

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Эффект исключенного объема в статистике самоизбегающих блужданий

В.И. Алхимов

Изложены основные результаты исследований проблемы случайных блужданий без самопересечений. Кратко рассмотрены различные подходы к решению этой задачи. Основное внимание уделено асимптотическому решению точного уравнения, полученного для плотности вероятности расстояния между концами самоизбегающей траектории блуждающей частицы.

PACS numbers: 05.50.+q, 05.70.Fh, 35.20.Yh, 64.60.Ak

Содержание

Введение (561).**1. Формулировка проблемы и краткий обзор результатов ее исследования (562).**

1.1. Феноменологический подход. 1.2. Самоизбегающие блуждания на решетках. 1.3. Связь с теорией критических явлений. 1.4. Метод континуального интегрирования.

2. Основное уравнение (574).

2.1. Вывод уравнения. 2.2. Свойства основного уравнения. 2.3. Ренормгрупповой метод. 2.4. Диаграммное описание эффекта исключенного объема.

3. Самоизбегающие блуждания в пространстве с размерностью $d \leq 4$ (584).

3.1. Малый исключенный объем. Теория возмущений. 3.2. Размерность $d = 4$. 3.3. Размерность $d < 4$.

4. Основное уравнение с учетом корреляции ближнего порядка (595).**Заключение (597).****Приложения (I–III) (597).****Список литературы (600).**

Две неподвижные идеи не могут вместе существовать в нравственной природе, так же, как два тела не могут в физическом мире занимать одно и то же место.

А.С. Пушкин ("Пиковая дама", гл. 6)

Введение

Проблема случайных блужданий без самопересечений (СББС) возникла в статистической физике линейных полимеров (макромолекул) при вычислении их средних пространственных размеров и в настоящее время состав-

ляет важный раздел науки о полимерах. В силу чрезвычайно большого числа степеней свободы у макромолекул последние можно рассматривать как макроскопические системы и для вычисления средних значений величин, характеризующих, например, их размеры, применять статистические методы. Результаты многочисленных экспериментов и теоретических расчетов показывают, что мелкомасштабная структура макромолекул с увеличением их длины становится все менее существенной при объяснении макроскопических свойств таких систем. При этом ведущую роль в конфигурационной статистике макромолекул играет их цепное строение и связанный с ним эффект исключенного объема, согласно которому в одном и том же элементе объема пространства не может находиться одновременно более одного звена (или мономера) полимерной цепи. Именно эти факторы определяют характерные черты поведения макромолекул и в то же время цепная структура линейного полимера и траектории случайно блуждающей частицы обусловила аналогию в их описании. Однако для полноты такой аналогии в теории случайных блужданий необходимо учитывать эффект исключенного объема, в связи с чем рассматриваемая здесь проблема получила название СББС, или самоизбегающие блуждания.

Немногим более двадцати лет назад в развитии статистики полимеров наступил новый плодотворный этап благодаря проникновению в нее идей и методов современной теоретической физики. Использование континуального интегрирования, метода ренормгруппы, а также эффективных численных методов для исследования статистики решеточных моделей полимерных цепей оказалось в высшей степени полезным для понимания изучаемого процесса и его связи с физикой критических явлений. Вследствие указанной эквивалентности задач о полимерах и СББС в большей части теоретических работ, исследующих данную проблему, использовался метод континуального интегрирования. Подобный подход к решению проблемы СББС достаточно полно отражен как в обзорных статьях, так и в монографиче-

В.И. Алхимов. Московский педагогический университет, 107005, Москва, ул. Радио, 10а
Тел. (095) 261-09-48

Статья поступила 28 октября 1993 г.

ской литературе (см., например, [1, 2]), а потому здесь, в разделе 1, дано лишь краткое описание его. Следует, однако, отметить, что вычисленные с помощью этого метода критические показатели для проблемы СББС имеют смысл только в том случае, когда размерность пространства d близка к ее формальному значению $d = 4$, и пока не ясно, как с его помощью получать результаты в реальном пространстве.

Вместе с тем существует другой, менее распространенный, но не менее эффективный метод исследования этой проблемы, основанный на поиске решения точного уравнения, установленного для плотности вероятности расстояния между концами самоизбегающей траектории блуждающей частицы. Этот метод в последнее время находит все более широкое признание благодаря его эффективности в исследовании проблемы СББС, а также возможности использования в других областях физики. В связи с этим целесообразно более подробно, чем в обзоре [3], изложить такой подход, чему посвящены разделы 2–4 настоящей статьи, в то время как ее раздел 1 содержит краткий обзор других методов исследования этой проблемы.

1. Формулировка проблемы и краткий обзор результатов ее исследования

1.1. Феноменологический подход

Главной величиной в проблеме самоизбегающих блужданий принято считать плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$ вектора \mathbf{R} , соединяющего начало и конец траектории, состоящей из N ($N \gg 1$) отдельных перемещений блуждающей частицы. Определение функции $W_N(\mathbf{R})$ позволило бы сразу получить важную пространственную характеристику траектории — среднее квадратичное расстояние между ее концами:

$$\langle R^2 \rangle_N = \int R^2 W_N(\mathbf{R}) d^d R, \quad (1.1)$$

где d — размерность пространства. В идеальном случае — отсутствия объемного эффекта — асимптотика плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$ при $N \rightarrow \infty$ имеет следующий вид

$$W_N^{(0)}(\mathbf{R}) \sim \left(\frac{d}{2\pi N l^2} \right)^{d/2} \exp[-d R^2 (2N l^2)^{-1}], \quad (1.2)$$

здесь l — длина отдельного перемещения точечной частицы. В последнем случае средний квадрат расстояния между концами траектории, состоящей из N отдельных перемещений этой частицы, равен

$$\langle R^2 \rangle_N^{(0)} = N l^2. \quad (1.3)$$

Впервые проблема исключенного объема в статистике полимерных цепей возникла при построении термодинамической теории растворов полимеров [4]. В этой теории использовалась решетчатая модель жидкости, согласно которой в каждой ячейке решетки может находиться либо одна молекула растворителя, либо один мономер макромолекулы. Затем определялась величина изменения свободной энергии при смешении макромолекулы и растворителя, которая рассматрива-

лась как функция от коэффициента набухания полимерной цепи:

$$\alpha_N = \left[\langle R^2 \rangle_N \left(\langle R^2 \rangle_N^{(0)} \right)^{-1} \right]^{1/2}, \quad (1.4)$$

где $\langle R^2 \rangle_N$ и $\langle R^2 \rangle_N^{(0)}$ суть среднее квадратичные расстояния между концами этой цепи из N звеньев соответственно с учетом и без учета эффекта исключенного объема. Последующая минимизация свободной энергии по параметру α_N для нахождения его равновесного значения приводит к уравнению

$$\alpha_N^5 - \alpha_N^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} v_1 N^{1/2}, \quad (1.5)$$

в котором $v_1 = (3/2\pi l^2)^{3/2} v_0$, v_0 — величина исключенного объема мономера, а l обозначает теперь расстояние между любыми двумя мономерами, соседними в цепной последовательности. Для достаточно больших N из уравнения (1.5) следует классический результат Флори

$$\langle R^2 \rangle_N \sim \text{const} \cdot (v_0 l^{-3})^{2/5} N^{6/5} l^2. \quad (1.6)$$

В дальнейшем было предложено много различных замкнутых выражений для α_N , подобных уравнению (1.5) и основанных обычно на машинной обработке экспериментальных данных или на моделировании задачи блужданием без самопересечений по какой-нибудь пространственной решетке.

Обобщение формулы Флори (1.6) на случай произвольной пространственной размерности d было предложено впервые Фишером [5] в виде

$$\langle R^2 \rangle_N \sim \text{const} \cdot (v_0 l^{-d})^{2v_F/3} N^{2v_F} l^2, \quad (1.7)$$

где критический показатель v_F равен

$$v_F = \begin{cases} 3(d+2)^{-1}, & d < 4, \\ \frac{1}{2}, & d > 4. \end{cases} \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что размерность $d = 4$ оказывается выделенной, поскольку для $d > 4$ величина $\langle R^2 \rangle_N$ асимптотически зависит от N так же, как и в отсутствии объемного эффекта, т.е.

$$\langle R^2 \rangle_N \sim O(N l^2).$$

Многочисленные опытные факты, а также результаты, полученные для $\langle R^2 \rangle_N$ с помощью ЭВМ, хорошо описываются формулой (1.7).

Эффект исключенного объема является, в сущности, эффектом дальнего порядка, так как ведущую роль в формировании пространственной конфигурации макромолекулы играет объемное взаимодействие ее мономеров с большими разностями их порядковых номеров на полимерной цепи. Взаимодействие между любыми двумя мономерами, соединенными между собой более чем одним звеном, можно описать упрощенно при помощи короткодействующего потенциала отталкивания $U(\mathbf{R})$ с радиусом действия r_0 , не превышающим длину одного звена, т.е. $r_0 < l$. Тогда выражение

$$v_0 = \int [1 - \exp(-U(\mathbf{R}) T^{-1})] d^d R$$

определяет величину исключенного объема в d -мерном евклидовом пространстве \mathcal{R}^d , а T — абсолютную температуру, выраженную в энергетических единицах. В простейшей модели мономер можно рассматривать как абсолютно твердый шар с диаметром r_0 , а полимер — в виде цепочки из $N + 1$ мономеров, свободно сочлененных между собою N одинаковыми звеньями с длиной звена, равной l . Далее, обозначим посредством

$$U_N = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U(\mathbf{L}_{ij})$$

потенциальную энергию полимерной цепи, где вектор

$$\mathbf{L}_{ij} = \sum_{i \leq m \leq j} \mathbf{l}_m$$

соединяет геометрические центры i — 1-го и j -го мономеров, при этом вектор \mathbf{l}_m ($|\mathbf{l}_m| = l$, $m = 1, 2, \dots, N$) направлен от $m - 1$ -го мономера к m -му мономеру и нулевой мономер совмещен с началом системы координат в \mathcal{R}^d . Нетрудно понять, что объемное взаимодействие мономеров полимерной цепи приводит к корреляции между пространственными ориентациями ее звеньев. Удобной величиной, характеризующей меру этой корреляции, является средний косинус угла между направлениями звеньев:

$$\langle \cos \theta_{mn} \rangle = Q_N^{-1} \int (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \exp(-U_N T^{-1}) \prod_{k=1}^N d\Omega_k, \quad (1.9)$$

где Q_N — нормировочный множитель, равный

$$Q_N = \int \exp(-U_N T^{-1}) \prod_{k=1}^N d\Omega_k,$$

θ_{mn} — угол между векторами $\mathbf{e}_m = \mathbf{l}_m/l$ и $\mathbf{e}_n = \mathbf{l}_n/l$, а $(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)$ — их скалярное произведение, $d\Omega = \omega^{-1} d\omega$, $d\omega$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса в \mathcal{R}^d , величина

$$\omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

равна полной поверхности этой сферы, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Очевидно, что в случае $U(\mathbf{R}) \equiv 0$, и, следовательно, $v_0 = 0$, имеем $\langle \cos \theta_{mn} \rangle = 0$. Естественно ожидать, что $\langle \cos \theta_{mn} \rangle > 0$, когда $v_0 > 0$, и, тем самым, вследствие очевидного равенства

$$\langle L_{ij}^2 \rangle = (j - i + 1)l^2 + 2l^2 \sum_{i \leq m < n \leq j} \langle \cos \theta_{mn} \rangle \quad (1.10)$$

эффект исключенного объема приводит к увеличению среднеквадратичного расстояния между мономерами полимерной цепи по сравнению с невозмущенным случаем. Составим теперь с помощью равенства (1.10) разностное соотношение

$$\langle L_{ij}^2 \rangle - \langle L_{i+1j}^2 \rangle - \langle L_{ij-1}^2 \rangle + \langle L_{i+1j-1}^2 \rangle = 2l^2 \langle \cos \theta_{ij} \rangle \quad (1.11)$$

и затем аппроксимируем его дифференциальным уравнением при больших значениях переменной $t \equiv j - i + 1$. В результате для функции $y(t) \equiv \langle L_{ij}^2 \rangle / l^2$ мы получим

уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon(t), \quad (1.12)$$

в котором $\varepsilon(t) \equiv 2\langle \cos \theta_{ij} \rangle$. Учитывая тождество $\langle L_{1N}^2 \rangle \equiv \langle R^2 \rangle_N$, устремим значение t к N и в левой части уравнения (1.12) воспользуемся формулой (1.7). В итоге мы придем к следующему асимптотическому выражению

$$\langle \cos \theta_{1N} \rangle \sim O(N^{-(d-2)/2}). \quad (1.13)$$

Таким образом, эффект исключенного объема обуславливает степенной закон убывания коэффициента корреляции между направлениями звеньев цепи \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_N с ростом числа N , при этом показатель степени $s = (d - 2)/2$ в (1.13) оказывается меньше единицы для $d < 4$ и больше единицы для $d > 4$.

В наиболее ранних попытках решения данной проблемы использовался метод самосогласованного поля [6–11]. Идея этого метода состоит в замене изолированной макромолекулы идеальной полимерной цепью, но находящейся в некотором так называемом самосогласованном поле $\varphi(\mathbf{R})$. При этом воздействие последнего на бестелесную цепь должно быть эквивалентно в определенном смысле эффекту исключенного объема в реальной макромолекуле. Если бы удалось осуществить эту идею, т.е. определить в явной форме самосогласованное поле $\varphi(\mathbf{R})$, то искомая плотность $W_N(\mathbf{R})$ находится тогда с помощью уравнения Фоккера–Планка

$$\frac{\partial W_N(\mathbf{R})}{\partial N} = \frac{l^2}{2d} \Delta W_N(\mathbf{R}) - \frac{\varphi(\mathbf{R})}{T} W_N(\mathbf{R}) \quad (1.14)$$

и присоединенного к нему "начального" условия

$$W_0(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R}), \quad (1.15)$$

где Δ — оператор Лапласа в \mathcal{R}^d , а $\delta(\mathbf{R})$ — дельта-функция Дирака [12, 13].

Один из ранее предложенных способов реализации метода самосогласованного поля в этой задаче — применение вариационного принципа Кирквуда к свободной энергии полимерной цепи [8]. Согласно этому принципу в распределении Гиббса для макромолекулы

$$\mathcal{D}_N = Q_N^{-1} \exp(-U_N T^{-1}) \prod_{k=0}^{N-1} \delta(R_{k,k+1} - l), \quad (1.16)$$

где $R_{ij} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$ — расстояние между i -м и j -м мономерами, потенциальная энергия взаимодействия между всеми мономерами цепи

$$U_N = \sum_{0 \leq i < j \leq N} U(R_{ij}) \quad (1.17)$$

заменяется однократной суммой

$$\sum_{k=0}^N \varphi(\mathbf{R}_k), \quad (1.18)$$

в которой функция $\varphi(\mathbf{R}_k)$, подлежащая определению, представляет потенциальную энергию k -го мономера в

самосогласованном поле. Далее составляется выражение для свободной энергии цепи

$$F = U - TS = \int (U_N + T \ln \mathcal{D}_N) \mathcal{D}_N \prod_{k=0}^N d^d R_k \quad (1.19)$$

и затем вариация ее по каждой переменной $\varphi(\mathbf{R}_k)$ полагается равной нулю. Решение полученного таким способом уравнения для $\varphi(\mathbf{R})$ и должно давать "наилучшую" возможную аппроксимацию самосогласованного поля. Однако это решение содержит как одночастичные, так и двухчастичные функции распределения координат мономеров цепи. При этом величина $W_N(\mathbf{R})$ рассматривается как одночастичная функция распределения N -го мономера, поскольку положение 0-го мономера фиксировано в начале координат $\mathbf{R} = 0$. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, аналогичной в некотором роде той, с которой приходится иметь дело в теории плотных газов и жидкостей, т.е. существует иерархия n -частичных функций распределения, связанных между собой системой интегральных уравнений. Чтобы получить замкнутое уравнение для искомой функции $W_N(\mathbf{R})$, необходимо воспользоваться какой-то аппроксимацией n -частичной функции распределения, состоящей обычно в факторизации последней. Так, например, аппроксимация двухчастичной функции распределения, эквивалентная приближению Эдвардса в работе [6], приводит к следующему выражению для самосогласованного поля

$$\varphi(\mathbf{R}) = T v_0 c(\mathbf{R}), \quad (1.20)$$

в котором величина

$$c(\mathbf{R}) = \sum_{N \geq 0} W_N(\mathbf{R})$$

определяет плотность мономеров в точке \mathbf{R} . Анализ условия согласования уравнений (1.14) и (1.20) показывает, что поле $\varphi(\mathbf{R})$ в случае $d = 3$ должно зависеть от \mathbf{R} следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{R}) \sim O(R^{-4/3}), \quad (1.21)$$

когда $R^2 < \langle R^2 \rangle_N$. Отсюда тогда следует, что средний квадрат расстояния между концами цепи $\langle R^2 \rangle_N$ ведет себя как $O(N^{6/5})$ для достаточно больших значений N .

Обобщение результатов Эдвардса на случай d -мерного пространства было проведено в работе [14], в которой показано, что для $d < 4$ поле $\varphi(\mathbf{R})$ зависит от \mathbf{R} , как

$$\varphi(\mathbf{R}) \sim O(R^{-2(d-1)/3}), \quad (1.22)$$

и убывает быстрее, чем $O(R^{-2})$, когда $d > 4$. Вследствие этого критический показатель ν в асимптотической зависимости $\langle R^2 \rangle_N / l^2 \sim O(N^{2\nu})$ при $N \rightarrow \infty$ равен $\nu = \nu_F$.

В заключение следует отметить, что описанный выше подход не привел к каким-либо важным результатам для плотности $W_N(\mathbf{R})$. По-видимому, главная причина неэффективности метода самосогласованного поля при определении величины $W_N(\mathbf{R})$ кроется в замене существенно немарковского процесса СББС марковской моделью. Более подробное изложение метода самосогласованного поля можно найти в книгах [15–17].

1.2. Самоизбегающие блуждания на решетках

Проблема исключенного объема инициировала большое количество работ, исследующих СББС на решеточных моделях. Постановка задачи в этих исследованиях довольно проста и может быть сформулирована следующим образом.

Рассмотрим на целочисленной решетке

$$\mathcal{Z}^d = \{(z_1, z_2, \dots, z_d): z_i \in \mathcal{Z}\}$$

самоизбегающие пути, каждый из которых состоит из последовательности точек — узлов решетки $(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N)$ в \mathcal{Z}^d , где $\mathbf{R}_0 = 0$, $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}| = 1$ для $i = 1, 2, \dots, N$, причем $\mathbf{R}_i \neq \mathbf{R}_j$, когда $i \neq j$, и обозначим через $\mathcal{N}(N)$ число всех самоизбегающих путей длины N . Определение асимптотических зависимостей величин $\mathcal{N}(N)$ и $\langle R_N^2 \rangle$ от N при $N \rightarrow \infty$ и принято считать главными вопросами обсуждаемой здесь задачи. Для решения последней были применены как численные расчеты на ЭВМ, так и аналитические подходы. При этом численные методы можно разделить на две группы: одна состоит из некоторых способов прямого перечисления всех самоизбегающих путей на какой-нибудь решетке, а другая содержит различные варианты метода Монте-Карло. Но вследствие ограниченных возможностей методов первой группы, длины N самоизбегающих путей, обрабатываемых ими, пока не превышают значения 10^2 , в связи с чем естественно возникает вопрос: в какой мере полученные таким образом зависимости величин $\mathcal{N}(N)$ и $\langle R_N^2 \rangle$ от N можно считать асимптотическими? Что же касается метода Монте-Карло, то степень достоверности результатов, полученных с его помощью, определяется, разумеется, статистической природой этого метода и тем, насколько удачно выбран алгоритм для генерирования самоизбегающих путей.

Такая постановка задачи СББС была сформулирована впервые в работах Хаммерсли [18–19], где для числа самоизбегающих путей $\mathcal{N}(N)$ установлено следующее неравенство

$$\mathcal{N}(N_1 + N_2) \leq \mathcal{N}(N_1) \mathcal{N}(N_2),$$

из которого вытекает утверждение о существовании неотрицательной постоянной k , называемой константой связности, такой, что

$$0 \leq k = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \log \mathcal{N}(N) < \infty$$

(см. также [20–21]). Существование константы связности означает, что величина $\mathcal{N}(N)$ с ростом N ведет себя как $O(\tilde{z}^N)$, где \tilde{z} есть эффективное координационное число для СББС. Число \tilde{z} зависит от выбора решетки и, например, для плоской квадратной решетки $\tilde{z} \cong 2,64$, а для простой кубической решетки $\tilde{z} \cong 4,68$.

Однако, анализируя результаты численных расчетов величины $\mathcal{N}(N)$ для различных решеточных моделей, Фишер и Сайкс [22] предложили более точную формулу асимптотической зависимости

$$\mathcal{N}(N) \sim \text{const} \cdot N^{\gamma-1} \tilde{z}^N, \quad N \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

в которой показатель γ уже не зависит от типа решетки, а определяется лишь размерностью пространства d . В том

случае, когда $2 \leq d \leq 4$, для показателя γ можно написать приближенную формулу $\gamma \approx 1 + [(4-d)/6]$ согласно численным расчетам его в работе [23].

Как отмечалось выше, результаты многократных вычислений среднеквадратичного расстояния $\langle R_N^2 \rangle$ между началом и концом самоизбегающего пути длины N можно описать зависимостью $\langle R_N^2 \rangle \sim N^{2\nu}$, когда $N \rightarrow \infty$, где $\nu \approx 3/(d+2)$ для $d < 4$ [24–26]. Конечно, более трудная задача — найти асимптотику функции распределения $W_N(\mathbf{R})$ расстояния $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N$ при $N \rightarrow \infty$. Тем не менее с помощью гипотезы масштабной инвариантности (скейлинга), согласно которой статистические свойства СББС при $N \rightarrow \infty$ определяются всего лишь одной характерной длиной

$$\bar{R}_N = \langle R_N^2 \rangle^{1/2} \sim N^\nu, \quad (1.24)$$

была установлена следующая форма асимптотики функции распределения

$$W_N(\mathbf{R}) \sim \bar{R}_N^{-d} \Psi(R \bar{R}_N^{-1}), \quad 1 \ll R_N \ll N, \quad (1.25)$$

где функция $\Psi(t)$ в соответствии с численными расчетами величины $W_N(\mathbf{R})$ аппроксимируется выражением

$$\Psi(t) = \psi(t) \exp(-t^\delta), \quad (1.26)$$

здесь $\psi(t)$ обозначает степенную функцию, поведение которой, однако, может быть различным в случаях $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, и, наконец, показатель δ определяется равенством $\delta = 1/(1-\nu)$ [27–33]. Тогда, если функцию $\psi(t)$ при $t \rightarrow 0$ представить в виде

$$\psi(t) \sim O(t^g), \quad (1.27)$$

то показатели g и γ , как показал Клуазо [34], связаны между собой следующей формулой:

$$\gamma = 1 + \nu g. \quad (1.28)$$

Учитывая в последнем равенстве приведенные выше выражения для γ и ν , получим приближенно: $g \approx \approx (4-d)(d+2)/18$, когда $2 \leq d \leq 4$.

Благодаря непрерывному совершенствованию ЭВМ и численных методов расчета величины $\mathcal{N}(N)$ (см. [35–48]) к настоящему времени для показателей γ и ν установлены следующие значения:

$$\gamma = 1,343 \dots, \quad \nu = 0,749 \dots, \quad \text{если } d = 2,$$

и

$$\gamma = 1,166 \dots, \quad \nu = 0,592 \dots, \quad \text{если } d = 3.$$

В том случае, когда размерность пространства принимает значение $d = 4$, в работе [49] для \bar{R}_N получено

$$\bar{R}_N \sim N^{1/2} (\ln N)^{1/8}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Наконец, для высших пространственных размерностей $d > 4$ Бриджес и Спенсер [50] строго показали, что асимптотика функции распределения расстояния между началом и концом самоизбегающего пути длины N при $N \rightarrow \infty$ является гауссовой функцией и, следовательно, для этого случая имеем $\gamma = 1$ и $\nu = 1/2$ [51].

Важную роль в аналитических методах исследования проблемы самоизбегающих блужданий на решетках играет так называемая n -векторная модель [52, 53].

Согласно определению этой модели в узлах ее пространственной решетки \mathcal{Z}^d локализованы векторы $\boldsymbol{\sigma}_z$ — спины с n компонентами

$$\sigma_{z1}, \sigma_{z2}, \dots, \sigma_{zn},$$

нормированные условием

$$\boldsymbol{\sigma}_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{zi}^2 = n, \quad \forall z \in \mathcal{Z}^d. \quad (1.30)$$

Взаимодействие в этой системе осуществляется только между наиболее близко расположенными спинами, причем их энергия принимает минимальное значение для параллельных спинов. В таком случае модельный гамильтониан $H(\boldsymbol{\sigma})$ выглядит так:

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -J \sum_{(z,z')} \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\sigma}_{z'}, \quad (1.31)$$

где $J > 0$, а суммирование выполняется лишь по всем парам (z, z') соседних узлов решетки \mathcal{Z}^d . Тогда статистическая сумма данной системы равна

$$Q_n = \int \exp(-H(\boldsymbol{\sigma})T^{-1}) \prod_{z \in \mathcal{Z}^d} d\Omega_z; \quad (1.32)$$

здесь $d\Omega = \omega^{-1} d\omega$, $d\omega$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса n -мерного спинового пространства и $\omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — полная поверхность этой сферы.

Чрезвычайно важной характеристикой рассматриваемой модели является ее спин — спинная корреляционная функция

$$\langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \rangle_n = Q_n^{-1} \int \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \exp(-H(\boldsymbol{\sigma})T^{-1}) \prod_{z \in \mathcal{Z}^d} d\Omega_z, \quad (1.33)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, которая пропорциональна корреляционной функции намагниченности $\langle M(0)M(\mathbf{R}) \rangle_n$ соответствующей модели магнетика, где $M(\mathbf{R})$ — локальная намагниченность в точке $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z - \mathbf{R}_z$. Знание корреляционной функции $\langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \rangle_n$ позволяет описать многие свойства магнетиков, из которых здесь отметим восприимчивость

$$\chi = \frac{1}{T} \sum_{z' \in \mathcal{Z}^d} \langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \rangle_n. \quad (1.34)$$

На возможность использования n -векторной модели для решения проблемы СББС впервые указал де Жен [54]. Но для этого необходимо после всех вычислений в этой модели число n устремить к нулю. Поскольку n — натуральное число, то указанный переход к пределу $n \rightarrow 0$ следует рассматривать лишь как математический прием, суть которого состоит в следующем. В формулах (1.32) и (1.33) подынтегральную экспоненту разложим в ряд с помощью равенства

$$\exp(-H(\boldsymbol{\sigma})T^{-1}) = \prod_{(z,z')} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(J/T)^m}{m!} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \right)^m \right], \quad (1.35)$$

где произведение определено только для всех пар соседних узлов решетки \mathcal{Z}^d . Тогда величина Q_n примет вид разложения по степеням параметра взаимодействия J/T ,

коэффициентами которых будут произведения интегралов типа

$$\int \sigma_{zi} \sigma_{zj} \dots \sigma_{zk} d\Omega_z, \quad z \in \mathcal{Z}^d. \quad (1.36)$$

В силу симметрии интегралы в (1.36) от нечетного числа спиновых сомножителей, очевидно, равны нулю. Кроме того, оказывается, что, если число n формально устремить к нулю, то, согласно теореме моментов (см., например, [16]), все интегралы в (1.36) от более двух спиновых сомножителей обращаются в нуль, а интегралы от двух спиновых сомножителей равны

$$\int \sigma_{zi} \sigma_{zj} d\Omega_z = \delta_{ij}, \quad (1.37)$$

здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда следует, что для нуль-компонентной спиновой модели в равенствах (1.32) и (1.33) вместо функции $\exp(-H(\sigma)/T)$ достаточно использовать величину

$$\prod_{(z,z')} \left[1 + JT^{-1} \sigma_z \sigma_{z'} + \frac{1}{2} (JT^{-1})^2 (\sigma_z \sigma_{z'})^2 \right]. \quad (1.38)$$

Далее, разложим выражение (1.38) в ряд и проинтегрируем его по всем ориентациям спинов $\sigma_z, z \in \mathcal{Z}^d$. Соответственно теореме моментов не равными нулю будут лишь интегралы от произведений вида

$$(JT^{-1})^N \sigma_{zi}^2 \sigma_{z'i}^2 \sigma_{z''i}^2 \dots \sigma_{z'''i}^2, \quad (1.39)$$

где последовательность z, z', z'', \dots, z''' описывает замкнутую цепь из N пар соседних узлов $(z, z'), (z', z''), \dots, (z''', z)$ на решетке \mathcal{Z}^d . Если каждой паре соседних узлов сопоставить отрезок прямой, их соединяющий, то выражение (1.39) можно изобразить графически в виде замкнутого самонепересекающегося пути, называемого обычно петлей. Выполняя затем надлежащее суммирование по всем значениям компонент спина и учитывая равенство (1.37), получим в результате вклад одной петли, равный $n(J/T)^N$, где N — длина петли. Отсюда тогда следует, что в случае $n = 0$ вклад всех петель в статистическую сумму Q_0 равен нулю и мы приходим в итоге к тривиальному результату:

$$Q_0 = 1. \quad (1.40)$$

Подставим теперь выражение (1.38) в формулу (1.33) вместо экспоненты и произведение в нем разложим в ряд так же, как и в описанном выше случае. Однако на этот раз под знаком интеграла в (1.33) фигурируют два "внешних" спиновых множителя σ_{zi} и $\sigma_{z'i}$, в связи с чем отличными от нуля могут быть интегралы от следующих произведений

$$(JT^{-1})^N \sigma_{zi} (\sigma_{zi} \sigma_{z''i} \dots \sigma_{z'''i} \sigma_{z'i}) \sigma_{z'i}. \quad (1.41)$$

В этом случае, если положить $n = 0$, единственными путями, вносящими ненулевой вклад в значения корреляционной функции, оказываются самонепересекающиеся траектории, соединяющие узлы z и z' . Поскольку в выражении (1.41) индекс i компоненты "внешних" спинов фиксирован, то теперь необходимо выполнить

только суммирование по всем самоизбегающим траекториям, соединяющим узлы z и z' . В итоге мы получим важную формулу

$$\langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \rangle_0 = \sum_N \mathcal{N}_{zz'}(N) (JT^{-1})^N, \quad (1.42)$$

в которой $\mathcal{N}_{zz'}(N)$ обозначает число всех самоизбегающих путей длины N , соединяющих узлы z и z' на решетке \mathcal{Z}^d . Именно результат (1.42) служит основой для использования нуль-компонентной спиновой модели в исследовании проблемы СББС.

