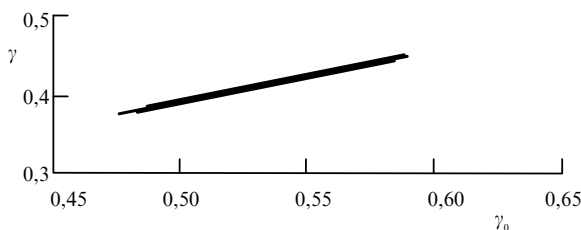


Рис. 9. γ как функция от γ_0 для $n_f = 3, 4, 5$ [42]

Большой интерес вызывает отношение r средних множественностей в глюонной и кварковой струях, поскольку все энергетические зависимости здесь сокращаются, как того и следует ожидать в асимптотике. Поэтому ее вычисление при фиксированной константе связи вызывает больше доверия. Соответствующие результаты приведены на рис. 10. Опять-таки зависимость от n_f очень слабая. Более важно, что зависимость от γ_0 оказывается еще слабее, нежели даже для γ , и потому можно говорить о некотором среднем эффективном значении этого отношения, равном

$$r = 1,84 \pm 0,02. \quad (85)$$

Столь малая величина, естественно, должна вызвать интерес у всех, кто был знаком с этой проблемой по результатам расчетов в дваждылогарифмическом приближении, где она оказывается равной $9/4$ [5]. Поправки в модифицированном приближении ведущих логарифмов снижали ее [43, 44] до значения, равного примерно 2,05. Полученное выше значение указывает на то, что точный учет законов сохранения приводит к дальнейшему уменьшению этого отношения.

Конечно, в реальном процессе по мере эволюции струи виртуальность партонов уменьшается, а их константа связи растет и уменьшается эффективное число вовлеченных в процесс ароматов. В рамках наших вычислений с фиксированной γ_0 эту эволюцию можно было бы приближенно смоделировать, выбирая значения γ_0 по формуле

$$\gamma_0^2 = \frac{12}{\beta_0 y}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2n_f}{3} \quad (86)$$

при $y = \ln(Q/Q_0)$, $Q_0 = 0,65/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, где в $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ учтена дополнительная зависимость [45] от n_f в пропорции 63:100:130 для $n_f = 5 : 4 : 3$, соответственно, при выборе $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 175$ МэВ для $n_f = 5$. Выбрав значения $Q = M_Z/k$ (M_Z — масса Z -бозона) при $k = 1, 2, 4, 8$, мы получим приведенную на рис. 11 зависимость γ от $\ln Q$. Влияние величины n_f , как и прежде, очень мало и указано в виде коротких отрезков, вмещающих в себя всю возможную зависимость при указанных выше значениях n_f . Мы видим, что изменение числа активных ароматов не играет роли, а уменьшение виртуальности партонов приводит к настолько слабому росту γ , что практически несущественно для наших выводов. Особенно это касается отношения r , где все энергетические зависимости вообще сокращаются, что приводит к стабильному результату. Близкие к этому выводы получены [41] и в случае приближенного решения уравнений с бегущей константой связи, упомянутого в предыдущем разделе (табл. I).

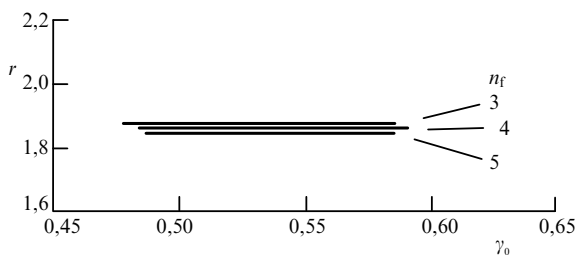


Рис. 10. r как функция от γ_0 для $n_f = 3, 4, 5$ [42]

Таблица I

n_f	r	r_1	r_2	γ_0	a_1	a_2
3	1,84	0,185	0,426	0,473	0,280	-0,379
4	1,80	0,191	0,468	0,481	0,297	-0,339
5	1,77	0,198	0,510	0,484	0,314	-0,301

7.2. Ширины распределений в струях и высшие моменты

Дисперсия распределения по множественности определяется вторым моментом и потому для ее изучения необходимо решать систему уравнений (50), (51), ограничиваясь членами с $q = 2$. Однако соотношения (76), (77) подсказывают нам, что такое решение существует при произвольном ранге q . Действительно, приравняв члены, содержащие z^q , после подстановки в (50), (51) производящих функций в виде рядов (7), нетрудно получить [21] систему зацепляющихся уравнений для моментов, причем высшие моменты выражаются через низшие и система решается итерациями, что удобно при компьютерных расчетах. Мы не будем приводить здесь эту систему, а запишем лишь окончательные аналитические выражения для моментов ранга q через моменты низшего порядка. Для этого введем

$$f_q = \frac{F_q}{q!}, \quad \hat{\phi}_q = \frac{\Phi_q}{r^q q!}. \quad (87)$$

Решение системы уравнений дает [21]

$$f_q = (a_q S_q(f, \hat{\phi}) + b_q T_q(f, \hat{\phi})) \Delta_q^{-1}, \quad (88)$$

$$\hat{\phi}_q = [c_q S_q(f, \hat{\phi}) + d_q T_q(f, \hat{\phi})] \Delta_q^{-1}, \quad (89)$$

где

$$S_q = \sum_{l=1}^{q-1} (N_{q,l}^G f_l f_{q-l} + n_f N_{q,l}^F \hat{\phi}_l \hat{\phi}_{q-l}), \quad (90)$$

$$T_q = \sum_{l=1}^{q-1} L_{q,l} \hat{\phi}_l f_{q-l}, \quad (91)$$

$$a_q = \frac{q\gamma}{\gamma_0^2} + L_{0,0} - L_{q,q}, \quad (92)$$

$$b_q = n_f M_q^F, \quad (93)$$

$$c_q = L_{q,0}, \quad (94)$$

$$d_q = \frac{q\gamma}{\gamma_0^2} - M_q^G + n_f N_{0,0}^F, \quad (95)$$

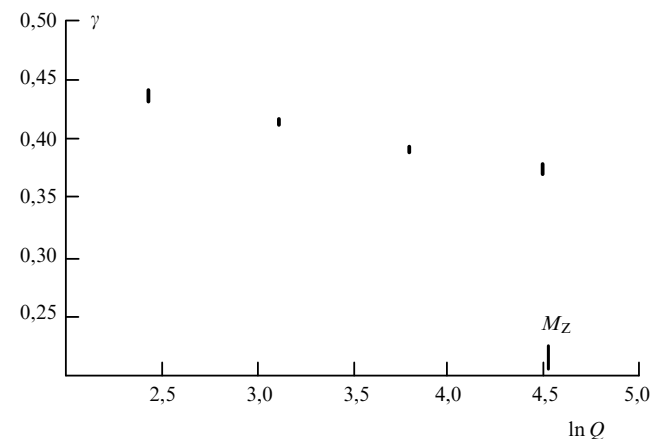


Рис. 11. γ как функция от $\ln Q$ для $n_f = 3, 4, 5$ и $Q = m_Z/k$ ($k = 1, 2, 4, 8$) [42]

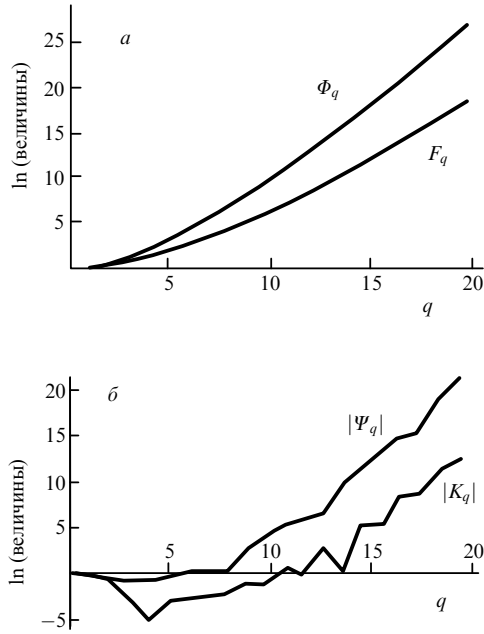


Рис. 12. Моменты распределений по множественности в КХД с фиксированной константой связи при $\gamma_0 = 0,48$ и $n_f = 5$ [21]. а — $\ln F_q$, $\ln \Phi_q$ и б — $\ln |K_q|$, $\ln |\Psi_q|$

$$\Delta_q = a_q d_q - b_q c_q, \quad (96)$$

$$M_q^G = \psi(1) - \psi(q\gamma + 1) + B(q\gamma, 1) - 2B(q\gamma + 1, 2) - 2B(q\gamma + 2, 1) + B(q\gamma + 2, 3) + B(q\gamma + 3, 2) + \frac{11}{12},$$

$$M_q^F = \frac{1}{2N_c} (B(q\gamma + 3, 1) + B(q\gamma + 1, 3)),$$

$$N_{q,l}^G = B(l\gamma, (q-l)\gamma + 1) - 2B(l\gamma + 1, (q-l)\gamma + 2) + B(l\gamma + 2, (q-l)\gamma + 3),$$

$$N_{q,l}^F = \frac{1}{4N_c} (B(l\gamma + 3, (q-l)\gamma + 1) + B(l\gamma + 1, (q-l)\gamma + 3)),$$

$$L_{q,l} = \frac{C_F}{N_c} (B(l\gamma + 1, (q-l)\gamma) - B(l\gamma + 1, (q-l)\gamma + 1) + \frac{1}{2} B(l\gamma + 1, (q-l)\gamma + 2)).$$

