

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Работа Я.И. Френкеля о "силах сцепления"
и теория белых карликов

(К 100-летию со дня рождения Я.И. Френкеля)

Д.Г. Яковлев

Показано, что в статье Я.И. Френкеля о "силах сцепления" 1928 г. были разработаны основные аспекты теории белых карликов. Сделано это было раньше, чем принято считать, но статья фактически не известна среди астрофизиков.

PACS numbers: 01.60.+q

Содержание

1. Введение (653).
 2. Вещество белых карликов (653).
 3. История по учебнику (654).
 4. Работа Я.И. Френкеля о "силах сцепления" (655).
 5. Заключение (656).
- Список литературы (656).

1. Введение

Хорошо известно, что белые карлики — компактные звезды с массами порядка солнечной ($M \sim M_\odot$) и с малыми радиусами ($R \cong 5000\text{--}10000$ км). Средние плотности их вещества составляют $10^5\text{--}10^7$ г см⁻³, ускорение силы тяжести на их поверхности — $10^8\text{--}10^9$ см с⁻². Мощные гравитационные силы, сжимающие столь компактную звезду, уравниваются давлением вырожденного электронного газа. Свойства вещества белых карликов кратко описываются в разделе 2.

По современным представлениям, белые карлики образуются в процессе эволюции нормальных звезд после того, как эти последние сжигают ядерное горючее в центральных слоях. Белые карлики давно и успешно наблюдаются. Первая оценка радиуса карлика (звезды Сириус В), указывающая на необычайную компактность объекта, была выполнена Адамсом [1]. Считается, что белые карлики составляют заметную долю всех звезд Галактики (3–10 %, а может быть, и более).

Теория внутреннего строения белых карликов сравнительно проста, хорошо разработана и согласуется с

наблюдениями. История развития теории изложена в учебниках и кратко резюмирована в разделе 3. Цель данной заметки — обратить внимание на работу Я.И. Френкеля [2] "Применение теории электронного газа Паули–Ферми к вопросу о силах сцепления", опубликованной на немецком языке в журнале "Zeitschrift für Physik" в мае 1928 г. Эта работа практически неизвестна среди астрофизиков. Ее содержание кратко изложено в разделе 4. Будет видно, что в ней разработаны почти все элементы современной теории белых карликов, и сделано это было раньше, чем принято считать.

2. Вещество белых карликов

Если интересоваться основными деталями внутреннего строения (а не тепловой эволюцией) белого карлика, можно пренебречь сравнительно тонкой внешней оболочкой, состоящей из невырожденного газа, и считать, что вещество карлика состоит из атомов и почти идеального вырожденного газа электронов и атомов при абсолютном нуле температуры. Атомы в основном полностью ионизованы большим давлением электронов и представляют собой просто атомные ядра. Ядра, как правило, образуют кристаллическую решетку. Элементарную ячейку такого вещества с хорошей точностью можно представлять как ячейку Вигнера–Зейтца с радиусом $a = (3/4\pi n_i)^{1/3}$, где n_i — концентрация ядер. В центре ячейки находится ядро, а внутренность заполнена электронным газом почти постоянной концентрации $n_e = Zn_i$ (Z — зарядовое число ядра). Внутреннюю энергию U (включая энергию покоя) и давление P можно представить в виде

$$U = \rho c^2 = m_i n_i c^2 + U_e + U_i, \quad P = P_e + P_i, \quad (1)$$

где ρ — массовая плотность вещества. Величины U_e и P_e соответствуют идеальному вырожденному газу электронов, а U_i и P_i — кулоновские поправки, обусловленные

Д.Г. Яковлев. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26
Тел. (812) 247-93-68

Статья поступила 6 апреля 1994 г.

электростатическим взаимодействием электронов с электронами и ядрами, m_i — масса ядер. Соотношения (1) определяют уравнение состояния $P = P(\rho)$ холодного плотного вещества. Основной вклад в массовую плотность вносят ядра, а в давление — электроны.

