

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Токи перехода частиц со спином 1/2

М.И. Криворученко

В нерелятивистской теории и в релятивистской теории с массивными частицами вопрос о возможности построения явно-ковариантных представлений токов перехода решается положительно. В безмассовом случае такие представления существуют только для токов, недиагональных по спиральности. Диагональные токи имеют алгебраические представления, не являющиеся явно-ковариантными.

PACS numbers: 03.70.+k, 11.40.-q

Содержание

1. Введение (643).
 2. Токи перехода в нерелятивистской квантовой механике (644).
 3. Токи перехода в релятивистской теории (645).
 - 3.1. Массивный случай. 3.2. Безмассовый случай.
 4. Заключительные замечания (648).
- Список литературы (649).

1. Введение

В нерелятивистской квантовой механике сечения процессов с участием частиц со спином 1/2 определяются матричными элементами, содержащими токи перехода $\chi^+(\zeta')\chi(\zeta)$ либо $\chi^+(\zeta')\sigma\chi(\zeta)$, где σ — матрицы Паули, $\chi(\zeta')$, $\chi(\zeta)$ — спиноры, описывающие частицы с поляризациями ζ' , ζ . Зависимость токов от векторов ζ' , ζ является неявной. Для определения зависимости сечений от поляризации частиц прибегают к стандартному приему (см., например, [1]): после возведения модуля амплитуды в квадрат спиноры устраняются с использованием техники проекционных операторов. В результате для сечения получается алгебраическое выражение, зависящее от векторов ζ' , ζ явно-ковариантным образом относительно трехмерных вращений. Возникает вопрос: возможно ли замещение переходных токов явно-ковариантными выражениями, не содержащими ссылок на спиноры, непосредственно в амплитудах?

Аналогичная проблема существует в релятивистской теории. Сечения и вероятности распадов содержат токи, которые определяются через дираковские биспиноры. В токах данного типа явная зависимость от импульсов и

векторов поляризации частиц остается невыявленной, что создает известные неудобства при исследовании асимптотик, анализе поляризационных эффектов и в других случаях. Как и в нерелятивистской квантовой механике, биспиноры устраняются ковариантным образом из квадратов абсолютных значений матричных элементов (см., например, [2] или [3]). В случае сложной тензорной структуры, по-видимому, проще иметь дело с явными выражениями для амплитуд, а не для вероятностей перехода. Например, амплитуда комптон-эффекта является сверткой тензора второго ранга с векторами поляризации двух фотонов. Сечение этого процесса, будучи квадратичным по амплитуде, определяется уже тензором четвертого ранга.

Построение явно-ковариантных алгебраических представлений для токов перехода может быть использовано в приложениях. В данной статье рассмотрен вопрос о существовании таких представлений и об определении их вида (см. также [4–6]).

Мы начнем с обсуждения соответствующих свойств спиноров в трехмерном евклидовом пространстве. В следующем разделе будет показано, что произведения $\chi_\alpha(\zeta)\chi_\beta^+(\zeta')$ с точностью до фазового множителя выражаются через скалярные произведения векторов поляризации ζ , ζ' с матрицами Паули. Данное представление затем используется для построения явно-ковариантных относительно группы вращений алгебраических выражений для токов $\chi^+(\zeta')\chi(\zeta)$, $\chi^+(\zeta')\sigma\chi(\zeta)$. В разделе 3 рассмотрена аналогичная задача в релятивистской теории для массивного и безмассового случаев. Для тензорных форм $u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p', s')$, построенных из дираковских биспиноров, описывающих массивные частицы, найдены представления в виде ковариантных сверток 4-мерных импульсов p , p' и векторов поляризации s , s' с γ -матрицами Дирака. Эти представления затем используются для построения полного набора релятивистских токов перехода в явно-ковариантном виде относительно группы Лоренца. Таким образом, в нерелятивистской теории и в релятивистской теории с массивными частицами вопрос о возможности построения явно-ковариантных представлений решается положительно. В безмассовом случае, как здесь будет показано, такие представле-

М.И. Криворученко. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259, Москва, Большая Черемушкинская ул., 25
Тел. (095) 125-95-47
Факс (095) 123-65-84

E-mail: mikhail @ vxitep.itep.msk.su

Статья поступила 15 декабря 1993 г.

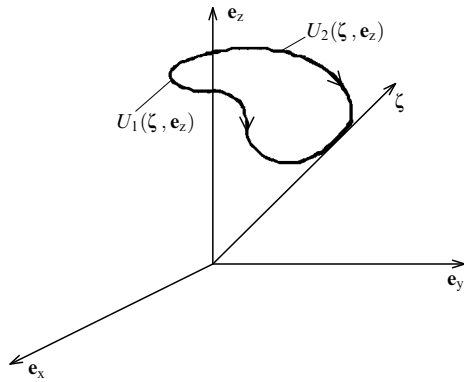


Рис. 1

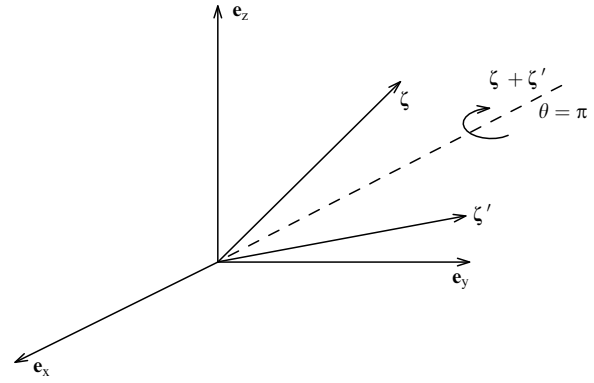


Рис. 2

ния существуют только для токов перехода, недиагональных по спиральности. Диагональные токи имеют алгебраические представления, не являющиеся явноковариантными. Найден явный вид этих токов.