Хотя приведенные выражения кажутся громоздкими ⁴, их структура проста и наглядна. Понятно, что они являются обобщением на произвольные q формул предыдущего раздела. При заданных γ_0 и n_f , зная γ и r из соотношений предыдущего раздела, нетрудно найти F_2 и Φ_2 , используя (88), (89). Затем значение q последовательно увеличивается на 1.

Следует отметить, что ни в одной из выписанных выше формул не фигурирует параметр эволюции y . Предположение о том, что вся y -зависимость производящих функций при фиксированной константе связи γ_0 заключена в средних множественностях, привело к самоогласованной системе алгебраических уравнений, где все величины, включая моменты F_q и Φ_q , постоянны, т.е. имеет место F -скейлинг. Подчеркнем, что при фиксиро-

ванной константе связи F -скейлинг является точным в той мере, в какой точны сами уравнения (50), (51). В действительности, надо говорить об асимптотическом F -скейлинге, так как пределы интегрирования по x в уравнениях (50), (51) уже выбраны асимптотическими.

Совместность полученных выражений при постоянных моментах является апостериорным оправданием проведенных преобразований.

Моменты F_q и Φ_q , вычисленные по этим формулам, приведены на рис. 12 для $\gamma_0 = 0,48$ и $n_f = 5$. Они очень быстро растут с увеличением q , причем виден особенно быстрый рост Φ_q по сравнению с F_q . Так как это нормированные моменты, можно заключить, что распределение партонов по множественности в кварковой струе шире, чем в глюонной, хотя их средняя множественность там ниже. Эти результаты практически не чувствительны к числу ароматов. Они слабо зависят от величины константы связи, а поскольку выше было показано, что аномальная размерность при этом меняется медленнее, чем γ_0 , и ее зависимость от параметра эволюции еще слабее, то это указывает на практическую независимость полученных выводов от того, является ли константа связи фиксированной или бегущей.

Сравним теперь КХД-кривые рис. 12 с феноменологическими распределениями рис. 2 и 3. Ясно, что они выглядят похожими на отрицательное биномиальное распределение и резко отличными от случая фиксированной множественности. Более того, F_q на рис. 12 можно хорошо аппроксимировать отрицательным биномиальным распределением с $k=5$. Однако это совпадение только кажущееся. Хотя факториальные моменты F_q описываются вроде бы хорошо, мы покажем, что они мало чувствительны к тонким деталям распределения и указанная выше аппроксимация неадекватна.

Напомним, что кумулянты отрицательного биномиального распределения сначала монотонно падают, а затем растут. При этом отношение H_q падает монотонно с увеличением ранга q .

Определим эти отношения для глюонных и кварковых струй как

$$H_q = \frac{K_q}{F_q}, \quad (97)$$

$$\eta_q = \frac{\Psi_q}{\Phi_q}, \quad (98)$$

где $K_q(\Psi_q)$ выражаются через $F_q(\Phi_q)$ с помощью соотношения (11). Результаты вычислений в КХД с фиксированной константой связи приведены на рис. 13 и 14.

Характерной особенностью этих кривых, несомненно, является осциллирующее поведение H_q . Оно однозначно свидетельствует в пользу того, что отрицательное биномиальное распределение не имеет места, хотя и способно довольно точно воспроизвести второй и третий моменты. Ясно видно, что и фиксированная множественность, указавшая нам на возможные осцилляции с изменением знака при каждом последующем целом значении q , совершенно не подходит, явно не описывая даже низших моментов, не говоря уже о периоде осцилляций.

Чувствительность отношения H_q к разным типам распределений, полученным при различных предположениях в рамках квантовой хромодинамики, демонстри-

⁴ Формулы глюодинамики получаются в предельном случае, если положить $n_f = C_F = 0$, а в M_q^G и $N_{q,l}^G$ оставить только ведущие члены $B(q\gamma, 1) \equiv 1/q\gamma$ и $B(l\gamma, (q-l)\gamma + 1)$.

рует тот факт, что, как обсуждалось выше, в дваждылогарифмическом приближении оно падает монотонно, как q^{-2} , при учете логарифмических членов появляется минимум и асимптотическое стремление к нулю снизу по закону $-q^{-1}$, следующие члены приводят к появлению второго нуля у H_q , а члены более высокого порядка приводят-таки к осцилляторному поведению.

Следует подчеркнуть, что поведение H_q сильно зависит от конкретного вида предасимптотических вкладов в факториальные моменты. Убедиться в этом можно, проделав следующее простое упражнение. Известно [19], что в дваждылогарифмическом приближении (см. (23)) факториальные моменты ведут себя асимптотически как

$$F_q = \frac{2q\Gamma(q+1)}{C^q}. \quad (99)$$

Если помимо асимптотики мы потребуем выполнения также и условия $F_0 = 1$, то можно добавить предасимптотический член, заменив $2q$ в числителе на $2q+1$ (при этом условие $F_1 = 1$ все еще нарушено!). Полученный при этом эффект поразителен — на монотонный спад типа q^{-2} накладываются дополнительные осцилляции типа эффекта фиксированной множественности, поскольку отношение H_q имеет теперь вид

$$H_q = \frac{2 + (-1)^{q-1}}{q(2q+1)}, \quad (100)$$

где второе слагаемое в числителе обусловлено добавленным предасимптотическим членом.

Все эти факты демонстрируют, насколько чувствительно отношение H_q к разным тонким деталям распределений. Легко убедиться в этом, сравнивая качественно разное поведение отношения для феноменологических распределений (см. рис. 2,3) и для разных подходов к их вычислению в квантовой хромодинамике (см. рис. 4,6,13,14). Кроме того, на поведении H_q может сказываться и факт обрезания хвоста распределений по множественности за счет конечности энергии. Однако эти поправки должны вымирать с увеличением энергии. К сожалению, еще не поняты полностью периодичность осцилляций, их амплитуда, а также их изменение с ростом ранга q (так как представляется, что амплитуда растет, а период уменьшается с ростом q).

Вместе с тем, приведенное выше точное решение подсказывает ключ к нахождению реалистического поведения H_q , поскольку оно получено с единственным предположением о фиксированной константе связи. Возможно, именно H_q укажет нам и пути к обобщению уравнений для производящих функций, учитывающему более тонкие эффекты взаимодействия "цветных монстров" [5, 19, 46].

Подчеркнем, что обсуждавшиеся выше осцилляции имеют место при целочисленных q и не связаны с дробными моментами, которые накладывают на них гармонику с меньшим периодом и весьма малой амплитудой при больших множественностях.