В качестве примера применения формулы (1.42) воспользуемся ею в равенстве (1.34). В результате имеем

$$\chi = \frac{1}{T} \sum_N \mathcal{N}(N) (JT^{-1})^N, \quad (1.43)$$

где

$$\mathcal{N}(N) = \sum_{z' \in \mathcal{Z}^d} \mathcal{N}_{zz'}(N)$$

есть полное число самоизбегающих путей длины N , начинающихся в узле $z \in \mathcal{Z}^d$. Если в равенство (1.43) вместо величины $\mathcal{N}(N)$ подставить ее асимптотическое выражение (1.23), то получим приближенно

$$\chi \approx \frac{\text{const}}{T} F\left(\frac{T_c}{T}, 1 - \gamma\right), \quad (1.44)$$

где $T_c = \tilde{z}J$ — критическое значение температуры

$$F(t, 1 - \gamma) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{\gamma-1} t^N, \quad |t| < 1.$$

Учитывая соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1 - t)^{\gamma} F(t, 1 - \gamma) = \Gamma(\gamma), \quad \gamma > 0$$

(см. [55]) в формуле (1.44), мы придем к следующей асимптотике для восприимчивости:

$$\chi \sim \frac{\text{const}}{T_c} \tau^{-\gamma}, \quad (1.45)$$

когда положительная величина $\tau = (T - T_c)/T_c$ стремится к нулю. Таким образом, параметр γ определяет степень сингулярности величины χ при $T \rightarrow T_c$, в связи с чем его называют критическим показателем восприимчивости.

Вернемся к формуле (1.42) и выясним поведение корреляционной функции при $T \rightarrow T_c$. Для этого воспользуемся определением

$$W_N(\mathbf{R}) = \frac{\mathcal{N}_{zz'}(N)}{\mathcal{N}(N)}, \quad (1.46)$$

где $\mathbf{R} = |\mathbf{R}_{z'} - \mathbf{R}_z|$, и асимптотиками в (1.23) и (1.25).

Тогда для достаточно малых значений τ имеем

$$\langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i} \rangle_0 \cong \sum_N \exp(-\tau N) N^{\gamma-1-vd} \Psi(RN^{-v}), \quad (1.47)$$

откуда следует, что величины τ и N являются взаимно сопряженными и, стало быть, малым значениям τ соответствуют большие значения N . Заменяя теперь

суммирование в (1.47) интегрированием по N , получим в итоге

$$\langle \sigma_{zi} \sigma_{z'i'} \rangle_0 \cong R^{2-d-\eta} G(R\tau^\nu) \quad (1.48)$$

для τ вблизи критической точки $\tau = 0$; здесь η — новый критический показатель, определяемый из равенства

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (1.49)$$

а $G(x)$ — безразмерная функция, удовлетворяющая условию

$$G(x) \sim \begin{cases} 1, & x \rightarrow 0, \\ x^\eta \exp(-x), & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.50)$$

Из формул (1.48) и (1.50) можно заключить, что величина

$$\bar{R} \sim \tau^{-\nu} \quad (1.51)$$

в данной модели играет роль длины корреляции, определяющей средний размер области пространства \mathcal{R}^d , заполненной самонепересекающимися траекториями. Поэтому индекс ν называется критическим показателем корреляционной длины. Таким образом, достаточно знать лишь два независимых критических показателя, например, η и ν , так как через них выражаются все остальные показатели.

1.3. Связь с теорией критических явлений

Начало 70-х годов ознаменовалось крупным достижением в физике критических явлений, что в свою очередь оказало сильное влияние на развитие статистической физики полимеров и, в частности, на результаты исследования проблемы исключенного объема. В работах Вильсона [56, 57] и ряда других авторов [58–60] был развит ренормгрупповой метод для вычисления критических показателей, определяющих степень сингулярности различных термодинамических параметров в точке фазового перехода. Идейную основу метода Вильсона составляет так называемая гипотеза универсальности Каданова [61, 62], согласно которой критические показатели должны быть нечувствительными к деталям поведения потенциала взаимодействия, а определяться главным образом крупномасштабными свойствами такими, как размерность системы и симметрия ее гамильтониана.

Для реализации этой гипотезы Каданов предложил сгруппировать узлы исходной решетки \mathcal{Z}^d в идентичные блоки, каждый со стороной L , в результате чего получится новая решетка с той же симметрией, как и у \mathcal{Z}^d , но с постоянной решеткой, равной L . При этом в роли узлов новой решетки теперь выступают центры блоков, каждый из которых содержит L^d узлов исходной решетки. Поскольку длина корреляции \bar{R} неограниченно растет при $\tau \rightarrow 0$, как это следует из асимптотической формулы (1.51), то для достаточно малых значений τ , очевидно, существует число L такое, что

$$1 \ll L \ll \bar{R}. \quad (1.52)$$

Тогда в каждом блоке находятся L^d спинов, которые сильно коррелируют между собой, так как согласно условию (1.52) они расположены внутри области корреляции. Отсюда следует, что большая часть спинов любого блока должна иметь преимущественное направ-

ление, вследствие чего спиновой блок ведет себя как один эффективный спин. Кроме того, поскольку спины в исходной решетке взаимодействуют только с наиболее близко расположенными спинами, то и спиновые блоки также будут взаимодействовать только с ближайшими блоками. Поэтому можно построить блочный гамильтониан, подобный выражению в (1.31), но описывающий взаимодействие лишь между соседними спиновыми блоками. Для этого определим блочный спин как

$$\sigma_{\bar{z}} = L^{-d} \sum_{z \in b(\bar{z})} \sigma_z,$$

здесь суммирование выполняется по всем узлам z , составляющим блок $b(\bar{z})$, центр которого совпадает с узлом \bar{z} новой решетки \mathcal{Z}^d . Тогда блочный гамильтониан

$$H'(\sigma) = -J' \sum_{(\bar{z}, \bar{z}') \in \mathcal{Z}^d} \sigma_{\bar{z}} \sigma_{\bar{z}'} \quad (1.53)$$

с новым параметром J' , зависящим, разумеется, от J , может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(-H'(\sigma)T^{-1}) &= \\ &= \int \exp(-H(\sigma)T^{-1}) \prod_{\bar{z}} \delta\left(\sigma_{\bar{z}} - L^{-d} \sum_{z \in b(\bar{z})} \sigma_z\right) \prod_z d\Omega_z, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где индексы z и \bar{z} пробегают по всем узлам решеток \mathcal{Z}^d и \mathcal{Z}^d соответственно. Нетрудно видеть, что статистическая сумма, определенная в (1.32), теперь принимает вид

$$\mathcal{Q}_n = \int \exp(-H'(\sigma)T^{-1}) \prod_{\bar{z} \in \mathcal{Z}^d} d\Omega_{\bar{z}}.$$

В соответствии с гипотезой универсальности корреляция между блочными спинами $\sigma_{\bar{z}}$ и $\sigma_{\bar{z}'}$ должна иметь такую же структуру, как и корреляция между спинами σ_z и $\sigma_{z'}$ в исходной модели, тем самым роль масштабного параметра L в гамильтониане оказывается несущественной. Построение блочного гамильтониана $H'(\sigma)$ в (1.54) из первоначального решеточного гамильтониана $H(\sigma)$ называется преобразованием Каданова и обозначается так:

$$H'(\sigma)T^{-1} = \hat{K}_L H(\sigma)T^{-1}. \quad (1.55)$$

Очевидно, с помощью $H'(\sigma)$ можно построить другой блочный гамильтониан $H''(\sigma)$, блочные спины которого определены на еще больших блоках. Действительно, подобно предыдущему построению, из $(L')^d$ строим суперблок, затем определяем соответствующий ему блочный спин и, наконец, новый блочный гамильтониан $H''(\sigma)$. Последняя процедура описывается следующим преобразованием:

$$H''(\sigma)T^{-1} = \hat{K}_{L'} H'(\sigma)T^{-1}. \quad (1.56)$$

Объединяя теперь равенства (1.55) и (1.56), а также учитывая коммутативность операторов \hat{K}_L и $\hat{K}_{L'}$, получим

$$\hat{K}_L \hat{K}_{L'} = \hat{K}_{LL'}. \quad (1.57)$$

Множество операторов \hat{K}_L образует коммутативную полугруппу, но не группу, поскольку в нем не определена обратная операция. Смысл формулы (1.57) состоит в том, что если построить блок из L^d узлов решетки \mathcal{Z}^d , а затем из $(L')^d$ отдельных блоков составить суперблок, то в итоге мы получим такой же результат, как и после построения сразу большого блока из $(LL')^d$ узлов исходной решетки. Преобразование Каданова сыграло большую роль при формулировке Вильсоном ренормгруппового метода в теории критических явлений. Соответственно преобразованию в (1.55) между параметрами взаимодействия $K = J/T$ и $K' = J'/T$ имеет место функциональная зависимость $K' = f_L(K)$. Согласно гипотезе Каданова все модельные системы, полученные в результате последовательных разбиений исходной решетки \mathcal{Z}^d на блоки, ведут себя одинаково вблизи критической точки. Поэтому можно написать

$$\bar{R}(K) = L\bar{R}(f_L(K)), \quad (1.58)$$

т.е. увеличение размера блока в L раз приводит к сокращению корреляционной длины в такое же число раз. Ради удобства будем теперь считать масштабный параметр L вещественным положительным числом и писать $K_L = f_L(K)$. Далее примем во внимание предположение Вильсона, по которому относительное изменение, например, величины K_L , вызванное переходом $L \rightarrow L'$, зависит лишь от K_L , но не может зависеть явно от L . Тогда для бесконечно малого изменения параметра L : $L' - L = \delta L$ соответствующее изменение K_L равно

$$K_{L+\delta L} - K_L \cong \left(\frac{dK_L}{dL} \right) \delta L \equiv \delta h,$$

где величина h зависит явно только от K_L , но не от L . В результате отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{1}{L} h(K_L), \quad (1.59)$$

называемое уравнением ренормализационной группы (или РГ-уравнением). Принципиальным моментом в излагаемом подходе является предположение об аналитичности функции $h(K)$ даже в критической точке $K = K_c$, в которой, по определению,

$$\bar{R}(K_c) = \infty.$$

Но в критической точке, согласно уравнению (1.58), мы имеем также $\bar{R}(K_L) = \infty$ для всех конечных значений L . Поэтому решение РГ-уравнения в (1.59) с начальным условием $K = K_c$ должно иметь вид $K_L = K_c$ при всех L , а для этого необходимо, чтобы

$$h(K_c) = 0. \quad (1.60)$$

Несложный анализ уравнений (1.58) и (1.59) показывает, что критическая точка K_c оказывается неустойчивой неподвижной точкой РГ-уравнения. Если теперь функцию $h(K_L)$ линеаризовать в окрестности критической точки, то, принимая во внимание равенство (1.60), РГ-уравнение можно записать приближенно так:

$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{y}{L} (K_L - K_c), \quad (1.61)$$

где

$$y = \left. \frac{dh(K)}{dK} \right|_{K=K_c}. \quad (1.62)$$

Тогда решение уравнения (1.61) с начальным условием $K_L = K$ при $L = 1$ будет иметь следующий вид:

$$(K_c - K_L) = (K_c - K)L^y. \quad (1.63)$$

Далее выберем для K_L какое-нибудь значение $K_L = \alpha K_c$, $0 < \alpha < 1$, и обозначим через L_α то значение L , при котором достигается указанное значение параметра K_L . Из равенства (1.63) находим

$$L_\alpha = \left[\frac{(1 - \alpha)K_c}{K_c - K} \right]^{1/y}.$$

Наконец, воспользуемся последним выражением в (1.58) и тем, что вблизи критической точки разность $K_c - K$ можно представить в виде $K_c - K \cong \tau K_c$. В результате для достаточно малых τ получим

$$\bar{R}(K) \cong \left(\frac{1 - \alpha}{\tau} \right)^{1/y} \bar{R}(\alpha K_c), \quad (1.64)$$

и, следовательно, индексы y и ν связаны между собою равенством $y = 1/\nu$.

Чтобы описанная выше схема давала в итоге численные выражения для критических показателей, более эффективно, оказалось, использовать непрерывный аналог n -векторной модели, когда каждой точке \mathbf{x} пространства \mathcal{Z}^d сопоставляется вектор спина $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, принимающий любые значения. Таким образом, вместо дискретного набора переменных σ_z мы имеем теперь непрерывный набор спиновых переменных, т.е. спинное поле $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$. В новой модели блочный спин $\boldsymbol{\sigma}_x$, аналогичный среднему спину блока $\boldsymbol{\sigma}_z$ решетки \mathcal{Z}^d , удобно определить следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \int_{k < \Lambda} \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma}_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \quad (1.65)$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{\sigma}_x$ представляет собой сглаженную величину, описывающую спиновую конфигурацию в масштабах L вплоть до $L \sim \Lambda^{-1}$. При выборе гамильтониана, моделирующего взаимодействие между блочными спинами $\boldsymbol{\sigma}_x$, обычно руководствуются соображениями простоты и удобства. В этом смысле наиболее подходящим оказался гамильтониан в форме, предложенной Гинзбургом и Ландау:

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{\sigma}] = \int \left[a\boldsymbol{\sigma}_x^2 + b\boldsymbol{\sigma}_x^4 + c(\nabla\boldsymbol{\sigma}_x)^2 \right] d^d x; \quad (1.66)$$

здесь $\mathcal{H}[\boldsymbol{\sigma}] = H[\boldsymbol{\sigma}]/T$, коэффициенты a, b, c — аналитические функции от T и, возможно, других параметров,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x^2 &= \sum_{j=1}^n (\sigma_{xj})^2, \quad \boldsymbol{\sigma}_x^4 = (\boldsymbol{\sigma}_x^2)^2, \\ (\nabla\boldsymbol{\sigma}_x)^2 &= \sum_{r=1}^d \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_r} \right)^2, \end{aligned}$$

причем последнее выражение как раз и описывает взаимодействие между соседними блочными спинами

$\sigma_{\mathbf{x}}$. Если теперь учесть равенство (1.65) в (1.66), то в результате получим

$$\mathcal{H}[\sigma] = \int_{k < A} (a + ck^2) \sigma_{\mathbf{k}} \sigma_{-\mathbf{k}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} + \frac{b}{(2\pi)^{3d}} \int_{(k_i < A)} (\sigma_{\mathbf{k}_1} \sigma_{\mathbf{k}_2}) (\sigma_{\mathbf{k}_3} \sigma_{\mathbf{k}_4}) \delta\left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i\right) \prod_{i=1}^4 d^d k_i, \quad (1.67)$$

где интегрирование выполняется только по тем векторам \mathbf{k}, \mathbf{k}_i , длины которых не превышают значения A . С помощью набора параметров

$$\mu = (a, b, c) \quad (1.68)$$

можно охарактеризовать функцию распределения

$$W[\sigma] = Q^{-1} \exp(-\mathcal{H}[\sigma]). \quad (1.69)$$

Множество значений параметров в (1.68) образует трехмерное параметрическое пространство, каждая точка μ которого представляет вполне определенную функцию распределения W . Тогда переход от W к другой функции распределения W' соответствует некоторому преобразованию, переводящему точку μ в точку μ' . Чтобы установить закон этого соответствия, рассмотрим следующий переход от W к W' .

Сначала проинтегрируем функцию $W[\sigma]$ по всем возможным значениям $\sigma_{\mathbf{k}}$, для которых $A' < k < A$, где $A' = A/L$, $L > 1$, и результат представим в виде

$$W'[\sigma] = (Q')^{-1} \exp(-\mathcal{H}'[\sigma]) = Q^{-1} \int \exp(-\mathcal{H}[\sigma]) \prod_{A' < k < A} d^n \sigma_{\mathbf{k}}. \quad (1.70)$$

Эта операция сглаживания преобразует исходный гамильтониан \mathcal{H} , зависящий от параметра обрезания A , в новый гамильтониан \mathcal{H}' , который будет зависеть уже от параметра A' . Далее, подвергнем переменную \mathbf{k} масштабному преобразованию

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = L\mathbf{k} \quad (1.71)$$

и одновременно с этим изменим нормировку спинных полей

$$\sigma_{\mathbf{k}} \rightarrow \sigma'_{\mathbf{k}'} = \lambda_L^{-1} \sigma_{\mathbf{k}}. \quad (1.72)$$

Операция сглаживания в (1.70) сокращает область определения поля $\sigma_{\mathbf{k}}$ от интервала $0 < k < A$ до $0 < k < A'$, в то время как масштабное преобразование (1.71) растягивает уменьшенный интервал до прежнего размера. В результате преобразований (1.71) и (1.72) гамильтониан $\mathcal{H}'[\sigma']$ описывает теперь новое поле $\sigma'_{\mathbf{k}'}$ в исходной области переменной \mathbf{k} , а коэффициенты a', b', c' в выражении для нового гамильтониана $\mathcal{H}'[\sigma']$ образуют другой набор параметров

$$\mu' = (a', b', c'). \quad (1.73)$$

Таким образом, вышеописанный переход от W к W' можно рассматривать формально, как преобразование одного набора параметров (1.68) в другой (1.73):

$$\hat{R}_L \mu = \mu', \quad (1.74)$$

здесь операторы \hat{R}_L , как и преобразования Каданова, образуют непрерывную полугруппу ренормировочных преобразований. Поэтому должно выполняться условие

$$\hat{R}_L \hat{R}_{L'} \mu = \hat{R}_{LL'} \mu, \quad (1.75)$$

вследствие чего $\lambda_L \lambda_{L'} = \lambda_{LL'}$. Но последнее равенство справедливо, лишь когда $\lambda_L = L^\alpha$, а показатель степени α не зависит от L . В определенном смысле использование распределений $W[\sigma]$ и $W'[\sigma']$ эквивалентно. Так, например, для преобразования Фурье спин-спиновой корреляционной функции

$$D(\mathbf{k}, \mu) = \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}) \langle \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle_W d^d R = \langle |\sigma_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_W \quad (1.76)$$

имеет место следующее равенство:

$$D(\mathbf{k}, \mu) = \lambda_L^2 D(L\mathbf{k}, R_L \mu). \quad (1.77)$$

Отсюда видно, что усреднение некоторой величины, являющейся произведением компонент преобразованного спинного поля по преобразованной функции распределения W' , дает тот же результат, что и усреднение этой величины в ее первоначальном виде по исходной функции распределения W .

Отправным пунктом применения ренормгруппы в исследовании критических явлений служит инвариантность гамильтониана рассматриваемой системы относительно РГ. В связи с этим определим неподвижную точку μ^* преобразования \hat{R}_L как

$$\hat{R}_L \mu^* = \mu^* \quad (1.78)$$

для всех $L > 1$. Очевидно, равенство (1.78) будет справедливо и в пределе при $L \rightarrow \infty$. Предположим, что существует по крайней мере одна неподвижная точка μ^* , и определим ее критическую поверхность как множество точек μ параметрического пространства, удовлетворяющих условию

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \hat{R}_L \mu = \mu^*. \quad (1.79)$$

Кроме того, предположим, что уравнение (1.74), в котором точки μ и μ' расположены вблизи μ^* , можно заменить приближенно следующим соотношением

$$\hat{R}_L^\delta \delta \mu = \delta \mu', \quad (1.80)$$

где $\delta \mu = \mu - \mu^*$, $\delta \mu' = \mu' - \mu^*$, а \hat{R}_L^δ — линейный оператор, полученный в результате линеаризации оператора \hat{R}_L . Если теперь обозначить посредством $\rho_j(L)$ и e_j собственные значения и соответствующие им собственные векторы оператора \hat{R}_L^δ , то вследствие равенств

$$\hat{R}_L^\delta \hat{R}_{L'}^\delta e_j = \hat{R}_{LL'}^\delta e_j, \\ \rho_j(L) \rho_j(L') = \rho_j(LL')$$

имеем

$$\rho_j(L) = L^{y_j}, \quad (1.81)$$

где показатель степени y_j не зависит от L . Далее, отмечая зависимость величины μ от T или $\tau = (T - T_c)/T_c$,

разложим вариацию $\delta\mu(\tau)$ по собственным векторам e_j оператора \hat{R}_L^t :

$$\delta\mu(\tau) = \mu(\tau) - \mu^* = \sum_j t_j(\tau) e_j. \quad (1.82)$$

Тогда из равенств (1.80) – (1.82) следует

$$\delta\mu'(\tau) = \sum_j t_j(\tau) L^{y_j} e_j. \quad (1.83)$$

Согласно основной гипотезе теории критических явлений значение $\mu(0)$ принадлежит критической поверхности неподвижной точки μ^* и, следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \hat{R}_L \mu(0) = \mu^*,$$

а $\mu(\tau)$ не принадлежит этой поверхности, если $\tau \neq 0$. Так как $\mu(\tau)$ — аналитическая функция, то для малых τ точка $\mu(\tau)$, очевидно, расположена вблизи критической поверхности. Тогда для достаточно больших L точка $\hat{R}_L \mu(\tau)$ может оказаться в малой окрестности неподвижной точки μ^* , но затем при дальнейшем увеличении L она станет удаляться от μ^* . Разумеется, характер поведения точки $\hat{R}_L \mu(\tau)$ зависит от значений показателей y_j в выражении (1.83). Предположим, что один из этих показателей, например y_1 , принимает положительное значение, в то время как остальные — отрицательные. В таком случае при $L \gg 1$ имеем

$$\hat{R}_L \mu(\tau) \cong \mu^* + \hat{R}_L^t \delta\mu(\tau) = \mu^* + t_1(\tau) L^{y_1} e_1 + O(L^{y_2}), \quad (1.84)$$

где $y_2 < 0$ — наибольший из всех отрицательных показателей. Учитывая равенство $t_1(0) = 0$ и аналитичность функции $t_1(\tau)$, разложим ее в ряд

$$t_1(\tau) = A_1 \tau + A_2 \tau^2 + \dots, \quad A_1 > 0. \quad (1.85)$$

Тогда для малых значений τ из формул (1.84) и (1.85) следует

$$\begin{aligned} \hat{R}_L \mu(\tau) &\cong \mu^* + A_1 \tau L^{y_1} e_1 + O(L^{y_2}) = \\ &= \mu^* + (L \bar{R}^{-1})^{1/y} e_1 + O(L^{y_2}), \end{aligned} \quad (1.86)$$

где, по определению,

$$v^{-1} = y_1, \quad \bar{R} = |A_1 \tau|^{-v}.$$

Чтобы установить зависимость функции $D(\mathbf{k}, \mu(\tau))$ от τ и вектора \mathbf{k} , воспользуемся выражениями (1.86) и $\lambda_L = L^\alpha$ в равенстве (1.77). В результате имеем

$$D(\mathbf{k}, \mu(\tau)) = L^{2\alpha} D(L\mathbf{k}, \mu^* + (L \bar{R}^{-1})^{1/y} e_1 + O(L^{y_2})). \quad (1.87)$$

Полагая здесь $L = \bar{R}$, получим

$$D(\mathbf{k}, \mu(\tau)) = \bar{R}^{2\alpha} D(\bar{R}\mathbf{k}, \mu^* + e_1 + O(\bar{R}^{y_2})). \quad (1.88)$$

Если теперь в последнем равенстве пренебречь членом $O(\bar{R}^{y_2})$, когда $\tau \rightarrow 0$, то корреляционная функция $D(\mathbf{k}, \mu(\tau))$ примет вид произведения величины $\bar{R}^{2\alpha}$ на функцию $\bar{R}\mathbf{k}$, подтверждая тем самым гипотезу подо-

бия. Далее, в формуле (1.87) положим $\tau = 0$ ($\bar{R} \rightarrow \infty$), а $L = 1/k$. Тогда

$$D(\mathbf{k}, \mu(0)) \cong k^{-2\alpha}, \quad (1.89)$$

и, следовательно, согласно определению критического показателя η приходим к равенству

$$2\alpha = 2 - \eta.$$

Наконец, в формуле (1.88) положим $k = 0$. В этом случае для достаточно малых τ находим

$$D(0, \mu(\tau)) \cong \bar{R}^{2-\eta} \cong \tau^{-(2-\eta)v} \quad (1.90)$$

и, таким образом, в соответствии с определением критического показателя γ получим приведенный выше закон подобия $\gamma = (2 - \eta)v$.

Для определения значений критических показателей Вильсон и Фишер [58] выдвинули идею ε -разложения искомых величин по параметру $\varepsilon = 4 - d$ отклонения размерности d пространства от размерности $d = 4$. Последняя оказалась выделенной в том смысле, что для $d > 4$ в данной модели можно использовать обычную теорию возмущений. Что касается случая $d = 4$, то подробное исследование его было выполнено в работе Ларкина и Хмельницкого [63]. Процедура ε -разложения позволяет определить значения критических показателей в виде степенных рядов относительно ε . Как показывают вычисления, коэффициенты ε -рядов сначала убывают, но затем с ростом порядкового номера начинают быстро возрастать, что свидетельствует об асимптотическом характере этих рядов. Таким образом, указанный метод может быть эффективным лишь для пространственных размерностей, близких к $d = 4$, хотя физический смысл имеют, разумеется, только целочисленные значения d . Результаты вычислений критических показателей с помощью ε -разложений приведены в работах [64], [65] (см. также [59], [60], [66]). С точностью до членов порядка $O(\varepsilon^3)$ выражения для критических показателей η , v и γ таковы:

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (1.91)$$

$$v = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)} \varepsilon + \frac{n+2}{8(n+8)^3} (n^2 + 23n + 60) \varepsilon^2 + \dots, \quad (1.92)$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{n+2}{4(n+8)^3} (n^2 + 22n + 52) \varepsilon^2 + \dots \quad (1.93)$$

Анализ структуры ε -рядов показывает, что фигурирующий в формулах (1.91)–(1.93) множитель $(n+2)$ присутствует и во всех последующих их членах. Благодаря этому факту рассматриваемая здесь n -векторная модель может описывать также и гауссов случай: $\eta = 0$, $v = 1/2$, $\gamma = 1$, если число компонент в ней формально положить равным $n = -2$ [67, 68].

Теперь вернемся к нашей проблеме и воспользуемся эквивалентностью моделей самоизбегающего блуждания и нуль-компонентного магнетика. Тогда, полагая $n = 0$ в (1.91)–(1.93), мы получим в рамках ε -разложений следующие значения для критических

показателей проблемы СББС:

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{64} + O(\varepsilon^3), \quad (1.94)$$

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\varepsilon + \frac{15}{512}\varepsilon^2 + \dots, \quad (1.95)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{8}\varepsilon + \frac{13}{256}\varepsilon^2 + \dots \quad (1.96)$$

Если в формулах (1.94)–(1.96) удержать лишь явно указанные слагаемые и принять $\varepsilon = 1$, то в случае $d = 3$ критические показатели приближенно равны: $\eta \approx 0,016$, $v \approx 0,592$, $\gamma \approx 1,176$, что довольно неплохо согласуется с результатами соответствующих численных расчетов. Однако такое согласие заметно ухудшается при учете следующих по порядку членов в этих формулах, поэтому оно может быть вполне случайным.

Изложенный метод Каданова–Вильсона можно реализовать в проблеме СББС непосредственно в виде так называемой процедуры децимации [69] (см. также [16], [17]). Согласно последней полимерная цепь из N звеньев разбивается на $N_1 = N/g$ одинаковых блоков, содержащих по g звеньев, последовательно соединенных между собой. Каждый такой блок теперь рассматривается как новое эффективное звено с новыми значениями его длины l_1 и величины исключенного объема v_1 . Для определения l_1 необходимо учесть взаимодействия всех мономеров, принадлежащих одному блоку, а для нахождения v_1 следует учесть как взаимодействие между двумя блоками, удаленными достаточно далеко друг от друга вдоль цепи, так и все взаимодействия внутри каждого из них. В результате мы получим полимерную цепь с новыми параметрами: N_1 , l_1 , v_1 , зависящими, разумеется, от исходных значений N , l и v . Эта процедура группировки звеньев в блоки затем многократно повторяется, и на каждом k -м этапе необходимо определять ренормированные значения l_k и v_k . Связь между двумя последовательными шагами в этом процессе описывается рекуррентными соотношениями для l_k и v_k или для безразмерной величины $u_k = v_k/l_k^d$: $u_k = f(u_{k-1})$. При $k \rightarrow \infty$ последовательность чисел u_k сходится к некоторому предельному значению u^* — корню уравнения: $u^* = f(u^*)$, что как раз и является отражением гипотезы универсальности. В количественном отношении этот подход реализован только в случае $\varepsilon \ll 1$, а результат для v в первом порядке по ε совпадает с выражением (1.95).

Вычисление значений критических показателей для реальных систем ($d = 2, 3$) с помощью метода Вильсона является, очевидно, приближенным, а установить точность этого метода в настоящее время не представляется возможным.