Состояние электронов определяется импульсом Ферми $p_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}$ или параметром релятивизма $x = p_F/m_e c \cong 1,009(\rho_6/\mu_e)^{1/3}$, где m_e — масса электрона, ρ_6 — плотность в ед. 10^6 г см^{-3} , $\mu_e = A/Z$ — молекулярный вес (число нуклонов на один электрон). При $\rho \ll 1 \text{ т см}^{-3}$ электронный газ является нерелятивистским ($x \ll 1$), а при $\rho \gg 1 \text{ т см}^{-3}$ — ультрарелятивистским ($x \gg 1$). Электронный вклад в (1) дается выражениями

$$\begin{aligned} U_e &= P_0 \left\{ x(1+2x^2)(1+x^2)^{1/2} - \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\}, \\ P_e &= P_0 \left\{ x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) (1+x^2)^{1/2} + \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $P_0 = m_e^4 c^5 / 8\pi^2 \hbar^3 \cong 1,801 \cdot 10^{23} \text{ дин см}^{-2}$. В предельных случаях нерелятивистского и ультрарелятивистского газа

$$P_e = \frac{8}{15} P_0 x^5 \quad (x \ll 1), \quad P_e = \frac{2}{3} P_0 x^4 \quad (x \gg 1). \quad (3)$$

Кулоновские слагаемые в (1) равны

$$U_i = 3P_i = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{a} n_i. \quad (4)$$

В веществе не слишком малой плотности ($\rho \gg AZ \text{ г см}^{-3}$) эти величины, действительно, являются малыми поправками. Так, при $\rho \gg 1 \text{ т см}^{-3}$ имеем $P_i/P_e \cong -0,0046Z^{2/3} \cong -0,04$ (если $Z = 26$).

3. История по учебнику

Опишем кратко "официальную" историю развития теории белых карликов. Для определенности будем ссылаться на хорошо известную монографию Шапиро и Тьюколского [3]. Она не всегда полна, и мы будем дополнять ее своими комментариями. В этом разделе мы не будем касаться замечательной работы Френкеля [2], которая подробно обсуждается в разделе 4.

Квантовая статистика фермионов была сформулирована в классической работе Дирака [4], опубликованной в августе 1926 г. Уже в декабре 1926 г. появилась работа Фаулера [5], в которой была высказана идея о том, что белые карлики удерживаются от гравитационного сжатия давлением вырожденных электронов. В подтверждение своей идеи Фаулер приводит оценки, основанные на расчетах давления нерелятивистских электронов. Общая формула (2) для P_e при произвольной степени релятивизма электронов x к тому времени была неизвестна, но предельные случаи (3), конечно же, без труда получали многие.

Далее, если следовать учебнику Шапиро и Тьюколского [3], теория белых карликов была развита в основном Чандрасекаром. Прежде всего в работе 1931 г. Чандрасекар [6] показал, что в массивных карликах электронный газ становится релятивистским. В том же году Чандрасекар [7] предсказал существование верхнего предела массы белых карликов (что несколько позже

независимо сделал и Ландау [8]). Чандрасекар [9, 10] первым построил и количественно правильные численные модели этих звезд.

Не умаляя огромной роли Чандрасекара, следует отметить, что очень большой вклад в теорию белых карликов внес и его постоянный оппонент, английский физик Э. Стоунер. Читая работы тех лет, легко убедиться в том, что соперничество Чандрасекара и Стоунера способствовало успешному развитию теории. Оба ученых пунктуально ссылались на работы друг друга, но со временем имя Стоунера оказалось незаслуженно забытым. Однако именно он в работе 1929 г. [11] проанализировал структуру не слишком массивных белых карликов, состоящих из нерелятивистского электронного газа. Правда, он использовал упрощенную модель карлика с однородно распределенной плотностью. Эта модель позволяет получить качественно правильные зависимости массы звезды от радиуса и от центральной плотности. Не точными оказываются лишь численные коэффициенты, входящие в эти зависимости. Количественно правильные модели не очень массивных белых карликов позднее разработал Чандрасекар [12] на основе теории политропных звезд.

Согласно (3) уравнение состояния нерелятивистского электронного газа имеет вид $P_e = K\rho^{5/3}$ и отвечает политропным звездам ($P = K\rho^{1+1/n}$) с показателем политропы $n = 3/2$. С ростом центральной плотности ρ_c радиусы карликов, состоящих из нерелятивистских электронов, падают ($R \propto \rho_c^{-1/6}$), а масса увеличивается ($M \propto \rho_c^{1/2}$).