2. Токи перехода в нерелятивистской квантовой механике

В нерелятивистской квантовой механике волновая функция частицы со спином $1/2$, поляризованной в направлении ζ , описывается спинором, удовлетворяющим уравнениям

$$\hat{\zeta}\chi(\zeta) = \chi(\zeta), \quad \chi^+(\zeta)\chi(\zeta) = 1, \quad (2.1)$$

где $\hat{\zeta} = \zeta \cdot \sigma$; σ — матрицы Паули, $\zeta^2 = 1$.

В частном случае частицы, поляризованной в направлении оси $e_z = (0, 0, 1)$, решение уравнений (2.1) легко найти. Оно имеет вид

$$\chi(e_z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Данный спинор определен с точностью до фазового множителя. Имея в руках одно решение, с помощью матрицы вращений $U(\zeta, e_z)$ можно построить спинор с произвольной поляризацией ζ :

$$\chi(\zeta) = U(\zeta, e_z)\chi(e_z). \quad (2.3)$$

Матрица вращений $U(\zeta, e_z)$ обладает следующими свойствами:

$$\hat{\zeta}U(\zeta, e_z) = U(\zeta, e_z)\hat{e}_z, \quad U(\zeta, e_z)U^+(\zeta, e_z) = 1. \quad (2.4)$$

В силу этих свойств спинор (2.3) тождественно удовлетворяет уравнениям (2.1).

Путь, по которому вектор e_z трансформируется в вектор ζ , не является единственным. Для каждой пары векторов e_z и ζ существует бесконечный набор матриц $U(\zeta, e_z)$, осуществляющих данное преобразование (рис. 1). Все матрицы $U(\zeta, e_z)$, однако, удовлетворяют уравнениям (2.4) и, следовательно, определяют один и тот же спинор с точностью до фазового множителя. Это связано с тем, что уравнения (2.1) в свою очередь определяют спинор с точностью до фазового множителя.

Мы, таким образом, приходим к выводу, что для двух разных матриц $U_1(\zeta, e_z)$ и $U_2(\zeta, e_z)$, преобразующих e_z в

ζ , имеет место соотношение

$$U_1(\zeta, e_z)\chi(e_z) = \exp(i\phi)U_2(\zeta, e_z)\chi(e_z), \quad (2.5)$$

где ϕ — некоторая фаза.

Можно непосредственно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\chi_\alpha(e_z)\chi_\beta^+(e_z) = \left(\frac{1 + \hat{e}_z}{2}\right)_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

Заметим, что правая часть определяет проекционный оператор $P(\zeta) = (1 + \hat{\zeta})/2$, для которого $P^2(\zeta) = P(\zeta)$, если $\zeta^2 = 1$.

Подействуем на уравнение (2.6) слева матрицей $U(\zeta, e_z)$ и справа матрицей $U^+(\zeta', e_z)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \chi_\alpha(\zeta)\chi_\beta^+(\zeta') &= \left(U(\zeta, e_z) \frac{1 + \hat{e}_z}{2} \frac{1 + \hat{e}_z}{2} U^+(\zeta', e_z) \right)_{\alpha\beta} = \\ &= \left(\frac{1 + \hat{\zeta}}{2} U(\zeta, \zeta') \frac{1 + \hat{\zeta}'}{2} \right)_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $U(\zeta, \zeta') = U(\zeta, e_z)U^+(\zeta', e_z)$ — матрица, преобразующая вектор ζ' в ζ через вектор e_z . Согласно уравнению (2.5) любой другой выбор матриц $U(\zeta, e_z)$, $U(\zeta', e_z)$ сказался бы лишь на фазовых множителях спиноров, поэтому для того, чтобы найти с точностью до фазового множителя явный вид правой части уравнения (2.7), мы можем подставить на место $U(\zeta, \zeta')$ любую матрицу, преобразующую ζ' в ζ . Пусть $U(\zeta, \zeta') = \exp(i\sigma\mathbf{n}\theta/2)$ с $\mathbf{n} = (\zeta + \zeta')/|\zeta + \zeta'|$ и $\theta = \pi$. Эта матрица осуществляет вращение вокруг вектора \mathbf{n} , как показано на рис. 2. Она может быть записана в виде

$$U(\zeta, \zeta') = i \frac{\hat{\zeta} + \hat{\zeta}'}{(2 + 2\zeta \cdot \zeta')^{1/2}}. \quad (2.8)$$