Наибольшее число точных результатов в физике критических явлений получено для двумерных решеточных моделей. К ним следует отнести выдающийся результат Нинхейса [70], установленный для критических показателей двумерной векторной модели или, иначе, $O(n)$ -модели на шестиугольной решетке. Статистическую сумму этой системы удобно представить в следующем виде:

$$O(n) = \int \prod_{(z,z')} (1 + x\sigma_z\sigma_{z'}) \prod_z W(\sigma_z) d^n\sigma_z, \quad (1.97)$$

где первое произведение под знаком интеграла распространяется на все пары ближайших соседних узлов шестиугольной решетки. Спиновая функция распределения $W(\sigma)$ в (1.97) является либо изотропной в n -мерном спиновом пространстве, т.е. инвариантной относительно произвольных вращений вектора спина, либо инвариантной относительно кубических преобразований, т.е. перестановок и инверсий компонент спина. При этом функция $W(\sigma)$ и длина вектора спина нормированы так, чтобы

$$\int W(\sigma) d^n\sigma = 1, \quad \int W(\sigma)(\sigma\sigma) d^n\sigma = n.$$

Нетрудно показать (см. [71]), что статистическую сумму в (1.97) можно разложить по всем диаграммам множества D , содержащим петли на шестиугольной решетке:

$$Q_{O(n)} = \sum_D x^L n^c; \quad (1.98)$$

здесь c обозначает число петель в диаграмме, а L — их общую длину. Замечательная особенность указанной $O(n)$ -модели — ее универсальность. В самом деле, если допустить, что параметр n в этой модели может принимать любые вещественные значения, то, придавая ему некоторые вполне определенные значения, получим известные частные случаи. Например, полагая $n = -2$, мы придем, как уже отмечалось выше, к гауссовой модели, в случае $n = 0$ — к задаче о самоизбегающих блужданиях, $n = 1$ соответствует модели Изинга, а $n = 2$ — ху-модели. Кроме того, посредством ряда преобразований, оставляющих инвариантным выражение для статистической суммы в (1.98), доказывается, что данная $O(n)$ -модель эквивалентна модели двумерного кулоновского газа, благодаря чему и были получены главные результаты. Подробное описание модели кулоновского газа и ее применение в теории фазовых переходов для $d = 2$ дано в обзорной работе Нинхейса [72]. Приведенные в статье [70] основные соотношения, связывающие величину n , где $-2 \leq n \leq 2$, и значения критических показателей для обсуждаемой здесь $O(n)$ -модели, имеют следующий вид:

$$n = -2 \cos \frac{2\pi}{t}, \quad (1.99)$$

$$\frac{1}{v} = 4 - 2t, \quad (1.100)$$

$$2 - \frac{\eta}{2} = 1 + \frac{3}{4t} + \frac{t}{4}, \quad (1.101)$$

а параметр t принимает значения в промежутке $1 \leq t \leq 2$. Для того чтобы воспользоваться указанными результатами в интересующей нас нуль-компонентной $O(n)$ -модели, в формулах (1.99)–(1.101), очевидно, необходимо положить $t = 4/3$. В итоге получим $\eta = 5/24$, $v = 3/4$, $\gamma = 43/32$, что находится в хорошем согласии с соответствующими результатами численных расчетов. К сожалению, для трехмерных решеточных моделей не получено до сих пор ни одного точного результата.

1.4. Метод континуального интегрирования

Центральное место в различных подходах к исследованию проблемы СББС занимает РГ-метод. Существует несколько ренормгрупповых схем, одна из которых связана с методом Вильсона и рассмотрена выше. Однако, как уже отмечалось, множество преобразова-

ний Вильсона на самом деле образует полугруппу. Вместе с тем для прямого изучения статистики полимеров или самоизбегающих блужданий существуют и такие схемы ренормировочных преобразований, которые описываются при помощи истинной группы, называемой тоже ренормализационной группой. Последняя была обнаружена впервые в квантовой теории поля Штюкельбергом и Петерманом [73], а затем фактически использована в работе Гелл-Манна и Лоу [74] для получения ультрафиолетовой асимптотики функции Грина фотона. В дальнейшем РГ-метод был развит в работах Боголюбова и Ширкова [75, 76]. Чтобы отличить эту (истинную) группу ренормировочных преобразований от ренормгруппы Вильсона, ее называют обычно полевой ренормгруппой. Поскольку последняя является непрерывной группой, то, как известно, ее можно описать дифференциальными уравнениями Ли, чрезвычайно полезными для практических целей. В дальнейшем оказалось, что и полевой РГ-метод может быть включен в различные способы исследования проблемы СББС.

В этом и последующих разделах будут рассмотрены непрерывные модели для проблемы СББС, что позволит широко использовать при ее решении аналитические методы статистики и полевой РГ-метод.

Здесь мы кратко опишем континуальный подход к нашей задаче, полное изложение которого содержится в монографии Фрида [1]. Формулировка проблемы исключенного объема в терминах метода континуального интегрирования была дана впервые в известной работе Эдвардса [6]. Последняя стимулировала интенсивное развитие такого подхода в многочисленных работах на эту тему [77–90].

Континуальная модель полимерной цепи получается в результате предельного перехода, в котором число ее звеньев устремляется к бесконечности, а эффективная длина каждого звена стремится к нулю таким образом, чтобы общая контурная длина цепи L при этом оставалась конечной величиной. Тогда любая допустимая пространственная конфигурация полимера будет описываться уравнением непрерывной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, в котором координата t точки кривой изменяется в пределах от 0 до L . В этой модели плотность вероятности вектора \mathbf{R} , соединяющего концы кривой $\mathbf{r}(t)$, может быть определена так:

$$W(\mathbf{R}, L) = Z^{-1}(L)G(\mathbf{R}, L), \quad (1.102)$$

где

$$Z(L) = \int G(\mathbf{R}, L) d^d R, \quad (1.103)$$

$$G(\mathbf{R}, L) = \left[\int_{\mathbf{r}(0)=0}^{\mathbf{r}(L)=\mathbf{R}} D[\mathbf{r}(t)] \exp(-H_0(\mathbf{r})) \right]^{-1} \times \int_{\mathbf{r}(0)=0}^{\mathbf{r}(L)=\mathbf{R}} D[\mathbf{r}(t)] \exp(-H(\mathbf{r})), \quad (1.104)$$

причем величина

$$H_0(\mathbf{r}) = \frac{d}{2} \int_0^L \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 dt, \quad (1.105)$$

соответствует гамильтониану непрерывной модели полимера без учета объемного эффекта, а величина

$$H(\mathbf{r}) = H_0(\mathbf{r}) + \frac{v_0}{2} \int_0^L dt \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>\lambda} dt' \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')), \quad (1.106)$$

— с учетом этого эффекта; кроме того, $D[\mathbf{r}(t)]$ обозначает меру интегрирования на множестве конфигураций непрерывной кривой $\mathbf{r}(t)$, $0 \leq t \leq L$, концы которой расположены в точках $\mathbf{r}(0) = 0$ и $\mathbf{r}(L) = \mathbf{R}$, наконец, фигурирующий в (1.106) параметр λ в выбранном масштабе длины имеет значение порядка единицы. Из определения рассматриваемой модели нетрудно видеть, что на расстояниях порядка λ она теряет физический смысл, в связи с чем целесообразно перейти к макроскопическому способу ее описания, т.е. на расстояниях, много больших, чем λ . Поэтому помимо λ в теорию вводится новый масштабный параметр длины A такой, чтобы $\lambda \ll A$. Но введение новой шкалы длин приводит к тому, что в новом масштабе макроскопическая длина цепи \tilde{L} не будет совпадать с ее микроскопической длиной L . Этот факт позволяет использовать в данной модели при $L \rightarrow \infty$ гипотезу универсальности. Действительно, если в этом случае, например, удвоить значение L , то, очевидно, удвоится и значение \tilde{L} . Это означает, что между величинами L и \tilde{L} должна существовать линейная связь

$$\tilde{L} = XL, \quad (1.107)$$

в которой коэффициент X зависит от исключенного объема v_0 (точнее, от величины v_0/l^d , где ради простоты мы полагаем $l = 1$) и отношения λ/A . В новой шкале длин величина, описывающая эффект исключенного объема, должна отражать коллективный характер объемных взаимодействий на расстояниях порядка A . В связи с этим в роли макроскопического исключенного объема здесь выступает ренормированная величина v , зависящая от v_0 и λ/A . Более удобно, однако, оперировать величинами $u_0 = v_0 A^{e/2}$, $u = v A^{e/2}$, и тогда, учитывая вышесказанное, можно написать

$$u = u(u_0, \lambda A^{-1}). \quad (1.108)$$

Далее, обозначим посредством $G_0(\mathbf{R}, L, v_0; \lambda)$ и $G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A)$ ненормированные функции распределения вектора \mathbf{R} соответственно при микро- и макроскопическом способах описания данной проблемы. Но так как после нормировки каждой из функций G_0 и G в результате должна получиться одна и та же плотность вероятности вектора \mathbf{R} , то, очевидно, величины G_0 и G обязаны быть пропорциональны друг другу:

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = Y^{-1}(u, \lambda A^{-1}) G_0(\mathbf{R}, L, v_0; \lambda). \quad (1.109)$$

Соотношения (1.107)–(1.109) составляют основу для применения РГ-метода в континуальной модели СББС. В самом деле, перепишем равенство (1.109):

$$G_0(\mathbf{R}, L, v_0; \lambda) = Y(u, \lambda A^{-1}) \times \times G(\mathbf{R}, LX(u, \lambda A^{-1}), u(u_0, \lambda A^{-1}); A), \quad (1.110)$$

и примем во внимание, что левая часть последнего равенства не зависит от параметра A , т.е.

$$A \frac{\partial}{\partial A} G_0(\mathbf{R}, L, v_0; \lambda) \Big|_{L, v_0, \lambda} = 0.$$

Отсюда тогда получим следующее дифференциальное уравнение для функции G :

$$\left(A \frac{\partial}{\partial A} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} + \gamma_X(u) + \gamma_Y(u) \tilde{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{L}} \right) \times \\ \times G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = 0, \quad (1.111)$$

в котором

$$\gamma_X(u) = \left(A \frac{\partial \ln X(u, \lambda A^{-1})}{\partial A} \right)_{L, v_0, \lambda}, \quad (1.112)$$

$$\gamma_Y(u) = \left(A \frac{\partial \ln Y(u, \lambda A^{-1})}{\partial A} \right)_{L, v_0, \lambda}, \quad (1.113)$$

а величина

$$\beta(u) = \left(A \frac{\partial u}{\partial A} \right)_{L, v_0, \lambda} \quad (1.114)$$

называется функцией Гелл-Манна–Лоу. Ради простоты зависимость функций γ_X , γ_Y и β от λ/A не указана. Уравнение (1.111), называемое РГ-уравнением, содержит информацию о функциональной зависимости иско- мой величины G от макроскопических параметров рассмат- риваемой модели. Решение уравнения (1.111) в наиболее общей форме можно записать так:

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = \exp \left(- \int \frac{\gamma_Y(t)}{\beta(t)} dt \right) \times \\ \times F \left(\mathbf{R}, \tilde{L} \exp \left(- \int \frac{\gamma_X(t)}{\beta(t)} dt \right), A \exp \left(- \int \frac{dt}{\beta(t)} \right) \right), \quad (1.115)$$

где подлежащая определению величина F является дифференцируемой функцией по двум последним ее аргументам. Несложный размерный анализ приводит к следующему соотношению для G :

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = r^{-d/2} G(\mathbf{R} r^{-1/2}, \tilde{L} r^{-1}, u; A r^{-1}), \quad (1.116)$$

где r — отличный от нуля параметр длины. Если теперь выражение (1.115) подставить в равенство (1.116), а затем выбрать значение r равным

$$r = \tilde{L} \exp \left(- \int \frac{\gamma_X(t)}{\beta(t)} dt \right),$$

то в новых переменных

$$g(u) = \exp \left(- \frac{1}{2} \int \frac{\gamma_X(t)}{\beta(t)} dt \right), \\ h(u) = \tilde{L}^{-d/2} \exp \left[- \int \frac{\gamma_Y(t) - (d/2) \gamma_X(t)}{\beta(t)} dt \right], \\ \zeta = \left(\frac{2\pi \tilde{L}}{A} \right)^{\varepsilon/2} \exp \left(- \frac{\varepsilon}{2} \int \frac{\gamma_X(t) - 1}{\beta(t)} dt \right)$$

функция G примет вид

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = h(u) \Phi(g(u) \mathbf{R} \tilde{L}^{-1/2}, \zeta). \quad (1.117)$$

Отсюда с помощью равенства (1.104) и определения среднего квадрата расстояния между концами траекто- рии $\langle R^2 \rangle$ получим

$$\langle R^2 \rangle = I \tilde{L} g^2(u) \varphi(\zeta), \quad (1.118)$$

а для плотности вероятности вектора \mathbf{R} тогда имеем

$$W(\mathbf{R}, \tilde{L}, u; A) = \Psi \left(\mathbf{R} \langle R^2 \rangle^{-1/2}, \zeta \right). \quad (1.119)$$

В последней формуле следует обратить внимание на зависимость плотности вероятности W не только от $\mathbf{R} / \langle R^2 \rangle^{1/2}$, но и от параметра ζ , зависимость от которого обычно отсутствует в скейлинговых теориях.

Далее, если с ростом значений параметра A зависи- мость величины u от A становится все слабее и в пределе при $A \rightarrow \infty$ исчезает, т.е. данная модель асимптотически обладает свойством масштабной инвариантности, то в этом случае можно реализовать идею скейлинга. Пре- дельное значение u^* величины u , называемое неподвиж- ной точкой, определяется из условия

$$\beta(u) \Big|_{u=u^*} = 0. \quad (1.120)$$

Существование неподвижной точки u^* позволяет упро- стить вычисление значений критических показателей. Действительно, с помощью равенства (1.120) уравнение (1.111) приводится к виду

$$\left(A \frac{\partial}{\partial A} + B + A \tilde{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{L}} \right) G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u^*; A) = 0, \quad (1.121)$$

где

$$A = \left(A \frac{\partial \ln X}{\partial A} \right)_{v_0, \lambda, L|u=u^*}, \\ B = \left(A \frac{\partial \ln Y}{\partial A} \right)_{v_0, \lambda, L|u=u^*},$$

а его общее решение можно представить как

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u^*; A) = A^{-B} F(\mathbf{R}, A \tilde{L}^{-1/A}). \quad (1.122)$$

Из скейлинговых свойств функции G , а также асимпто- тических соотношений

$$\langle R^2 \rangle \sim \tilde{L}^{2\nu}, \quad \tilde{L} \rightarrow \infty, \\ Q_{\tilde{L}} = \int G d^d R \sim \tilde{L}^{\gamma-1} \mu^{\tilde{L}}, \quad \tilde{L} \rightarrow \infty,$$

вытекает следующая связь между параметрами A , B и критическими показателями ν , γ :

$$2\nu = (1 - A)^{-1}, \\ (\gamma - 1)(2\nu)^{-1} = B.$$

Таким образом, размерный анализ РГ-уравнения (1.121) в режиме скейлинга дает

$$G(\mathbf{R}, \tilde{L}, u^*; A) = \tilde{L}^{\gamma-\nu d-1} A^{\nu d+1-\gamma-(d/2)} f(\mathbf{R} \langle R^2 \rangle^{-1/2}), \quad (1.123)$$

где

$$\langle R^2 \rangle \sim I \tilde{L}^{2\nu} A^{1-2\nu}. \quad (1.124)$$

Можно показать [1], что зависимость всех скейлинговых функций от параметра A описывается лишь в виде

отношения \tilde{L}/Λ , которое служит мерой интенсивности объемного взаимодействия. Вычисление значений ν и γ , а также скейлинговой функции $f(\mathbf{R}/\langle R^2 \rangle)$ в (1.123) требует в свою очередь определения величин X , Y и u . Для этого используется обычная теория возмущений, в соответствии с которой выражение для G в (1.106) разлагается в ряд по степеням малого параметра ε , т.е. вблизи $d = 4$. При этом во избежание расходимости интегралов, определяющих коэффициенты этого ряда, приходится применять некоторые приемы регуляризации расходящихся выражений. В итоге вычисленные значения для ν и γ во втором порядке по ε совпадают с результатами в (1.95) и (1.96). Итак, описанная здесь схема континуального интегрирования совместно с РГ-методом реализованы лишь в области предельно малых ε и, следовательно, не позволяют распространить полученные с их помощью результаты за пределы малой окрестности пространственной размерности $d = 4$.

2. Основное уравнение

Метод необходим для познания истины.

Р. Декарт ("Правила для руководства ума", правило 4)

2.1. Вывод уравнения

В последующих разделах мы изложим подход, базирующийся на РГ-методе решения точного уравнения для искомой плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$.

Пусть сферическая частица, диаметр которой равен r_0 , начинает блуждание из начала координат в \mathcal{R}^d , причем каждое отдельное перемещение \mathbf{r}_k ее геометрического центра имеет постоянную длину $|\mathbf{r}_k| = l$, $k \geq 1$, но случайное направление. Тогда плотность вероятности любого отдельного перемещения \mathbf{r}_k можно представить в виде

$$\tau(\mathbf{r}_k) = 2(\omega l^{2s})^{-1} \delta(r_k^2 - l^2), \quad (2.1)$$

где

$$s = \frac{1}{2}(d - 2).$$

Потребуем теперь, чтобы после каждого перемещения \mathbf{r}_k , $k \geq 1$, блуждающая частица избегала те области пространства, которые она посещала после всех предшествующих перемещений. В таком случае $r_0 < l$, а плотность вероятности k -го перемещения \mathbf{r}_k пропорциональна величине

$$\tau(\mathbf{r}_k) \prod_{j=1}^{k-1} (1 + f_{jk}), \quad (2.2)$$

где

$$f_{jk} = f\left(\left|\sum_{i=j}^k \mathbf{r}_i\right|\right),$$

$$f(r) = \begin{cases} -1, & \text{если } r < r_0, \\ 0, & \text{если } r > r_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Согласно общей постановке задачи мы ищем вероятность

$$W_N(\mathbf{R}) d^d R$$

того, что после N перемещений частицы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ ее центр попадет в элемент объема $d^d R$ окрестности точки, радиус-вектор которой равен \mathbf{R} . При помощи метода Маркова [91] искомую плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$ вектора \mathbf{R} , соединяющего концы траектории, состоящей из N отдельных перемещений частицы, запишем посредством следующих равенств:

$$W_N(\mathbf{R}) = Q_N^{-1} w_N(\mathbf{R}), \quad (2.4)$$

$$w_N(\mathbf{R}) = \int \delta\left(\mathbf{R} - \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k\right) P_{1N} \prod_{k=1}^N \tau(\mathbf{r}_k) d^d r_k, \quad (2.5)$$

$$P_{1N} = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (1 + f_{jk}); \quad (2.6)$$

здесь Q_N — нормировочный множитель, равный

$$Q_N = \int P_{1N} \prod_{k=1}^N \tau(\mathbf{r}_k) d^d r_k. \quad (2.7)$$

Далее, в формуле (2.5) воспользуемся фурье-представлением δ -функции Дирака

$$\delta(\mathbf{R}) = \int \exp(-i\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}) \frac{d^d \rho}{(2\pi)^d},$$

что позволяет нам выразить $w_N(\mathbf{R})$ в виде интеграла Фурье:

$$w_N(\mathbf{R}) = \int \exp(-i\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}) a_N(\boldsymbol{\rho}) \frac{d^d \rho}{(2\pi)^d}, \quad (2.8)$$

в котором фурье-образ $a_N(\boldsymbol{\rho})$ функции $w_N(\mathbf{R})$ определен равенством

$$a_N(\boldsymbol{\rho}) = \int P_{1N} \prod_{k=1}^N \exp(i\boldsymbol{\rho} \mathbf{r}_k) \tau(\mathbf{r}_k) d^d r_k. \quad (2.9)$$

Если плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$ тоже записать посредством интеграла Фурье:

$$W_N(\mathbf{R}) = \int \exp(-i\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}) A_N(\boldsymbol{\rho}) \frac{d^d \rho}{(2\pi)^d}, \quad (2.10)$$

то ее фурье-образ $A_N(\boldsymbol{\rho})$, называемый обычно характеристической функцией, связан с величиной $a_N(\boldsymbol{\rho})$ согласно (2.4) и (2.8) следующим образом:

$$A_N(\boldsymbol{\rho}) = Q_N^{-1} a_N(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.11)$$

Вследствие изотропии пространства в исследуемой здесь задаче плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$ не зависит от направления вектора \mathbf{R} и поэтому функции $A_N(\boldsymbol{\rho})$ и $a_N(\boldsymbol{\rho})$ также не зависят от направления вектора $\boldsymbol{\rho}$. Наконец, отметим, что в предельном случае $r_0 = 0$ из определений в (2.3) вытекает тождество $f_{jk} \equiv 0$, соответственно которому мы имеем $P_{1N} \equiv 1$ и $Q_N \equiv 1$, как это следует из равенств (2.6) и (2.7).

Теперь обратимся к формуле (2.9) и разложим произведение P_{1N} в ряд по f_{jk} :

$$P_{1N} = 1 + \sum_{j < k} f_{jk} + \sum_{j < k} \sum_{l < m} f_{jk} f_{lm} + \dots \quad (2.12)$$

Согласно определениям величин f_{jk} и P_{1N} в (2.3) и (2.6) можно утверждать, что разложение (2.12), по существу,

является формулой обращения, называемой иногда принципом включения и исключения [92]. Ради простоты перейдем к графическому изображению ряда в (2.12). С этой целью введем обозначения, как на рис. 1. Тогда ряд в (2.12) можно изобразить в виде рис. 2. Два сомножителя f_{jk} и f_{lm} , где $j < k$, $l < m$ и $j \leq l$, назовем "связанными", если $j \leq l < m \leq k$ или $j < l \leq k < m$, и — "несвязанными", если $j < k < l < m$. На рис. 2 в квадратных скобках первая и вторая диаграммы соответствуют "связанным" сомножителям, а третья — "несвязанным" сомножителям. Всякую диаграмму, изображающую цепочку связанных между собою сомножителей, назовем связанной диаграммой. Тогда, как нетрудно видеть, любая диаграмма, соответствующая некоторому члену ряда в (2.12), является либо связанной диаграммой, либо распадается на произведение некоторого числа связанных диаграмм. Поэтому естественно выделить и просуммировать все связанные диаграммы, как на рис. 3; здесь первые диаграммы в каждой строке (с наименьшим числом пунктирных линий) мы назовем простыми связанными диаграммами. Очевидно, все последующие связанные диаграммы можно получить из простых связанных диаграмм путем "вставки" в них всех возможных диаграмм. Если теперь просуммировать диаграммы сначала в каждой строке по отдельности, а затем сложить все эти строки, то в результате такого суммирования по строкам получится ряд, как на рис. 4, каждый член которого представляет собой сумму связанных диаграмм в соответствующей строке. Отсюда тогда следует

$$b_{jk} = f_{jk}P'_{jk} + \sum_{l < m} f_{jm}f_{lk}P_{jl}P_{lm}P_{mk} + \\ + \sum_{l < m < p < q} (f_{jp}f_{lq}f_{mk} + f_{jm}f_{lq}f_{pk})P_{jl}P_{lm}P_{mp}P_{pq}P_{qk} + \dots, \quad (2.13)$$

где P'_{jk} обозначает произведение

$$P_{jk} = \prod_{j \leq l < m \leq k} (1 + f_{lm}),$$

в котором исключен множитель $(1 + f_{jk})$, т.е.

$$P_{jk} = (1 + f_{jk})P'_{jk}. \quad (2.14)$$

Далее, выделим и просуммируем все диаграммы, представляемые в виде произведения только двух "связанных" диаграмм, затем только трех "связанных" диаграмм и т.д. В итоге исходный ряд на рис. 2 трансформируется в диаграммный ряд на рис. 5, алгебраическая форма которого такова:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{j < k} b_{jk} + \sum_{j < k < l < m} b_{jk}b_{lm} + \dots \quad (2.15)$$

Таким образом, в результате описанного выше частичного суммирования исходного ряда последний приведен к такому виду, в котором его члены факторизованы.

Подставим теперь разложение для P_{1N} (2.15) в формулу (2.9) и выполним интегрирование в каждом члене полученного ряда. Кроме того, определим функцию $b_n(\mathbf{p})$ при всех $n \geq 2$ с помощью равенства

$$b_n(\mathbf{p}) = \int b_{1n} \prod_{k=1}^n \exp(i\mathbf{p}_k \mathbf{r}_k) \tau(\mathbf{r}_k) d^d r_k, \quad (2.16)$$

$$1 = \text{---}, f_{jk} = j \text{---} \text{---} \text{---} k, P_{jk} = j \text{---} \text{---} k$$

Рис. 1

$$1 \text{---} N = \text{---} + \sum_{j < k} j \text{---} k + \\ + \sum_{j < k} \sum_{l < m} \left[j \text{---} l \text{---} m \text{---} k + j \text{---} l \text{---} k \text{---} m + j \text{---} k \text{---} l \text{---} m \right]$$

Рис. 2

$$\text{---} + \sum \text{---} + \sum \sum \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\ + \dots \\ \sum \text{---} + \sum \sum \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\ + \dots \\ \sum \sum \left[\text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \right] + \\ + \dots$$

Рис. 3

$$b_{jk} \equiv j \text{---} k = j \text{---} k + \sum_j j \text{---} l \text{---} m \text{---} k + \dots$$

Рис. 4

$$1 \text{---} N = \text{---} + \sum_{j < k} j \text{---} k + \sum_{j < k < l < m} j \text{---} k \text{---} l \text{---} m + \dots$$

Рис. 5

где b_{1n} обозначает согласно (2.13) совокупность всех связанных диаграмм, состоящих каждая в отдельности из n звеньев. В результате получим следующий ряд:

$$a_N(\mathbf{p}) = A_s^N(\rho l) + \sum_{n \geq 2} (N - n + 1) A_s^{N-n}(\rho l) b_n(\mathbf{p}) + \\ + \sum_{n \geq 4} \left(\frac{1}{2} (N - n + 1)(N - n + 2) A_s^{N-n}(\rho l) \times \right. \\ \left. \times \sum_{n_1 + n_2 = n} b_{n_1}(\mathbf{p}) b_{n_2}(\mathbf{p}) \right) + \dots; \quad (2.17)$$

здесь

$$A_s(x) = \Gamma(s + 1) \left(\frac{2}{x} \right)^s J_s(x), \quad (2.18)$$

$J_s(x)$ — функция Бесселя, а коэффициент

$$\frac{(N - n + m)!}{(N - n)!m!}, \quad m \geq 1,$$

равен числу способов размещения m отрезков (каждый из которых состоит из n_1, n_2, \dots, n_m звеньев, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$) на отрезке из N звеньев ($n \leq N$)

таким образом, чтобы при этом сохранялась последовательность в их взаимном расположении. Более компактно ряд в (2.17) можно записать так:

$$a_N(\mathbf{p}) = \sum_{m \geq 0} \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)!m!} A_s^{N-n}(\rho l) B_n^{(m)}(\mathbf{p}), \quad (2.19)$$

где

$$B_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \sum_{n_1+\dots+n_m=n} \dots \sum_{n_1} b_{n_1}(\mathbf{p}) \dots b_{n_m}(\mathbf{p}). \quad (2.20)$$

Согласно известной теореме Коши в теории функций комплексной переменной имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} dz z^{n_1+\dots+n_m-n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=1}^m n_k = n, \\ 0, & \text{если } \sum_{k=1}^m n_k \neq n, \end{cases} \quad (2.21)$$

в которой замкнутый контур интегрирования Γ охватывает начало координат на плоскости комплексной переменной z . С помощью формулы (2.21) равенство в (2.20) легко преобразовать к виду

$$B_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{n+1}} b^m(z, \mathbf{p}), \quad (2.22)$$

где

$$b(z, \mathbf{p}) \equiv \sum_{n \geq 0} z^n b_n(\mathbf{p}) \quad (2.23)$$

— производящая функция, а коэффициенты $b_0(\mathbf{p})$ и $b_1(\mathbf{p})$ последнего ряда подчинены условиям: $b_0(\mathbf{p}) \equiv 0$, $b_1(\mathbf{p}) \equiv 0$. Используя теперь равенство (2.22) в (2.19), мы получим для функции $a_N(\mathbf{p})$ следующее выражение:

$$a_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{N+1}} \sum_{m \geq 0} \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)!m!} \times \\ \times (z A_s(\rho l))^{N-n} b^m(z, \mathbf{p}), \quad (2.24)$$

в котором суммирование по m можно распространить формально от 0 до ∞ , а по n — от $-\infty$ до N , не оказывая влияния при этом на конечный результат. Принимая во внимание последнее замечание и учитывая формулу [93]

$$(1-x-y)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^m y^n, \quad |x+y| < 1, \quad (2.25)$$

в равенстве (2.24), находим

$$a_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{N+1}} (1 - z A_s(\rho l) - b(z, \mathbf{p}))^{-1}, \quad (2.26)$$

здесь замкнутый контур Γ , охватывающий начало координат $z = 0$, выбран так, чтобы удовлетворить условию

$$|z A_s(\rho l) + b(z, \mathbf{p})| < 1.$$

Наконец, если определить производящую функцию $a(z, \mathbf{p})$ посредством равенства

$$a(z, \mathbf{p}) = \sum_{N \geq 0} z^N a_N(\mathbf{p}), \quad (2.27)$$

то из формулы (2.26) следует уравнение для $a(z, \mathbf{p})$ [94]:

$$a^{-1}(z, \mathbf{p}) = a_0^{-1}(z, \mathbf{p}) - b(z, \mathbf{p}), \quad (2.28)$$

где

$$a_0^{-1}(z, \mathbf{p}) = 1 - z A_s(\rho l). \quad (2.29)$$

Уравнение (2.28) по своей форме аналогично известному уравнению Дайсона [95] и в исследуемой здесь проблеме играет основополагающую роль, в связи с чем мы будем называть его основным уравнением.