При $\rho_c \sim 1 \text{ т см}^{-3}$ электронный газ в центре карлика становится релятивистским. Это происходит, когда масса карлика $M \cong M_\odot$. При $\rho_c \gg 1 \text{ т см}^{-3}$ в центре карлика существует массивное ядро, состоящее из релятивистского электронного газа. Чем выше ρ_c , тем обширнее ядро и тем менее существенна внешняя оболочка из нерелятивистских электронов. Такие белые карлики сильно отличаются от маломассивных карликов. Эти выводы также были сделаны не Чандрасекаром, а Стоунером в работе 1930 г. [13] на основе упрощенной модели карликов с однородно распределенной плотностью. Однако количественно точные модели карликов большой массы на основе теории политроп позднее построил Чандрасекар [6].

Уравнение состояния релятивистского электронного газа согласно (3) имеет вид $P_e = K'\rho^{4/3}$, т.е. снова описывается политропным законом, но с показателем политропы $n = 3$. Релятивистский газ оказывается значительно "мягче", чем нерелятивистский, и "с трудом" удерживает гравитационное сжатие звезды. С ростом ρ_c радиус таких карликов убывает ($R \propto \rho_c^{-1/3}$), а масса почти перестает возрастать и стремится к постоянному (предельному) значению $M_c = 1,457(2\mu_e^{-1})^2 M_\odot$. Существование верхнего предела массы белых карликов было предсказано в уже упоминавшейся работе Стоунера [13]. Там же получена и качественно правильная оценка M_c . Точное значение M_c , называемое чандрасекаровским пределом массы белого карлика, позднее вычислил Чандрасекар [6]. Понимая важность этого результата, Чандрасекар дополнительно публикует его в отдельной работе [7] всего на двух страницах. Независимо от Чандрасекара и почти одновременно значение M_c рассчитал и Ландау [8]. Более того, Ландау показал, что предельную массу можно записать в замечательно

простом виде

$$M_c = 3,1 \left(\frac{\hbar c}{2\pi G} \right)^{3/2} \left(\frac{4}{m_p \mu_c} \right)^2, \quad (5)$$

выразив ее через четыре фундаментальные физические константы (гравитационную постоянную G , постоянную Планка \hbar , массу протона m_p и скорость света c) и численный множитель 3,1, который составлен из комбинации констант теории политроп ($n = 3$).

Первые модели белых карликов произвольной массы $M \sim M_\odot$ были рассчитаны Чандрасекаром [9] лишь в 1934 г. Причина столь позднего появления этих моделей состояла в том, что не было известно уравнение состояния (2) вырожденного электронного газа при произвольной степени релятивизма электронов. Формула (2) для U_e была выведена Стоунером [13]. В 1932 г. он же [14] получил и формулу для P_e . Уравнение состояния, вычисленное Стоунером, и было использовано Чандрасекаром [9, 10].

В перечисленных работах считалось, что $P = P_e$. Кулоновские поправки (4) в уравнении состояния легко получаются с помощью простой модели плотного звездного вещества, как совокупности ячеек Вигнера–Зейтца (раздел 2). Шапиро и Тьюколски [3] не указывают автора этих поправок, и проследить их историю не просто. Повидимому, первым из астрофизиков правильное выражение для кулоновских поправок получил Котари [15] в работе 1938 г. Детальные модели белых карликов с учетом этих поправок, а также с учетом возможного изменения ядерного состава вещества благодаря захватам электронов атомными ядрами были построены лишь в замечательной работе Хамады и Солпитера [16], которая вышла в 1961 г. Хотя кулоновские поправки и невелики, они играют очень важную роль в массивных карликах ($M \cong M_c$): релятивистский электронный газ "плохо справляется" с гравитационными силами, и даже небольшое уменьшение полного давления за счет кулоновских поправок приводит к заметному уменьшению предельной массы. Так, для карликов из железа $M_c = 1,1 M_\odot$ вместо классического чандрасекаровского значения $1,26 M_\odot$ (при $M_\odot/\mu_c = 2,15$).

Перечисленные работы составляют фундамент современной теории белых карликов. Теория непрерывно развивается, но фундаментальные представления останутся неизменными.