8. Эксперимент

Итак, выше были получены результаты для КНО-функции $f(x)$, энергетической зависимости средней множественности, поведения моментов распределения по множественности K_q, F_q и их отношения H_q , а также для

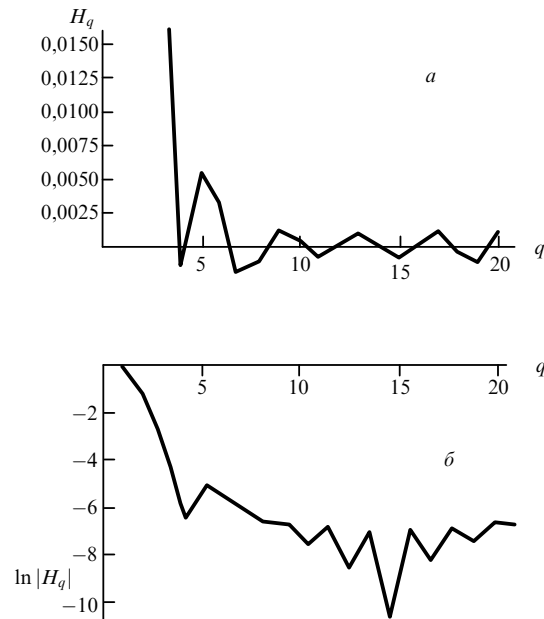


Рис. 13. Отношения H_q для распределений в глюонных струях в КХД с фиксированной константой связи при $\gamma_0 = 0,48, n_f = 5$ [21]. а — H_q , б — $\ln |H_q|$

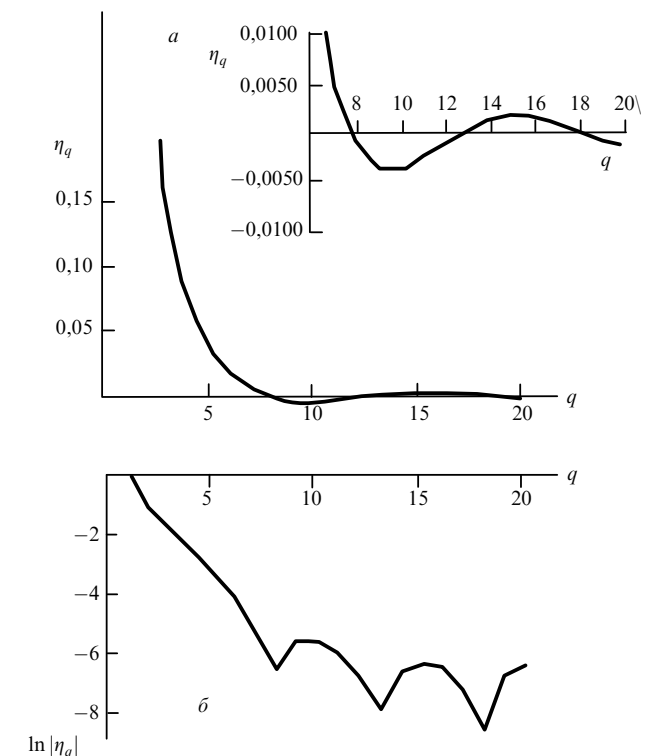


Рис. 14. Отношения η_q для распределений в кварковых струях в КХД с фиксированной константой связи при $\gamma_0 = 0,48, n_f = 5$ [21]. а — η_q , б — $\ln |\eta_q|$

отношений множественностей в глюонных и кварковых струях. Однако, прежде чем сравнивать их с экспериментальными данными, следует напомнить, что все эти результаты касаются распределений партонов (глюонов и кварков), тогда как на эксперименте имеют дело с адронами. Чтобы связать теоретические предсказания

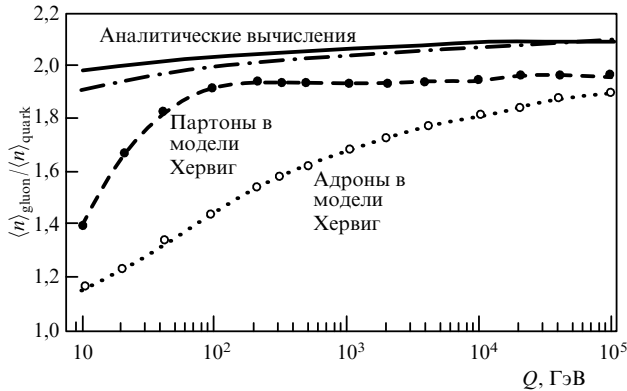


Рис. 15. Отношение множественностей в глюонных и кварковых струях r [48]. Кривые сверху — результаты аналитических расчетов в модифицированном логарифмическом приближении для партонных отношений. Сплошные точки и проведенная через них кривая — партонные отношения в модели Хервиг. Крестики и проведенная через них кривая — адронные отношения в модели Хервиг

партонных множественностей с экспериментальными измерениями адронных распределений, необходимо использовать конкретную модель адронизации — превращения партонов в адроны. Выбрав такую модель, можно получить количественные результаты с помощью монтекарловских расчетов. Зачастую принимают гипотезу о локальной партон-адронной дуальности, согласно которой эти распределения могут отличаться лишь на числовой множитель, связанный с числом партонов, рекомбинирующих в среднем в один адрон, а потому менее существенным, если рассматриваются нормированные распределения. Следовательно, для моментов распределений необходим лишь пересчет от одиночных кварковых и глюонных струй к конкретным процессам с рождением нескольких струй (скажем, к электрон-позитронной аннигиляции). В то же время для множественностей в глюонных и кварковых струях эти множители могут быть различными, а потому изменить и само отношение их, т.е. здесь надо использовать конкретную монтекарловскую версию адронизации. Одна из таких версий, Хервиг [47], подробно обсужденная в работе [48] в связи с отношением множественностей r (75), приводит к результатам, изображенным на рис. 15. Они отвечают асимптотической локальной партон-адронной дуальности лишь при очень больших энергиях Q . При этом на партонном уровне отношение множественностей оказывается равным $r_{\text{parton}}^{\text{MC}} \approx 1,9$. Эта величина показывает, что в модели Хервиг поправки учтены более точно, нежели в модифицированном логарифмическом приближении, которое приводит к значению $\approx 2,05$, как обсуждалось выше. Для адронов это отношение несколько меньше и меняется с энергией не так, как партонное отношение. Даже на уровне энергий, отвечающих массе Z -бозона, адронное отношение все еще заметно меньше (равно 1,44), продолжая расти, т.е. партон-адронная дуальность еще не достигнута. Модель Хервиг довольно хорошо описывает совокупность экспериментальных данных, хотя, конечно, допускает некоторые поправки.

В частности, если снизить в ней отношение r до уровня $r_{\text{theor}} = 1,84 \pm 0,02$, полученного согласно (85), сохранив при этом соотношение между адронами и партонами,

равное там [48] $r_{\text{hadron}}^{\text{MC}}/r_{\text{parton}}^{\text{MC}} = 1,44/1,92$ (см. рис. 15), т.е. использовать формулу

$$r_{\text{exp}} = r_{\text{theor}} \frac{r_{\text{hadron}}^{\text{MC}}}{r_{\text{parton}}^{\text{MC}}}, \quad (101)$$

то получим

$$r_{\text{exp}} \approx 1,38 \pm 0,02. \quad (102)$$

Это значение хорошо согласуется с измеренной недавно [49] величиной $1,27 \pm 0,04 \pm 0,06$. Таким образом, фактически ликвидируется разногласие между теоретическим и экспериментальным значениями отношения средних множественностей в глюонных и кварковых струях.

Что касается КНО-функции $f(x)$, то, как мы уже подчеркивали в разделе 5.1, она становится значительно уже при учете законов сохранения по сравнению с формой, полученной в дваждылогарифмическом приближении, и достаточно хорошо аппроксимируется обычно используемыми формулами отрицательного биномиального распределения со значительно большим параметром k (опять-таки по сравнению с $k=2$ в дваждылогарифмическом приближении), как это видно из рис. 5. Для проведения количественного сравнения с экспериментом, конечно, нужны монтекарловские расчеты, и они, действительно, воспроизводят эксперимент. Однако следует еще раз подчеркнуть, что при описании с помощью КНО-функции можно упустить небольшие отличия, которые более наглядно проявляются в поведении отношения кумулянтных и факториальных моментов H_q .

Кстати, как видно из рис. 13 и 14, эти отношения ведут себя разным образом для глюонных и кварковых струй и потому могут быть использованы либо для их выбора, либо для проверки правильности отбора этих струй, когда отбор проводится по совершенно другим критериям (см., например, [49, 50]). Адронизация вряд ли может существенно изменить характер кривых, полученных для партонов, хотя это также требует проверки в монтекарловских моделях. Такая процедура пока еще не была проделана.

Переход от производящих функций струй к реальным процессам нетривиален даже для случая e^+e^- -аннигиляции, как мы уже обсуждали выше, и тем более сложен для других процессов. Остается надеяться лишь на универсальность качественных черт в поведении моментов распределений струй и попытаться сопоставить их с соответствующими характеристиками процессов множественного рождения адронов, чтобы понять влияние перехода от струй к этим процессам (и, в частности, адронизации партонов).