Чтобы придать уравнению (2.28) замкнутый вид, необходимо установить связь между производящими функциями $b(z, \mathbf{p})$ и $a(z, \mathbf{p})$. С этой целью воспользуемся разложением (2.13) для определения величины b_{1n} в равенстве (2.16) и последнее затем учтем в (2.23). Кроме того, выполним преобразование Фурье функции f_{jk} :

$$f_{jk} = - \int v(\mathbf{k}) \exp\left(-i\mathbf{k} \sum_{m=j}^k \mathbf{r}_m\right) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d}, \quad (2.30)$$

где фурье-образ $v(\mathbf{k})$ функции $-f(\mathbf{r})$, согласно ее определению в (2.3), равен

$$v(\mathbf{k}) = - \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^d r = v_0 A_{s+1}(r_0 \mathbf{k}), \quad (2.31)$$

а величина

$$v_0 = \frac{(\pi r_0^2)^{s+1}}{\Gamma(s+2)}, \quad (2.32)$$

как и раньше, называется исключенным объемом. Тогда, учитывая формулу (2.30), получим

$$b_n(\mathbf{p}) = - \int v(\mathbf{k}) a'_n(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} + \\ + \sum_{l < m < n} \int v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') a_l(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a_{m-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ \times a_{n-m}(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \frac{d^d \kappa d^d \kappa'}{(2\pi)^{2d}} - \\ - \sum_{l < m < p < q < n} \int v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}'') \times \\ \times (a_l(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a_{m-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') a_{p-m}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times \\ \times a_{q-p}(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') a_{n-q}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'') + \\ + a_l(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a_{m-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') a_{p-m}(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \times \\ \times a_{q-p}(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') a_{n-q}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'')) \times \\ \times \frac{d^d \kappa d^d \kappa' d^d \kappa''}{(2\pi)^{3d}} + \dots; \quad (2.33)$$

здесь функция $a'_N(\mathbf{p})$ определена выражением (2.9), в котором произведение P_{1N} следует заменить на P'_{1N} . Поскольку отличие P'_{1N} от P_{1N} имеет место лишь в области

$$\left| \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \right| < r_0,$$

то различное поведение функций $a'_N(\mathbf{p})$ и $a_N(\mathbf{p})$ может возникнуть лишь в области достаточно больших значе-

ний ρ ($\rho \gtrsim r_0^{-1}$). Однако эта область оказывается несущественной при вычислении асимптотики плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$, когда $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать функции $a'_N(\mathbf{p})$ и $a_N(\mathbf{p})$ всюду равными. Если теперь подставить выражение для $b_n(\mathbf{p})$ (2.33) в определение функции $b(z, \mathbf{p})$ (2.23) и выполнить надлежащее суммирование, то в итоге получим искомую связь:

$$\begin{aligned} b(z, \mathbf{p}) = & - \int v(\mathbf{k}) a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} + \\ & + \int v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}) a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ & \times a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}') \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} - \\ & - \int v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}'') (a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}) a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ & \times a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}'') + \\ & + a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}) a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}') \times \\ & \times a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k}'') \times \\ & \times \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{k}''}{(2\pi)^{3d}} + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Таким образом, последнее равенство совместно с основным уравнением (2.28) формально составляют замкнутую систему уравнений относительно неизвестной функции $a(z, \mathbf{p})$.

Бесконечный ряд, представляющий величину $b(z, \mathbf{p})$ в (2.34), удобно изобразить графически. Для этого каждому члену указанного ряда сопоставим диаграмму, состоящую из некоторого числа вершин и набора сплошных и волнистых линий, соединяющих эти вершины. Кроме того, каждая диаграмма содержит еще две сплошные внешние линии, одна из которых называется входящей, а другая — выходящей. Каждой линии приписывается определенный вектор — "импульс", причем в каждой вершине, где сходятся две сплошные и одна волнистая линии, должен выполняться "закон сохранения импульса". Наконец, каждой внутренней сплошной линии сопоставляется величина $a(z, \mathbf{p} - \mathbf{k})$, а каждой волнистой линии сопоставляется $-v(\mathbf{k})/(2\pi)^d$; затем по векторам всех волнистых линий выполняется интегрирование. В соответствии с этими правилами ряд в (2.34) можно представить, как на рис. 6.

Анализ структуры членов ряда в (2.34) позволяет утверждать, что здесь не существует проблемы, связанной с расходимостью интегралов. В самом деле, если во всех интегралах этого ряда перейти к конфигурационным переменным $\{\mathbf{r}\}$, то нетрудно видеть, что область интегрирования по $\{\mathbf{r}\}$ ограничена по модулю снизу величиной $|\mathbf{r}| = r_0$, в чем, собственно, и проявляется эффект исключенного объема, в то время как на верхнем пределе ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$) подынтегральные функции экспоненциально стремятся к нулю из-за конечности числа перемещений, составляющих траекторию блуждающей частицы. Однако остается еще проблема сходимости всего ряда в целом. Для выяснения этого вопроса обратимся к равенствам (2.23), (2.16) и (2.13). Поскольку функция f_{jk} в соответствии с ее определением в (2.30) принимает только два значения: -1 или 0 , а произведение P_{jk} согласно (2.6) может быть равным 0 или 1 , то величина b_{1n} может принимать лишь одно из трех

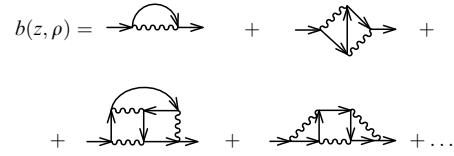


Рис. 6

возможных значений: $-1, 0, 1$, как это следует из равенства (2.13). Отсюда с помощью (2.16) находим, что

$$|b_n(\mathbf{p})| \leq \int |b_{1n}| \prod_{k=1}^n |\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_k)| |\tau(\mathbf{r}_k)| d^d \mathbf{r}_k \leq 1$$

для $n \geq 2$ и всех вещественных значений ρ . Используя теперь последнее неравенство в (2.23), получим

$$|b(z, \mathbf{p})| \leq \sum_{n \geq 0} |z|^n |b_n(\mathbf{p})| \leq |z|^2 (1 - |z|)^{-1},$$

если $|z| < 1$ и $\text{Im } \rho = 0$. Таким образом, для всех вещественных значений ρ ряд в (2.34), представляющий функцию $b(z, \mathbf{p})$, абсолютно сходится, по крайней мере, в области $|z| < 1$.

Аналогичное утверждение справедливо и для функции $a(z, \mathbf{p})$. В самом деле, из определения величины $a_N(\mathbf{p})$ в (2.9) следует

$$|a_N(\mathbf{p})| \leq \int |P_{1N}| \prod_{k=1}^N |\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_k)| |\tau(\mathbf{r}_k)| d^d \mathbf{r}_k \leq 1$$

для всех вещественных значений ρ . Учитывая это неравенство в (2.27), имеем

$$|a(z, \mathbf{p})| \leq \sum_{N \geq 0} |z|^N |a_N(\mathbf{p})| \leq (1 - |z|)^{-1},$$

если $|z| < 1$ и $\text{Im } \rho = 0$.

Приведенные выше утверждения можно считать обоснованием замкнутости основного уравнения. Если бы решение этого уравнения было известно, то с помощью преобразования Фурье

$$w(z, \mathbf{R}) = \int \exp(-i\mathbf{R}\mathbf{p}) a(z, \mathbf{p}) \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \quad (2.35)$$

можно найти производящую функцию

$$w(z, \mathbf{R}) \equiv \sum_{N \geq 0} z^N w_N(\mathbf{R}), \quad (2.36)$$

а затем, используя формулу обращения

$$w_N(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{N+1}} w(z, \mathbf{R}), \quad (2.37)$$

определить функцию $w_N(\mathbf{R})$. Наконец, вычисляя величину \mathcal{Q}_N из условия нормировки

$$\mathcal{Q}_N = \int w_N(\mathbf{R}) d^d \mathbf{R}, \quad (2.38)$$

мы нашли бы согласно (2.4) искомую плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$. Однако проблема решения основного уравнения и последующего определения функции $W_N(\mathbf{R})$

чрезвычайно сложна. Более реальной задачей, которой посвящена эта глава, является вычисление асимптотики плотности $W_N(\mathbf{R})$, когда $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$.

2.2. Свойства основного уравнения

Обратимся к равенству (2.38) и воспользуемся поочередно формулами (2.37) и (2.35). Тогда после интегрирования по \mathbf{R} мы получим формулу

$$Q_N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{N+1}} a(z, 0), \quad (2.39)$$

из которой следует, что

$$a(z, 0) = Q(z) \equiv \sum_{N \geq 0} z^N Q_N. \quad (2.40)$$

Объединяя последнее равенство с уравнением (2.28), приходим к соотношению

$$Q^{-1}(z) = 1 - z - b(z, 0). \quad (2.41)$$

Пусть теперь z_0 обозначает ближайшую к началу координат особую точку функции $Q(z)$, т.е., по определению, имеем

$$1 - z_0 - b(z_0, 0) \equiv 0. \quad (2.42)$$

Отсюда нетрудно видеть, что $z_0 = z_0(v_0/l^d)$, т.е. значение z_0 зависит лишь от безразмерной величины v_0/l^d , причем $z_0(0) = 1$. Таким образом, учет эффекта исключенного объема приводит к смещению особой точки z_0 из "невозмущенного" ее положения $z_0(0) = 1$.

В теории аналитических функций утверждается, что граница круга сходимости степенного ряда проходит через ближайшую к началу координат его особую точку [96]. Кроме того, асимптотическое поведение функции, представленной степенным рядом, при приближении переменной z к границе круга сходимости можно связать с асимптотическим поведением коэффициентов этого ряда, когда их порядковый номер стремится к бесконечности. В самом деле, известная теорема Таубера, примененная к степенному ряду в (2.40), гласит: если последовательность коэффициентов $Q_N z_0^N$ ряда

$$Q(z) = \sum_{N \geq 0} Q_N z_0^N (z z_0^{-1})^N$$

монотонна и $0 < \alpha < \infty$, то соотношения

$$Q(z) \sim \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-\alpha} \mathcal{L}\left(\frac{z_0}{z_0 - z}\right), \quad \frac{z_0}{z} \rightarrow 1 - 0,$$

и

$$Q_N \sim \frac{N^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) z_0^N} \mathcal{L}(N), \quad N \rightarrow \infty,$$

равносильны, где $\mathcal{L}(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности положительная функция (т.е. такая функция, что

$$\frac{\mathcal{L}(xt)}{\mathcal{L}(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

при каждом фиксированном значении $x > 0$) [97]. Важность тауберовой теоремы здесь обусловлена ее тесной связью с проблемой вычисления асимптотики плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$, когда $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$.

Принимая во внимание последнее замечание, определим производящую функцию

$$A(z, \rho) = \sum_{N \geq 0} z^N A_N(\rho) \quad (2.43)$$

для всех значений z в области $|z| < R_A(\rho)$, где $R_A(\rho)$ — радиус сходимости ряда в (2.43), и установим зависимость между функциями $A(z, \rho)$ и $a(z, \rho)$. Для этого воспользуемся выражением (2.11) в (2.27), в результате чего получим

$$a(z, \rho) = \sum_{N \geq 0} z^N Q_N A_N(\rho). \quad (2.44)$$

Если теперь в последнем равенстве использовать формулы обращения рядов в (2.40) и (2.43), то мы придем к искомому соотношению

$$a(z, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz'}{z'} Q\left(\frac{z}{z'}\right) A(z', \rho), \quad (2.45)$$

в котором контур интегрирования Γ выбран так, чтобы для его точек z' выполнялись неравенства $|z'| < R_A(\rho)$ и $|z/z'| < R_0$, где R_0 — радиус сходимости ряда в (2.40). Аналогичным способом можно получить формулу, обратную к (2.45). Действительно, если исходить из определения (2.43), а затем воспользоваться равенством (2.11) и формулой обращения ряда в (2.27), то в итоге получим

$$A(z, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{dz'}{z'} \tilde{Q}\left(\frac{z}{z'}\right) a(z', \rho), \quad (2.46)$$

где

$$\tilde{Q}(z) \equiv \sum_{N \geq 0} Q_N^{-1} z^N, \quad (2.47)$$

а точки z' контура $\tilde{\Gamma}$ в (2.46) удовлетворяют условиям: $|z'| < R_a(\rho)$ и $|z/z'| < \tilde{R}_0$, где $R_a(\rho)$ и \tilde{R}_0 суть радиусы сходимости рядов в (2.44) и (2.47), соответственно. Производящие функции $Q(z)$ и $\tilde{Q}(z)$ взаимно обратны в смысле равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\zeta} Q\left(\frac{\zeta}{z'}\right) \tilde{Q}\left(\frac{z}{\zeta}\right) = \left(1 - \frac{z}{z'}\right)^{-1}, \quad (2.48)$$

представляющего собой просто частный случай формулы (2.46), если в последней положить $\rho = 0$ и учесть, что

$$A(z, 0) = (1 - z)^{-1}, \quad |z| < 1. \quad (2.49)$$

Поскольку нас интересует асимптотика плотности $W_N(\mathbf{R})$ при $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$, то из формул обращения следует, что для этого необходимо знать асимптотическое поведение функции $A(z, \rho)$ при $z \rightarrow z_A(\rho)$, $|z| < R_A(\rho)$, и значениях переменной ρ в малой окрестности точки $\rho = 0$, где $z_A(\rho)$ — ближайшая к началу

координат особая точка функции $A(z, \rho)$. В частности, из (2.49) следует, что $z_A(0) = 1$. Однако мы не можем исследовать непосредственно поведение функции $A(z, \rho)$, так как основное уравнение в данной проблеме установлено для функции $a(z, \rho)$. Поэтому рассматриваемая здесь задача сводится к определению асимптотики функции $a(z, \rho)$ при $z \rightarrow z_a(\rho)$, $|z| < R_a(\rho)$, и малых значениях ρ , где $z_a(\rho)$ — ближайшая к началу координат особая точка функции $a(z, \rho)$. Связь между особыми точками $z_A(\rho)$ и $z_a(\rho)$ определяется мультипликативной теоремой Адамара [96], утверждающей, что если $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \dots$ являются особыми точками величины $Q(z)$, а $z_A^{(1)}(\rho), z_A^{(2)}(\rho), \dots$ — особыми точками функции $A(z, \rho)$, то особые точки функции $a(z, \rho)$ (разумеется, если они существуют) находятся среди точек $z_0^{(m)} z_A^{(n)}(\rho)$. Тогда, согласно этой теореме, мы имеем

$$z_a(\rho) = z_0 z_A(\rho), \quad (2.50)$$

где $z_0 = z_a(0)$ в соответствии с определением точки z_0 в (2.42). Аналогично из формулы (2.46) следует

$$z_A(\rho) = \tilde{z}_0 z_a(\rho); \quad (2.51)$$

здесь \tilde{z}_0 — ближайшая к началу координат особая точка функции $\tilde{Q}(z)$. Сравнивая равенства (2.50) и (2.51), находим, что $z_0 \tilde{z}_0 = 1$. Таким образом, величина $z_a(\rho)/z_0$ ведет себя как $z_A(\rho)$ и, следовательно, равна единице при $\rho = 0$. В связи с этим целесообразно перейти от z к другой переменной, например, z/z_0 или, как оказалось более удобно, к новой переменной $\zeta = z_0/z$.

Теперь введем следующие обозначения:

$$\mathcal{A}(\zeta, \rho) = \zeta^{-1} a(z, \rho), \quad (2.52)$$

$$B(\zeta, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A}) = \zeta b(z, \rho), \quad (2.53)$$

$$\tilde{v} = \zeta^2 v l^{-d}, \quad \tilde{v}_0 = \zeta^2 v_0 l^{-d}. \quad (2.54)$$

Тогда, учитывая тождество (2.42), уравнение (2.28) в новых обозначениях можно записать так:

$$\mathcal{A}^{-1} = \zeta - 1 + z_0(1 - \mathcal{A}_s(\rho l)) + B(1, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A}). \quad (2.55)$$

Далее, обозначим посредством $\rho_1 \equiv i\zeta$ ($\text{Re } \zeta > 0$) ближайший к началу координат $\rho = 0$ корень уравнения $\mathcal{A}^{-1}(\zeta, \rho) = 0$. Полагая затем $\rho = \rho_1$ в (2.55), получим тождество

$$\zeta - 1 + z_0(1 - \mathcal{A}_s(i\zeta l)) + B(1, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, i\zeta l, \tilde{v}; \mathcal{A}) \equiv 0, \quad (2.56)$$

связывающее между собой переменные ζ и $\tilde{\zeta}$. Наконец, используя соотношение (2.56) в (2.55), мы придем к следующему виду основного уравнения:

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1}(\tilde{\zeta}, \rho) + B(\zeta, i\zeta l, \tilde{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A}), \quad (2.57)$$

где

$$\mathcal{A}_0^{-1}(\tilde{\zeta}, \rho) = z_0(\mathcal{A}_s(i\tilde{\zeta} l) - \mathcal{A}_s(\rho l)). \quad (2.58)$$

Уравнение (2.57) совместно с тождеством (2.56) составляют основу излагаемого здесь метода исследования проблемы СББС.

Важным частным случаем этой проблемы является вычисление моментов

$$\langle R^{2m} \rangle_N = \int R^{2m} W_N(\mathbf{R}) d^d R, \quad m \geq 1, \quad (2.59)$$

которые однозначно определяют искомую плотность вероятности, если согласно теореме Карлемана [97] выполняется условие

$$\sum_{m \geq 1} \langle R^{2m} \rangle_N^{-1/2m} = \infty,$$

т.е. если ряд слева расходится. Подставим теперь в правую часть равенства (2.59) выражение

$$W_N(\mathbf{R}) = \left(\oint_{\Gamma} d\zeta \zeta^N \tilde{w}(\zeta, R) \right) \left(\oint_{\Gamma} d\zeta \zeta^N \mathcal{A}(\zeta, 0) \right)^{-1}, \quad (2.60)$$

вытекающее из (2.4), (2.37), (2.39) и (2.52), в котором

$$\tilde{w}(\zeta, R) = \int \exp(-i\mathbf{R}\rho) \mathcal{A}(\zeta, \rho) \frac{d^d \rho}{(2\pi)^d}, \quad (2.61)$$

а замкнутый контур интегрирования Γ выбран так, чтобы начало координат $\zeta = 0$ и все особые точки подынтегральной функции находились внутри этого контура. Далее, воспользуемся формулой, обратной к (2.61), в следующем виде:

$$\mathcal{A}(\zeta, \rho) = \omega \int_0^\infty \mathcal{A}_s(\rho R) \tilde{w}(\zeta, R) R^{2s+1} dR. \quad (2.62)$$

Тогда с помощью равенства

$$\left(\frac{d}{dx^2} \right)^m \mathcal{A}_s(x) = \left(-\frac{1}{4} \right)^m \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+m+1)} \mathcal{A}_{s+m}(x) \quad (2.63)$$

мы получим в итоге

$$\langle R^{2m} \rangle_N = (-4)^m \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(s+1)} \times \frac{\oint d\zeta \zeta^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} \right)^m \mathcal{A}(\zeta, \rho) \right]_{\rho=0}}{\oint d\zeta \zeta^N \mathcal{A}(\zeta, 0)}. \quad (2.64)$$

В частности, из формулы (2.64) и уравнения (2.57) следует

$$\langle R^2 \rangle_N = z_0 l^2 \times \frac{\oint d\zeta \zeta^N \mathcal{A}(\zeta, 0) \left(1 - \frac{2d}{z_0} \frac{\partial B(\zeta, i\zeta l, \tilde{v}; \mathcal{A})}{\partial l^2} \Big|_{l=0} \right)}{\oint d\zeta \zeta^N \mathcal{A}(\zeta, 0)}, \quad (2.65)$$

где

$$\mathcal{A}^{-1}(\zeta, 0) = \mathcal{A}_0^{-1}(\tilde{\zeta}, 0) + B(\zeta, i\zeta l, \tilde{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}). \quad (2.66)$$

Обратимся к уравнению (2.57) и отметим одно чрезвычайно важное его свойство, суть которого заключается в инвариантности этого уравнения относительно мультипликативных преобразований

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}' = \alpha \mathcal{A}, & \mathcal{A}_0 &\rightarrow \mathcal{A}'_0 = \alpha \mathcal{A}_0, \\ v &\rightarrow v' = \alpha^{-2} v, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где α — не равный нулю непрерывно меняющийся параметр [98]. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно группой ренормировочных преобразований — ренормгруппой (РГ). Чтобы выяснить физический смысл РГ, рассмотрим асимптотический случай $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$. Но тогда из формул (2.60) и (2.61) вытекает, что для определения асимптотики плотности $W_N(\mathbf{R})$ в этом случае необходимо знать поведение функции $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ в малой окрестности точек $\zeta = 1$ и $\rho = 0$. В дальнейшем мы всюду будем считать значения ζ и ρ , принадлежащими малым окрестностям указанных выше точек. Отсюда согласно равенствам

$$A_s(x) = 1 - \frac{x^2}{2d} + O(x^4), \quad x \rightarrow 0, \quad (2.68)$$

и (2.56) следует, что значения ξ принадлежат соответствующей окрестности точки $\xi = 0$. Если теперь в формуле (2.60) изменить число перемещений N в α раз, т.е.

$$N \rightarrow N' = \alpha N, \quad \alpha > 0, \quad (2.69)$$

то в результате получим

$$W_N(\mathbf{R}) = \left(\oint d\zeta' (\zeta')^{N'} \tilde{w}'(\zeta', R) \right) \left(\oint d\zeta' (\zeta')^{N'} \mathcal{A}'(\zeta', 0) \right)^{-1}; \quad (2.70)$$

здесь

$$\zeta' = \zeta^{1/\alpha}, \quad \tilde{w}' = \alpha \tilde{w}, \quad \mathcal{A}' = \alpha \mathcal{A}. \quad (2.71)$$

Поскольку в рассматриваемой области значений ζ и ρ уравнение (2.55) представимо приближенно в виде

$$\mathcal{A}^{-1} = \zeta - 1 + z_0 \rho^2 l^2 (2d)^{-1} + B(1, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A}), \quad (2.72)$$

то, учитывая РГ-свойства этого уравнения и равенства в (2.71), его можно записать также в следующей эквивалентной форме:

$$(\mathcal{A}')^{-1} = \zeta' - 1 + z_0 \rho^2 l_1^2 (2d)^{-1} + B(1, 0, \tilde{v}'; \mathcal{A}') - B(\zeta', \rho l_1, \tilde{v}'; \mathcal{A}'), \quad (2.73)$$

где

$$l_1 = l \alpha^{-1/2}, \quad (2.74)$$

$$\tilde{v}' = \alpha^{s-1} \tilde{v}. \quad (2.75)$$

Сравнивая между собой выражения (2.60) и (2.70), а затем уравнения (2.72) и (2.73), мы приходим к выводу: изменение числа перемещений N в соответствии с равенством (2.69) эквивалентно изменению длины l одного перемещения по закону (2.74) и величины исключенного объема v_0 согласно правилу (2.75). Необходимо, однако, подчеркнуть, что это утверждение относится лишь к асимптотическому случаю ($N \rightarrow \infty$, $R \gg l$) и в символической форме оно выглядит так

$$W_N(Rl^{-1}, v_0 l^{-d}) = W_{\alpha N}(\alpha^{1/2} Rl^{-1}, \alpha^{s-1} v_0 l^{-d}).$$

Отсюда нетрудно получить асимптотическое выражение для среднеквадратичного расстояния между концами траектории блуждающей частицы

$$\langle R^2 \rangle_N \sim N l^2 \chi(N^{1-s} v_0 l^{-d}), \quad (2.76)$$

в котором $\chi(x)$ — подлежащая определению универсальная функция. Из последней формулы следует, что размерность $d = 4$ ($s = 1$) оказывается выделенной, поскольку эффект исключенного объема в случае $d > 4$ ($s > 1$) становится слабым и при вычислении величины $\langle R^2 \rangle_N$ можно применять теорию возмущений.

2.3. Ренормгрупповой метод

Отмеченные выше свойства основного уравнения служат базой ренормгруппового метода решения его. Для развития этого метода рассмотрим уравнения (2.56) и (2.57), первое из которых устанавливает зависимость между величинами ζ и ξ и тем самым позволяет найти критический показатель ν , а второе определяет тип особой точки $\rho_1 \equiv i\zeta$ функции $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$, что дает возможность вычислить другой критический показатель η . Очевидно, решение проблемы следует начать с определения характера сингулярности функции $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ в точке $\rho = \rho_1$. С этой целью представим $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 G. \quad (2.77)$$

Тогда для новой неизвестной величины G мы получим из (2.57) уравнение

$$G^{-1} = 1 + F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G), \quad (2.78)$$

в котором

$$F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G) = \mathcal{A}_0(\xi, \rho) \times \times (B(\xi, i\xi l, \tilde{v}; \mathcal{A}_0 G) - B(\xi, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A}_0 G)), \quad (2.79)$$

а функция $\mathcal{A}_0(\xi, \rho)$ в области малых значений ξ и ρ ведет себя как

$$\mathcal{A}_0(\xi, \rho) = 2d [z_0(\xi^2 + \rho^2) l^2]^{-1}. \quad (2.80)$$

Если в (2.78) положить $\rho = 0$ и ввести обозначение

$$G_0 = G \Big|_{\rho=0},$$

то с помощью полученного уравнения для G_0 равенство (2.56) можно записать так:

$$E^{-1} = G_0^{-1} + \mathcal{A}_0(\xi, 0) (B(\xi, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}_0 G) - B(1, 0, \tilde{v}; \mathcal{A}_0 G)), \quad (2.81)$$

где величина

$$E^{-1} = (\xi - 1) \mathcal{A}_0(\xi, 0) \quad (2.82)$$

при малых значениях ξ пропорциональна отношению $(\xi - 1)/\xi^2 l^2$. Отсюда нетрудно видеть, что равенство (2.81) служит для прямого вычисления критического показателя ν , если, разумеется, функция G уже определена.

Обратимся к уравнению (2.78) и предположим, что при $\rho^2 = \lambda$ выполняется условие

$$G \Big|_{\rho^2=\lambda} = 1, \quad (2.83)$$

или, что то же,

$$F(\xi^2 l^2, \lambda l^2, \tilde{v}; G) = 0.$$

Умножим теперь обе части уравнения (2.78) на α^{-1} и учтем РГ-свойства этого уравнения, в результате чего оно может быть представлено в следующей эквивалентной форме

$$(G')^{-1} = 1 + F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}'; G') - (1 - \alpha^{-1}), \quad (2.84)$$

где

$$G' = \alpha G, \quad \tilde{v}' = \alpha^{-2} \tilde{v}.$$

Далее выберем значение $\rho^2 = \lambda'$ так, чтобы

$$G' \Big|_{\rho^2 = \lambda'} = 1, \quad (2.85)$$

т.е. согласно (2.84) выполнялось равенство

$$F(\xi^2 l^2, \lambda' l^2, \tilde{v}'; G') = 1 - \alpha^{-1}.$$

Очевидно, значение λ' зависит, вообще говоря, от ξ^2 , l^2 , \tilde{v} и α . Таким образом, уравнение для G представимо в форме

$$G^{-1} = 1 + F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G) - F(\xi^2 l^2, \lambda l^2, \tilde{v}; G), \quad (2.86)$$

инвариантной относительно преобразования

$$G \rightarrow G', \quad \tilde{v} \rightarrow \tilde{v}', \quad \lambda \rightarrow \lambda'. \quad (2.87)$$

Отсюда следует, что безразмерную величину G мы вправе рассматривать как функцию безразмерных переменных

$$G = G(\xi^2 \lambda^{-1}, \rho^2 \lambda^{-1}, \tilde{v}),$$

для которой равенство (2.83), записанное в виде

$$G(\xi^2 \lambda^{-1}, 1, \tilde{v}) = 1, \quad (2.88)$$

называется условием нормировки. Ренормгрупповое свойство уравнения (2.78) теперь можно выразить равенством

$$\alpha G(\xi^2 \lambda^{-1}, \rho^2 \lambda^{-1}, \tilde{v}) = G(\xi^2 (\lambda')^{-1}, \rho^2 (\lambda')^{-1}, \tilde{v}'), \quad (2.89)$$

означающим, что умножение функции G на отличное от нуля число α эквивалентно изменению точки нормировки λ и перенормировке исключенного объема \tilde{v} . Полагая $\rho^2 = \lambda'$ в (2.89) и учитывая условие нормировки

$$G(\xi^2 (\lambda')^{-1}, 1, \tilde{v}') = 1,$$

соответствующее равенству (2.85), получим

$$\alpha^{-1} = G(\xi^2 \lambda^{-1}, \lambda' \lambda^{-1}, \tilde{v}),$$

и тогда в новых обозначениях

$$x = \frac{\xi^2}{\lambda}, \quad y = \frac{\rho^2}{\lambda}, \quad t = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

равенство (2.89) примет вид

$$G(x, y, \tilde{v}) = G(x, t, \tilde{v}) G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \tilde{v} G^2(x, t, \tilde{v})\right). \quad (2.90)$$

Если обе части последнего равенства возвести в квадрат, а затем умножить на \tilde{v} , то в итоге мы получим для инвариантной относительно РГ-преобразований величины

$$V(x, y, \tilde{v}) = \tilde{v} G^2(x, y, \tilde{v}) \quad (2.91)$$

функциональное уравнение

$$V(x, y, \tilde{v}) = V(x t^{-1}, y t^{-1}, V(x, t, \tilde{v})) \quad (2.92)$$

со следующим условием нормировки

$$V(x, 1, \tilde{v}) = \tilde{v}. \quad (2.93)$$

Уравнение (2.92) является замкнутым и может быть решено в общем виде [76]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальными уравнениями Ли благодаря непрерывности ренормгруппы. Чтобы получить уравнение Ли, например, для $V(x, y, \tilde{v})$, продифференцируем обе части равенства (2.92) по y и затем положим $t = y$. В результате имеем

$$y \frac{\partial V(x, y, \tilde{v})}{\partial y} = \beta\left(\frac{x}{y}, V(x, y, \tilde{v})\right), \quad (2.94)$$

где

$$\beta(x, \tilde{v}) = \frac{\partial V(x, y, \tilde{v})}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (2.95)$$

а граничным условием для уравнения (2.94) служит условие нормировки (2.93). Если же равенство (2.92) продифференцировать по t и затем положить $t = 1$, то мы придем к другой форме уравнения Ли:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(x, \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\right) V(x, y, \tilde{v}) = 0.$$

Аналогичным способом можно получить дифференциальные уравнения непосредственно для функции $G(x, y, \tilde{v})$. Действительно, дифференцируя обе части равенства (2.90) по y и полагая затем $t = y$, находим

$$\frac{\partial \ln G(x, y, \tilde{v})}{\partial \ln y} = \gamma\left(\frac{x}{y}, V(x, y, \tilde{v})\right), \quad (2.96)$$

где

$$\gamma(x, \tilde{v}) = \frac{\partial G(x, y, \tilde{v})}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (2.97)$$

а граничным условием для уравнения (2.96) служит равенство (2.88). Если же продифференцировать равенство (2.90) по t , после чего положить $t = 1$, то получим

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(x, \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\right) \ln G(x, y, \tilde{v}) = \gamma(x, \tilde{v}).$$

Из определений (2.95) и (2.97) вытекает следующая связь между функциями $\beta(x, \tilde{v})$ и $\gamma(x, \tilde{v})$:

$$\beta(x, \tilde{v}) = 2\tilde{v}\gamma(x, \tilde{v}).$$

Приведенные выше РГ-уравнения оказываются особенно полезными при исследовании асимптотических свойств функции $G(x, y, \bar{v})$. Например, чтобы определить поведение функции $G(x, y, \bar{v})$, когда $x \ll y$ и $y \rightarrow 0$, выберем точку нормировки λ , удовлетворяющую неравенству

$$\xi^2 \ll \rho^2 \lesssim \lambda,$$

и в уравнении (2.94) перейдем к пределу, устремляя ξ^2 к нулю. Тогда, обозначая

$$V(y, \bar{v}) = \lim_{x \rightarrow 0} V(x, y, \bar{v}), \quad (2.98)$$

$$\beta(\bar{v}) = \left. \frac{\partial V(y, \bar{v})}{\partial y} \right|_{y=1}, \quad (2.99)$$

мы приходим к следующему уравнению:

$$y \frac{\partial V(y, \bar{v})}{\partial y} = \beta(V(y, \bar{v})), \quad (2.100)$$

с граничным условием

$$V(1, \bar{v}) = \bar{v}. \quad (2.101)$$

Уравнение (2.100) совместно с равенством (2.101) можно записать в форме уравнения Гелл-Манна–Лоу:

$$\int_{\bar{v}}^{V(y, \bar{v})} \beta^{-1}(t) dt = \ln y, \quad (2.102)$$

очень удобной для анализа поведения инвариантного исключенного объема $V(y, \bar{v})$ в области малых значений y или $\rho^2 \ll \lambda$.

