Май 1994 г. **Том 164, № 5**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Статистическое описание диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей

В.И. Кляцкин

В работе на основе единого функционального подхода рассматривается задача о диффузии примеси в случайном поле скоростей в общей постановке и обсуждаются приближенные методы, позволяющие получать как различные приближения, так и условия их применимости. Подробно рассматривается случай плоскопараллельного среднего течения и на примере простейшей задачи обсуждаются особенности статистических решений.

PACS numbers: 51.20,62.10.C,92.10.L

Содержание

Введение

Задача о распространении пассивной примеси в случайном поле скоростей имеет большое значение в экологических проблемах океанологии и физики атмосферы. Изучение ее интенсивно ведется с конца 50-х годов, начиная с пионерских работ [1, 2]. В дальнейшем многими исследователями были получены разнообразные уравнения, описывающие статистические характеристики поля примеси как в *эйлеровом*, так и *лагранжевом* описании (см., например, [3–7]). Вывод таких уравнений продолжается интенсивно и в настоящее время. При этом исследователи, зачастую, по сути дела повторяют друг друга и получают уравнения, подобные уравнениям, полученным намного раньше. Предположения, заложенные при их выводе, также по сути дела принципиально не отличаются. Легко написать уравнения для статистических характеристик поля примеси в так называемом *дельта-коррелированном приближении* для поля случайных скоростей (см., например, [8–10]), в котором в лагранжевом представлении частицы ведут себя как обычные *броуновские частицы*. И основная сложность задачи состоит в приближенном учете конечности временно́го *корреляционного радиуса* поля скоростей. Ниже на основе единого *функционального подхода* рассмотрим задачу о диффузии примеси в случайном поле скоростей в общей постановке и обсудим приближенные методы, позволяющие получать как различные приближения, так и условия их применимости. Подробно рассмотрим случай плоскопараллельного среднего течения и на примере простейшей задачи обсудим особенности статистических решений.

В.И. Кляцкин. Институт физики атмосферы РАН, 109017, Москва, Пыжевский пер., 3, тел. (095) 233-48-76; Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, 690041, Владивосток, Балтийская ул., 43

Статья поступила 15 января 1994 г.

1. Формулировка проблемы

Основными уравнениями проблемы переноса примеси случайным полем скоростей являются уравнения следующих двух типов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) q(\mathbf{r},\, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} q(\mathbf{r},\, t),$$
$$q(\mathbf{r},\, 0) = q_0(\mathbf{r}), \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) p_i(\mathbf{r},\, t) = -\frac{\partial u_k(\mathbf{r},\, t)}{\partial r_i} p_k(\mathbf{r},\, t) + \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} p_i(\mathbf{r},\, t),$$
$$p(\mathbf{r},\, 0) = p_0(\mathbf{r}). \tag{1'}$$

Уравнение (1) описывает скалярное поле $q(\mathbf{r},\, t)$ таких величин, как температура, соленость и т.п., представляющих непосредственный геофизический интерес, а уравнение (2) — его пространственный градиент

$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} q(\mathbf{r}, t)$. Отметим также дополнительное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \rho(\mathbf{r}, t),$$
$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}) \qquad (2)$$

для "материальной" плотности пассивной примеси. Через величину κ обозначен *коэффициент молекулярной диффузии*.

Отличие между уравнениями (1) и (2) состоит в том, что уравнение (2) имеет консервативную форму, в то время как (1) не консервативно. Поле скоростей предполагается случайным полем со средним значением $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \rangle$ ($\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$) и с флуктуирующей частью, среднее значение по ансамблю реализацией которой $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$.

Жидкость может быть *сжимаемой* или *несжимаемой* ($\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$), в последнем случае оба уравнения (1) и (2) тождественны и величина $Q = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, q(\mathbf{r}, t)$ сохраняется. В одномерном случае уравнения (1′) и (2) также тождественны. Отметим, что в этом случае поток жидкости всегда сжимаем.