Такой анализ был проведен [51] не только для e^+e^- -аннигиляции, но и для pp - и $p\bar{p}$ -взаимодействий в широкой области энергий с целью обнаружить также возможные отличия процессов, инициированных лептонами и адронами. Список проанализированных в работе [51] экспериментальных данных [52–65] содержится в табл. II, причем рассматривались только данные с большой статистикой и детальным разделением упругих и неупругих событий при малых множественностях. Для каждого из экспериментальных распределений вторичных адронов были вычислены отношения H_q вплоть до 16-го порядка включительно.

Таблица II. Изученные данные

Взаимодействие	Эксперимент, спектрометр или коллаборация	Энергия в с.д.м. или импульс пучка	Число событий
e^+e^- :	TASSO [52]	22 ГэВ	1913
	HRS [53]	29	29649
	TASSO [52]	34,8	52832
	TASSO [52]	43,6	8620
	ALEPH [54]	91	90000
	DELPHI [55]	91	47400
	L3 [56]	91	169700
	OPAL [57]	91	82941
	FNAL [61]	300 ГэВ/c, $\sqrt{s} = 23,8$ ГэВ	8477
	SMF-детектор CERN [63]	30,4	37069
pp:	E743 FNAL [62]	800 ГэВ/c, $\sqrt{s} = 38,8$	10217
	SMF-детектор CERN [63]	52,6	26842
	SMF-детектор CERN [63]	62,2	58196
	UA5 [64]	200	4156
	UA5 [65]	546	7775
	UA5 [64]	900	6839

Хотя детальное поведение H_q зависит от типа взаимодействия, энергии и (даже!) методов отбора в том или ином эксперименте, качественные черты этого поведения весьма близки в обоих типах взаимодействий при всех энергиях.

В качестве первого примера можно взять данные коллаборации ДЕЛФИ [55] о e^+e^- -взаимодействиях при энергии 91 ГэВ, приведенные на рис. 16. Ввиду большого различия в числовой величине, данные при малых q выделены в виде врезки, где заметен быстрый спад отношения H_q . В основной части рисунка видны два отрицательных минимума (при $q \cong 5$ и 12) и два положительных максимума (при $q \cong 8$ и 15). Предсказания отрицательного биномиального распределения при значении параметра $k^{-1} = 0,0411 \pm 0,0012$, взятого из оригинальной работы [55], показаны пунктирной линией. Естественно, никаких минимумов и максимумов здесь нет, и потому можно утверждать, что отрицательное биномиальное распределение способно воспроизвести лишь основные детали экспериментальных распределений по множественности (малые значения q), но не их более тонкие особенности (осцилляции при больших q).

На рис. 17 приведены результаты аналогичного анализа данных UA5 коллаборации [65] о pp-взаимодействиях при энергии 546 ГэВ. Несмотря на очевидный рост амплитуды осцилляций примерно на порядок по сравнению с e^+e^- -аннигиляцией, основные характерные черты поведения отношения H_q сохраняются: быстрое падение на малых q с последующим минимумом (который расположен теперь при $q \cong 6$) и дальнейшими осцилляциями.

Эти же качественные особенности наблюдаются и при других энергиях, как видно из рис. 18 и 19. В то же время имеется количественная разница даже в результатах экспериментов при одной и той же энергии 91 ГэВ в e^+e^- -аннигиляции, проведенных разными коллаборациями (см. нижние четыре графика на рис. 18). Повидимому, это связано с несколько разным отбором событий и систематическими ошибками. Большая чувствительность отношения H_q могла бы быть использована для разработки, например, оптимальной процедуры отбора событий.

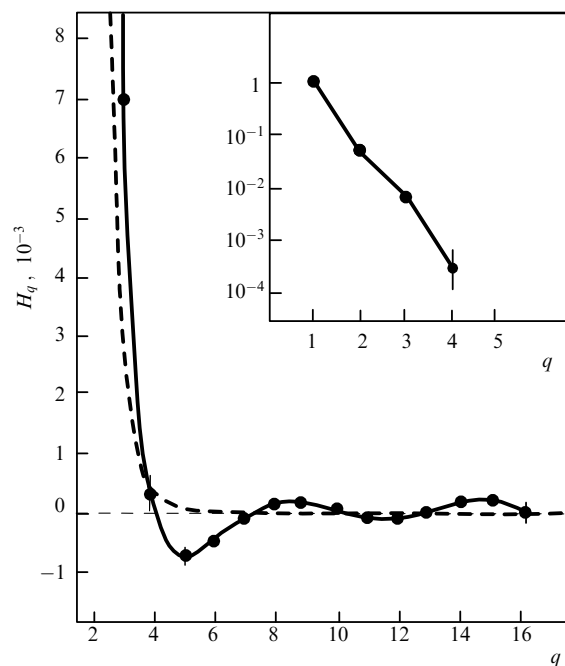


Рис. 16. Поведение H_q по данным коллаборации ДЕЛФИ о e^+e^- -аннигиляции при энергии 91 ГэВ [51]

Было проверено, насколько хорошо монтекарловские схемы описывают поведение отношения H_q . Результаты оказались удивительными. Схема АРИАДНЕ, содержащая детали отбора событий коллаборации ОПАЛ, довольно хорошо воспроизвела данные этой коллаборации, приведенные на рис. 18, ж, а схема ДЖЕТСЕТ 7.3, предназначенная для ДЕЛФИ, столь же хорошо фитировала данные этой коллаборации (см. рис. 18, е). Поскольку количественно кривые на рис. 18, ж и 18, е заметно отличаются, следует заключить, что это отличие свя-

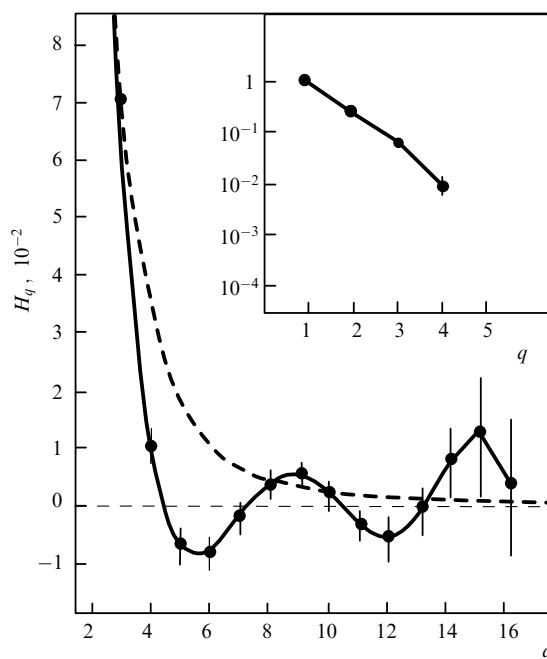


Рис. 17. Поведение H_q по данным коллаборации UA5 о pp-взаимодействии при энергии 546 ГэВ [51]

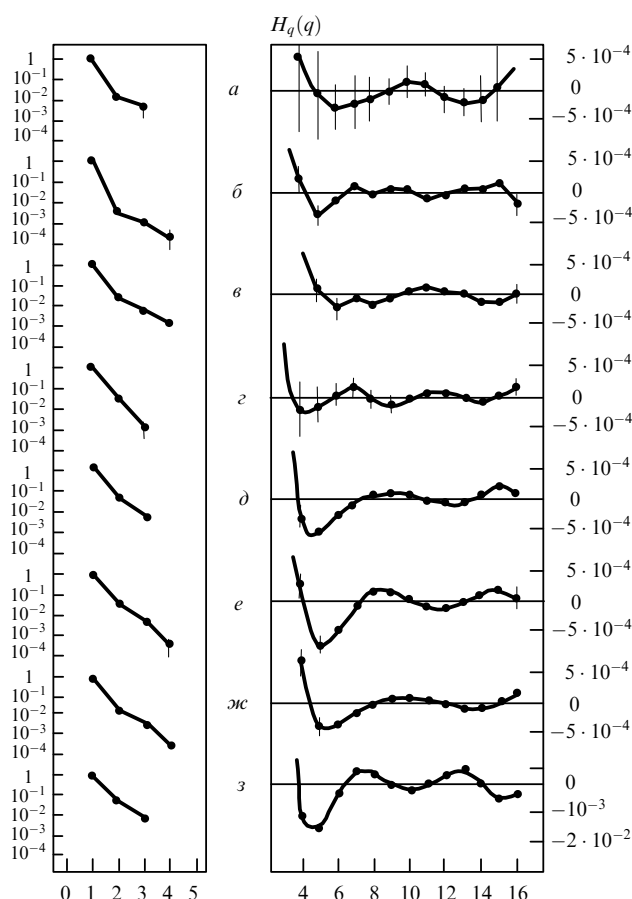


Рис. 18. Поведение H_q в e^+e^- -аннигиляции в широкой области энергий [51] (экспериментальные группы идут в том порядке, как они приведены в табл. II, т.е. энергия растет по мере перехода сверху вниз). Слева — низшие моменты в логарифмической шкале, справа — высшие моменты в линейном масштабе