Следуя описанной здесь схеме вывода РГ-уравнений и меняя ролями переменные ξ^2 и ρ^2 , т.е. считая теперь переменную ξ^2 лидирующей, мы получим в итоге совершенно аналогичные по форме РГ-уравнения.

Таким образом, согласно РГ-уравнениям, эффективным параметром, характеризующим интенсивность объемного взаимодействия в малой окрестности точек $\xi = 0$ и $\rho = 0$ является инвариантный исключенный объем. Поэтому, чтобы определить асимптотическое поведение, например, функции $G(y, \bar{v})$ при $y \rightarrow 0$, необходимо знать, как при этом ведет себя величина $V(y, \bar{v})$. Но поведение последней определяется свойствами функции $\beta(V)$ в соответствии с уравнением (2.100).

В самом деле, когда величина $\beta(V)$ положительна, то в случае $y \rightarrow 0$ инвариантный исключенный объем $V(y, \bar{v})$ будет убывать. Если при некотором значении $V = \bar{v}_* < \bar{v}$ функция $\beta(V)$ обращается в нуль и интеграл в левой части уравнения (2.102) расходится, то, стало быть, и правая часть этого уравнения должна обращаться в бесконечность. Иными словами, при $y \rightarrow 0$ имеем $V(y, \bar{v}) \rightarrow \bar{v}_*$, где $\beta(\bar{v}_*) = 0$. Необходимо отметить, что среди нулей функции $\beta(V)$ обязательно имеется $\bar{v}_* = 0$.

Если же величина $\beta(V)$ отрицательна, то в этом случае ситуация обратная. Действительно, при $y \rightarrow 0$ функция $V(y, \bar{v})$ возрастает. Причем, если функция $\beta(V)$ обращается в нуль в точке $V = \bar{v}_* > \bar{v}$ и интеграл в (2.102) расходится, то $V(y, \bar{v}) \rightarrow \bar{v}_*$, когда $y \rightarrow 0$. Если же функция $\beta(V)$ не имеет нулей при $V > \bar{v}$, то $V(y, \bar{v}) \rightarrow \infty$, когда $y \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что нули функции $\beta(V)$ могут быть стабильными и нестабильными. Когда величина V лежит в окрестности стабильного нуля \bar{v}_* , то инвариантный исключенный объем $V(y, \bar{v})$ стремится к \bar{v}_* при $y \rightarrow 0$. В том случае, когда нуль \bar{v}_* нестабилен, величина $V(y, \bar{v})$ при $y \rightarrow 0$ удаляется от \bar{v}_* , стремясь к следующему нулю либо к бесконечности.

Поскольку для вычисления функции $\beta(V)$ обычно используется теория возмущений, то реально можно судить о ее поведении лишь в малой окрестности точки $V = 0$, в которой $\beta(0) = 0$. Действительно, если в этой окрестности величина $\beta(V)$ положительна, то инвариантный исключенный объем $V(y, \bar{v})$ стремится к нулю, когда $y \rightarrow 0$. Если же функция $\beta(V)$ отрицательна вблизи нуля, то при $y \rightarrow 0$ величина $V(y, \bar{v})$ возрастает, в результате чего мы выходим за рамки применимости теории возмущений.

2.4. Диаграммное описание эффекта исключенного объема

Как уже отмечалось, для определения асимптотики плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$, когда $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$, необходимо знать поведение функции $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ в малой окрестности точек $\zeta = 1$ и $\rho = 0$ или, что то же, функции $G(x, y, \bar{v})$ вблизи $x = 0$ и $y = 0$. В этом случае наиболее существенными областями интегрирования во всех членах ряда в (2.34), очевидно, являются те области, в которых значения аргументов y всех подынтегральных функций по модулю малы, т.е. когда для каждой переменной интегрирования κ справедливо условие: $\kappa l \ll 1$. Для таких значений κ выполняется также неравенство $\kappa r_0 \ll 1$, поскольку $r_0 < l$, что позволяет нам использовать известное в теории полимеров приближение

$$f(\mathbf{r}) = -v_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (2.103)$$

или $\bar{v} = \bar{v}_0$ в соответствии с определениями в (2.3) и (2.31).

С другой стороны, когда величина κ возрастает и достигает значений $\kappa \gtrsim l^{-1}$ (а сопряженная ей величина R , соответственно, убывает до значений $R \lesssim l$), объем пространственной области, доступной для блуждающей частицы, уменьшается вследствие возрастания эффекта исключенного объема. В связи с этим плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$ в области $R \lesssim l$ и, соответственно, функция $\mathcal{A}(\zeta, \kappa)$ для $\kappa \gtrsim l^{-1}$ должны принимать предельно малые значения. Поэтому область интегрирования $\kappa \gtrsim l^{-1}$ во всех членах ряда в (2.34) вносит несущественный вклад и мы вправе использовать приближение $\bar{v}(\kappa) = \bar{v}_0$ в (2.34) для всех значений κ .

Таким образом, полагая $\bar{v}(\kappa) = \bar{v}_0$ и принимая во внимание обозначения (2.52)–(2.54), ряд в (2.34) можно записать так:

$$\begin{aligned} B(\zeta, \rho l, \bar{v}_0; \mathcal{A}) = & -v_1 \bar{w}(\zeta, 0) + \\ & + v_1^2 \int \mathcal{A}(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) M(\zeta, \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} - \\ & - 2v_1^3 \int \mathcal{A}(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) M^2(\zeta, \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} + \dots; \end{aligned} \quad (2.104)$$

здесь

$$v_1 = \zeta^2 v_0 = \bar{v}_0 l^d,$$

а функции $\tilde{w}(\zeta, 0)$ и $M(\zeta, \kappa)$ согласно формуле (2.61) равны

$$\tilde{w}(\zeta, 0) = \int \mathcal{A}(\zeta, \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d}, \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} M(\zeta, \kappa) &= \int \mathcal{A}(\zeta, \kappa - \kappa') \mathcal{A}(\zeta, \kappa') \frac{d^d \kappa'}{(2\pi)^d} = \\ &= \omega \int_0^\infty A_s(\kappa R) \tilde{w}^2(\zeta, R) R^{2s+1} dR. \end{aligned} \quad (2.106)$$

В результате принятого приближения некоторые члены ряда в (2.34), например, изображаемые на рис. 6 третьей и четвертой диаграммами, описываются теперь совершенно одинаково. Далее, интегрирование по углам во всех членах ряда (2.104) приводит последний к виду

$$\begin{aligned} B(\zeta, \rho l, \tilde{v}_0; \mathcal{A}) &= -v_1 \tilde{w}(\zeta, 0) + \\ &+ \omega v_1^2 \int_0^\infty A_s(\rho R) \tilde{w}^3(\zeta, R) R^{2s+1} dR - \\ &- 2\omega^2 v_1^3 \int_0^\infty dR R^{2s+1} A_s(\rho R) \tilde{w}(\zeta, R) \times \\ &\times \int_0^\infty A_s(R\kappa) M^2(\zeta, \kappa) \kappa^{2s+1} \frac{d\kappa}{(2\pi)^d} + \dots \end{aligned} \quad (2.107)$$

Диаграммное изображение членов ряда в (2.107) получается из соответствующего представления ряда (2.34) на рис. 6 в результате "стягивания" волнистой линии в точку так, чтобы последней соответствовал множитель $-\tilde{v}_0/(2\pi)^d$ и в каждой такой точке, по-прежнему, выполнялся "закон сохранения импульса". В итоге мы приходим к диаграммному ряду на рис. 7, где квадрат в диаграмме (Σ) обозначает совокупность диаграмм с четырьмя внешними линиями (рис. 8), называемую обычно вершинной частью или полным четырехполюсником. При этом очень важно, что для вершинной части Y можно установить замкнутое уравнение [66], которое совместно с основным уравнением образуют замкнутую систему.

С этой целью обозначим посредством диаграммы на рис. 9 сумму таких диаграмм из полного 4-полюсника Y , каждую из которых невозможно рассечь вертикальной прямой на две части, соединенные между собой только двумя линиями. Между 4-полюсниками X и Y нетрудно установить связь с помощью уравнения Бете–Солпитера (рис. 10). Уравнение на рис. 10 можно обратить, т.е. решить формально относительно 4-полюсника X . В самом деле, используя метод итераций, получим равенство на рис. 11, согласно которому 4-полюсник X может быть выражен через полный 4-полюсник Y . Далее, пусть рис. 12 обозначает сумму таких диаграмм из вершинной части Y , каждую из которых нельзя рассечь не только вертикальной, но и горизонтальной прямой на две части, соединенные между собой лишь двумя линиями. Такой 4-полюсник K назовем компактным. Уравнение Бете–Солпитера на рис. 10 можно теперь переписать в виде рис. 13. При этом компактный 4-полюсник K также можно выразить через полный 4-полюсник Y (рис. 14). Исключением здесь является лишь первое слагаемое —

$$\begin{aligned} b(z, \rho) &= \underbrace{\bigcirc}_{(a)} + \underbrace{\bigcirc}_{(\Sigma)} = \\ &= \underbrace{\bigcirc}_{(a)} + \underbrace{\bigcirc}_{(b)} + 2 \times \underbrace{\bigcirc}_{(c)} + \dots \end{aligned}$$

Рис. 7

$$Y \equiv \square = \blacksquare + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

Рис. 8

$$X_{12,34} = \text{diagram with shaded square}$$

Рис. 9

$$\text{diagram 1} = \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

Рис. 10

$$\begin{aligned} \text{diagram 1} &= \text{diagram 2} - \text{diagram 3} + \\ &+ \text{diagram 4} - \dots \end{aligned}$$

Рис. 11

$$K_{12,34} = \text{diagram with cross-hatched square}$$

Рис. 12

$$\begin{aligned} \text{diagram 1} &= \text{diagram 2} + \\ &+ \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} \end{aligned}$$

Рис. 13

$$\text{diagram 1} = \blacksquare + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

Рис. 14

здесь

$$h(RN^{-1}) = \left| \frac{\partial^2 H(\xi, RN^{-1})}{\partial (\xi l)^2} \right|_{\xi=\xi_0},$$

а стационарная точка $\xi = \xi_0$ определяется из уравнения

$$\xi_0 \tilde{\alpha}(\xi_0) = dR(Nl^2)^{-1}.$$

Тогда, согласно формулам (2.60) и (3.7), асимптотика плотности вероятности $W_N(\mathbf{R})$ находится просто из условия ее нормировки. Так, в случае $d = 3$ ($s = 1/2$) и $d = 4$ ($s = 1$) в работе [100] получены асимптотические выражения для $W_N(\mathbf{R})$ во втором порядке по малому параметру $\tilde{v}_0 N^{1-s}$.

В заключение вычислим величину $\langle R^2 \rangle_N$ в первом порядке по $\tilde{v}_0 N^{1-s}$, полагая, что $N \rightarrow \infty$, $\tilde{v}_0 \rightarrow 0$, но $\tilde{v}_0 N^{1-s} \ll 1$. С этой целью воспользуемся формулой (2.65) и независимостью функции $B(\zeta, \rho l, \tilde{v}_0; \mathcal{A})$ от переменной ρ в первом порядке по $\tilde{v}_0 N^{1-s}$, как это следует из выражения (2.107). Тогда в рассматриваемом приближении формулу (2.65) можно записать так:

$$\langle R^2 \rangle_N = l^2 \oint d\zeta \zeta^N \Delta^{-2}(\xi l) \left(\oint d\zeta \zeta^N \Delta^{-1}(\xi l) \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

причем

$$\zeta - 1 = z_0 \Delta(\xi l) + v_0 (\tilde{w}(1, 0) - \tilde{w}(\zeta, 0)). \quad (3.9)$$

Поскольку $N \rightarrow \infty$, то наибольший вклад в значения интегралов в (3.8) вносит окрестность точки $\zeta = 1$ или $\xi = 0$, вследствие чего мы вправе использовать приближения

$$\begin{aligned} \zeta^N &\cong \exp[N(\zeta - 1)], \\ \Delta(\xi l) &\cong (\xi l)^2 (2d)^{-1} + O(\xi^4 l^4). \end{aligned}$$

Кроме того, чтобы определить правую часть равенства (3.9) в окрестности точки $\zeta = 1$, примем во внимание формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_s(x) &\equiv 2^{1-s} \Gamma^{-1}(s) x^s K_s(x) = \\ &= 1 - \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s} + O(x^2), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

когда $0 < s < 1$. Тогда соответственно равенству (3.10) выражение для $\tilde{w}(\zeta, R)$ в (3.2) при $\zeta \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$) ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\zeta, R) &\sim 2^s d \Gamma(s) z_0^{-1} (2\pi l^2)^{-d/2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{l}{R} \right)^{2s} - \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{\xi l}{2} \right)^{2s} + O \left((\xi l)^2 \left(\frac{R}{l} \right)^{2(1-s)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если в последней формуле перейти к пределу при $\zeta \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$), то, обозначив

$$\tilde{w}(1, R) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{w}(\zeta, R),$$

нетрудно видеть, что разность

$$\tilde{w}(1, R) - \tilde{w}(\zeta, R) \quad (3.12)$$

для достаточно малых значений $\zeta - 1$ (или ξl) почти не зависит от R . Поэтому главный член разложения величины (3.12) мы приравняем к разности

$$\tilde{w}(1, 0) - \tilde{w}(\zeta, 0),$$

вычисление которой с помощью формулы (3.11) дает

$$\tilde{w}(1, 0) - \tilde{w}(\zeta, 0) \sim \frac{d\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{z_0(2\pi l^2)^{d/2}\Gamma(1+s)} \left(\frac{\xi^2 l^2}{2} \right)^s.$$

Теперь введем обозначения

$$\begin{aligned} g &= [d(2\pi z_0 l^2)^{-1}]^{d/2} v_0 N^{1-s}, \\ \lambda &= z_0 N(\xi l)^2 (2d)^{-1} \end{aligned}$$

и в формуле (3.8) перейдем к новой переменной интегрирования λ согласно равенству

$$N(\zeta - 1) = \lambda + \Gamma(1-s) g \lambda^s s^{-1}.$$

Тогда выражение для $\langle R^2 \rangle_N$ в первом приближении по g можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle_N &= z_0 N l^2 \int d\lambda (\exp \lambda) \lambda^{-2} \Phi(\lambda) \times \\ &\times \left[\int d\lambda (\exp \lambda) \lambda^{-1} \Phi(\lambda) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\Phi(\lambda) = 1 + \Gamma(1-s) g (\lambda^{s-1} + \lambda^s s^{-1}).$$

Далее, учитывая формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda \exp(-t\lambda) \lambda^{-v} = \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}$$

при вычислении интегралов в (3.13) и заменяя величину $z_0 = z_0(\tilde{v}_0)$ ее предельным значением $z_0(0) = 1$, мы получим в итоге результат

$$\langle R^2 \rangle_N = N l^2 \{ 1 + g [(1-s)(2-s)]^{-1} + \dots \}, \quad (3.14)$$

используемый для вычисления $\langle R^2 \rangle_N$ в феноменологическом подходе к этой проблеме [3].

3.2. Размерность $d=4$

Прежде чем рассматривать здесь четырехмерный случай, сделаем несколько общих замечаний, существенных для исследования проблемы СББС при всех значениях $d \leq 4$.

Обратимся к уравнению (2.78) и для определения величины F согласно (2.79) воспользуемся приближением в (2.107). Напомним, что это приближение для функции $B(\zeta, \rho l, \tilde{v}; \mathcal{A})$ получено при условии $\tilde{v}(\kappa) = \tilde{v}_0$ для всех значений переменной κ , вследствие чего теперь устранено ограничение сверху на область интегрирования по этой переменной. Поэтому во избежание возможной расходимости на верхнем пределе при интегрировании по κ мы вынуждены ввести в теорию некоторый параметр обрезания. Но благодаря РГ-свойствам основного уравнения, окончательный результат не должен зависеть от выбора конкретного значения этого параметра. Имеется несколько способов регуляризации расходящихся выражений (см., например, [101]), однако для

этой цели в данной проблеме оказалось более удобно применить метод, существенно отличающийся от известных подходов. А именно, при выборе исходного приближения для функции $\mathcal{A}(\xi, \kappa)$ в правой части уравнения (2.78) воспользуемся свойствами функции Макдональда $K_\mu(z)$, из которых в первую очередь следует принять во внимание ее асимптотическое поведение при малых и больших значениях аргумента z :

$$K_\mu(z) \sim \begin{cases} 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) z^{-\mu}, & 0 < z \ll 1, \\ \sqrt{\pi} (2z)^{-1/2} \exp(-z), & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Кроме того, важно отметить, что функция $K_\mu(z)$ при каждом фиксированном значении z ($z \neq 0$) является целой функцией от индекса μ , который, как будет установлено в дальнейшем, непосредственно связан с размерностью пространства, и при этом $K_{-\mu}(z) = K_\mu(z)$.

Так, например, в роли "невозмущенной" функции для $\mathcal{A}(\xi, \kappa)$ вместо $\mathcal{A}_0(\xi, \kappa)$ может выступать функция

$$\mathcal{A}_1(\xi, \kappa) = 2dL \left(z_0 l^2 \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} \right)^{-1} K_1 \left(L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} \right), \quad (3.16)$$

где параметр обрезания L^{-1} подчинен условию: $L \gtrsim l$. Действительно, из формул (3.15) и (3.16) следует, что при малых значениях κ величина $\mathcal{A}_1(\xi, \kappa)$ ведет себя как $\mathcal{A}_0(\xi, \kappa)$, а при больших значениях κ ($\kappa \gg L^{-1}$) функция $\mathcal{A}_1(\xi, \kappa)$ экспоненциально стремится к нулю.

Далее, ради упрощения записи формул будем обозначать посредством C положительные константы, зависящие, возможно, лишь от размерности пространства, т.е. в разных формулах величина C может принимать, вообще говоря, различные значения, которые, однако, при необходимости могут быть записаны в явной форме.

Приступим теперь непосредственно к изложению проблемы СББС в пространстве с размерностью $d = 4$.

В качестве исходного приближения для \mathcal{A} в правой части уравнения (2.78) примем функцию

$$\mathcal{A}_1(\xi, \kappa) = 8L \left(z_0 l^2 \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} \right)^{-1} K_1 \left(L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} \right). \quad (3.17)$$

Но так как величины $\mathcal{A}_0(\xi, \kappa)$ и $\mathcal{A}_1(\xi, \kappa)$ в наиболее существенной области их определения практически равны между собой, то соответствующее исходное приближение для G согласно (2.77) можно считать равным единице. Тогда, подставляя выражение (3.17) в формулу (2.61) вместо функции $\mathcal{A}(\xi, \kappa)$ и принимая во внимание формулу Сонина–Гегенбауэра [99]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_s(\alpha x) K_\mu \left(\beta \sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^{-\mu/2} x^{s+1} dx = \\ = \alpha^s \beta^{-\mu} y^{s-\mu+1} (\alpha^2 + \beta^2)^{(\mu-s-1)/2} K_{\mu-s-1} \left(y \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\operatorname{Re} y > 0$, получим

$$\tilde{w}_1(\xi, R) = 2\xi \left(\pi^2 z_0 l^2 \sqrt{R^2 + L^2} \right)^{-1} K_1 \left(\xi \sqrt{R^2 + L^2} \right). \quad (3.19)$$

В рассматриваемом приближении величину $F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G)$, согласно равенствам (2.79) и (2.107), представим в виде

$$\begin{aligned} F(\xi^2 l^2, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G_1) = \\ = \mathcal{A}_0(\xi, \rho) \left[2\pi^2 v_1^2 \int_0^\infty dR R^3 (\mathcal{A}_1(i\xi R) - \mathcal{A}_1(\rho R)) \times \right. \\ \times \tilde{w}_1^3(\xi, R) - \frac{1}{2} v_1^3 \int_0^\infty dR R^3 (\mathcal{A}_1(i\xi R) - \mathcal{A}_1(\rho R)) \times \\ \left. \times \tilde{w}_1(\xi, R) \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \mathcal{A}_1(R\kappa) M_1^2(\xi, \kappa) + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $G_1 = \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0$,

$$M_1(\xi, \kappa) = 2\pi^2 \int_0^\infty \mathcal{A}_1(\kappa R) \tilde{w}_1^2(\xi, R) R^3 dR.$$

Теперь, чтобы найти асимптотику функции G , когда $\xi = 1$, а $\rho \rightarrow 0$, в приближенном равенстве (3.20) положим $\xi = 0$ и учтем выражение

$$\tilde{w}_1(0, R) = 2[\pi^2 l^2 (R^2 + L^2)]^{-1},$$

вытекающее из (3.19). Кроме того, для вычисления интегралов в правой части равенства (3.20) воспользуемся формулами [99]

$$\int_0^\infty \frac{R^{s+1} J_s(\rho R)}{(R^2 + L^2)^{\mu+1}} dR = \rho^\mu L^{s-\mu} [2^\mu \Gamma(\mu+1)]^{-1} K_{s-\mu}(\rho L), \quad (3.21)$$

$$-1 < \operatorname{Re} s < 2 \operatorname{Re} \mu + \frac{3}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{R^{s-\mu+1}}{R^2 + L^2} J_\mu(\kappa R) J_s(\rho R) dR = L^{s-\mu} I_\mu(\kappa L) K_s(\rho L), \quad (3.22)$$

$$-1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu + 2, \quad \kappa \leq \rho,$$

где $I_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. После несложных вычислений (см. приложение I) находим

$$\begin{aligned} F(0, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G_1) = -\frac{1}{2} \tilde{v}_1^2 \ln(\rho L_1)^2 - \\ - \tilde{v}_1^3 [\ln^2(\rho L_1)^2 - 3 \ln(\rho L_1)^2] + \dots; \end{aligned} \quad (3.23)$$

здесь $\tilde{v}_1 = 4\tilde{v}_0/\pi^2$, $L_1 = CL$. Наконец, если подставить выражение (3.23) в уравнение (2.78), получим

$$G^{-1}(0, y, \tilde{v}) = 1 - \frac{1}{2} \tilde{v}_1^2 \ln y - \tilde{v}_1^3 (\ln^2 y - 3 \ln y) + \dots \quad (3.24)$$

Далее, из равенств (2.99) и (3.24) определим функцию $\beta(\tilde{v})$:

$$\beta(\tilde{v}) = \tilde{v}^3 + O(\tilde{v}^4),$$

подставим ее в уравнение Гелл-Манна–Лоу (2.102) и затем решим его. В результате получим инвариантный

исключенный объем

$$V(y, \bar{v}_1) = \bar{v}_1(1 - 2\bar{v}_1^2 \ln y)^{-1/2}. \quad (3.25)$$

Отсюда следует, что $V(y, \bar{v}_1) \rightarrow 0$, когда $y \rightarrow 0$, т.е. нуль $\bar{v} = 0$ функции $\beta(\bar{v})$ является стабильным. Таким образом, когда $\zeta = 1$, а $\rho \rightarrow 0$ из равенства (3.25) и определенных величин G и V в (2.77) и (2.91) имеем

$$\mathcal{A}^{-1}(1, \rho) \sim (\rho l)^2 \mathcal{L}(\rho l), \quad (3.26)$$

где

$$\mathcal{L}(x) = (4\pi)^{-1}(4\bar{v}_0^2 \ln x^{-1})^{1/4}.$$

Пусть теперь значения ζ принадлежат малой окрестности точки $\zeta = 1$. Запишем основное уравнение (2.55) в виде

$$\mathcal{A}^{-1}(\zeta, \rho) = \zeta - 1 + \mathcal{A}^{-1}(1, \rho) + B(1, \rho l, \bar{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, \rho l, \bar{v}; \mathcal{A}), \quad (3.27)$$

причем функция $\mathcal{A}^{-1}(1, \rho)$, согласно определению

$$\mathcal{A}^{-1}(1, \rho) = z_0(1 - A_1(\rho l)) + B(1, 0, \bar{v}; \mathcal{A}) - B(1, \rho l, \bar{v}; \mathcal{A}),$$

превосходит по модулю разность

$$B(1, \rho l, \bar{v}; \mathcal{A}) - B(\zeta, \rho l, \bar{v}; \mathcal{A})$$

для всех достаточно малых значений $|\zeta - 1|$. В этом случае величиной этой разности можно пренебречь и тогда приближенное уравнение для $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ будет иметь вид

$$\mathcal{A}^{-1}(\zeta, \rho) = \zeta - 1 + \mathcal{A}^{-1}(1, \rho). \quad (3.28)$$

Далее, в правой части последнего равенства воспользуемся выражением (3.26) и полученный результат для $\mathcal{A}(\zeta, \rho)$ подставим в формулу

$$\tilde{w}(\zeta, R) = \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0^\infty J_1(R\rho) \mathcal{A}(\zeta, \rho) \rho^2 d\rho. \quad (3.29)$$

Для оценки интеграла в (3.29), когда $R \gg l$, мы удержим вклад в его значение лишь от ближайших к началу координат $\rho = 0$ корней $\rho_{1,2} \equiv \pm i\zeta$ ($\text{Re } \zeta > 0$) уравнения $\mathcal{A}^{-1}(\zeta, \rho) = 0$, т.е.

$$(\xi l)^2 \mathcal{L}(\pm i\xi l) = \zeta - 1.$$

В результате находим

$$\tilde{w}(\zeta, R) \sim \xi(4\pi^2 l^2 R \mathcal{L}(i\xi l))^{-1} K_1(\xi R) \quad (3.30)$$

для всех $R \gg l$. Если теперь подставить выражение (3.30) в формулу обращения (2.60) и учесть асимптотическое поведение функции $K_1(x)$ при больших значениях ее аргумента, то мы придем к следующему представлению плотности вероятности:

$$W_N(\mathbf{R}) \sim C_N l^{-4} \left(\frac{l}{R}\right)^{3/2} \int dt t^{3/2} \exp\left(NH\left(t, \frac{R}{Nl}\right)\right); \quad (3.31)$$

здесь C_N обозначает нормировочный множитель,

$$H(t, x) = t^2 \mathcal{L}(it) - tx.$$

Асимптотическую оценку интеграла в (3.31), когда $N \rightarrow \infty$, а отношение R/N фиксировано и $(R/N) \ll 1$, можно получить с помощью метода перевала. После несложных вычислений находим в итоге [100]

$$W_N(\mathbf{R}) \sim (\pi N_1 l^2)^{-2} [\ln(N_1 l R^{-1})]^{-1/2} \times \exp\left[-R^2 \left\{N_1 l^2 [\ln(N_1 l R^{-1})]^{1/4}\right\}^{-1}\right], \quad (3.32)$$

где $N_1 = (\bar{v}_1/2)^{1/2} N$. Отсюда нетрудно найти соответствующую асимптотику для среднеквадратичного расстояния $\langle R^2 \rangle_N$ между концами траектории блуждающей частицы

$$\langle R^2 \rangle_N \sim N_1 l^2 (8 \ln N_1)^{1/4}. \quad (3.33)$$

Последний результат хорошо согласуется с численными расчетами величины $\langle R^2 \rangle_N$, когда $d = 4$ [49].

3.3. Размерность $d < 4$

3.3.1. Асимптотический случай: $\varepsilon \rightarrow 0$

Вначале мы рассмотрим проблему СББС в пространстве \mathcal{R}^d с размерностью $d = 4 - \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в качестве исходного приближения для $\mathcal{A}(\zeta, \kappa)$ в правой части уравнения (2.78) примем "невозмущенную" функцию $\mathcal{A}_1(\zeta, \kappa)$, определенную равенством (3.16). Присутствие вспомогательного параметра L в данном случае обусловлено лишь соображениями удобства при вычислении интегралов, а в окончательных формулах его можно устранить, перейдя к пределу при $L \rightarrow 0$.