4. Работа Я.И. Френкеля о "силах сцепления"

Вернемся к упоминавшейся работе Я.И. Френкеля (1928 г.) [2] о "силах сцепления", под которыми следует понимать силы, удерживающие частицы в том или ином веществе и определяющие свойства вещества. Работа состоит из четырех разделов, которые, на первый взгляд, посвящены различным аспектам физики. Пропитируем названия разделов [2]:

§ 1. Кинетические силы отталкивания и условия равновесия при учете релятивистской механики.

§ 2. Модель атома по Томасу–Ферми.

§ 3. Внутреннее строение атомного ядра.

§ 4. Сверхплотные звезды.

Несмотря на широкий спектр объектов исследования, все разделы логически связаны и имеют непосредственное отношение к § 4, где рассматриваются сверхплотные

звезды. Под сверхплотными звездами, безусловно, следует понимать белые карлики, хотя Я.И. Френкель ни разу не упоминает этого названия. Он рассматривает звезды, давление в которых, в основном, создается вырожденным электронным газом при абсолютном нуле температуры.

В § 1 автор рассчитывает плотность энергии и давление вырожденного электронного газа с произвольной степенью релятивизма. Его формулы (3а) и (4б), с точностью до тривиальных нормировочных констант, полностью соответствуют тем формулам (2), которые использовал Чандрасекар [9, 10] при расчетах моделей белых карликов с $M \sim M_\odot$, взяв их из работ Стоунера [13, 14].

В § 2 Я.И. Френкель разрабатывает традиционную, классическую модель атома Томаса–Ферми с нерелятивистскими электронами. В качестве предельного случая он рассматривает ячейку Вигнера–Зейтца заданных размеров, в центре которой находится атомное ядро и которая заполнена электронным газом постоянной плотности. Тем самым сразу решаются две важные задачи. Во-первых, рассматривается элементарная ячейка вещества белого карлика при плотности $\rho \ll 1 \text{ г см}^{-3}$, когда электронный газ является нерелятивистским. Во-вторых, автор получает правильную кулоновскую поправку в уравнении состояния вещества, которая не зависит от степени релятивизма электронов. Действительно, сумма двух последних слагаемых в формуле (12) цитируемой работы (при условии, что число электронов в ячейке $N = Z$) дает кулоновскую поправку (4) U_i . Как указывалось в разделе 3, кулоновские поправки в уравнении состояния вещества белых карликов стали известны в астрофизической литературе значительно позднее, чем вышла работа Я.И. Френкеля.

В § 3 Я.И. Френкель рассматривает оригинальную модель атомного ядра в виде сферы, заполненной протонами и электронами и удерживаемой благодаря взаимодействию магнитных моментов этих частиц. Следует учитывать, что эта (наивная по современным представлениям) модель была разработана в 1928 г. за 4 года до открытия нейтрона. Важно, что изучая эту модель, автор попутно рассматривает ячейку Вигнера–Зейтца, заполненную электронным газом и сжатую до очень малых размеров (порядка размеров атомного ядра). Электронный газ при столь сильном сжатии неминуемо становится релятивистским. Тем самым естественным образом возникает модель элементарной ячейки вещества белого карлика с плотностью $\rho \gg 1 \text{ г см}^{-3}$.

Наконец, § 4 непосредственно посвящен сверхплотным звездам (белым карликам). Я.И. Френкель пишет, что следует рассматривать два случая, которые отвечают сверхплотным звездам двух типов. В первом случае вещество звезды состоит из элементарных ячеек, заполненных нерелятивистским газом (§ 2). Во втором же случае электронный газ в ячейках является релятивистским (§ 3).

Что же различает звезды этих двух типов? С помощью простых оценок на основе модели звезды с однородно распределенной плотностью Я.И. Френкель показывает, что сверхплотные звезды второго типа должны быть массивнее, чем первого. Чтобы электронный газ в звезде стал релятивистским, масса звезды должна быть больше солнечной ($M > M_\odot$, формула (196) цитируемой

работы), а средняя плотность вещества должна превышать 10^6 г см^{-3} (последняя, не занумерованная формула статьи Я.И. Френкеля). Эти оценки лежат в основе современных представлений о строении белых карликов.