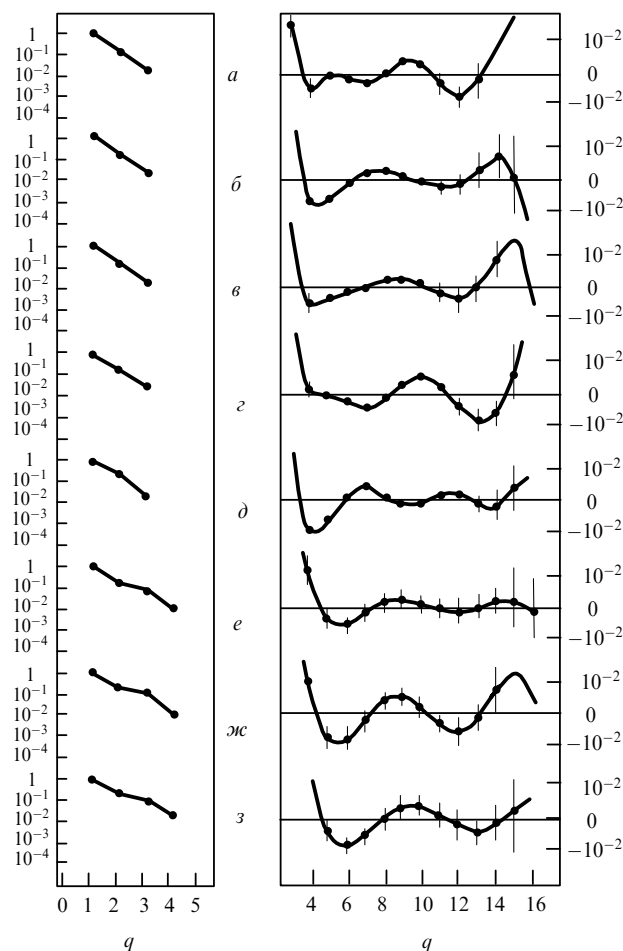


Рис. 19. Поведение H_q в pp- и $p\bar{p}$ -взаимодействиях в широкой области энергии [51] (те же комментарии, что и на рис. 18)

зано-таки, действительно, с деталями того или иного эксперимента, а не с общей динамикой процесса на партонном уровне. К сожалению, не было проведено сравнение этих моделей именно на партонном уровне.

Заметим, что отличие экспериментальных распределений от отрицательного биномиального было отмечено в работах коллабораций UA5 [65], ДЕЛФИ [55] и ОПАЛ [57]. Более того, в работе [57] было показано путем вычитания этих двух распределений, что их разность осциллирует. Видимо, с этим связаны и осцилляции функции H_q . Физическая интерпретация таких осцилляций могла бы быть связана с рождением разного числа "подструй" в e^+e^- -аннигиляции (см., например, [31]) или же различных "лестниц-струн" в адронных процессах (см., например, [27]). Осцилляции кумулянтов, вызванные динамическими причинами, однозначно указывают на то, что модели, в которых рождаются кластеры, распределенные по пуассоновскому закону [28, 84], не годятся для точного описания экспериментальных данных.

В то же время может сказаться и более тривиальный эффект обрезания экспериментальных распределений при больших множественностях, который также вызывает осцилляции H_q . Однако в отличие от динамических осцилляций КХД этот эффект должен вымирать с ростом энергии. Тем не менее он требует еще количественного анализа.

В заключение этого раздела хотелось бы подчеркнуть, что за прошедший год достигнуто заметное сближение на качественном уровне предсказаний квантовой хромодинамики с экспериментальными данными о распределении по множественности частиц, достигнуто понимание того, сколь важны те или иные приближения в теоретических подходах и детали отбора экспериментальных данных для проведения количественного сопоставления. Тем самым создана реальная основа для прецизионного подхода к проблеме в целом.

9. Эволюция распределений с уменьшением фазового объема — перемежаемость и фрактальность

Распределения частиц по множественности можно измерять не только в полном фазовом объеме, как обсуждалось выше (где, более того, рассматривался случай очень большого объема), но и в произвольной части его. При этом в случае равномерного (в среднем) распределения частиц средняя множественность убывает пропорционально уменьшению объема, но относительные флуктуации, конечно, возрастают. Наиболее интересным вопросом при этом является закон роста флуктуаций, его возможное отличие от чисто статистического закона, обусловленного уменьшением средней множественности. Такое отличие должно быть связано с динамикой

взаимодействия. В частности, в работе [66] было предположено, что факториальные моменты растут степенным образом с уменьшением интервала быстрой δy как

$$F_q \sim (\delta y)^{-\phi(q)} \quad (\delta y \rightarrow 0), \quad (103)$$

где $\phi(q) > 0$. Это предположение было иницировано аналогией с турбулентностью в гидродинамике, где подобное свойство называется перемежаемостью, а $\phi(q)$ — показателями перемежаемости. Физически оно означает, что сравнительно "спокойные" области перемежаются с областями, в которых флуктуации велики, и это становится тем заметнее, чем меньшего размера выбираются указанные области. С точки зрения поведения распределений такое свойство обусловлено увеличением их ширины и более медленным спадом при (относительно) больших множественностях.

Экспериментальные данные по разнообразным процессам множественного рождения при высоких энергиях поддержали эту гипотезу, всюду подтвердив наличие степенного закона (103). Естественно, были предложены разные теоретические объяснения наблюдаемого явления. Весь этот круг вопросов подробно рассмотрен в обзорной статье [14]. Здесь мы остановимся лишь на том, как свойство перемежаемости (103) описывается в рамках квантовой хромодинамики [38, 67–71].

Необходимо еще раз подчеркнуть, что экспериментальные сведения имеются о моментах распределения частиц, тогда как квантовая хромодинамика имеет дело с партонами (кварками и глюонами). Только используя гипотезу локальной партон-адронной дуальности, мы можем считать функциональные зависимости инклюзивных распределений одинаковыми в обоих случаях. Однако следует всегда иметь в виду, что это утверждение не столь однозначно для корреляционных характеристик и, кроме того, не всегда выполняется количественно в развитых монтекарловских схемах. Поэтому и здесь мы претендуем лишь на описание качественных характеристик, а не на количественное сравнение с экспериментом.

В отличие от предыдущих разделов мы будем использовать здесь диаграммный подход, а не уравнения для производящих функций. Дело в том, что при рассмотрении распределений по множественности в малой части фазового объема приходится иметь дело не со всеми частицами (партонами) развитой струи, а только с небольшой частью их, попавшей в заданный интервал (скажем, углов θ) и принадлежащей, естественно, некой подструе внутри данной струи. Конечно, история эволюции всей струи будет сказываться и на данной выбранной подструе, как это изображено на рис. 20. Здесь

- 1) начальный кварк (сплошная линия) испускает жесткий глюон с энергией E в направлении интервала углов θ (но не обязательно точно нацелен в него);
- 2) глюон развивается в струю партонов с угловым раствором, покрывающим угол θ ;
- 3) среди этих партонов имеется партон с энергией k , который точно попадает в этот интервал углов;
- 4) вся подструя, образованная этим партоном, покрывает интервал углов θ .