¹ Требование, согласно которому вектор ζ' преобразуется в ζ через e_z , не является обязательным. Действительно, подействуем сначала на уравнение (2.6) матрицей $U(\zeta, e_z)$ слева и той же матрицей, но эрмитово сопряженной, справа. В результате получим $\chi_\alpha(\zeta)\chi_\beta^+(\zeta) = P_{\alpha\beta}(\zeta)$. Подействуем, далее, справа на это уравнение произвольной матрицей $U^+(\zeta', \zeta) = U(\zeta, \zeta')$. Результат представим в виде (2.7), так как $P(\zeta)U(\zeta, \zeta') = P(\zeta)P(\zeta)U(\zeta, \zeta') = P(\zeta)U(\zeta, \zeta')P(\zeta')$ в силу (2.4).

Соотношения (2.4) при фиксированных векторах $\zeta, \zeta' (= e_z)$ могут рассматриваться, как уравнения, фиксирующие матрицу вращений $U(\zeta, \zeta')$. В случае трехмерных вращений явный вид этой матрицы может быть найден исходя из экспоненциальной параметризации $U(\zeta, \zeta') = \exp(i\sigma n\theta/2)$. Матрица (2.8), найденная именно таким способом, удовлетворяет соотношениям (2.4). Однако уже в случае лоренцевых преобразований экспоненциальная параметризация менее эффективна. Как мы покажем в следующем разделе, соответствующую матрицу лоренцевых преобразований можно найти, решая систему уравнений, аналогичную (2.4).

Подставляя (2.8) в уравнение (2.7), получаем

$$\chi_\alpha(\zeta)\chi_\beta^+(\zeta') \doteq \frac{2}{(2+2\zeta \cdot \zeta')^{1/2}} \left(\frac{1+\hat{\zeta}}{2} \frac{1+\hat{\zeta}'}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

Знак \doteq используется, чтобы подчеркнуть, что две величины (в данном случае две матрицы) равны с точностью до фазового множителя.

Мы приходим к выводу, что явно-ковариантное определение спиноров с помощью уравнения (2.3), специальная роль спинора $\chi(e_z)$ и произвол в выборе пути, по которому вектор e_z преобразуется в вектор ζ , сказываются только на ненаблюдаемом и не зависящем от индексов α и β фазовом множителе в правой части уравнения (2.9), в то время как вся нетривиальная зависимость от векторов ζ, ζ' имеет относительно группы вращений $O(3)$ явно-ковариантный вид.

Токи перехода теперь могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} j(\zeta', \zeta) &= \chi^+(\zeta')\chi(\zeta) = \text{tr}\chi(\zeta)\chi^+(\zeta') \doteq \left(\frac{1+\zeta \cdot \zeta'}{2} \right)^{1/2}, \\ \mathbf{j}(\zeta', \zeta) &= \chi^+(\zeta')\boldsymbol{\sigma}\chi(\zeta) = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\chi(\zeta)\chi^+(\zeta') \doteq \frac{\zeta + \zeta' + i\boldsymbol{\zeta} \wedge \boldsymbol{\zeta}'}{(2+2\zeta \cdot \zeta')^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Полный набор двумерных эрмитовых матриц состоит из матриц 1 и $\boldsymbol{\sigma}$, поэтому в нерелятивистской теории приведенный перечень токов является исчерпывающим.

Можно убедиться, используя уравнения (2.10), что выполняется, например, соотношение

$$j_\alpha(\zeta', \zeta)j_\beta^*(\zeta', \zeta) = \text{tr}\sigma_\alpha \frac{1+\hat{\zeta}}{2} \sigma_\beta \frac{1+\hat{\zeta}'}{2}, \quad (2.11)$$

которое обычно используется, чтобы избавиться от спиноров в квадратах абсолютных величин матричных элементов.

Уравнение (2.9) может быть получено более коротким, но более формальным способом. Подействуем проекционным оператором $P(\zeta') = (1+\hat{\zeta}')/2$ на спинор $\chi(\zeta)$. В результате получим произвольно нормированный спинор $\chi(\zeta')$. Отнормировав $\chi(\zeta')$ на единицу, находим

$$\chi(\zeta') \doteq \frac{2}{(2+2\zeta \cdot \zeta')^{1/2}} \frac{1+\hat{\zeta}'}{2} \chi(\zeta). \quad (2.12)$$

Используя (2.12) и соотношение $\chi_\alpha(\zeta)\chi_\beta^+(\zeta) = P_{\alpha\beta}(\zeta)$, мы воспроизводим далее соотношение (2.9).

3. Токи перехода в релятивистской теории

Приведенные выше аргументы допускают достаточно очевидное релятивистское обобщение на случай массивных спинорных частиц. В безмассовом случае обобщение оказывается менее тривиальным.

3.1. Массивный случай

Чтобы сделать обозначения более компактными, определим символ $\varepsilon = \pm 1$, с помощью которого биспиноры $u(p, s)$ и $v(p, s)$, описывающие частицу и античастицу, будем записывать в виде $u(p, s, \varepsilon = +1)$ и $u(p, s, \varepsilon = -1)$.