Итак, подставляя выражение (3.16) в равенство (2.61) вместо функции $\mathcal{A}(\zeta, \kappa)$ и пользуясь формулой (3.18), получим

$$\tilde{w}_1(\zeta, R) = 2 d\zeta^s [(2\pi)^{s+1} z_0 l^2 (R^2 + L^2)^{s/2}]^{-1} \times K_s(\xi \sqrt{R^2 + L^2}). \quad (3.34)$$

В свою очередь последнее выражение мы подставим в равенство (2.107) вместо величины $\tilde{w}(\zeta, R)$ и результат учтем в (2.79). Тогда, переходя к пределу при $\zeta \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$), находим

$$\begin{aligned} F(0, \rho^2 l^2, \bar{v}; G_1) &= \\ &= \mathcal{A}_0(0, \rho) \left[\omega v_0^2 \int_0^\infty (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}_1^3(R) R^{2s+1} dR - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega^2 v_0^3 \int_0^\infty dR R^{2s+1} (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}_1(R) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty A_s(R\kappa) M_1^2(\kappa) \kappa^{2s+1} \frac{d\kappa}{(2\pi)^d} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $G_1 = \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0$,

$$\tilde{w}_1(R) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{w}_1(\zeta, R) = 2^s \Gamma(s) d [(2\pi)^{s+1} l^2 (R^2 + L^2)^{s/2}]^{-1},$$

$$\begin{aligned}
M_1(\kappa) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \omega \int_0^\infty A_s(\kappa R) \tilde{w}_1^2(\xi, R) R^{2s+1} dR = \\
&= C_1 L^{1-s} (l^4 \kappa^{1-s})^{-1} K_{1-s}(\kappa L), \\
C_1 &= 2d^2 \Gamma^2(s) [(2\pi)^{s+1} \Gamma(2s)]^{-1}.
\end{aligned} \quad (3.36)$$

Значение интеграла в равенстве (3.36) было найдено с помощью формулы (3.21), а вычисление интегралов в (3.35) приведено в приложении II. В итоге для величины $F(0, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G_1)$ получим выражение

$$F(0, \rho^2 l^2, \tilde{v}; G_1) = \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{v}_1^2(\rho l)^{-2\varepsilon} - \frac{8}{3\varepsilon^2} \tilde{v}_1^3(\rho l)^{-3\varepsilon} + \dots, \quad (3.37)$$

в котором $\tilde{v}_1 = v_0 d / \pi^2 l^d$. Отсюда нетрудно видеть, что в рассматриваемом приближении эта величина растет по модулю, когда $\rho \rightarrow 0$, в то время как функция $G(0, y, \tilde{v})$ при этом убывает согласно уравнению (2.78). В дальнейшем ради простоты мы будем обозначать посредством \tilde{v} также перенормированную константу связи, пропорциональную величине исключенного объема, т.е. $\tilde{v} = C v_0 / l^d$. Определяя теперь функцию $G(0, y, \tilde{v})$ с помощью равенств (2.78) и (3.37), мы получим для нее в окрестности точки нормировки $y = 1$ разложение

$$G^{-1}(0, y, \tilde{v}) = 1 - \frac{\tilde{v}^2}{2} \ln y + \frac{4\tilde{v}^3}{\varepsilon} \ln y - \dots \quad (3.38)$$

Тогда вычисление величины $\beta(\tilde{v})$ согласно равенствам (2.99) и (3.38) дает

$$\beta(\tilde{v}) = \tilde{v}^3 \left(1 - \frac{8}{\varepsilon} \tilde{v} \right). \quad (3.39)$$

Отсюда следует, что для достаточно малых значений ε функция $\beta(\tilde{v})$ может быть отрицательной. В связи с этим и приведенным выше замечанием о поведении функции G при $\rho \rightarrow 0$ уравнение Гелл-Манна–Лоу удобно использовать в следующей форме:

$$\int_{V(y, \tilde{v})}^{\tilde{v}} |\beta(t)|^{-1} dt = \ln y^{-1}. \quad (3.40)$$

Поскольку функция $\beta(\tilde{v})$ в соответствии с ее выражением (3.39) линейно обращается в нуль в точке

$$\tilde{v} = \tilde{v}_* = \frac{\varepsilon}{8}, \quad (3.41)$$

то значение интеграла в уравнении (3.40) неограниченно растет, когда $V(y, \tilde{v}) \rightarrow \tilde{v}_*$. Таким образом, значение \tilde{v}_* является пределом инвариантного исключенного объема:

$$V(0, \tilde{v}) = \tilde{v}_*.$$

Наконец, выполняя интегрирование в левой части равенства (3.40), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} (V^{-2}(y, \tilde{v}) - \tilde{v}^{-2}) + \tilde{v}_*^{-1} (V^{-1}(y, \tilde{v}) - \tilde{v}^{-1}) + \\
&+ \tilde{v}_*^{-2} \ln \left(\frac{\tilde{v}}{V(y, \tilde{v})} \frac{V(y, \tilde{v}) - \tilde{v}_*}{\tilde{v} - \tilde{v}_*} \right) = \ln y
\end{aligned} \quad (3.42)$$

— трансцендентное уравнение для $V(y, \tilde{v})$. Однако для анализа поведения функции $V(y, \tilde{v})$ при $y \rightarrow 0$ в уравнении (3.42) проще всего воспользоваться приближением

$$\beta(\tilde{v}) \cong \frac{\varepsilon^2}{64} (\tilde{v}_* - \tilde{v}). \quad (3.43)$$

В результате решения этого уравнения находим зависимость

$$V(y, \tilde{v}) \cong \tilde{v}_* + C(\tilde{v} - \tilde{v}_*) y^{\varepsilon^2/64}, \quad (3.44)$$

определяющую закон приближения величины $V(y, \tilde{v})$ к \tilde{v}_* при $y \rightarrow 0$. Отсюда следует, что в случае $\varepsilon \rightarrow 0$ формула (3.44) преобразуется к виду

$$V(y, \tilde{v}) \sim C \tilde{v} y^{\varepsilon^2/64}, \quad (3.45)$$

и, таким образом, критический показатель η , характеризующий зависимость

$$A(1, \rho) \sim O((\rho l)^{\eta-2}), \quad \rho \rightarrow 0,$$

оказывается равным

$$\eta \cong \frac{\varepsilon^2}{64}, \quad (3.46)$$

что согласуется с соответствующим результатом де Жена [54].

Перейдем теперь к вычислению другого критического показателя ν , определяющего асимптотическую зависимость

$$\xi l \sim O(|\xi - 1|^\nu), \quad \xi \rightarrow 1.$$

С этой целью обратимся к уравнению (2.81) и вычислим его правую часть с точностью до членов второго порядка по \tilde{v}_0 . В рассматриваемом приближении это уравнение можно записать так:

$$\begin{aligned}
E^{-1} &= 1 + 2d(\xi^2 l^2)^{-1} \left[-v_1(\tilde{w}_1(\xi, 0) - \tilde{w}_1(0, 0)) + \right. \\
&\quad \left. + \omega v_1^2 \int_0^\infty (\tilde{w}_1^3(\xi, R) - \tilde{w}_1^3(0, R)) R^{2s+1} dR - \dots \right],
\end{aligned} \quad (3.47)$$

где величина $\tilde{w}_1(\xi, R)$ определена равенством (3.34). Поскольку функция $\tilde{w}_1(\xi, R)$ содержит вспомогательный параметр L , то, как уже отмечалось ранее, для получения окончательных выражений надлежит во всех членах ряда в (3.47) выполнить предельный переход при $L \rightarrow 0$. В результате мы приходим к следующим асимптотическим соотношениям:

$$\tilde{w}_1(0, 0) - \tilde{w}_1(\xi, 0) \sim (\pi^2 l^2 \varepsilon)^{-1} \xi^{2-\varepsilon}, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (\tilde{w}_1^3(0, R) - \tilde{w}_1^3(\xi, R)) R^{2s+1} dR \sim \\
&\sim 6 \xi^{2-2\varepsilon} [(\pi l)^6 \varepsilon^2]^{-1}, \quad \xi \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (3.49)$$

Оценка значения последнего интеграла дана в приложении II. Если в равенстве (3.47) учесть выражения (3.48) и

(3.49), то для величины

$$E = \xi^2 l^2 [2d(\xi - 1)]^{-1}$$

в принятом приближении мы получим уравнение

$$E^{-1} = 1 + \frac{2}{\varepsilon} \bar{v} x^{-\varepsilon/2} - \frac{6}{\varepsilon^2} \bar{v}^2 x^{-\varepsilon} + \dots, \quad (3.50)$$

в котором $x = C\xi^2 l^2$ играет роль независимой переменной. Отметим, что согласно последнему равенству функция $E = E(x, v)$ убывает по модулю, когда $x \rightarrow 0$.

Вернемся к исходному уравнению (2.81) и воспользуемся РГ-свойствами уравнения (2.78). Нетрудно заметить, что величина

$$\bar{v}(x, \bar{v}) = \bar{v} E^{\varepsilon/2}(x, \bar{v}) \quad (3.51)$$

инвариантна относительно РГ-преобразований. Поэтому функция $\bar{v}(x, \bar{v})$ должна удовлетворять уравнению Гелл-Манна–Лоу, которое здесь удобно записать в следующей форме:

$$\int_{\bar{v}(x, \bar{v})}^{\bar{v}} |\bar{\beta}(t)|^{-1} dt = \ln x^{-1}, \quad (3.52)$$

где

$$\bar{\beta}(\bar{v}) = \left. \frac{\partial \bar{v}(x, \bar{v})}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (3.53)$$

а поведение величины $\bar{v}(x, \bar{v})$ в окрестности ее точки нормировки $x = 1$ определяется разложением

$$\bar{v}(x, \bar{v}) = \bar{v} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{v} \ln x - 4\bar{v}^2 \ln x + \dots \right), \quad (3.54)$$

полученным с помощью равенств (3.51) и (3.50). Отсюда, согласно определению (3.53), находим функцию

$$\bar{\beta}(\bar{v}) = 4\bar{v}^2(\bar{v}_* - \bar{v}), \quad (3.55)$$

которая, как и функция $\beta(\bar{v})$ в предыдущем случае, линейно обращается в нуль в точке $\bar{v}_* = \varepsilon/8$. Подставляя теперь выражение (3.55) в уравнение (3.52) и выполняя необходимое интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \bar{v}_* (\bar{v}^{-1}(x, \bar{v}) - \bar{v}^{-1}) + \ln \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}(x, \bar{v})} \frac{\bar{v}(x, \bar{v}) - \bar{v}_*}{\bar{v} - \bar{v}_*} \right) = \\ = 4\bar{v}_*^2 \ln x \end{aligned} \quad (3.56)$$

— трансцендентное уравнение для $\bar{v}(x, \bar{v})$. Однако, чтобы определить асимптотику функции $\bar{v}(x, \bar{v})$ при $x \rightarrow 0$, в уравнении (3.52) воспользуемся приближением

$$\bar{\beta}(\bar{v}) \cong \frac{\varepsilon^2}{16} (\bar{v}_* - \bar{v}). \quad (3.57)$$

В итоге мы придем к следующему результату:

$$\bar{v}(x, \bar{v}) \cong \bar{v}_* + C(\bar{v} - \bar{v}_*) x^{\varepsilon^2/16}, \quad (3.58)$$

который при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно представить так:

$$\bar{v}(x, \bar{v}) \sim C \bar{v}_* x^{\varepsilon^2/16}. \quad (3.59)$$

Если в последней формуле учесть определение (3.51), то критический показатель ν оказывается равным

$$\nu \cong \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{16}, \quad (3.60)$$

что тоже согласуется с соответствующим результатом де Жена (1.95).

Таким образом, приведенные здесь выражения для η и ν получены в асимптотическом случае, когда $d \rightarrow 4$, и поэтому мы не вправе использовать их в реальном пространстве. В следующем разделе будет изложен метод, позволяющий вычислить критические показатели для $d < 4$.

3.3.2. Общий случай

Отмеченная выше ограниченность области применения формул (3.46) и (3.60) непосредственно связана с использованием "затравочного" приближения $\mathcal{A}_1(\xi, \rho)$ для искомой величины $\mathcal{A}(\xi, \rho)$. Вместе с тем отличие от нуля критического показателя η свидетельствует о том, что особые точки функции $\mathcal{A}(\xi, \rho)$ могут иметь полюсной характер. Поэтому, чтобы расширить область приложения формул для критических показателей, целесообразно с самого начала выбрать для $\mathcal{A}(\xi, \rho)$ такое исходное приближение, которое содержало бы полюсные особые точки.

Обратимся к уравнению (2.57) и отметим, что для достаточно малых значений переменных ξ и ρ , последние фигурируют в (2.57) лишь в виде комбинации $\xi^2 + \rho^2$ согласно равенству (2.80). Кроме того, функция $\mathcal{A}(\xi, \rho)$ является четной относительно ρ , а ближайшие к началу координат $\rho = 0$ ее особые точки равны $\rho_{1,2} = \pm i\xi$. Поэтому в качестве исходного приближения для $\mathcal{A}(\xi, \rho)$ мы примем выражение [102]

$$\tilde{\mathcal{A}}(\xi, \rho) = C z_0^{-1} l^{-2} u^{2\mu} \left(\frac{L^2}{\xi^2 + \rho^2} \right)^{\frac{1-\mu}{2}} K_{1-\mu} \left(L \sqrt{\xi^2 + \rho^2} \right), \quad (3.61)$$

в котором параметры $u = u(\bar{v}_0)$, $\mu = \mu(d)$ ($0 < \mu < 1$) и $L \gtrsim l$ подлежат еще определению. Так как по условию $\xi \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$), из (3.61) и свойств функции $K_\lambda(t)$ следует, что величина $\tilde{\mathcal{A}}(\xi, \rho)$ при $\rho L \ll 1$ ведет себя как

$$O(u^{2\mu} (\xi^2 + \rho^2)^{\mu-1})$$

и экспоненциально мала при $\rho L \gg 1$. Тогда в соответствии с определением (2.77) исходным приближением для G будет служить функция $\tilde{G} = \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}_0$, асимптотическое поведение которой при $\xi \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 0$ можно описать следующим образом:

$$\tilde{G}(\xi, \rho) \sim C u^{2\mu} (\xi^2 + \rho^2)^\mu. \quad (3.62)$$

Здесь следует подчеркнуть, что выбор конкретной формы исходного приближения для $\mathcal{A}(\xi, \rho)$, разумеется, неоднозначен, если нас интересует главным образом его асимптотика при $\xi \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 0$. И поскольку последняя содержит искомую информацию о критических показателях проблемы СББС, то выбор исходного приближения в виде (3.61) обусловлен исключительно соображениями удобства вычислительного характера. Таким образом, наша задача теперь сводится к вычислению значений параметров u , μ и L , при которых пробная функция $\tilde{\mathcal{A}}(\xi, \rho)$ в определенном смысле представляет решение основного уравнения.

Допустим, что значения u , μ и L определены. Тогда, подставив функцию $\tilde{A}(\xi, \rho)$ из (3.61) в формулу (2.61) и учтя равенство (3.18), получим выражение

$$\tilde{w}(\xi, R) = Cz_0^{-1} l^{-2} u^{2\mu} \left(\frac{\xi^2}{R^2 + L^2} \right)^{\frac{\mu+s}{2}} K_{\mu+s}(\xi \sqrt{R^2 + L^2}), \quad (3.63)$$

которым мы затем воспользуемся в формуле обращения

$$\tilde{w}_N(\mathbf{R}) = \frac{i}{2\pi z_0^N} \oint d\xi \exp(N \ln \xi) \tilde{w}(\xi, R). \quad (3.64)$$

Для асимптотической оценки интеграла в (3.64), когда значения N и R стремятся к бесконечности, но их отношение R/N фиксировано и много меньше единицы, удобно перейти от ξ к другой переменной интегрирования ζ с помощью тождества (2.56). Кроме того, если в выражении (3.63) учесть асимптотические свойства функции $K_\nu(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то формулу (3.64) можно привести к виду

$$\tilde{w}_N(\mathbf{R}) \sim Cu^{2\mu} [z_0^{N+1} l^2 R^{\mu+s+(1/2)}]^{-1} \times \int d\zeta \frac{d\zeta}{\zeta} \zeta^{\mu+s-(1/2)} \exp\left(ND\left(\zeta, \frac{R}{N}\right)\right), \quad (3.65)$$

где

$$D(\zeta, t) = B(\zeta, i\zeta l, \tilde{v}; \tilde{A}) - B(1, 0, \tilde{v}; \tilde{A}) - t\zeta + O(\zeta^2 l^2). \quad (3.66)$$

Наконец, используя метод перевала для асимптотической оценки интеграла в (3.65), когда $N \rightarrow \infty$, мы получим искомую асимптотику функции $\tilde{w}_N(\mathbf{R})$.

Приступим теперь к определению значений u , μ , L , где μ — безразмерный параметр, связанный с критическим показателем η равенством $\eta = 2\mu$, а параметры u и L имеют размерность длины. Но так как именно показатель μ определяет степень сингулярности функции $\tilde{A}(\xi, \rho)$, то с вычисления его и следует начинать поиск решения задачи. Поскольку искомые параметры не зависят от переменных ξ и ρ , то в уравнении (2.78) положим $\xi = 0$ и ради простоты зависимость величин от значения $\xi = 0$ указывать не будем. В этом случае функция $G(\rho) = \tilde{A}(\rho)/\tilde{A}_0(\rho)$ вблизи точки $\rho = 0$ ведет себя как

$$\tilde{G}(\rho) \sim C(u^2 \rho^2)^\mu, \quad (3.67)$$

и ее можно принять в качестве асимптотического решения уравнения (2.78) при $\xi = 0$ и $\rho \rightarrow 0$, если

$$F\{\tilde{G}\} = \mathcal{A}_0(\rho) (B(1, 0, \tilde{v}; \tilde{A}) - B(1, \rho l, \tilde{v}; \tilde{A})) \sim \sum_{m \geq 1} [-\mu \ln(u^2 \rho^2)]^m (m!)^{-1}. \quad (3.68)$$

Однако согласно РГ-методу для определения асимптотики функции $G(\rho)$, когда $\rho \rightarrow 0$, необходимо знать коэффициент лишь при линейном логарифмическом члене в разложении величины F

$$F\{\tilde{G}\} = 2d(z_0 \rho^2 l^2)^{-1} \left[\omega v_1^2 \int_0^\infty (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}^3(R) R^{2s+1} dR - \right.$$

$$\left. - 2\omega v_1^3 \int_0^\infty dR R^{2s+1} (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}(\mathbf{R}) \times \int \tilde{w}^2(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \tilde{w}^2(r) d^d r + \dots \right] \quad (3.69)$$

по степеням $\ln(\rho^2 L^2)$, где

$$\tilde{w}(\mathbf{R}) = Cu^{2\mu} [z_0 l^2 (R^2 + L^2)^{\mu+s}]^{-1}. \quad (3.70)$$

Первый член ряда в (3.69), определяющий вклад в величину $F\{\tilde{G}\}$ от диаграммы (b) на рис. 7, запишем в виде

$$F_b(\rho) = \mathcal{A}_0(\rho) (B_b(0) - B_b(\rho)), \quad (3.71)$$

где

$$B_b(\rho) = \omega v_1^2 \int_0^\infty A_s(\rho R) \tilde{w}^3(R) R^{2s+1} dR = \\ = Cz_0^{-3} v_1^2 l^{-6} u^{6\mu} (\rho L^{-1})^{3\mu+2s-1} K_{3\mu+2s-1}(\rho L) \quad (3.72)$$

обозначает вклад этой диаграммы в $B(1, \rho l, \tilde{v}; \tilde{A})$. Если теперь подставить выражение (3.72) в правую часть равенства (3.71) и принять во внимание формулу

$$tK_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} \ln t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (3.73)$$

то нетрудно видеть, что логарифмическое поведение функции $F_b(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ можно обеспечить, положив $3\mu + 2s - 2 = 0$, т.е.

$$\mu = \frac{1}{3}(4 - d). \quad (3.74)$$

В самом деле, из равенств (3.71)–(3.74) следует, что

$$F_b(\rho) \sim -C(\tilde{v}_0 z_0^{-2})^2 (ul^{-1})^{6\mu} \ln \rho^2 L^2. \quad (3.75)$$

Необходимо отметить, что при установлении асимптотической формулы (3.75) мы до сих пор не делали никаких предположений относительно значения $\varepsilon = 4 - d$. Однако ввиду сложности вычисления следующих членов ряда приходится использовать малость значения какого-то параметра, по степеням которого можно было бы произвести разложение функции $F\{\tilde{G}\}$. Если принять во внимание выражение (3.68), то в качестве такого параметра естественно выбрать величину $\mu = \varepsilon/3$. В связи с этим условимся в дальнейшем обозначать посредством C положительные числа, зависящие, возможно, от размерности пространства d , но не стремящиеся к нулю или бесконечности, когда $d \rightarrow 4$.

Перейдем теперь к вычислению второго члена ряда (3.69), определяющего вклад в величину $F\{\tilde{G}\}$ от диаграммы (c) на рис. 7. Отличие последней от диаграммы (b) вызвано добавлением одной вершины и двух линий, образующих петлевую поддиаграмму. Вследствие этого выражения

$$B_b(\rho) = v_1^2 \int \tilde{A}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) M(\kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d}, \quad (3.76)$$

$$B_c(\rho) = -2v_1^3 \int \tilde{A}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) M^2(\kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d}, \quad (3.77)$$

соответствующие диаграммам (b) и (c) на рис. 7, отличаются друг от друга, помимо симметричного коэффициента 2, на подынтегральный множитель $-v_1 M(\kappa)$, в котором

$$M(\kappa) = \int \tilde{A}(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}') \tilde{A}(\mathbf{\kappa}') \frac{d^d \kappa'}{(2\pi)^d} = C u^{4\mu} (z_0^2 l^4 L^\mu)^{-1} (\kappa L)^{\mu/2} K_{\mu/2}(\kappa L). \quad (3.78)$$

Согласно формуле (3.15) при малых значениях κ ($\kappa \ll L^{-1}$) функция $M(\kappa)$ почти не зависит от κ и в этом случае ее можно считать приближенно равной

$$M(0) = C G \left(\frac{\mu}{2} \right) \frac{u^{4\mu}}{z_0^2 l^4 L^\mu}, \quad (3.79)$$

а для больших значений κ ($\kappa \gg L^{-1}$) величина $M(\kappa)$ становится пренебрежимо малой. Выражение

$$-v_1 M(\kappa) = -v_1 M(0) K_{\mu/2}(\kappa L), \quad (3.80)$$

в котором функция $K_{\mu/2}(x)$ определена равенством (3.10), может служить также для оценки вклада в величину $F\{\tilde{G}\}$ при переходе от любой диаграммы к следующей по числу вершин диаграмме, поскольку такой переход всегда сопровождается добавлением одной вершины и двух линий. Важно отметить при этом, что для малых значений μ функция $K_{\mu/2}(\kappa L)$ согласно ее определению в (3.10) ведет себя в области $\kappa \ll L^{-1}$, как

$$K_{\mu/2}(\kappa L) = -\frac{\mu}{2} \ln \kappa^2 L^2 + O([\mu \ln(\kappa^2 L^2)]^2). \quad (3.81)$$

Чтобы оценить величину

$$F_c(\rho) = A_0(\rho) (B_c(0) - B_c(\rho)), \quad (3.82)$$

представим ее в следующем виде:

$$F_c(\rho) = 2v_1^3 M^2(0) A_0(\rho) \times \int (\tilde{A}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\kappa}) - \tilde{A}(\mathbf{\kappa})) (K_{\mu/2}^2(\kappa L) - 1) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d}, \quad (3.83)$$

где было использовано тождество

$$\int \tilde{A}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\kappa}) d^d \kappa = \int \tilde{A}(\mathbf{\kappa}) d^d \kappa,$$

а также равенства (3.77) и (3.80). Согласно оценке значения интеграла в правой части равенства (3.83), приведенной в приложении III, для достаточно малых μ имеем

$$F_c(\rho) = C \mu^{-2} (\tilde{v}_0 z_0^{-2})^3 (u l^{-1})^{9\mu} (u L^{-1})^\mu \times \left[\mu \ln(\rho L)^2 \sum_{k \geq 0} C_k (-\mu \ln \rho^2 L^2)^k + O(1) \right]; \quad (3.84)$$

здесь C_k , $k \geq 0$, — вполне определенные коэффициенты ряда. Сравнение между собой выражений (3.68) и (3.75) с учетом замечаний, относящихся к равенствам (3.80) и (3.81), приводит к идее определить величины u и L таким образом, чтобы

$$(\tilde{v}_0 z_0^{-2})^2 (u l^{-1})^{6\mu} = C \mu, \quad (u L^{-1})^{2\mu} = C \mu. \quad (3.85)$$



Рис. 18

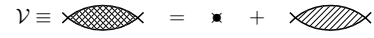


Рис. 19

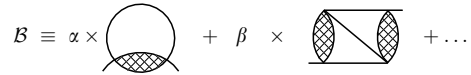


Рис. 20

В этом случае вклады диаграмм (b) и (c) в асимптотику величины $F\{\tilde{G}\}$ принимают вид

$$F_b(\rho) \sim -C \mu \ln(u \rho)^2, \quad (3.86)$$

$$F_c(\rho) \sim \mu \ln(u \rho)^2 \sum_{k \geq 0} C_k [-\mu \ln(u \rho)^2]^k, \quad (3.87)$$

а коэффициенты последнего ряда для простоты обозначены так же, как и коэффициенты ряда в (3.84). Отсюда нетрудно видеть, что вклады в асимптотику функции $F\{\tilde{G}\}$ от диаграммы (d_1) и последующих подобных ей диаграмм, содержащих цепи из петель, тоже можно представить в виде ряда по степеням $(-\mu \ln(u^2 \rho^2))$. Но среди диаграмм, следующих за (d_1) , есть и такие, в которых петли расположены иначе, чем в диаграмме (d_1) , например, диаграммы (d_2) и (d_3) . Чтобы оценить вклады диаграмм (d_2) и (d_3) , точное вычисление которых весьма затруднительно в выражениях, описывающих эти вклады, мы воспользуемся приближением $M(\kappa) \equiv M(0)$. Такое приближение в графической форме эквивалентно замене петли точкой, но которой теперь соответствует множитель $-v_1 M(0)$. В этом случае диаграмма (d_2) вырождается в диаграмму (c), причем вклад последней должен быть домножен на $-v_1 M(0)$, а диаграмма (d_3) вырождается в диаграмму (b), вклад которой следует умножить на $(-v_1 M(0))^2$. Подобным же образом диаграммы (c) и (d_1) можно свести к диаграмме (b). Если теперь сложить вклады только тех диаграмм, которые в результате описанной выше редукции сводятся к диаграмме (b), то в результате мы получим

$$(\tilde{v}_0 z_0^{-2})^2 (u l^{-1})^{6\mu} \left[\sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} C_k (v_1 M(0))^k \right] \ln(\rho L)^2. \quad (3.88)$$

Учитывая соотношения (3.79) и (3.85) в последнем выражении, мы приходим к выводу о его асимптотической пропорциональности величине $-\mu \ln(u^2 \rho^2)$.

Далее, исследуя структуру членов диаграммного ряда (см. рис. 7), легко заметить, что рассматриваемая выше петля является простейшей из всех возможных петлевых поддиаграмм. Совокупность последних мы назовем полной петлей и представим ее в графической форме на рис. 18, где квадрат, как обычно, изображает полный четырехполюсник. Если к тому же ввести понятие обобщенной петли, определив ее, как на рис. 19, то диаграммный ряд (см. рис. 7) можно преобразовать к виду рис. 20, напоминающему нам исходный диаграм-

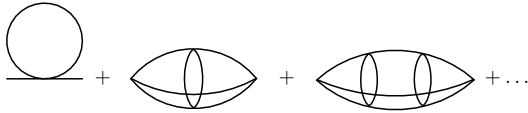


Рис. 21

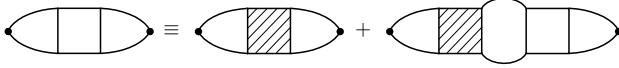


Рис. 22

$$\tilde{X}(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') = \text{diagram} = \mathcal{V}(\xi, |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)$$

Рис. 23

мный ряд (см. рис. 6), в котором вместо волнистой линии теперь фигурирует обобщенная петля. При этом коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ перед членами ряда (см. рис. 20) определяются так, чтобы после замены каждой обобщенной петли множеством представляющих ее поддиаграммы получились правильные числа соответствующих диаграмм, изображенных на рис. 7. Принимая во внимание определение обобщенной петли

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\xi, \rho l, \tilde{v}_0; A),$$

запишем условие равенства диаграммных рядов на рис. 7 и 20 в следующей форме:

$$B(\xi, \rho l, \tilde{v}_0; A) = B(\xi, \rho l, \mathcal{V}; A).$$

Благодаря этому равенству РГ-свойство величины B

$$\alpha^{-1} B(\xi, \rho l, \tilde{v}_0; A) = B(\xi, \rho l, \alpha^{-2} \tilde{v}_0; \alpha A)$$

переносится и на величину B :

$$\alpha^{-1} B(\xi, \rho l, \mathcal{V}; A) = B(\xi, \rho l, \alpha^{-2} \mathcal{V}; \alpha A),$$

причем

$$\alpha^{-2} \mathcal{V}(\xi, \rho l, \tilde{v}_0; A) = \mathcal{V}(\xi, \rho l, \alpha^{-2} \tilde{v}_0; \alpha A).$$

Если функция \mathcal{V} окажется слабо зависящей от переменной ρ в области $\rho \ll L^{-1}$ и близкой к нулю при значениях $\rho \gg L^{-1}$, то описанную выше редукцию одного диаграммного ряда (см. рис. 7) к другому (см. рис. 20) можно продолжить, рассматривая ряд на рис. 20 в качестве исходного пункта. В этом случае обобщенная петля приближенно заменяется точкой, которой теперь соответствует величина $-\mathcal{V}_0/(2\pi)^d$, где $\mathcal{V}_0 \equiv \mathcal{V}|_{\rho=0}$, обозначает ренормированный исключенный объем. В результате повторной редукции мы приходим к диаграммному ряду, отличающемуся от прежнего ряда лишь множителями $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ перед его членами, причем $\alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta, \gamma' \leq \gamma, \dots$. Убывание значений этих множителей после редукции обусловлено тем, что на создание каждой обобщенной петли затрачивается бесконечное множество петлевых поддиаграмм из последовательности соответствующих членов диа-

граммного ряда. Поэтому процедура редукции приводит к постепенному исчезновению определенных членов этого ряда. Исключение при этом составляют лишь так называемые неприводимые диаграммы, вершины которых могут соединяться между собой не более чем одной линией. Вид простейших неприводимых диаграмм указан на рис. 21.