Соответственно этой картине вычисление q -го коррелятора всей струи сводится к усреднению q -го коррелятора заданного партона $\Delta N^{(q)}(k\theta)$ по всем доступным для него возможностям, т.е. по инклюзивным энергетическим спектрам таких партонов в полной струе D^θ и по вероятностям возникновения струи вообще ($\alpha_s K_F^G$). Ана-

литически эта картина описывается формулой

$$\Delta N^{(q)}\left(Q\theta_0, \frac{\theta_0}{\theta}\right) \propto \int \frac{dE \alpha_s}{E} K_F^G\left(\frac{E}{Q}\right) \times \int \frac{dk}{k} D^\theta\left(\frac{E}{k}; E\theta_0, k\theta\right) \Delta N^{(q)}(k\theta), \quad (104)$$

где $\Delta N^{(q)} \equiv F_q \langle n \rangle^q$ — ненормированный факториальный момент (слева — всей струи, справа — подструи партона с импульсом k , попадающего в интервал углов θ). Естественно, ненормированные моменты растут с энергией, тогда как спектр партонов падает, и в результате произведение $D^\theta \Delta N^{(q)}(k\theta)$ имеет максимум при некоторой энергии, а потому интеграл по импульсам k можно вычислить методом скорейшего спуска. Не входя в детали вычислений (см. подробнее [38]), укажем на общую структуру получающегося выражения для коррелятора всей струи при фиксированной константе связи $\gamma_0 = \text{const}$:

$$\Delta N^{(q)} \propto \Delta \Omega \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{\frac{\gamma_0}{q}} \left(\frac{E\theta}{c}\right)^{q\gamma_0} \quad (c = \text{const}), \quad (105)$$

где три сомножителя отвечают вкладу в интегралы (104) фазового объема, энергетического спектра (слегка подавляющего большие множественности или ранги q) и q -й степени средней множественности. Для того чтобы получить нормированный факториальный момент, надо разделить (105) на q -ю степень средней множественности в интервале θ от всей струи, т.е. долю полной средней множественности, соответствующую фазовому объему $\Delta \Omega$:

$$\Delta N(\theta) \sim \Delta \Omega \cdot \Delta N(\theta_0). \quad (106)$$

Если анализ проводится в D -мерном пространстве, то фазовый объем можно условно записать в виде

$$\Delta \Omega \sim \theta^D, \quad (107)$$

где θ указывает минимальную сторону D -мерной ячейки. Это свойство выполняется в силу сингулярного характера пропагатора партонов в квантовой хромодинамике (см. [38]). Именно поэтому факториальные моменты

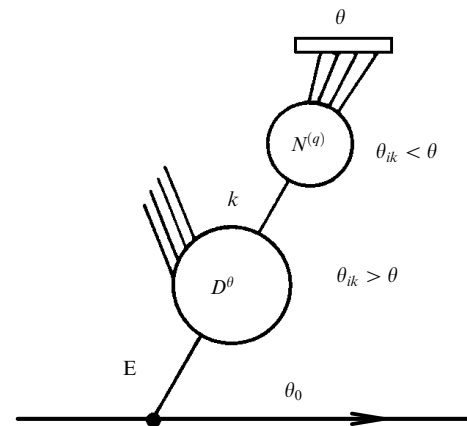


Рис. 20. Излучение кварком (сплошная линия) глюонной струи и ее эволюция [38]

можно записать в виде произведения чисто кинематического фактора, зависящего от размерности анализируемого пространства и динамического множителя, не связанного с этой размерностью, а определяемого величиной константы связи, т.е.

$$F_q \sim \theta^{-D(q-1)} \theta^{\frac{q^2-1}{q} \gamma_0}. \quad (108)$$

Замечая, что для малых интервалов углов $\theta \sim \delta y$, и учитывая формулу (103), получаем показатели перемежаемости в виде

$$\phi(q) = D(q-1) - \frac{q^2-1}{q} \gamma_0. \quad (109)$$

Эта формула верна для умеренно малых интервалов углов, когда выполнено условие $\alpha_S \ln(\theta_0/\theta) < 1$. Если же углы становятся настолько малыми, что это условие нарушается, то необходимо уже учитывать, что константа связи бегущая. Это приведет к тому, что γ_0 надо заменить на некоторое эффективное значение $\langle \gamma \rangle$, логарифмически меняющееся с углом θ и приближенно записываемое в виде [38]

$$\langle \gamma \rangle = \gamma_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{4} \right), \quad (110)$$

где

$$\epsilon = \frac{q^2+1}{q^2} \frac{\ln(\theta_0/\theta)}{\ln(E\theta_0/\mu)} \leq 1. \quad (111)$$

В результате показатели перемежаемости существенно уменьшаются при малых углах и, более того, простой степенной закон (103) нарушается, поскольку показатели перемежаемости теперь сами зависят от величины выбранного интервала. Результирующий график $\ln F_q$ как функция $-\ln \theta$, будет содержать две ветви: сравнительно быстрорастущую, линейную при умеренных углах θ , наклон которой задается формулой (109), и растущую медленнее со слабым нарушением линейности согласно (110), (111). Нетрудно вычислить точку перехода с одного режима на другой и прийти к выводу, что при увеличении q переход ко второму режиму происходит на все меньших углах θ . Тем не менее рост факториальных моментов всех рангов с уменьшением интервала углов остается, а значит, флуктуации распределений по множественности в малых угловых интервалах больше, нежели соответствующие флуктуации в больших интервалах, и, что самое важное, заметно превышают пуассоновские флуктуации.

Изложенные выше результаты были получены в дваждылогарифмическом приближении. Переход к модифицированному приближению ведущих логарифмов вносит численно небольшие поправки. Например, точка перехода от степенного к "квазистепенному" режиму слегка сдвигается к еще меньшим углам для всех моментов, кроме второго, где она, наоборот, смещается к большим углам по сравнению с предсказанными в дваждылогарифмическом приближении, что явно обусловлено взаимной ролью вида энергетического спектра D^θ и роста средней множественности.

Вместе с тем, и здесь высшее приближение приводит к качественно новой зависимости моментов от параметра

q , еще раз указывая на появление существенных вкладов, пропорциональных произведению $q\gamma$. Например, при попытках использовать аналогии из статистической механики [38] величина

$$1 - \frac{\phi(q) + 1}{q}$$

интерпретируется как "свободная энергия", а ранг момента q , как обратная температура $\beta = 1/T$. В низшем приближении эта величина монотонно растет с q , а высшие поправки приводят к появлению максимума свободной энергии как раз на значениях, где имеется минимум в H_q (71), изучавшийся выше:

$$q_{cr} \cong \frac{1}{h_1 \gamma_0} \cong 5. \quad (112)$$

С точки зрения статистической механики, это обстоятельство свидетельствовало бы о наличии фазового перехода в этой точке. Здесь же это является указанием на появление важного параметра $q\gamma$ в квантовой хромодинамике, роль которого подробно описывалась выше.

Укажем еще на связь проведенного рассмотрения с фрактальностью. Степенное поведение факториальных моментов указывает на фрактальные свойства распределения частиц в фазовом объеме. При этом согласно общей теории фракталов (см. подробнее в [14] и ссылки там) показатели перемежаемости связаны с фрактальными размерностями (размерностями Реньи) D_q формулой

$$\phi(q) = (q-1)(D - D_q), \quad (113)$$

откуда с учетом (109) имеем в дваждылогарифмическом приближении

$$D_q = \frac{q+1}{q} \gamma_0 = \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{q}. \quad (114)$$

Здесь первое слагаемое (отвечающее монофракталу) обусловлено ростом средней множественности, а второе (приводящее к мультифрактальности) связано со спадом энергетического спектра, как это объяснялось выше. Нетрудно вывести и мультифрактальную спектральную функцию в этом случае (см. [38]).

Ясно видно, что фрактальность в квантовой хромодинамике имеет четко выраженную динамическую природу $D_q \sim \gamma_0$, а кинематический множитель — обычный $D(q-1)$.

Наличие фрактальности в распределениях частиц внутри фазового объема могло бы служить свидетельством в пользу фрактальности геометрической структуры самих частиц в обычном пространстве. Конечно, эта структура была бы динамической, непрерывно меняющейся. В пользу такой возможности говорят два факта. Во-первых, каскадный процесс развития партонного ливня в обычном пространстве должен приводить к "древесной" структуре фрактального типа и в силу его непрерывности эта структура должна быть весьма изменчивой. Во-вторых, расчеты на решетке в $SU(2)$ -глюодинамике [72] показали, что вблизи точки фазового перехода система партонов является фрактальной в том

смысле, что занятый ею объем оказывается пропорциональным его поверхности в степени 1,12, а не 1,5, как можно было бы ожидать для обычного трехмерного объекта.

Отображением геометрической фрактальности макроскопического тела в обычном пространстве служит степенное поведение структурных функций при рассеянии на данном фрактальном объекте каких-либо точечных частиц (фотоны, электроны, нейтроны и т.п.). По аналогии с этим было предложено [73] измерять структурные функции в глубоконеупругих процессах и определять соответствующие фрактальные размерности. Однако модельность теоретических расчетов и экспериментальные трудности пока не позволили сделать конкретные выводы, и проблема возможной фрактальной геометрии (имеющей динамическую природу) внутри элементарных частиц остается пока открытой.

В конце раздела отметим, что анализ моментов нецелого ранга при малых бинах пока проведен не был и обсуждение их в разделах 2 и 3 можно рассматривать лишь как ружье в чеховской пьесе, которая заведомо еще не подходит к концу.