Дираковские биспиноры с определенными импульсом p_μ и поляризацией s_μ подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \hat{p}u(p, s, \varepsilon) &= \varepsilon m u(p, s, \varepsilon), \\ \gamma_5 s u(p, s, \varepsilon) &= u(p, s, \varepsilon), \\ \bar{u}(p, s, \varepsilon)u(p, s, \varepsilon) &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первое уравнение является уравнением Дирака в импульсном представлении, второе — уравнение на собственное значение $+1$ проекции спина на направление единичного вектора s_μ . Третье уравнение — ковариантная нормировка спиноров. Векторы импульса и поляризации удовлетворяют соотношениям $p^2 = m^2$, $s^2 = -1$, $p \cdot s = 0$. Здесь $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$, $\hat{s} = s_\mu \gamma^\mu$ и т.д. Гамма-матрицы определены, как в [3], $\varepsilon_{0123} = +1$.

Аналогично трехмерному случаю, построим сначала все линейно независимые решения уравнений (3.1) при некоторых фиксированных импульсе и поляризации, например, в системе покоя частицы, где $p = \eta = (m, 0, 0, 0)$. Вектор поляризации выберем равным $s = e_z = (0, 0, 0, 1)$. Существуют два линейно независимых решения вида

$$u(\eta, e_z, +1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\eta, e_z, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Биспинор, соответствующий импульсу p_μ и поляризации s_μ , может быть получен действием матрицы лоренцевых преобразований на биспиноры (3.2):

$$u(p, s, \varepsilon) = U(p, s; \eta, e_z)u(\eta, e_z, \varepsilon). \quad (3.3)$$

Матрица лоренцевых преобразований $U(p, s; \eta, e_z)$ обладает следующими свойствами (ср. (2.4)):

$$\begin{aligned} \hat{p}U(p, s; \eta, e_z) &= U(p, s; \eta, e_z)\hat{\eta}, \\ \hat{s}U(p, s; \eta, e_z) &= U(p, s; \eta, e_z)\hat{e}_z, \\ U(p, s; \eta, e_z)\bar{U}(p, s; \eta, e_z) &= 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

вследствие чего биспиноры, определенные в уравнении (3.3), удовлетворяют соотношениям (3.1) тождественно.

В справедливости соотношения

$$u_\alpha(\eta, e_z, \varepsilon)\bar{u}_\beta(\eta, e_z, \varepsilon) = \left(\frac{\hat{\eta} + \varepsilon m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{e}_z}{2} \right)_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

можно убедиться непосредственно. Умножая это уравнение слева на $U(p, s; \eta, e_z)$ и справа на $\bar{U}(p', s'; \eta, e_z)$, получаем

$$u_\alpha(p, s, \varepsilon)\bar{u}_\beta(p', s', \varepsilon') = \left(\frac{\hat{p} + \varepsilon m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2} U(p, s; p', s') \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2} \right)_{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

где $\varepsilon\varepsilon' = +1$, $U(p, s; p', s') = U(p, s; \eta, e_z)\bar{U}(p', s'; \eta, e_z)$ — одна из матриц лоренцевых преобразований, преобразующих векторы p', s' в векторы p, s . Неоднозначность в выборе матриц $U(p, s; \eta, e_z)$ и $\bar{U}(p', s'; \eta, e_z)$ сказывается только на фазовых множителях биспиноров, определенных уравнением (3.3). Аргументы здесь те же, что для паулиевских спиноров: вследствие уравнений (3.4) биспиноры (3.3) удовлетворяют уравнениям (3.1) тождественно. Эти уравнения в свою очередь определяют спиноры с точностью до фазового фактора. Следовательно, если мы не интересуемся фазовым множителем, в качестве матрицы $U(p, s; p', s')$ можно выбрать любую матрицу, преобразующую векторы p', s' в векторы p, s . Такая матрица была найдена в работе [3], как частное решение системы (3.4) с заменой $\eta, e_z \rightarrow p', s'$:

$$U(p, s; p', s') = A_+(p, s; p', s') \times (m^2 + \hat{p}\hat{p}' - m^2\hat{s}\hat{s}' + \hat{p}\hat{s}\hat{s}'\hat{p}'). \quad (3.7)$$

Можно убедиться, что она удовлетворяет первым двум уравнениям (3.4). Третье уравнение накладывает ограничения на вид $U(p, s; p', s')$ и позволяет фиксировать нормировочную константу

$$A_+(p, s; p', s') = \frac{1}{2m} [(m^2 + p \cdot p')(1 - s \cdot s') + p \cdot s' p' \cdot s]^{-1/2}. \quad (3.8)$$

Заметим, что матрицы лоренцевых преобразований $U = \exp(\omega_{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)$ раскладываются с действительными коэффициентами по гамма-матрицам $1, i\gamma_5, \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$. Матрица (3.7) также может быть разложена по этому базису.