Для оценки величины \mathcal{V} обратимся к уравнению Бете–Солпитера на рис. 10 и с его помощью составим равенство на рис. 22, которое в аналитической форме выглядит так:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) Y(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \times \\ & \times \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} = \\ & = \int \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) X(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \times \\ & \times \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} + \\ & + \int \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) X(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \times \\ & \times Y(\mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}'; \mathbf{p} - \mathbf{k}'', \mathbf{k}'') \mathcal{M}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'', \mathbf{k}'') \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{k}''}{(2\pi)^{3d}}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где

$$\mathcal{M}(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \tilde{\mathcal{A}}(\xi, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{A}}(\xi, \mathbf{k}), \quad (3.90)$$

а зависимость функций от переменной ξ (или ζ) в (3.89) ради простоты не указана. Примем теперь в качестве исходного приближения для неразрезаемого 4-полносника X величину, приведенную на рис. 23. Это приближение можно рассматривать как один из вариантов метода суммирования так называемых паркетных диаграмм. Допустим, что функция $\mathcal{V}(\xi, \rho)$ слабо зависит от переменной ρ . Тогда, подставив в уравнение (3.89) вместо величины X ее приближение $\tilde{X} \equiv \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(\xi, 0)$, мы получим для

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\xi, \rho) &= \int \mathcal{M}(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) Y(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \times \\ & \times \mathcal{M}(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \frac{d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} \end{aligned} \quad (3.91)$$

следующее решение:

$$\mathcal{Y}(\xi, \rho) = \mathcal{V}_0 M^2(\xi, \rho) (1 - \mathcal{V}_0 M(\xi, \rho))^{-1}, \quad (3.92)$$

в котором

$$\begin{aligned} M(\xi, \rho) &= \int \mathcal{M}(\xi; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} = \\ &= \omega \int_0^\infty A_s(\rho R) \tilde{w}^2(\xi, R) R^{2s+1} dR. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Если в последнем равенстве воспользоваться выражением (3.63), а также формулами Никольсона и Сонина–

Гегенбауэра [99], то его можно переписать так:

$$M(\xi, \rho) = C\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)u^{4\mu}(z_0^2 l^4 L^\mu)^{-1} \times \\ \times \int_0^\infty dt(1+t^2)^{\frac{\mu-3}{2}} \mathcal{K}_{\mu/2}\left(L\sqrt{\rho^2 + 4\xi^2(1+t^2)}\right). \quad (3.94)$$

Поскольку $\mathcal{K}_{\mu/2}(x)$ — положительная монотонно убывающая функция в области $x \geq 0$ и $\mathcal{K}_{\mu/2}(0) = 1$, то величина интеграла в (3.94) не превосходит значения

$$\int_0^\infty (1+t^2)^{\frac{\mu-3}{2}} dt = \sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left[2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\right]^{-1},$$

близкого к единице в случае $\mu \ll 1$. Подставим теперь выражение (3.92) в уравнение

$$\mathcal{V}(\xi, \rho) = -v_1 + v_1^2 M(\xi, \rho) + v_1^2 \mathcal{V}(\xi, \rho), \quad (3.95)$$

являющееся следствием диаграммных равенств на рис. 18 и 19, и введем новые обозначения посредством соотношений

$$\mathcal{V}(\xi, \rho) = -v_1 \lambda(\xi, \rho), \quad (3.96)$$

$$m(\xi, \rho) = v_1 M(\xi, \rho). \quad (3.97)$$

Из формулы (3.95) тогда следует

$$\lambda(\xi, \rho) = 1 - m(\xi, \rho)(1 + \lambda_0(\xi)m(\xi, \rho))^{-1}, \quad (3.98)$$

где $\lambda_0(\xi) = \lambda(\xi, 0)$. Полагая $\rho = 0$ в равенстве (3.98) и обозначая

$$m_0(\xi) = m(\xi, 0), \quad (3.99)$$

мы получим для $\lambda_0(\xi)$ уравнение

$$\lambda_0 = 1 - m_0(1 + m_0\lambda_0)^{-1},$$

положительное решение которого при соблюдении условия $m_0 \leq 1$ имеет следующий вид:

$$\lambda_0 = (2m_0)^{-1}[m_0 - 1 + (1 + 2m_0 - 3m_0^2)^{1/2}]. \quad (3.100)$$

Согласно (3.97) и (3.99) из неравенства $m_0(0) \leq 1$ вытекает, что

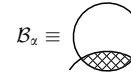
$$m(\xi, \rho) \leq m_0(\xi) \leq 1.$$

Но так как величина

$$m_0(0) = v_0 M(0, 0) = C$$

определяется значениями констант, фигурирующих в равенствах (3.85), то условие $m_0(0) \leq 1$, очевидно, накладывает определенное ограничение на выбор этих констант. Таким образом, результат оценки величины $\mathcal{V}(\xi, \rho)$, содержащийся в равенствах (3.96) и (3.98), согласуется со сделанным ранее предположением относительно поведения функции $\mathcal{V}(\xi, \rho)$.

Далее, продолжим описанную выше редукцию диаграммного ряда до тех пор, пока мы не получим ряд,



$$\mathcal{B}_2 \equiv \int \tilde{\mathcal{V}}(\xi, \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{A}}(\xi, \mathbf{p} - \mathbf{k}) d^d \kappa (2\pi)^{-d}$$

Рис. 24

составленный лишь из неприводимых диаграмм, в вершинах которых расположены обобщенные петли. Последние, как результат многократной редукции, обозначим посредством ренормированной величины

$$\tilde{\mathcal{V}}(\xi, \rho) = -Cv_1 \tilde{\lambda}(\xi, \rho),$$

где функция $\tilde{\lambda}(\xi, \rho)$ определена равенством

$$\tilde{\lambda}(\xi, \rho) = 1 - \tilde{m}(\xi, \rho)(1 + \tilde{\lambda}_0(\xi)\tilde{m}(\xi, \rho))^{-1},$$

в котором

$$\tilde{m}(\xi, \rho) = C m(\xi, \rho),$$

$$\tilde{\lambda}_0(\xi) = \tilde{\lambda}(\xi, 0).$$

Тогда первый (простейший) член полученного ряда имеет вид, как на рис. 24, а следующая по порядку диаграмма состоит уже из пяти обобщенных петель и девяти линий.

Соответственно, выражение на рис. 24 вклад от представляемой им диаграммы в величину $F\{\tilde{G}\}$ равен

$$\mathcal{A}_0(\rho)(\mathcal{B}_a(1, 0, \mathcal{V}; \tilde{\mathcal{A}}) - \mathcal{B}_a(1, \rho l, \mathcal{V}; \tilde{\mathcal{A}})) = \\ = Cv_1 \mathcal{A}_0(\rho) \int n(\kappa)(\tilde{\mathcal{A}}(\kappa) - \tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{p} - \mathbf{k})) d^d \kappa, \quad (3.101)$$

где

$$n(\kappa) = \tilde{m}_0(0)\mathcal{K}_{\mu/2}(\kappa L)(1 + \tilde{\lambda}_0(0)\tilde{m}_0(0)\mathcal{K}_{\mu/2}(\kappa L))^{-1}.$$

Как уже отмечалось выше, подходящим выбором констант в (3.85) можно достичь выполнения условия $\tilde{\lambda}_0(0)\tilde{m}_0(0) < 1$. Это позволяет нам в равенстве (3.101) произвести разложение подынтегральной функции $n(\kappa)$ по степеням $\mathcal{K}_{\mu/2}(\kappa L)$, в результате чего мы снова сталкиваемся с ситуацией, описанной ранее. Поэтому, полагая $\mu \ll 1$ и выполняя интегрирование в (3.101), приходим в итоге к представлению искомой величины в виде ряда по степеням $-\mu \ln(\rho L)$.

Рассмотрим теперь последующие члены диаграммного ряда на рис. 21, в вершинах которых фигурируют обобщенные петли. Запишем вклад каждого из этих членов в величину $F\{\tilde{G}\}$ в следующей символической форме:

$$\mathcal{A}_0(\rho) \int \{\tilde{\mathcal{V}}(0, \kappa)\}^m \left(\{\tilde{\mathcal{A}}(0, \kappa)\}^{2m-1} - \right. \\ \left. - \{\tilde{\mathcal{A}}(0, \mathbf{p} - \mathbf{k})\}^{2m-1} \right) \{d^d \kappa (2\pi)^{-d}\}^m, \quad (3.102)$$

предполагая здесь $m \geq 5$. Согласно определению функций $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{V}}$, интегрирование по каждой переменной $\{\mathbf{k}\}$ в интеграле

$$\int \{\tilde{\mathcal{V}}(0, \kappa)\}^m \{\tilde{\mathcal{A}}(0, \kappa)\}^{2m-1} \{d^d \kappa\}^m$$

по сути ограничено сверху по модулю величиной L^{-1} , а на нижнем пределе $\{|\mathbf{k}|\} \geq \kappa_0$ при $\kappa_0 \rightarrow 0$ оценка поведе-

ния этого интеграла дает $O(\kappa_0^\tau)$, где

$$\tau = (2m - 1)(2\mu - 2) + md = 2 + (m - 2)\mu.$$

Отсюда тогда следует, что асимптотика выражения в (3.102), когда $\rho \rightarrow 0$, может быть представлена в виде ряда по степеням $(\rho L)^\mu$ или $\mu \ln(\rho L)$.

Таким образом, вышеизложенный подход позволяет нам заключить, что асимптотика функции $F\{\tilde{G}\}$ при $\rho \rightarrow 0$ представима в виде ряда по степеням $-\mu \ln(\rho L)$. Если теперь воспользоваться оставшимся произволом при выборе значений констант в равенствах (3.85), то можно достичь совпадения линейных относительно $\ln(\mu^2 \rho^2)$ членов в выражениях (3.68) и (3.69). Тогда, подставляя искомое разложение функции $F\{\tilde{G}\}$ в РГ-уравнение (2.102), мы получим в итоге его решения, как нетрудно видеть, что

$$G(\rho) \sim \tilde{G}(\rho), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.103)$$

Именно этот результат и оправдывает выбор функции $\tilde{G} = \tilde{A}/A_0$ в качестве асимптотического решения уравнения (2.78).

Поскольку значения параметров μ , u и L определены и тем самым определены функции в равенствах (3.61) и (3.63), то с помощью формулы (3.65) можно найти теперь и асимптотику функции $\tilde{w}_N(\mathbf{R})$ при $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$. Далее, примем во внимание связь между B и \tilde{B} и воспользуемся представлением функции $B(\zeta, \rho l, \tilde{\nu}; \tilde{A})$ посредством ряда (см. рис. 21) из неприводимых диаграмм, вершинами которых служат обобщенные петли. Тогда величина $B(\zeta, i\zeta l, \tilde{\nu}_0; \tilde{A})$ в символической форме выглядит так:

$$B(\zeta, i\zeta l, \tilde{\nu}_0; \tilde{A}) = \int \tilde{\nu}(\zeta, \kappa) \tilde{A}(\zeta, i\zeta \mathbf{k} - \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} + \sum_{m \geq 5} \int \{\tilde{\nu}(\zeta, \kappa)\}^m \{\tilde{A}(\zeta, i\zeta \mathbf{k} - \kappa)\}^{2m-1} \left\{ \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \right\}^m, \quad |\mathbf{k}| = 1. \quad (3.104)$$

Ранее было отмечено, что в наиболее существенной области интегрирования $\kappa \lesssim L^{-1}$ у всех интегралов в (3.104) функция $\tilde{\nu}(\zeta, \kappa)$ изменяется слабо, в связи с чем для их оценки мы воспользуемся следующим приближением: $\tilde{\nu} = -Cv_1$. В этом случае первое слагаемое в правой части равенства (3.104) примет вид

$$B_a(\zeta, i\zeta l, \tilde{\nu}; \tilde{A}) = \int \tilde{\nu}(\zeta, \kappa) \tilde{A}(\zeta, i\zeta \mathbf{k} - \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \cong \cong -Cv_1 \tilde{w}(\zeta, 0),$$

где

$$\tilde{w}(\zeta, 0) = \left(\frac{Cu^2 \mu}{z_0 l^{d+2\mu}} \right) \left[\left(\frac{l}{L} \right)^{2-\mu} - \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \left(\Gamma\left(2 - \frac{\mu}{2}\right) \right)^{-1} \left(\frac{\xi l}{2} \right)^{2-\mu} + O\left((\xi l)^2 \left(\frac{L}{l} \right)^\mu \right) \right]$$

в соответствии с формулами (3.63) и (3.10). Отсюда следует, что

$$B_a(\zeta, i\zeta l, \tilde{\nu}; \tilde{A}) - B_a(1, 0, \tilde{\nu}; \tilde{A}) = C\tilde{v}_0(\mu z_0)^{-1} (ul^{-1})^{2\mu} (\xi l)^{2-\mu} + O((\xi l)^2). \quad (3.105)$$

Оценка каждого из членов ряда

$$\sum_{m \geq 5} \{-Cv_1\}^m \int \left(\{\tilde{A}(\zeta, i\zeta \mathbf{k} - \kappa)\}^{2m-1} - \{\tilde{A}(0, \kappa)\}^{2m-1} \right) \{d^d \kappa\}^m$$

дает величину порядка $O((\xi l)^\tau)$, где значение τ , как было установлено выше, равно $\tau = 2 + (m - 2)\mu$. Наконец, учитывая равенства в (3.85), мы придем к следующему асимптотическому выражению для разности:

$$B(\zeta, i\zeta l, \tilde{\nu}_0; \tilde{A}) - B(1, 0, \tilde{\nu}_0; \tilde{A}) = C(z_0 \tilde{v}_0 \mu^{-2})^{1/3} (\xi l)^{2-\mu} + O((\xi l)^2), \quad (3.106)$$

фигурирующей в определении функции D (3.66). Если ввести обозначение

$$\tilde{v}_1 = z_0 \tilde{v}_0 (1 - s)^{-2} \quad (3.107)$$

и учесть, что

$$2 - \mu = \frac{d+2}{3} = v_F^{-1}, \quad (3.108)$$

то из соотношений (3.66) и (3.106) находим

$$D(\zeta, RN^{-1}) = C\tilde{v}_1^{1/3} (\xi l)^{1/v_F} - R\zeta N^{-1} + O((\xi l)^2). \quad (3.109)$$

Поскольку подынтегральная функция в формуле (3.65) определена, то, применяя метод перевала для асимптотической оценки интеграла в (3.65), когда $N \rightarrow \infty$, а $R \gg l$, мы получим в итоге искомую асимптотику плотности вероятности [103]:

$$W_N(\mathbf{R}) \sim \begin{cases} R_F^{-1} \delta(t-1), & d=1, \\ CR_F^{-d} t^p \exp(-t^q), & 1 < d < 4, \end{cases} \quad (3.110)$$

где

$$t = RR_F^{-1}, \quad R_F l^{-1} = C(\tilde{v}_1^{1/3} N)^{v_F}, \\ p = \frac{(4-d)(d+2)}{6(d-1)}, \quad q = \frac{d+2}{d-1}. \quad (3.111)$$

Отсюда для среднеквадратичного расстояния $\langle R^2 \rangle_N$ между концами траектории блуждающей частицы вытекает следующий результат:

$$\langle R^2 \rangle_N \sim \Gamma\left(\frac{d+p+2}{q}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{d+p}{q}\right) R_F^2, \quad (3.112)$$

который, как уже было отмечено раньше, является обобщением известной формулы Флори для d -мерного пространства ($d < 4$). В том случае, когда значение $\varepsilon = 4 - d$ достаточно мало, критический показатель v_F , согласно (3.108), равен

$$v_F = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + O(\varepsilon^2)$$

и, стало быть, не совпадает с соответствующим результатом де Жена. Таким образом, изложенный здесь метод исследования проблемы СББС принципиально отличается от подхода де Жена и приводит к новому ε -разложению, которое является уже сходящимся.

Из формулы (3.110) непосредственно следует, что асимптотика функции $W_N(\mathbf{R})$ в области $R < R_F$ имеет

"провал", обусловленный эффектом исключенного объема, причем для $d = 2$ она выпукла вниз ($p = 4/3$) и выпукла вверх ($p = 5/12$), когда $d = 3$. Для описания поведения плотности $W_N(\mathbf{R})$ в области $R < R_F$ обычно вместо p используют другой критический показатель γ , с помощью которого вычисляют вероятность возврата блуждающей частицы в исходную точку. При этом зависимость между γ и p определяется формулой Клуазо: $\gamma = 1 + \nu p$ [34]. Если в последнее равенство подставить вместо ν выражение для ν_F из (3.108) и воспользоваться значением p из (3.111), то получим $\gamma = 2$ для $d = 2$ и $\gamma = 5/4$, когда $d = 3$. Для сравнения отметим, что значения γ , вычисленные в ряде работ (см., например, [35–48]) с помощью как аналитических методов, так и вычислительных машин, оказываются несколько меньше приведенных выше значений γ . Однако здесь следует учесть, что формула (3.110) является асимптотической и получена при условии $R \gg l$.

В соответствии с принятыми в теории критических явлений обозначениями можно написать $\mathcal{A}(1, \rho) \sim \sim O((\rho l)^{\eta-2})$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\mathcal{A}(\zeta, 0) \sim O((\zeta - 1)^{-\gamma})$, когда $\zeta \rightarrow 1$. Тогда, принимая выражение (3.61) в качестве асимптотического решения основного уравнения при $\zeta \rightarrow 1$ и $\rho \rightarrow 0$ получим, что $\eta = 2\varepsilon/3$, а критические показатели γ, η, ν_F связаны между собой обычным соотношением: $\gamma = (2 - \eta)\nu_F$. Что же касается критического показателя q , то результат, приведенный для него в (3.111), общеизвестен.

4. Основное уравнение с учетом корреляции ближнего порядка

В заключение рассмотрим самоизбегающие блуждания в более общем случае, когда направление каждого отдельного перемещения частицы зависит от направления ее предыдущего перемещения. Кроме того, длина отдельного перемещения не фиксирована, а подчинена некоторому, вообще говоря, произвольному распределению.

Итак, пусть плотность вероятности k -го перемещения \mathbf{r}_k частицы пропорциональна величине

$$\tau(\mathbf{r}_k) \sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} (1 + f_{jk}), \quad \mathbf{n}_k = \mathbf{r}_k r_k^{-1};$$

здесь $\tau(\mathbf{r})$ — плотность вероятности длины одного перемещения \mathbf{r} , а $\sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) = \sigma(\cos \theta_k)$ обозначает плотность вероятности угла θ_k между направлениями k -го и $k - 1$ -го перемещений. При этом условия нормировки для функций $\tau(\mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1})$ таковы:

$$\int \tau(\mathbf{r}) d^d r = 1, \\ \Gamma(s+1) \left[\sqrt{\pi} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \int_0^\pi \sigma(\cos \theta) \sin^{2s} \theta d\theta = 1.$$

Если искомую плотность $W_N(\mathbf{R})$ представить так же, как в (2.4), то для функции $w_N(\mathbf{R})$ имеет место теперь следующее равенство:

$$w_N(\mathbf{R}) = \int \delta\left(\mathbf{R} - \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k\right) P_{1N} d\mu_{1N}(0),$$

где для краткости введено обозначение

$$d\mu_{lm}(\mathbf{p}) = \prod_{k=l+1}^m \sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) \prod_{k=l}^m \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_k) \tau(\mathbf{r}_k) d^d r_k,$$

а величина P_{1N} определена в (2.6). Записывая функцию $w_N(\mathbf{R})$ в виде интеграла Фурье в (2.8), мы получим для ее фурье-образа выражение

$$a_N(\mathbf{p}) = \int P_{1N} d\mu_{1N}(\mathbf{p}), \quad (4.1)$$

в котором произведение P_{1N} заменим его разложением в (2.15), а плотность $\sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) = \sigma(\cos \theta_k)$ разложим в ряд по многочленам Гегенбауэра

$$C_l^s(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) = C_l^s(\cos \theta_k)$$

и затем воспользуемся для них теоремой сложения [99]:

$$C_l^s(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) = \omega h^{-1} C_l^s(1) \sum_{m=1}^h S_l^m(\mathbf{n}_k) S_l^m(\mathbf{n}_{k-1}),$$

где $S_l^m(n)$, $m = 1, 2, \dots, h$ — ортонормальная на единичной гиперсфере система из $h = 2(s+l)(2s+l-1)/(2s)!!$ вещественных сферических гармоник степени l . Результат разложения плотности $\sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1})$ представим в виде следующего ряда:

$$\sigma(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=1}^h \sigma_l S_l^m(\mathbf{n}_k) S_l^m(\mathbf{n}_{k-1}), \quad (4.2)$$

где

$$\sigma_l = \frac{(4\pi)^s \Gamma(s)!!}{\Gamma(2s+l)} \int_{-1}^1 \sigma(t) C_l^s(t) (1-t^2)^{s-(1/2)} dt.$$

Далее определим операторы $T(\mathbf{p})$ и $B_q(\mathbf{p})$ посредством их матричных элементов:

$$\langle lm|T(\mathbf{p})|l'm'\rangle = (\sigma_l \sigma_{l'})^{1/2} \int \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) \tau(\mathbf{r}) S_l^m(\mathbf{n}) S_{l'}^{m'}(\mathbf{n}) d^d r, \\ \langle lm|B_q(\mathbf{p})|l'm'\rangle = (\sigma_l \sigma_{l'})^{1/2} \int b_{lq} S_l^m(\mathbf{n}_l) S_{l'}^{m'}(\mathbf{n}_q) d\mu_{lq}(\mathbf{p})$$

и примем во внимание, что $\sigma_0 = \omega$, а $S_0^1(\mathbf{n}) = 1/\omega^{1/2}$. Тогда первые члены ряда, полученного в результате использования равенств (2.15) и (4.2) в формуле (4.1), можно записать следующим образом. Первый член этого ряда равен

$$\int d\mu_{1N}(\mathbf{p}) = \langle 01|T(\mathbf{p})|l_1 m_1\rangle \langle l_1 m_1|T(\mathbf{p})|l_2 m_2\rangle \dots \times \\ \times \langle l_N m_N|T(\mathbf{p})|01\rangle = \langle 01|T^N(\mathbf{p})|01\rangle;$$

здесь по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование: по l — от 0 до ∞ , а по m — от 1 до h . Прежде чем представить в операторной форме следующий член ряда, рассмотрим цепочку равенств

$$\int b_{j+1k} d\mu_{1N}(\mathbf{p}) = \langle 01|T^j(\mathbf{p})|l_j m_j\rangle \times \\ \times \langle l_j m_j|B_{k-j}(\mathbf{p})|l_{k+1} m_{k+1}\rangle \langle l_{k+1} m_{k+1}|T^{N-k}(\mathbf{p})|01\rangle = \\ = \langle 01|T^{N+j-k}(\mathbf{p}) B_{k-j}(\mathbf{p})|01\rangle,$$

в которой мы учли коммутирование операторов $T(\mathbf{p})$ и $B_q(\mathbf{p})$ между собой. Отсюда следует, что для второго члена вышеупомянутого ряда имеет место равенство

$$\sum_{1 \leq j < k \leq N} \int b_{jk} d\mu_{1N}(\mathbf{p}) = \sum_{q \geq 2} (N - q + 1) \langle 01 | T^{N-q}(\mathbf{p}) B_q(\mathbf{p}) | 01 \rangle.$$

Подобным образом устанавливается операторная форма записи любого члена ряда, представляющего функцию $a_N(\mathbf{p})$. В результате мы приходим к формуле

$$a_N(\mathbf{p}) = \langle 01 | A_N(\mathbf{p}) | 01 \rangle, \quad (4.3)$$

в которой оператор $A_N(\mathbf{p})$ определяется посредством ряда

$$A_N(\mathbf{p}) = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \frac{(N - q + p)!}{(N - q)! p!} T^{N-q}(\mathbf{p}) \times \times \sum_{(q_1 + \dots + q_p = q)} B_{q_1}(\mathbf{p}) \dots B_{q_p}(\mathbf{p}), \quad (4.4)$$

где множитель $(N - q + p)! / (N - q)! p!$ равен числу способов размещения p операторов $B_{q_1}(\mathbf{p}), B_{q_2}(\mathbf{p}), \dots, B_{q_p}(\mathbf{p})$ (при условии $q_1 + q_2 + \dots + q_p = q$) по $N - q + p$ свободным местам так, чтобы при этом сохранялась последовательность в их взаимном расположении. Последнюю сумму в (4.4) можно преобразовать так же, как в равенстве (2.22), к виду

$$\sum_{(q_1 + \dots + q_p = q)} B_{q_1}(\mathbf{p}) \dots B_{q_p}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} B^p(z, \mathbf{p}) \frac{dz}{z^{1+q}},$$

где $B(z, \mathbf{p})$ — производящий оператор, определяемый из равенства

$$B(z, \mathbf{p}) = \sum_{q \geq 0} z^q B_q(\mathbf{p}). \quad (4.5)$$

Тогда выражение для $A_N(\mathbf{p})$ в (4.4) примет следующую форму:

$$A_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{1+q}} \left[\sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \frac{(N - q + p)!}{(N - q)! p!} \times \times (zT(\mathbf{p}))^{N-q} B^p(z, \mathbf{p}) \right], \quad (4.6)$$

причем суммирование по p здесь можно распространить от 0 до ∞ , а по q — от $-\infty$ до N , не оказывая влияния на конечный результат. Если теперь определить производящий оператор $A(z, \mathbf{p})$ при помощи равенства

$$A(z, \mathbf{p}) = \sum_{N \geq 0} z^N A_N(\mathbf{p}), \quad (4.7)$$

то из (4.6) следует важная формула

$$A(z, \mathbf{p}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p! q!} (zT(\mathbf{p}))^q B^p(z, \mathbf{p}). \quad (4.8)$$

Используя тождество

$$(p+q)! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} t^{p+q-n-1} dt$$

и коммутирование операторов $T(\mathbf{p})$ и $B(z, \mathbf{p})$ между собой, представим формулу (4.8) в следующем виде:

$$A(z, \mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{(dt)^n} \exp \left[t(zT(\mathbf{p}) + B(z, \mathbf{p})) \right] \Big|_{t=0}.$$

Отсюда немедленно следует, что оператор

$$A^{-1}(z, \mathbf{p}) = 1 - zT(\mathbf{p}) - B(z, \mathbf{p}) \quad (4.9)$$

является обратным к оператору $A(z, \mathbf{p})$. Если определить "невозмущенный" оператор $A_0(z, \mathbf{p})$ как

$$A_0(z, \mathbf{p}) = (1 - zT(\mathbf{p}))^{-1},$$

то равенство (4.9) примет вид основного уравнения

$$A^{-1}(z, \mathbf{p}) = A_0^{-1}(z, \mathbf{p}) - B(z, \mathbf{p}). \quad (4.10)$$

Далее установим связь между операторами $B(z, \mathbf{p})$ и $A(z, \mathbf{p})$, сделав тем самым уравнение (4.10) замкнутым относительно искомого оператора $A(z, \mathbf{p})$. С этой целью воспользуемся определением матричных элементов оператора $B_q(\mathbf{p})$ и равенствами (2.13) и (2.30). Тогда, учитывая определение

$$\langle lm | A_q(\mathbf{p}) | l' m' \rangle = (\sigma_l \sigma_{l'})^{1/2} \int P_{lq} S_l^m(\mathbf{n}_1) S_{l'}^{m'}(\mathbf{n}_q) d\mu_{1q}(\mathbf{p}),$$

мы получим в итоге соотношение

$$\begin{aligned} \langle lm | B_q(\mathbf{p}) | l' m' \rangle = & - \int v(\kappa) \langle lm | A_q(\mathbf{p} - \kappa) | l' m' \rangle \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} + \\ & + \sum_{(q_1 + q_2 + q_3 = q)} \int v(\kappa) v(\kappa') \times \\ & \times \langle lm | A_{q_1}(\mathbf{p} - \kappa) A_{q_2}(\mathbf{p} - \kappa - \kappa') A_{q_3}(\mathbf{p} - \kappa') | l' m' \rangle \times \\ & \times \frac{d^d \kappa d^d \kappa'}{(2\pi)^{2d}} + \dots, \end{aligned} \quad (4.11)$$

аналогичное равенству (2.33). Подставляя теперь выражение (4.11) в равенство (4.5) и принимая во внимание определение оператора $A(z, \mathbf{p})$ в (4.7), находим искомую связь:

$$\begin{aligned} B(z, \mathbf{p}) = & - \int v(\kappa) A(z, \mathbf{p} - \kappa) \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} + \\ & + \int v(\kappa) v(\kappa') A(z, \mathbf{p} - \kappa) A(z, \mathbf{p} - \kappa - \kappa') \times \\ & \times A(z, \mathbf{p} - \kappa') \frac{d^d \kappa d^d \kappa'}{(2\pi)^{2d}} + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Последняя формула по своему внешнему виду аналогична формуле (2.34). Поэтому все члены ряда в (4.12) также могут быть изображены посредством диаграмм на рис. 6, в которых, однако, сплошным линиям теперь соответствуют операторы $A(z, \mathbf{p} - \kappa)$.

Таким образом, учет корреляции между направлениями соседних перемещений блуждающей частицы приводит к операторной форме основного уравнения проблемы СББС. Выбрав подходящим образом плотности вероятности $\tau(\mathbf{r})$ и $\sigma(\cos \theta)$, можно получить, в принципе, любую решеточную модель для указанной проблемы в \mathcal{R}^2 .