10. Краткое обсуждение других эффектов КХД

Теоретические основы квантовой хромодинамики как неабелевой калибровочной теории, описывающей взаимодействия кварков и глюонов, сейчас не вызывают сомнений, хотя проблема конфайнмента еще не решена. Вместе с тем, предсказание асимптотической свободы, т.е. ослабление взаимодействия на малых расстояниях, позволило широко использовать методы теории возмущений. Наряду с этим проводятся расчеты в рамках решеточной теории, рассматриваются чисто симметричные свойства и правила сумм, применяется потенциальный подход. Процесс перехода от кварков и глюонов к адронам чаще всего описывается на модельном уровне, и для количественного сопоставления с экспериментальными данными используются монтекарловские расчеты на компьютерах. Весь этот арсенал теоретических средств позволил предсказать и во многих случаях количественно описать большое число эффектов, наблюдаемых на эксперименте. Уже давно известны успехи квантовой хромодинамики в описании поведения отношения сечений e^+e^- -аннигиляции в адроны и в мюонную пару, в предсказании правил сумм, связывающих вклады кварков разного типа, в детальном рассмотрении свойств тяжелых кваркониев, в соотношениях, касающихся особенностей поведения поляризованных частиц.

Успехи пертурбативных методов были связаны прежде всего с жесткими процессами взаимодействия частиц, когда переданные импульсы велики. К ним относится e^+e^- -аннигиляция при высоких энергиях, глубоконеупругое рассеяние лептонов и нейтрино на адронах, адронные процессы с большими поперечными импульсами, рождение тяжелых кварков, процесс Дрелла-Яна (рождение мюонных пар с большой "массой"). Использование единых структурных функций в этих процессах, соответствие партонной модели низшему приближению квантовой хромодинамики при установлении свойства скейлинга и затем изучение его нарушения в высших приближениях с учетом бегущей константы связи были яркими вехами на пути развития

теории и сопоставления ее с экспериментом.

Несколько позднее стали рассматривать интерференционные эффекты. Среди них отметим прежде всего так называемый эффект струны (или эффект увлечения) [74–78], который характерен тем, что, например, в трехструнных событиях e^+e^- -аннигиляции число частиц, испущенных в области между двумя кварковыми струями, оказывается меньше по сравнению с аналогичным процессом, где вместо глюонной струи испускается фотон. Это связано с деструктивной интерференцией в области между кварковыми струями в трехглюонных событиях и приводит к "увлечению" частиц вдоль направления глюонной струи. Аналогичные явления можно заметить в процессах рождения фотонов, мюонных пар, тяжелых бозонов.

Совсем недавно был экспериментально подтвержден [79] красивый эффект подавления так называемой сопровождающей множественности адронов в процессах с рождением тяжелых кварков, если их сравнивать с аналогичными реакциями с рождением легких кварков. Под сопровождающей множественностью понимаются те адроны, которые возникают в результате адронизации тормозных глюонов, испущенных соответствующим кварком до его адронизации. Все определяется сравнительно большой массой тяжелого кварка. В этом случае, как известно уже из классической теории рассеяния [80], излучение по направлению движения подавлено, и потому интегральное излучение уменьшается. Интересно было бы дополнительно проверить этот эффект, измеряя угловое распределение рождающихся "тормозных" адронов, которое должно обладать кольцевой структурой [81, 82] с "пустым конусом" внутри [83].

Идея экранировки цвета и когерентности (углового упорядочения) в кварк-глюонных струях, связанная с интерференционными эффектами, привела к формулировке уравнений для производящих функций распределений партонных по множественности, подробно обсуждавшихся в предыдущих разделах.

11. Выводы

Принципиальным отличием такой характеристики, как распределение по множественности, от эффектов, связанных с жесткими процессами, является преобладающий вклад мягких частиц, возникающих на позднем этапе эволюции хорошо развитых струй. Поэтому успех, достигнутый в применении КХД к распределениям по множественности, существенно расширяет ее претензии. Учет высших приближений теории возмущений в случае бегущей константы связи и точные решения уравнений КХД при фиксированной константе связи, описанные выше, указали на качественно новые характеристики распределений по множественности по сравнению с тем, что получалось в низшем дваждылогарифмическом приближении. С физической точки зрения эти подходы отвечают рассмотрению все более мягких этапов эволюции кварковых и глюонных струй. Тот факт, что качественные черты новых предсказаний выполняются на опыте не только в электрон-позитронной аннигиляции, но и проявляются в адронных взаимодействиях, позволяет сделать вывод о возможности учета мягкой стадии развития струй в высших порядках с помощью изученных выше уравнений, а также, по-видимому, говорят о большей общности физики процессов рождения адронов

в реакциях, инициированных частицами различной природы, нежели считалось до сих пор.

Эволюция точки зрения на возможности пертурбативной квантовой хромодинамики наглядно видна из истории решения этой проблемы, изложенной во введении. Первоначальная эйфория в связи с предсказанием энергетического роста средней множественности и КНО-скейлинга, не зависящего от константы связи, сменилась неким унынием из-за слишком широкого распределения в дваждылогарифмическом приближении, хотя и было вскоре выяснено, что следующие поправки очень большие. Сейчас стало ясно, что члены еще более высокого порядка также существенны, и их учет возможен. Это приводит к приближенному КНО-скейлингу с формой распределения, зависящей теперь уже от константы связи (или аномальной размерности КХД). Предсказаны и экспериментально подтверждены качественно новые особенности в поведении моментов распределения. Фактически стали ясны и характерные черты изменения вида распределений при переходе к малым областям фазового объема.

Устранено заметное расхождение теоретического предсказания и экспериментальных результатов по величине отношения средних множественностей в глюонных и кварковых струях. Показано также влияние высших поправок на рост средней множественности с энергией. Все эти улучшения указывают в сторону большего согласия с экспериментом.

В сочетании с достижениями в описании инклюзивного распределения в электрон-позитронной аннигиляции (так называемое "горбатое" плато) и различных корреляций энергетических потоков и множественности это позволяет говорить о возможности применения квантовой хромодинамики к описанию качественных черт мягких процессов. Конечно, для количественного сравнения с экспериментом необходима модель адронизации (часто заменяемая просто гипотезой о локальной партон-адронной дуальности) и развитые монтекарловские схемы. К недостатку последних, к сожалению, следует отнести наличие большого числа варьируемых параметров, влияние которых контролировать довольно сложно. Именно поэтому аналитические предсказания новых качественных особенностей и эффектов столь необходимы. Описанный выше прогресс в этом направлении позволяет надеяться на дальнейшие успехи.

Благодарности

Я глубоко признателен моим соавторам в работах по этой тематике Ю.Л. Докшицеру, Г. Жианини, Б.Б. Левченко, В.А. Нечитайло и Р. Хва.