Подставляя (3.7) в (3.6), получаем ($\varepsilon\varepsilon' = +1$)

$$u_\alpha(p, s, \varepsilon)\bar{u}_\beta(p', s', \varepsilon') \doteq 4A_+(p, s; p', s') \left(\frac{\hat{p} + \varepsilon m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2} \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

Билинейные формы типа $\varepsilon\varepsilon' = -1$ могут быть найдены следующим образом. В системе покоя частицы

$$\gamma_5 u(\eta, e_z, \varepsilon) = u(\eta, -e_z, -\varepsilon). \quad (3.10)$$

Матрицы лоренцевых преобразований коммутируют с матрицей γ_5 , поэтому данное уравнение справедливо в любой системе отсчета:

$$\gamma_5 u(p, s, \varepsilon) = u(p, -s, -\varepsilon). \quad (3.11)$$

Поддействуем слева на уравнение (3.9) матрицей γ_5 и проведем переобозначения $s \rightarrow -s, \varepsilon \rightarrow -\varepsilon'$. В результате получим для $\varepsilon\varepsilon' = -1$

$$u_\alpha(p, s, \varepsilon)\bar{u}_\beta(p', s', \varepsilon') \doteq 4A_-(p, s; p', s') \left(\frac{\hat{p} + \varepsilon m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2} \gamma_5 \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2} \right)_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

где

$$A_-(p, s; p', s') = \frac{1}{2m} [(m^2 + p \cdot p')(1 + s \cdot s') - p \cdot s' p' \cdot s]^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Явные выражения для токов перехода могут быть найдены с помощью уравнения

$$\bar{u}(p', s', \varepsilon') \Gamma u(p, s, \varepsilon) = \text{tr} \Gamma u(p, s, \varepsilon) \bar{u}(p', s', \varepsilon'). \quad (3.14)$$

Для справочных целей ниже приводится полный список явно-ковариантных выражений для токов перехода массивных частиц со спином $1/2$ в релятивистской теории:

$$\varepsilon\varepsilon' = +1:$$

$$\bar{u}(p', s', \varepsilon) u(p, s, \varepsilon) \doteq \frac{1}{4m^2} A_+(p, s; p', s')^{-1},$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon') \gamma_5 u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_+(p, s; p', s') (m\varepsilon p' \cdot s - m\varepsilon' p \cdot s' + i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p'_\alpha s'_\beta p_\mu s_\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon) \gamma_\mu u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_+(p, s; p', s') (m(\varepsilon p + \varepsilon' p')_\mu (1 - s \cdot s') + \\ &+ i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p'_\alpha p_\beta (s' + s)_\gamma + m\varepsilon p' \cdot s s'_\mu + m\varepsilon' p \cdot s' s_\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon') \gamma_\mu \gamma_5 u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_+(p, s; p', s') [(s' + s)_\mu (m^2 + p \cdot p') - \\ &- im\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} s'_\alpha s_\beta (\varepsilon p' + \varepsilon' p)_\gamma - p' \cdot s p_\mu - p \cdot s' p'_\mu], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon') \sigma_{\mu\nu} u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_+(p, s; p', s') [(p'_\mu p_\nu - p'_\nu p_\mu) (1 - s \cdot s') - \\ &- (s'_\mu s_\nu - s'_\nu s_\mu) (m^2 + p \cdot p') + (p'_\mu s_\nu - p'_\nu s_\mu) s' \cdot p - \\ &- (p_\mu s'_\nu - p_\nu s'_\mu) s \cdot p' - im\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\varepsilon p' + \varepsilon' p)_\alpha (s' + s)_\beta], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon\varepsilon' = -1:$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon') u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_-(p, s; p', s') (m\varepsilon p' \cdot s - m\varepsilon' p \cdot s' - i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p'_\alpha s'_\beta p_\mu s_\nu), \end{aligned}$$

$$\bar{u}(p', s', \varepsilon') \gamma_5 u(p, s, \varepsilon) \doteq \frac{1}{4m^2} A_-(p, s; p', s')^{-1},$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s', \varepsilon') \gamma_\mu u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\ &\doteq A_-(p, s; p', s') [(s' - s)_\mu (m^2 + p \cdot p') - \\ &- im\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} s'_\alpha s_\beta (\varepsilon p' - \varepsilon' p)_\gamma + p' \cdot s p_\mu - p \cdot s' p'_\mu], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p', s', \varepsilon') \gamma_\mu \gamma_5 u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\
&\doteq A_-(p, s; p', s') [m(\varepsilon' p - \varepsilon p')_\mu (1 + s \cdot s') + \\
&\quad + i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p'_\alpha p_\beta (s' - s)_\gamma + m \varepsilon p' \cdot s s'_\mu - m \varepsilon' p \cdot s' s_\mu], \\
\bar{u}(p', s', \varepsilon) \sigma_{\mu\nu} u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\
&\doteq A_-(p, s, p', s') \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [p'_\alpha p_\beta (1 + s \cdot s') + \\
&\quad + s'_\alpha s_\beta (m^2 + p \cdot p') - p'_\alpha s_\beta s' \cdot p + p_\alpha s'_\beta s \cdot p' + \\
&\quad + \frac{i}{2} m \varepsilon_{\alpha\beta\tau\sigma} (\varepsilon p' - \varepsilon' p)_\tau (s' - s)_\sigma]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Отметим некоторые соотношения симметрии. Для $\varepsilon\varepsilon' = +1$ уравнение (3.14) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p', s', \varepsilon') \Gamma u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\
&\doteq 4A_+(p, s; p', s') \text{tr} \Gamma \frac{\hat{p} + \varepsilon m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2} \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