4. Заключение

Таким образом, работа Я.И. Френкеля, опубликованная в 1928 г., содержала в себе почти все основные элементы теории белых карликов и заметно опередила классические работы других авторов, широко цитируемые в современной астрофизической литературе. Я.И. Френкель предсказал два типа сверхплотных звезд, состоящих из вырожденного нерелятивистского и релятивистского электронного газа, и правильно указал, что звезды второго типа имеют массу $M \gtrsim M_\odot$. Автором было получено уравнение состояния вырожденного электронного газа с произвольной степенью релятивизма электронов, которое является основным элементом для построения количественно точных моделей белых карликов. Я.И. Френкель фактически получил и кулоновские поправки к электронному давлению, которые были открыты в астрофизике значительно позднее и были использованы в классической работе Хамады и Солпитера 1961 г. [16].

Единственный фундаментальный вывод о строении белых карликов, который не был сделан Я.И. Френкелем, — вывод о существовании предельной массы M_c . Однако невозможно осуждать автора — его работа и так уникальна: в ней содержится почти все, что позволило бы легко построить современную количественную теорию белых карликов в конце 20-х годов, если бы работа была продолжена автором или его учениками.

Однако судьба работы сложилась менее удачно. Она не была востребована астрономами и астрофизиками, и теория белых карликов была построена (раздел 3) позднее и независимо другими авторами. Можно предположить, что главной причиной было неудачное название работы и ее разделов. Кроме того, работа была написана языком физика-теоретика, занимающегося

общими проблемами фундаментальной физики, но не астрофизическими исследованиями. И хотя работа была опубликована в самом престижном журнале, она, по-видимому, не привлекла внимания самых заинтересованных читателей — астрономов и астрофизиков. Важность содеянного, по-видимому, до конца не понимал и сам автор. Иначе он мог бы продолжить или существенно переработать свою работу для последующих изданий.

Так или иначе, в 1928 г. Я.И. Френкель первым разработал многие аспекты теории белых карликов. Замечательная работа Я.И. Френкеля не должна быть забыта: ей принадлежит достойное место среди классических работ по теории белых карликов.

Я благодарен В.Я. Френкелю, обратившему мое внимание на работу Я.И. Френкеля [2], прочитавшему рукопись данной статьи и сделавшему много полезных замечаний.

Список литературы

1. Adams W S *Publ. Astron. Soc. Pacific* **27** 236 (1915)
2. Frenkel J *Zs. Phys.* **50** 234 (1928); то же в переводе: Френкель Я И *Собрание избранных трудов* (М.: JL: Изд-во АН СССР, 1958) т. 2, с. 109
3. Шапиро С, Тьюколски С *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* (М.: Мир, 1985) т. 1
4. Dirac P A M *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* **112** 661 (1926)
5. Fowler R H *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **87** 114 (1926)
6. Chandrasekhar S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **91** 456 (1931)
7. Chandrasekhar S *Astrophys. J.* **74** 81 (1931)
8. Landau L D *Phys. Zs. Sowjetunion* **1** 285 (1932); то же в переводе: Ландау Л Д *Собрание трудов* (М.: Наука, 1969) т. 1, с. 86
9. Chandrasekhar S *Observatory* **57** 373 (1934)
10. Chandrasekhar S *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Chicago, Illinois: University of Chicago Press, 1939); перевод: Чандрасекар С *Введение в учение о строении звезд* (М.: ИЛ, 1954)
11. Stoner E C *Phil. Mag.* **7** 63 (1929)
12. Chandrasekhar S *Phil. Mag.* **11** 592 (1931)
13. Stoner E C *Phil. Mag.* **9** 944 (1930)
14. Stoner E C *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **92** 651 (1932)
15. Kothari D S *Proc. Roy. Soc. London* **165** 486 (1938)
16. Hamada T, Salpeter E E *Astrophys. J.* **134** 683 (1961)

THE ARTICLE BY Ya.I. FRENKEL ON "BINDING FORCES" AND THE THEORY OF WHITE DWARVES

D.G. Yakovlev

A.I. Ioffe Physico-Technical Institute, Russian Academy of Sciences
26, Politekhnicheskaya Ulitsa, 194021, St. Petersburg, Russia
Tel. (812) 247-9368

The article by Ya.I. Frenkel on "binding forces" published in 1928 contained main elements of the up-to-date theory of white dwarves. Those results were almost unknown to astrophysicists and were later rederived by other authors.

Bibliography — 16 references

Received 6 April 1994