Список литературы

1. Андреев ИВ (1981) *Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях* (М.: Наука)
2. Иоффе БЛ, Липатов ЛН, Хоже ВА (1983) *Глубоконеупругие процессы* (М.: Энергоатомиздат)
3. Yndurain FJ (1983) *Quantum Chromodynamics* (New York -Berlin-Heidelberg-Tokyo: Springer-Verlag, перевод: Индураин Ф (1986) *Квантовая хромодинамика* (М.: Мир))
4. Волошин МБ, Тер-Мартirosян КА (1984) *Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц* (М.: Энергоатомиздат)
5. Dokshitzer Yu L, Khoze V A, Mueller A H, Troyan S I (1991) *Basics of perturbative QCD* (Gif-sur-Yvette France: Editions Frontieres)
6. Giovannini A, Van Hove L. *Zs. Phys.* **C30**, 391 (1986); *Acta Phys. Pol.* **B19**, 495; 917; 931 (1988)
7. Koba Z, Nielsen H B, Olesen P. *Nucl. Phys.* **B40**, 317 (1972)
8. Azimov Ya I, Dokshitzer Yu L, Khoze V A, Troyan S I, *Zs. Phys.* **C27**, 65 (1985)
9. Amati D, Veneziano G. *Phys. Lett.* **B83**, 87 (1979)
10. Bassetto A, Ciafaloni M, Marchesini G. *Phys. Rep.* **C100**, 201 (1983)
11. Bassetto A, Ciafaloni M, Marchesini G. *Nucl. Phys.* **B163**, 477 (1980)
12. Dokshitzer Yu L. *Phys. Lett.* **B305**, 295 (1993)
13. Dremmin I M. *Phys. Lett.* **B313**, 209 (1993)
14. Де Вольф ЕА, Дремин ИМ, Киттель В. *УФН* **163**, 3 (1993); расширенный вариант на английском языке см. в *Phys. Rep.* (в печати)
15. Friedlander E M, Stern I. *Preprint LBL-31354* (1991)
16. Oldham K. (1974) *The fractional calculus* (Orlando: Academic Press), p.60; Ross B. (1975) *Fractional calculus and its applications*, in *Lecture Notes in Mathematics* (Berlin, Springer-Verlag) **457**, 1
17. Дремин ИМ. *Письма ЖЭТФ* **59**, 561 (1994)
18. Cuypers F, Tesima K. *Zs. Phys.* **C54**, 87 (1992)
19. Dokshitzer Yu L, Khoze V A, Troyan S I. 1989 in *Perturbative QCD*, Ed. Mueller A H (Singapore, World Scientific)
20. Dremmin I M. *Mod. Phys. Lett.* **A8** 2747 (1993)
21. Dremmin I M, Hwa R C. *Phys. Rev. D* (1 June 1994)
22. Andersson B, Gustafson G, Sjostrand T. *Phys. Lett.* **B94**, 211 (1980)
23. Andersson B, Gustafson G, Ingelman G, Sjostrand T. *Phys. Rep.* **97**, 33 (1983)
24. Capella A, Sukhatme U, Tan C I, Tran Thanh Van J, *Phys. Lett.* **B81** 68 (1979)
25. Capella A, Tran Thanh Van J, *Phys. Lett.* **B93**, 146 (1980); *Zs. Phys.* **C10**, 249 (1981)
26. Kaidalov A B. *Phys. Lett.* **B116**, 459 (1982)
27. Kaidalov A B, Ter-Martirosyan K A. *Phys. Lett.* **B117**, 247 (1982); *Sov. J. Nucl. Phys.* **39**, 979; **40**, 135 (1984)
28. Dremmin I M, Dunaevskii A M, *Phys. Rep.* **18**, 159 (1975)
29. Ugoccioni R, Giovannini A, Lupia S (1993) in *Proc. 23 Int. Symp. on Multiparticle Dynamics* (Aspen, USA, Singapore: World Scientific)
30. Levchenko B B, Shumilin A V. *Zs. Phys.* (1994) (в печати)
31. Bianchi F, Giovannini A, Lupia S, Ugoccioni R. *Zs. Phys.* **C58**, 71 (1993)
32. Dokshitzer Yu L, Olsson M. *Nucl. Phys.* **B396**, 137 (1993)
33. Malaza E D, Webber B R. *Nucl. Phys.* **B267**, 702 (1986)
34. Gaffney J B, Mueller A H. *Nucl. Phys.* **B250**, 109 (1985)
35. Cuypers F, Tesima K. *Zs. Phys.* **C52**, 69 (1991); **54**, 87 (1992)
36. Catani S, Dokshitzer Yu L, Fiorani F, Webber B R. *Nucl. Phys.* **B377**, 445; **383**, 419 (1992)
37. Olsson M, Gustafson G. *Nucl. Phys.* **B406**, 293 (1993)
38. Dokshitzer Yu L, Dremmin I M. *Nucl. Phys.* **B402**, 139 (1993)
39. Dremmin I M, Nечитайло V A. *JETP Lett.* **58**, 945 (1993)
40. Dremmin I M, Levchenko B B, Nечитайло V A. *Sov. J. Nucl. Phys.* **59** (6) (1994)
41. Dremmin I M, Nечитайло V A. *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994)
42. Dremmin I M, Hwa R C. *Phys. Lett.* **B324**, 477 (1994)
43. Mueller A H. *Nucl. Phys.* **B241**, 141 (1984)
44. Malaza E D, Webber B R. *Phys. Lett.* **B149**, 501 (1984)
45. Marciano W J. *Phys. Rev.* **D29**, 580 (1984)
46. Dokshitzer Yu L, Khoze V A, Mueller A H, Troyan S I. *Rev. Mod. Phys.* **60**, 373 (1988)
47. Marchesini G, Webber B R et al., *Comp. Phys. Comm.* **67**, 465 (1992)
48. Gary J W, *Preprint UCRHEP-T116* (1993)
49. OPAL coll., Acton P D et al. *Zs. Phys.* **C58**, 387 (1993)
50. CLEO coll., Alam M S et al. *Phys. Rev.* **D46**, 4822 (1992)
51. Gianini G et al. (1993) In *Proc. of the 23 Int. Symp. on Multiparticle Dynamics* (Aspen, USA); Singapore, World Scientific (в печати)
52. TASSO coll., Braunschweig W. et al. *Zs. Phys.* **C45**, 193 (1989)
53. HRS coll., Derrick M. et al. *Phys. Rev.* **D34**, 3304 (1986)
54. ALEPH coll., Decamp D. et al. *Phys. Lett.* **B273**, 181 (1991)
55. DELPHI coll., Abreu P. et al. *Zs. Phys.* **C50**, 185 (1991)
56. L3 coll., Adeva B. et al. *Zs. Phys.* **C55**, 39 (1992)
57. OPAL coll., Acton P D et al. *Zs. Phys.* **C53**, 539 (1992)
58. Ammosov V. et al. *Phys. Lett.* **B42**, 519 (1972)

59. Morse W M et al. *Phys. Rev.* **D15**, 66 (1977)
60. Charlton G et al. *Phys. Rev. Lett.* **29**, 515 (1972)
61. Firestone A et al. *Phys. Rev.* **D9**, 2080 (1974)
62. E743 coll., Ammar R et al. *Phys. Lett.* **B178**, 124 (1986)
63. Breakstone A et al. *Phys. Rev.* **D30**, 30 (1984)
64. UA5 coll., Ansorge R E et al. *Zs. Phys.* **C43**, 357 (1989)
65. UA5 coll., Alner G J et al. *Phys. Rep.* **154**, 247 (1987)
66. Bialas A, Peschanski R *Nucl. Phys.* **B273**, 703 (1986)
67. Gustafson G, Nilsson A *Zs. Phys.* **C52**, 533 (1991); *Nucl. Phys.* **B355**, 106 (1991)
68. Ochs W, Wosiek J *Phys. Lett.* **B289**, 159 (1992)
69. Ochs W, Wosiek J *Phys. Lett.* **B** (1993); *Preprint MPI-PH-93-30*
70. Brax Ph, Meunier J L, Peschanski R *Nucl. Phys.* **B** (1993); *Preprint INLN-93-01*
71. Dokshitser Yu L, Marchesini G, Oriani G *Nucl. Phys.* **B387**, 675 (1992)
72. Polikarpov M I *Phys. Lett.* **B236**, 61 (1990)
73. Dremin I M, Levchenko B B *Phys. Lett.* **B292**, 155 (1992)
74. Mueller A H *Phys. Lett.* **B104**, 161 (1981)
75. Marchesini G, Webber B R *Nucl. Phys.* **B238**, 1 (1984)
76. Azimov Ya I, Dokshitser Yu L, Khoze V A, Troyan S I *Zs. Phys.* **C31**, 213 (1986)
77. Andersson B, Gustafson G, Sjostrand T *Phys. Lett.* **B94**, 211 (1980)
78. Azimov Ya I, Dokshitser Yu L, Khoze V A, Troyan S I *Phys. Lett.* **B165**, 147 (1985)
79. Schumm B A, Dokshitser Yu L, Khoze V A, Koetke D S *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3025 (1992)
80. Dremin I M *JETP Lett.* **34**, 617 (1981)
81. Dremin I M *JETP Lett.* **30**, 152 (1979)
82. Apanasenko A V, Dobrotin N A, Dremin I M, Kotelnikov K A *JETP Lett.* **30**, 157 (1979)
83. Dokshitser Yu L, Khoze V A, Troyan S I *J. Phys.* **G17** 1481, 1602 (1991).
84. Hegyi S. *Phys. Lett.* **B327**, 171 (1994)

QUANTUM CHROMODYNAMICS AND MULTIPLICITY DISTRIBUTIONS

I M Dremin

P N Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences
53, Leninskii Prospekt, 117924, Moscow, Russia
Tel (7-095) 132-2929

The problem of multiplicity distributions of particles produced in high-energy collisions is treated in the framework of quantum chromodynamics (QCD). The solutions of the QCD equations of the generating functions of multiplicity distributions in quark and gluon jets are described both for fixed and for running coupling constants. New characteristics which are very sensitive to the shape of distributions are found. The predictions are compared with experimental data. The variation of multiplicity distributions with shrinkage of the analyzed phase space volume is shown. This is discussed in connection with the notions of intermittency and fractality. Some other effects predicted by QCD are briefly described.

Bibliography — 84 references

Received 8 April 1994