В случае $\varepsilon\varepsilon' = -1$ аналогичное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p', s', \varepsilon') \Gamma u(p, s, \varepsilon) &\doteq \\
&\doteq 4A_-(p, s; p', s') \text{tr} \Gamma \gamma_5 \frac{\hat{p} - \varepsilon m}{2m} \frac{1 - \gamma_5 \hat{s}}{2} \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Сравнивая эти два уравнения, замечаем, что скалярный ток $\varepsilon\varepsilon' = -1$ может быть получен из псевдоскалярного тока $\varepsilon\varepsilon' = +1$ с помощью замены $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $s \rightarrow -s$, $A_+(p, s; p', s') \rightarrow A_-(p, s; p', s') = A_+(p, -s; p', s')$. Такая же связь существует между векторным и псевдовекторным токами. Тензорный ток $\varepsilon\varepsilon' = -1$ связан с тензорным током $\varepsilon\varepsilon' = +1$ через тождество $2i\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$.

Эти результаты легко могут быть обобщены на случай токов перехода, которые встречаются в слабых взаимодействиях, например, $p \rightarrow n$ и других с разными массами частиц в начальном и конечном состояниях. Биспиноры, а следовательно, и построенные из них токи, зависят только от скоростей, поэтому в полученных выражениях достаточно сделать подстановку $p' \rightarrow m'p'/m'$, где m' — масса частицы в конечном состоянии ($m' \neq m$).

Уравнения (3.9) и (3.12) могут быть получены также с помощью техники проекционных операторов. Биспинор $u(p', s', \varepsilon')$ может быть представлен двумя способами:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon' = +1: \\
u(p', s', \varepsilon') &\doteq 4A_+(p, s; p', s') \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2} u(p, s, \varepsilon), \\
\varepsilon\varepsilon' = -1: \\
u(p', s', \varepsilon') &\doteq 4A_-(p, s; p', s') \frac{\hat{p}' + \varepsilon' m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}'}{2} \gamma_5 u(p, s, \varepsilon). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Во втором выражении матрица γ_5 введена для того, чтобы нормировочный коэффициент был несингулярен в нерелятивистском пределе. Биспинор $u(p', s', \varepsilon')$ удовлетворяет уравнениям (3.1), если биспинор $u(p, s, \varepsilon)$ им также удовлетворяет. Для тензорных произведений $u_\alpha(p, s, \varepsilon) \bar{u}_\beta(p', s', \varepsilon')$ далее воспроизводятся соотношения (3.9) и (3.12).

3.2. Безмассовый случай

Дираковские биспиноры, описывающие безмассовые частицы и античастицы с фиксированной спиральностью, имеют алгебраически одинаковый вид, поэтому индекс $\varepsilon = \pm 1$, который использовался выше, чтобы отличать частицы от античастиц, далее опускается.

Биспиноры, соответствующие частицам левой (L) и правой (R) спиральности, подчиняются следующим уравнениям

$$\begin{aligned}
\hat{k} u_R(k) &= \hat{k} u_L(k) = 0, \\
\frac{1 - \gamma_5}{2} u_R(k) &= \frac{1 + \gamma_5}{2} u_L(k) = 0, \\
\bar{u}_R(k) \gamma_\mu u_R(k) &= \bar{u}_L(k) \gamma_\mu u_L(k) = 2k_\mu. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Здесь $k^2 = 0$. Условие нормировки выбрано в таком виде, поскольку в безмассовом случае скалярный ток тождественно обращается в нуль: $\bar{u}_R(k) u_R(k) = \bar{u}_L(k) u_L(k) = 0$.

В нашем распоряжении теперь нет проекционных операторов на состояния с определенным k . В отличие от массивного случая, правые части равенств

$$\begin{aligned}
u_{L\alpha}(k) \bar{u}_{L\beta}(k) &= \left(\hat{k} \frac{1 + \gamma_5}{2} \right)_{\alpha\beta}, \\
u_{R\alpha}(k) \bar{u}_{R\beta}(k) &= \left(\hat{k} \frac{1 - \gamma_5}{2} \right)_{\alpha\beta}, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

возведенные в квадрат, дают нуль. Тем не менее существуют соотношения

$$\begin{aligned}
u_L(k') &= C \hat{k}' u_R(k), \\
u_R(k') &= C \hat{k}' u_L(k) \quad (3.22)
\end{aligned}$$

с сингулярным в пределе $k' \rightarrow k$ нормировочным коэффициентом

$$C \doteq \frac{1}{(2k' \cdot k)^{1/2}}. \quad (3.23)$$

Биспиноры в левой части уравнений (3.22) тождественно удовлетворяют соотношениям (3.20), если им удовлетворяют биспиноры в правой части. Коэффициент (3.23) находится с помощью соотношений (3.21). Тензорные произведения биспиноров различной спиральности принимают вид

$$\begin{aligned}
u_{L\alpha}(k) \bar{u}_{R\beta}(k') &\doteq \frac{1}{(2k \cdot k')^{1/2}} \left(\hat{k} \hat{k}' \frac{1 - \gamma_5}{2} \right)_{\alpha\beta}, \\
u_{R\alpha}(k) \bar{u}_{L\beta}(k') &\doteq \frac{1}{(2k \cdot k')^{1/2}} \left(\hat{k} \hat{k}' \frac{1 + \gamma_5}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