В заключение следует отметить важное свойство уравнения (4.10) — инвариантность его относительно группы мультипликативных преобразований:

$$A \rightarrow A' = \alpha A, \quad A_0 \rightarrow A'_0 = \alpha A_0, \\ v \rightarrow v' = \alpha^{-2} v,$$

которое служит основой для РГ-метода решения этого уравнения.

Заключение

Среди рассмотренных здесь методов исследования проблемы СББС подход, изложенный в разделах 2–4, основан на точном уравнении, позволяющем определить искомую плотность вероятности $W_N(\mathbf{R})$. Это уравнение, описывающее немарковский процесс, является интегральным уравнением, инвариантным относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований, что дает возможность использовать для его решения РГ-метод. Найденное с помощью этого метода асимптотическое выражение для плотности $W_N(\mathbf{R})$, когда $N \rightarrow \infty$ и $R \gg l$ (см. формулу (3.110)), имеет вид, подобный тому, который был установлен ранее, исходя из скейлинговых соображений. Таким образом, задача свелась к определению лишь критических показателей. Результаты вычисления последних позволяют нам утверждать, что теперь стало ясно, как получить из микроскопической теории обобщенную формулу Флори для $\langle R^2 \rangle_N$. При этом существенно, что выражение для критического показателя ν_F непрерывно зависит от пространственной размерности d в промежутке $1 \leq d < 4$, дает точные значения при $d = 1$, $d = 2$ и, во всяком случае, очень хорошее приближение при $d = 3$. Что касается другого критического показателя p (или γ), определяющего поведение функции $W_N(\mathbf{R})$ при $R \ll R_F$, то его значения, зависящие от d , были найдены при еще одном условии: $R \gg l$. Вполне возможно, что степенная зависимость функции $W_N(\mathbf{R})$ от R в области $R \gtrsim l$ совсем иная, чем в том случае, когда $l \ll R \ll R_F$, т.е. значение показателя p , определенного формулой (3.111), может отличаться от его значения, вычисленного с помощью численных методов.

Приложения

I. Здесь приведены значения некоторых интегралов из раздела 3.2.

$$1. \quad S_1(\rho) = \int_0^\infty (1 - A_1(\rho R)) \tilde{w}_1^3(0, R) R^3 dR = \\ = \frac{8}{\pi^6 l^6 z_0^3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\rho R} J_1(\rho R)\right) \frac{R^3}{(R^2 + L^2)^3} dR = \\ = 2(\pi^6 l^6 L^2 z_0^3)^{-1} (1 - \rho L K_1(\rho L)). \\ 2. \quad S_2(\rho) = \int_0^\infty dR R^3 (1 - A_1(\rho R)) \tilde{w}_1(0, R) \times \\ \times \int_0^\infty A_1(R\kappa) M_1^2(0, \kappa) \kappa^3 d\kappa =$$

$$= \int_0^\infty \sigma(\rho, \kappa) M_1^2(0, \kappa) \kappa^3 d\kappa,$$

где

$$M_1(0, \kappa) = 2\pi^2 \int_0^\infty A_1(\kappa R) \tilde{w}_1^2(0, R) R^3 dR = \\ = 8(\pi^2 l^4 z_0^2)^{-1} K_0(\kappa L), \\ \sigma(\rho, \kappa) = \int_0^\infty (1 - A_1(\rho R)) A_1(\kappa R) \tilde{w}_1(0, R) R^3 dR = \\ = \frac{4}{\pi^2 l^2 z_0 \kappa} \left(\int_0^\infty J_1(\kappa R) \frac{R^2}{R^2 + L^2} dR - \right. \\ \left. - \frac{2}{\rho} \int_0^\infty J_1(\rho R) J_1(\kappa R) \frac{R}{R^2 + L^2} dR \right) = \\ = \frac{4}{\pi^2 l^2 z_0 \kappa^2} \left(\kappa L K_1(\kappa L) - \frac{2\kappa}{\rho} \times \right. \\ \left. \times \begin{cases} I_1(\kappa L) K_1(\rho L), & \kappa < \rho \\ I_1(\rho L) K_1(\kappa L), & \rho < \kappa \end{cases} \right).$$

Тогда

$$S_2(\rho) = 256(\pi^6 l^{10} L^2 z_0^5)^{-1} \left[\left(1 - \frac{2}{\rho L} I_1(\rho L)\right) \times \right. \\ \times \int_0^\infty K_0^2(t) K_1(t) t^2 dt + \\ \left. + \frac{2}{\rho L} \int_0^{\rho L} K_0^2(t) (I_1(\rho L) K_1(t) - K_1(\rho L) I_1(t)) t^2 dt \right].$$

Учитывая здесь разложения

$$I_1(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^3}{16} + O(t^5), \\ K_0(t) = -\ln t + O(1), \\ K_1(t) = t^{-1} + \frac{1}{2} t \ln t + O(t),$$

когда $t \rightarrow 0$, получим в итоге

$$S_2(\rho) = 16(\pi^6 l^{10} z_0^5)^{-1} \rho^2 \left\{ [\ln(L_1^2 \rho^2)]^2 - 3 \ln(L_1^2 \rho^2) + O(1) \right\},$$

где $L_1 = CL$.

II. Ниже даны значения некоторых интегралов из раздела 3.3.

$$1. \quad S_1(\rho) = \int_0^\infty A_s(\rho R) \tilde{w}_1^s(R) R^{2s+1} dR = \\ = \Gamma(s+1) \left[\frac{\Gamma(s)d}{(2\pi)^{s+1} l^2 z_0} \right]^3 \left(\frac{16}{\rho} \right)^s \times \\ \times \int_0^\infty J_s(\rho R) \frac{R^{s+1}}{(R^2 + L^2)^{3s}} dR =$$

$$= \frac{2^{s+1} d^3 \Gamma^3(s) \Gamma(s+1)}{(2\pi)^{3(s+1)} \Gamma(3s) l^6 z_0^3} \left(\frac{\rho}{L}\right)^{2s-1} K_{2s-1}(\rho L).$$

Отсюда следует

$$S_1(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} S_1(\rho) = \frac{2^{3s-1} d^3 \Gamma^3(s) \Gamma(s+1) \Gamma(2s-1)}{(2\pi)^{3(s+1)} \Gamma(3s) l^6 L^{2(2s-1)} z_0^3}.$$

Теперь составим разность $S_1(0) - S_1(\rho)$ и перейдем к пределу при $L \rightarrow 0$. В результате находим

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} (S_1(0) - S_1(\rho)) &= \\ &= \frac{2^{1-s} d^3 \Gamma^3(s) \Gamma(s+1) \Gamma(2s-1) \Gamma(2-2s)}{(2\pi)^{3(s+1)} \Gamma(2s) \Gamma(3s) l^6 z_0^3 \rho^{2-4s}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение мы примем в качестве значения первого интеграла в правой части равенства (3.35). Таким образом, для малых значений ε имеем

$$\int_0^\infty (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}_1^3(R) R^{2s+1} dR \sim \rho^{2-2\varepsilon} (2\pi^6 l^6 z_0^3 \varepsilon)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad S_2(\rho) &= \int_0^\infty dR R^{2s+1} A_s(\rho R) \tilde{w}_1(R) \times \\ &\times \int_0^\infty A_s(R\kappa) M_1^2(\kappa) \kappa^{2s+1} d\kappa = \\ &= 2^s \Gamma(s) \Gamma(s+2) C_1^2 L^{2(1-s)} (\pi^{s+1} l^{10} z_0^5)^{-1} \times \\ &\times \int_0^\infty dR A_s(\rho R) \frac{R^{s+1}}{(R^2 + L^2)^s} \times \\ &\times \int_0^\infty J_s(\kappa R) K_{1-s}^2(\kappa L) \kappa^{3s-1} d\kappa. \end{aligned}$$

Последний интеграл с помощью формулы

$$K_\lambda^2(x) = 2 \int_0^\infty K_{2\lambda}(2x \cosh t) dt$$

можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_s(\kappa R) K_{1-s}^2(\kappa L) \kappa^{3s-1} d\kappa &= \\ &= 2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\kappa \kappa^{3s-1} J_s(\kappa R) K_{2(1-s)}(2\kappa L \cosh t) = \\ &= 2^{5s-3} \Gamma(3s-1) L^{2(s-1)} R^s \times \\ &\times \int_0^\infty (\cosh t)^{2(s-1)} (R^2 + 4L^2 \cosh^2 t)^{1-3s} dt. \end{aligned}$$

Далее, обозначив

$$S_2(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} S_2(\rho),$$

составим разность $S_2(0) - S_2(\rho)$ и перейдем к пределу при $L \rightarrow 0$. Тогда, учитывая равенство

$$\int_0^\infty (\cosh t)^{-\varepsilon} dt = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(2\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{-1},$$

находим

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} (S_2(0) - S_2(\rho)) &= \\ &= \frac{2^{6s-4} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma(s) \Gamma(s+2) \Gamma(3s-1) C_1^2}{\pi^{s+(1/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) l^{10} z_0^5} \times \\ &\times \int_0^\infty (1 - A_s(\rho R)) R^{3-6s} dR, \end{aligned}$$

где

$$\int_0^\infty (1 - A_s(\rho R)) R^{3-6s} dR = \frac{2^{3-6s} \Gamma(s+1) \Gamma(3-3s)}{(3s-2) \Gamma(4s-1)} \rho^{2-3\varepsilon}.$$

В итоге для малых значений ε получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dR R^{2s+1} (1 - A_s(\rho R)) \tilde{w}_1(R) \int_0^\infty A_s(R\kappa) M_1^2(\kappa) \kappa^{2s+1} d\kappa &\sim \\ &\sim 128 \rho^{2-3\varepsilon} (3\pi^6 l^{10} z_0^5 \varepsilon^2)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad S_3(\xi) &= \int_0^\infty \tilde{w}_1^3(\xi, R) R^{2s+1} dR = \\ &= \left[\frac{2^{1-s}(s+1)}{\pi^{s+1} l^2 z_0} \right]^3 \int_0^\infty \bar{K}_s^3\left(\xi \sqrt{R^2 + L^2}\right) \frac{R^{2s+1}}{(R^2 + L^2)^{3s}} dR, \end{aligned}$$

где

$$\bar{K}_s(x) = x^s K_s(x).$$

Теперь составим разность $S_3(\xi) - S_3(0)$ и перейдем к пределу

$$\lim_{L \rightarrow 0} (S_3(\xi) - S_3(0)) = \left[\frac{2^{1-s}(s+1)}{\pi^{s+1} l^2 z_0} \right]^3 \Psi(\xi);$$

здесь

$$\Psi(\xi) = \int_0^\infty (\bar{K}_s^3(\xi R) - \bar{K}_s^3(0)) R^{1-4s} dR.$$

Учитывая формулу

$$\frac{d}{x dx} \bar{K}_s(x) = -x^{2(s-1)} \bar{K}_{1-s}(x),$$

имеем

$$\frac{d\Psi(\xi)}{\xi d\xi} = -3\xi^{4(s-1)} \int_0^\infty \bar{K}_{1-s}(x) \bar{K}_s^2(x) x^{1-2s} dx,$$

где

$$\int_0^\infty \bar{K}_{1-s}(x) \bar{K}_s^2(x) x^{1-2s} dx = 2^{-1} \bar{K}_{1-s}^2(0) \bar{K}_s(0) -$$

$$-2^{-1} \int_0^{\infty} \bar{K}_{1-s}^3(x) x^{2s-1} dx = 2^{-s-2} \Gamma(s) \Gamma^2(1-s) - C_s ;$$

C_s — ограниченная по модулю величина при всех $s \leq 1$. Таким образом, для функции $\Psi(\xi)$ мы имеем дифференциальное уравнение первого порядка с граничным условием $\Psi(0) = 0$. Решение этого уравнения для малых значений $\varepsilon = 2(1-s)$ есть

$$\Psi(\xi) \sim -3(4\varepsilon^2)^{-1} \xi^{2(1-\varepsilon)} .$$

Отсюда мы находим величину

$$\lim_{L \rightarrow 0} (S_3(0) - S_3(\xi)) \sim 6(\pi^6 l^6 z_0^3 \varepsilon^2)^{-1} \xi^{2(1-\varepsilon)} ,$$

принимаяемую нами в качестве значения интеграла в (3.49).

III. Рассмотрим интеграл

$$S_n(\rho) = \int \tilde{A}(\rho - \kappa) (\mathcal{K}_{\mu/2}^n(\kappa L) - 1) d^d \kappa , \quad (\text{III.1})$$

в котором n обозначает натуральное число. Очевидно, что значению $n = 1$ соответствует диаграмма (b) на рис. 7, значению $n = 2$ — диаграмма (c), $n = 3$ — диаграмма (d₁) и т.д. Если в интеграле (III.1) перейти к новым переменным $p = L\rho$, $q = L\kappa$, то его можно записать так:

$$S_n(\rho) = C z_0^{-1} l^{-2} u^{2\mu} L^{2(1-\mu)-d} \times \\ \times \int |p - q|^{\mu-1} K_{1-\mu}(|p - q|) (\mathcal{K}_{\mu/2}^n(q) - 1) d^d q . \quad (\text{III.2})$$

Далее, воспользуемся разложением

$$|p - q|^{\mu-1} K_{1-\mu}(|p - q|) = \Gamma(1-\mu) \left(\frac{2}{pq}\right)^{1-\mu} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (1-\mu+m) C_m^{1-\mu}(\cos \theta) I_{1-\mu+m}(p) K_{1-\mu+m}(q) , \quad p < q ,$$

где $C_m^{1-\mu}(t)$ — многочлен Гегенбауэра, а θ — угол между векторами p и q ; причем, если $q < p$, то в этом разложении следует поменять местами переменные p и q . Учитывая последнее замечание и выполняя интегрирование по углам в равенстве (III.2), получим

$$S_n(\rho) = C z_0^{-1} l^{-2} u^{2\mu} L^{2(1-\mu)-d} p^{\mu-1} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (1-\mu+2m) \chi_{2m}(\alpha_m(p) K_{1-\mu+2m}(p) + \\ + \beta_m(p) I_{1-\mu+2m}(p)) , \quad (\text{III.3})$$

где

$$\chi_{2m} = \frac{\Gamma(s+1) \Gamma(1-\mu+m) \Gamma(1-\mu-s+m)}{m! \Gamma(1+s+m) \Gamma(1-\mu) \Gamma(1-s-\mu)} , \\ \chi_{2m+1} = 0 ,$$

как это следует из равенства

$$\chi_k = \omega^{-1} \int C_k^{1-\mu}(\cos \theta) d\omega =$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(s+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 C_k^{1-\mu}(t) (1-t^2)^{s-1/2} dt$$

для всех $k \geq 0$ и свойства

$$C_k^{1-\mu}(-t) = (-1)^k C_k^{1-\mu}(t) .$$

Наконец,

$$\alpha_m(p) = \int_0^p (\mathcal{K}_{\mu/2}^n(q) - 1) I_{1-\mu+2m}(q) q^{2s+\mu} dq , \quad (\text{III.4})$$

$$\beta_m(p) = \int_p^{\infty} (\mathcal{K}_{\mu/2}^n(q) - 1) K_{1-\mu+2m}(q) q^{2s+\mu} dq ; \quad (\text{III.5})$$

здесь $n > 1$, так как случай $n = 1$ был уже рассмотрен. Для определения асимптотики интегралов в равенствах (III.4) и (III.5), когда $p \sim 0$, примем во внимание следующие равенства:

$$\bar{I}_\lambda(p) \equiv p^{-\lambda} I_\lambda(p) = 2^{-\lambda} \Gamma^{-1}(\lambda+1) + O(p^2) , \\ \bar{K}_\lambda(p) \equiv p^\lambda K_\lambda(p) = 2^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \mathcal{K}_\lambda(p) , \\ \mathcal{K}_{\mu/2}^n(p) - 1 = (\mathcal{K}_{\mu/2}(p) - 1) \Sigma_n(p) ,$$

где

$$\Sigma_n(p) = 1 + \mathcal{K}_{\mu/2}(p) + \mathcal{K}_{\mu/2}^2(p) + \dots + \mathcal{K}_{\mu/2}^{n-1}(p) . \quad (\text{III.6})$$

Согласно определению функции $\mathcal{K}_{\mu/2}(p)$ в (3.10), ее можно представить при $\mu \ll 1$ в виде ряда по степеням $\mu \ln p$. В этом случае из равенства (III.6) тогда следует, что

$$\Sigma_n(p) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k^{(n)} (-\mu \ln p)^k + O(p^2) , \quad (\text{III.7})$$

где $\lambda_k^{(n)}$, $k \geq 0$, — вполне определенные коэффициенты указанного ряда.

Далее, введем обозначение

$$\Pi_\mu(p) = (1 - \mathcal{K}_{\mu/2}(p)) p^{-\mu} ,$$

соответственно которому

$$\Pi_\mu(p) = C + O(p^{2-\mu}) , \quad p \rightarrow 0 .$$

Оценка значения интеграла в (III.4) дает

$$\alpha_m(p) = - \int_0^p \bar{I}_{1-\mu+2m}(q) \Pi_\mu(q) \Sigma_n(q) q^{1+2s+\mu+2m} dq = \\ = - C p^{4-2\mu+2m} (1 + O(p^\mu)) . \quad (\text{III.8})$$

Обратимся теперь к выражению (III.5) и запишем его в виде

$$\beta_m(p) = - \int_p^{\infty} \bar{K}_{1-\mu+2m}(q) \Pi_\mu(q) \Sigma_n(q) q^{1-2m} dq .$$

Отсюда имеем

$$\beta_0(p) = - \int_0^{\infty} \bar{K}_{1-\mu}(q) \Pi_\mu(q) \Sigma_n(q) q dq + O(p^2) . \quad (\text{III.9})$$

Следующий коэффициент $\beta_1(p)$ представим как

$$\beta_1(p) = - \left\{ \int_1^\infty + \int_p^1 \right\} \bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q) \Sigma_n(q) q^{-1} dq$$

и в интеграле по отрезку $[p, 1]$ функцию $\Sigma_n(q)$ заменим ее разложением (III.7):

$$\begin{aligned} \int_p^1 \bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q) \Sigma_n(q) q^{-1} dq = \\ = \sum_{k \geq 0} \lambda_k^{(n)} (-\mu)^k \int_p^1 \bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q) (\ln q)^k q^{-1} dq + O(1). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_p^1 \bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q) (\ln q)^k q^{-1} dq = \\ = -(k+1)^{-1} \bar{K}_{3-\mu}(p) \Pi_\mu(p) (\ln p)^{k+1} - \\ - (k+1)^{-1} \int_p^1 (\ln q)^{k+1} d\{\bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q)\}, \end{aligned}$$

где последний интеграл можно представить в виде разности интегралов по отрезкам $[0, 1]$ и $[0, p]$ соответственно, то

$$\begin{aligned} \int_p^1 \bar{K}_{3-\mu}(q) \Pi_\mu(q) (\ln q)^k q^{-1} dq = \\ = -\frac{8}{k+1} (1 + O(\mu)) (\ln p)^{k+1} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta_1(p) = \ln p \sum_{k \geq 0} A_k^{(n)} (-\ln p)^k + O(1); \quad (\text{III.10})$$

здесь $A_k^{(n)}$, $k \geq 0$, — определенные коэффициенты данного ряда. Наконец, оценивая значения $\beta_m(p)$, когда $m \geq 2$, получим

$$\beta_m(p) = -C(1 + O(p^\mu)) p^{2-2m}, \quad (\text{III.11})$$

где константа C зависит от $m \geq 2$ и от $n \geq 1$. Подставим теперь выражения (III.8)–(III.11) в формулу (III.3) и примем во внимание, что коэффициенты χ_{2m} для всех значений $m \geq 1$ содержат множитель μ . В итоге мы получим следующий результат:

$$\begin{aligned} S_n(0) - S_n(p) = C z_0^{-1} l^{-2} u^{2\mu} L^{2(1-\mu)-d} \times \\ \times (\rho L)^2 \left\{ \sum_{k \geq 0} A_k^{(n)} [-\mu \ln(\rho L)]^{k+1} + O(1) \right\}. \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

Список литературы

1. Freed K.F. *Renormalization Group Theory of Macromolecules* (New York: Wiley, 1987).
2. Des Cloizeaux J., Jannink G. *Polymères en solution* (Paris: Les Editions de Physique, 1987).
3. Алхимов В.И. *УФН* **161** (9), 133 (1991).
4. Flory P.J. *Principles of Polymer Chemistry* (Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1971).
5. Fisher M. *J. Phys. Soc. Japan* **26** (Suppl.), 44 (1969).
6. Edwards S.F. *Proc. Phys. Soc. (London)* **85**, 613 (1965).
7. De Gennes P.G. *Rep. Prog. Phys.* **32**, 187 (1969).
8. Reiss H. *J. Chem. Phys.* **47**, 186 (1967).
9. Curro J.G., Blatz P.J. *J. Chem. Phys.* **48**, 2832 (1968).
10. Naghizadeh J. *J. Chem. Phys.* **48**, 1961 (1968).
11. Alkhimov V.I. *Chem. Phys. Lett.* **7**, 581 (1970).
12. Hermans J.J., Klamkin M.S., Ullman R. *J. Chem. Phys.* **20**, 1360 (1952).
13. Grimley T.B. *J. Chem. Phys.* **53**, 185 (1953).
14. Gillis H.P., Freed K.F. *J. Phys. A* **7**, L116 (1974).
15. Yamakawa H. *Modern Theory of Polymer Solution* (New York: Harper and Row, 1971).
16. Де Жен П. *Идеи скейлинга в физике полимеров* (М.: Мир, 1982).
17. Гроссберг А.Ю., Хохлов А.Р. *Статистическая физика макромолекул* (М.: Наука, 1989).
18. Hammersley J.M., Morton K.W. *J. Roy. Stat. Soc. B* **16**, 23 (1954).
19. Hammersley J.M. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **53**, 642 (1957).
20. Hammersley J.M., Welsh D.J.A. *Quart. J. Math. (Oxford)* **2** **13**, 108 (1962).
21. Kesten H. *J. Math. Phys.* **4**, 960 (1963).
22. Fisher M.E., Sykes M.F. *Phys. Rev.* **114**, 45 (1959).
23. Watts M.G. *J. Phys. A* **8**, 61 (1975).
24. Martin J.L., Watts M.G. *J. Phys. A* **4**, 456 (1971).
25. Watts M.G. *J. Phys. A* **7**, 489 (1974).
26. Domb C. *J. Chem. Phys.* **38**, 2957 (1963).
27. Fisher M.E. *J. Chem. Phys.* **44**, 616 (1966).
28. Fisher M.E., Burford R.J. *Phys. Rev.* **156**, 583 (1967).
29. Pincus P. *Macromolecules* **9**, 386 (1976).
30. McKenzie D.S., Moore M.A. *J. Phys. A* **4**, L82 (1971).
31. Domb C., Gillis J., Wilmsers G. *Proc. Phys. Soc.* **85**, 625; **86**, 426 (1965).
32. McKenzie D.S. *J. Phys. A* **6**, 338 (1973).
33. McKenzie D.S. *Phys. Rep. Sec. C* **27**, 35 (1976).
34. Des Cloizeaux J. *Phys. Rev. A* **10**, 1665 (1974).
35. Mandel F. *J. Chem. Phys.* **70**, 3984 (1979).
36. Baumgärtner A., Binder K. *J. Chem. Phys.* **71**, 2541 (1979).
37. Meirovitch H. *J. Phys. A* **15**, L735 (1982).
38. Majid I., Djordjevic Z.V., Stanley H.E. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1282 (1983).
39. MacDonald B., Jan N., Hunter D.L., Steinitz M.O. *J. Phys. A* **18**, 2627 (1985).
40. Beretti A., Socal A.D. *J. Stat. Phys.* **40**, 483 (1985).
41. De Forcrand Ph., Koukiou F., Petritis D. *J. Stat. Phys.* **49**, 223 (1987).
42. Madras N., Socal A.D. *J. Stat. Phys.* **50**, 109 (1988).
43. Guttman A.J. In *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Eds. Domb C., Lebowitz J.) (New York: Academic Press, 1989), v. 13.
44. Guttman A.J., Wang J.S. *J. Phys. A* **24**, 3107 (1991).
45. Lim H.A., Meirovitch H. *Phys. Rev. A* **39**, 4176 (1991).
46. MacDonald B., Hunter D.L., Kelly K., Jan N. *J. Phys. A* **25**, 1429 (1992).
47. Masand B., Wilensky U., Maffar J.P., Redner S. *J. Phys. A* **25**, L365 (1992).
48. Conway A.R., Enting I.G., Guttman A.J. *J. Phys. A* **26**, 1519 (1993).
49. Havlin S., Ben-Avraham D. *J. Phys. A* **15**, L317 (1982).
50. Bridges D., Spencer T. *Commun. Math. Phys.* **97**, 125 (1985).
51. Slade G. *Ann. Prob.* **17**, 91 (1989).
52. Стенли Г. *Фазовые переходы и критические явления* (М.: Мир, 1973).
53. Бэкстер Р. *Точно решаемые модели в статистической механике* (М.: Мир, 1985).
54. De Gennes P.G. *Phys. Lett. A* **38**, 339 (1972).
55. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции* (М.: Наука, 1973), т. 1.
56. Wilson K.G. *Phys. Rev. B* **4**, 3174, 3184 (1971).
57. Wilson K.G. *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972).
58. Wilson K.G., Fisher M.E. *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972).

59. Вильсон К., Когут Дж. *Ренормализационная группа и ϵ -разложение* (М.: Мир, 1975).
60. Ма Ш. *Современная теория критических явлений* (М.: Мир, 1980).
61. Kadanoff L.P. *Physics (New York)* **2**, 263 (1966).
62. Kadanoff L.P. et al. *Rev. Mod. Phys.* **39**, 395 (1967).
63. Ларкин А.И., Хмельницкий Д.Е. *ЖЭТФ* **56**, 2087 (1969).
64. Brezin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J., Nickel B.G. *Phys. Lett. A* **44**, 227 (1973).
65. Wallace D.J., Zia R.K.P. *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1 (1978).
66. Паташинский А.З., Покровский В.Л. *Флуктуационная теория фазовых переходов* (М.: Наука, 1982).
67. Balian R., Toulouse G. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 544 (1973).
68. Fisher M.E. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 679 (1973).
69. Gabay M., Garel T. *J. de Phys. Lett. (Paris)* **39**, 123 (1978).
70. Nienhuis B. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1062 (1982).
71. Domany E., Mukamel D., Nienhuis B., Schwimmer A. *Nucl. Phys. B* **190**, 279 (1981).
72. Nienhuis B. In *Phase Transition and Critical Phenomena* (Eds. Domb C., Lebowitz J.) (New York: Academic Press, 1987), v. 11.
73. Stueckelberg E.C.G., Peterman A. *Helv. Phys. Acta.* **26**, 499 (1953).
74. Gell-Mann M., Low F. *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954).
75. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. *ДАН СССР* **103**, 203, 391 (1955).
76. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1984).
77. Yeh R., Isihara A. *J. Chem. Phys.* **51**, 1215 (1969).
78. Freed K.F. *Adv. Chem. Phys.* **22**, 1 (1972).
79. Kosmas M., Freed K.F. *J. Chem. Phys.* **69**, 3647 (1978).
80. Des Cloizeaux J. *J. de Phys. (Paris)* **41**, L151 (1980).
81. Westwater M.J. *Commun. Math. Phys.* **72**, 131 (1980).
82. Oono Y., Ohta T., Freed K.F. *J. Chem. Phys.* **74**, 6458 (1981).
83. Oono Y., Freed K.F. *J. Chem. Phys.* **75**, 993 (1981).
84. Elderfield D.J. *J. Phys. A* **14**, 1797 (1981).
85. Des Cloizeaux J. *J. de Phys. (Paris)* **43**, 1743 (1982).
86. Ito Hiroyuki. *Phys. Lett. A* **97**, 325 (1983).
87. Biman Bagchi, Oono Y. *J. Chem. Phys.* **78**, 2044 (1983).
88. Freed K.F., Kholodenko A.L. *J. Stat. Phys.* **30**, 437 (1983).
89. Stepanov S. *Ann. d. Phys.* **40**, 301 (1983).
90. Duplantier B. *J. de Phys. (Paris)* **47**, 569 (1986).
91. Чандрасекар С. *Стохастические проблемы в физике и астрономии* (М.: ИЛ, 1947).
92. Холл М. *Комбинаторика* (М.: Мир, 1970).
93. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
94. Алхимов В.И. *ТМФ* **29**, 424 (1976).
95. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Физматгиз, 1962).
96. Титчмарш Е. *Теория функций* (М.: Наука, 1980).
97. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* (М.: Мир, 1967), т. 2.
98. Алхимов В.И. *ТМФ* **39**, 215 (1979).
99. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции* (М.: Наука, 1966), т. 2.
100. Алхимов В.И. *ТМФ* **59**, 413 (1984).
101. Владимиров А.А., Ширков Д.В. *УФН* **129**, 407 (1979).
102. Алхимов В.И. *Совещание "Ренормгруппа-86"* (Дубна: ОИЯИ, 1987), с. 348.
103. Alkhimov V.I. *Phys. Lett. A* **133**, 15 (1988).

EXCLUDED VOLUME EFFECT IN THE STATISTICS OF A SELF-AVOIDING WALK

V.I. Alkhimov

Moscow Pedagogical University
10a, Ulitsa Radio, 107005, Moscow, Russia
Tel. (095) 261-0948

The main results of an investigation into the self-avoiding walk problem are reviewed. Different approaches to solving this problem are discussed briefly. Attention is paid to asymptotical solution of the precise equation obtained for the distribution density $W_n(\mathbf{R})$, where \mathbf{R} is the vector connecting the boundary points of N -step self-avoiding walk. On the basis of the single-functional approach the problem of the diffusion of tracers in a random-velocity field is discussed in the general state. Also, approximate methods allowing one to obtain both some approximation equations and the conditions of their validity are discussed. The case of plane parallel average flow is considered in detail and some peculiarities of statistical solutions are discussed for the simplest problem.

Bibliography — 103 references

Received 28 October 1993