С их помощью можно найти явно-ковариантные выражения для недиагональных по спиральности токов перехода. Ясно прежде всего, что токи, составленные из нечетного числа гамма-матриц, тождественно обращаются в нуль, так как правые части уравнений (3.24) содержат четное число гамма-матриц, а след нечетного числа гамма-матриц равен нулю. Приведем выражения для токов, которые в нуль не обращаются:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_R(k') u_L(k) &\doteq \bar{u}_L(k') u_R(k) \doteq (2k \cdot k')^{1/2}, \\
\bar{u}_R(k') \sigma_{\mu\nu} u_L(k) &\doteq \left(\frac{2}{k \cdot k'} \right)^{1/2} (k'_\mu k_\nu - k'_\nu k_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma} k'_\tau k_\sigma),
\end{aligned}$$

$$\bar{u}_L(k')\sigma_{\mu\nu}u_R(k)\doteq\left(\frac{2}{k\cdot k'}\right)^{1/2}(k'_\mu k'_\nu - k'_\nu k'_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}k'_\tau k'_\sigma). \quad (3.25)$$

Рассмотрим далее диагональные по спиральности токи. После того, как мы выяснили, что в нерелятивистской теории, в релятивистской теории массивных частиц и в рассмотренном выше безмассовом случае токи имеют явно-ковариантные представления, кажется неожиданным, что диагональные по спиральности токи такого представления не имеют.

Уравнения (3.22) связывают между собой биспиноры различной спиральности. Единственная возможность выразить, скажем, левый биспинор с импульсом k' через левый биспинор с импульсом k — ввести в правую часть уравнения (3.22) некоторый вспомогательный вектор h . В результате

$$\begin{aligned} u_L(k') &= C'\hat{k}'\hat{h}u_L(k), \\ u_R(k') &= C'\hat{k}'\hat{h}u_R(k). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Нормировочный коэффициент равен

$$C'\doteq\frac{1}{[4k'\cdot hk\cdot h - 2k'\cdot kh^2]^{1/2}}. \quad (3.27)$$

Тензорные произведения биспиноров одинаковой спиральности можно представить теперь в виде

$$\begin{aligned} u_{L\alpha}(k)\bar{u}_{L\beta}(k') &\doteq\frac{1}{(4k'\cdot hk\cdot h - 2k'\cdot kh^2)^{1/2}}\left(\hat{k}\hat{h}\hat{k}'\frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}, \\ u_{R\alpha}(k)\bar{u}_{R\beta}(k') &\doteq\frac{1}{(4k'\cdot hk\cdot h - 2k'\cdot kh^2)^{1/2}}\left(\hat{k}\hat{h}\hat{k}'\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Правая часть зависит от h , в то время как левая — нет. Этому можно дать только одно объяснение: зависимость правой части от h такая, что вариация вектора h сказывается лишь на фазовом множителе. В этом смысле вектор h , фиксирующий выделенную систему координат, не нарушает ковариантность.

Приведем одно хорошо известное рассуждение. Усредним по направлениям произведение двух единичных векторов $n_i n_j$. В нашем распоряжении имеется только один тензор, не нарушающий вращательную симметрию, — символ Кронекера, поэтому результат однозначно восстанавливается:

$$\int\frac{d\Omega}{4\pi}n_i n_j = \frac{1}{3}\delta_{ij}. \quad (3.29)$$

Как следует из представления (3.28), для величин, определяемых с точностью до фазового множителя, рассуждения данного типа не являются доказательными. Существуют вспомогательные векторы, — помимо входящих в условие задачи, — через которые в общем случае выражается ответ. Эти векторы нарушают симметрию задачи (вращательную, например). Их вариация, однако, влияет только на фазовый множитель.

Теперь мы в состоянии построить выражения для векторных токов, явные в алгебраическом смысле. Они содержат вспомогательный вектор h и по этой причине их

нельзя назвать явно-ковариантными. Умножая соотношения (3.28) на γ_μ и вычисляя след, находим

$$\begin{aligned} \bar{u}_L(k')\gamma_\mu u_L(k) &\doteq\frac{2(k'_\mu h\cdot k + k_\mu h\cdot k' - h_\mu k'\cdot k + i\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}k'_\nu k'_\tau h_\sigma)}{(4k'\cdot hk\cdot h - 2k'\cdot kh^2)^{1/2}}, \\ \bar{u}_R(k')\gamma_\mu u_R(k) &\doteq\frac{2(k'_\mu h\cdot k + k_\mu h\cdot k' - h_\mu k'\cdot k - i\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}k'_\nu k'_\tau h_\sigma)}{(4k'\cdot hk\cdot h - 2k'\cdot kh^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Мы приходим к заключению, что средств тензорной алгебры недостаточно для того, чтобы представить левую часть уравнений (3.30) в алгебраической форме через векторы k' и k . В принципе не существует явного выражения, не содержащего ссылки на какой-либо третий вектор.

Других токов, нечетных по числу гамма-матриц, не существует. Что касается четных по числу гамма-матриц токов, то они тождественно обращаются в нуль. Отсюда следует в том числе, что правые части уравнений (3.28) представимы в виде сверток токов (3.30) с матрицами $\gamma_\mu(1\pm\gamma_5)$. По этой причине фазовые множители в правой части уравнений (3.28) и (3.30) при варьировании вектора h изменяются одинаковым образом.

Можно проверить (хотя это следует уже из соотношений (3.28)), что правые части (3.30) с точностью до фазового вращения действительно не зависят от h . Рассмотрим произведение двух левых токов $j_{L\mu}(k', k)j_{L\nu}^*(k', k)$. Используя первое из соотношений (3.30), после тождественных преобразований обнаруживаем, что вектор h из ответа выпадает. Более того,

$$j_{L\mu}(k', k)j_{L\nu}^*(k', k) = \text{tr}\gamma_\mu\hat{k}\gamma_\nu\hat{k}'\frac{1-\gamma_5}{2} \quad (3.31)$$

(ср. с соотношением (2.11)). Проверку тождества (3.31) можно провести, переходя в систему отсчета, где $h = (1, 0, 0, 0)$. В этой системе пространственная часть левого тока совпадает с точностью до двойки с нерелятивистским спиновым током (2.10), если под векторами ζ, ζ' понимать единичные векторы в направлении k', k . Когда индексы μ, ν принимают пространственные значения, правая часть уравнения (3.31) с точностью до нормировочного коэффициента совпадает с правой частью уравнения (2.11), поэтому для $\mu, \nu = 1, 2, 3$ тождество (3.31) можно считать доказанным. Аналогичные рассуждения справедливы для смешанных компонент.

Из отсутствия зависимости произведения $j_{L\mu}(k', k)j_{L\nu}^*(k', k)$ от h при $\mu = \nu$ следует, что абсолютная величина каждой из компонент тока не зависит от h . Из отсутствия такой зависимости при $\mu \neq \nu$ следует, что фазовый множитель одинаков у всех компонент. Аналогичные рассуждения справедливы для правых токов. Таким образом, конкретный выбор вектора h может повлиять только на общий фазовый множитель при векторных токах. Он не зависит от индекса μ в (3.30) и индексов α, β , в (3.28).

4. Заключительные замечания

Таким образом, в нерелятивистской квантовой механике и в релятивистской теории с массивными частицами вопрос о возможности построения явно-ковариантных представлений для переходных токов решается положительно. В обоих случаях мы привели их полный список

(см. (2.10), (3.15) и (3.16)). Для безмассовых частиц явно-ковариантные представления существуют только для токов, недиагональных по спиральности (см. (3.25)). Диагональные токи имеют алгебраические представления, которые не являются явно-ковариантными (см. (3.30)), так как зависят от вспомогательного вектора, не входящего в условия задачи. Его вариация, однако, сказывается только на ненаблюдаемом общем фазовом множителе.

На примере безмассовых частиц мы видим нарушение известного принципа, согласно которому при наличии симметрии ответ может содержать только те векторы, которые входят в условие задачи. Этот принцип не работает, если искомая величина определена с точностью до фазового множителя.

Результаты разделов 2 и 3.1 автор обсуждал с И.Ю. Кобзаревым. Эти вопросы обсуждались также с Л.А. Кондратюком, И.В. Кудрей и Б.В. Мартемьяновым,

которым автор выражает свою признательность. Автор благодарен также профессору Мариане Божич из Белградского университета за обсуждение вопросов, связанных с фазовой неоднозначностью в определении спинов.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. Нерелятивистская теория (М.: Наука, 1974).
2. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980).
3. Bjorken J.D., Drell S.D. *Relativistic Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1964).
4. Криворученко М.И. *ЯФ* **47**, 1823 (1987).
5. Krivoruchenko M.I., Kudrya I.V. *Nuovo Cimento B* **108**, 115 (1993).
6. Krivoruchenko M.I. In *Proceedings of the XIIIth Workshop on Geometric Methods in Physics*. Bialowieza, Poland, July 1–7 (Singapore a. o.: World Scientific Publ, 1993).

TRANSITIONAL CURRENTS OF SPIN-1/2 PARTICLES

M.I. Krivoruchenko

*Institute of Theoretical and Experimental Physics, Moscow
25, Ulitsa Bol'shaya Cheremushkinskaya, 117259, Moscow, Russia
Tel. (095) 125-9547. Fax (095) 123-6584
E-mail: mikhail @ vxitep.itep.msk.su*

It is shown that in the non-relativistic theory and relativistic theory of massive particles one can construct explicitly covariant representations for transitional currents of spin-1/2 particles. In the massless case such representations exist for spin-flip currents. The diagonal transitional currents have non-covariant algebraic representations.

Bibliography — 6 references

Received 15 December 1993