Хотя уравнения (1), (1′), (2) линейны, решения q, p и ρ зависят сложным, неявным, нелинейным, функциональным образом от поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, т.е. $q = q([\mathbf{U}], \mathbf{r}, t)$. И основная задача состоит в нахождении статистических характеристик решения в терминах статистики $\mathbf{U}$, таких как среднее значение, корреляционные функции, распределение вероятностей и т.п.

$$\langle q(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle q(\mathbf{r}_1, t) q(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad \langle q(\mathbf{r}_1, t_1) q(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle.$$

Уравнения (1), (1′) и (2) дают *эйлерово описание системы*. Невозможно изучать непосредственно распределение вероятностей величины $q(\mathbf{r}, t)$, так как уравнение (1) содержит дифференциальный член второго порядка по $\mathbf{r}$ (диффузионный). Однако можно написать уравнение в вариационных производных (*уравнение Хопфа*) для характеристического функционала, что соответствует анализу решений уравнений (1), (1′), (2) в бесконечномерном функциональном пространстве [8—11].

Введем вспомогательное поле $\tilde{q}(\mathbf{r}, t)$, описываемое стохастическим уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \tilde{q}(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{q}(\mathbf{r}, t),$$
$$\tilde{q}(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — дельта-коррелированный гауссовский векторный процесс, не зависящий от $\mathbf{U}$, с параметрами

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(t) \rangle = 0, \quad \langle \alpha_i(t) \alpha_j(t') \rangle = 2\kappa \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В этом случае решение уравнения (1) соответствует усреднению (3) по ансамблю реализаций процесса $\boldsymbol{\alpha}$, так что

$$q(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{q}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}\,. \qquad (4)$$

Формула (4) представляет запись решения уравнения (1) в виде *континуального интеграла*.

Отметим, что стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка (3) может быть решено *методом характеристик*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) + \boldsymbol{\alpha}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \boldsymbol{\xi},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{q}(t) = 0, \quad \tilde{q}(0) = q_0(\boldsymbol{\xi}). \qquad (5)$$

Решение уравнений (5) зависит от начального параметра $\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\boldsymbol{\xi}), \quad \tilde{q}(t) = \tilde{q}(t|\boldsymbol{\xi}).$$

Это, так называемое, *лагранжево описание*. Исключая параметр $\boldsymbol{\xi}$ из решения системы (5), приходим к *эйлерову описанию* поля концентрации примеси

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t|\mathbf{r}), \quad \tilde{q}(\mathbf{r}, t) = \tilde{q}(t|\boldsymbol{\xi}(t|\mathbf{r})).$$

Для определения статистических характеристик решения (5) введем функцию

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}),$$

которая описывается *уравнением Лиувилля* с начальным условием [8—10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\right) \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t),$$
$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}),$$

усреднение которого по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\alpha}$, дает уравнение для среднего поля $\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\right) \phi(\mathbf{r}, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \phi(\mathbf{r}, t),$$
$$\phi(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}). \qquad (6)$$

Конечно, уравнение (6) — все еще стохастическое уравнение относительно случайного поля $\mathbf{U}$. Динамическое уравнение (6) совпадает с (2), но имеет "точечное" начальное условие. Таким образом, плотность вероятностей (6) совпадает с плотностью частиц (2), имеющих в начальный момент времени точечный характер.

Переход от лагранжева к эйлерову статистическому описанию, т.е. от (5) к (1), осуществляется с помощью *якобиана*

$$j(t|\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{Det} \left\| \frac{\partial r_i}{\partial \xi_j} \right\|, \quad j(0|\boldsymbol{\xi}) = 1.$$

Обратная величина к якобиану

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = J^{-1}(t|\boldsymbol{\xi}(t|\mathbf{r}))$$

удовлетворяет в эйлеровых координатах стандартному уравнению непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t),$$
$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = 1, \qquad (7)$$

которое после дополнительного усреднения по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\alpha}$ переходит в уравнение для средней (по $\boldsymbol{\alpha}$) плотности $\rho(\mathbf{r}, t) = \langle\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\right)\rho(\mathbf{r}, t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\rho(\mathbf{r}, t). \tag{8}$$

Как упоминалось ранее, для несжимаемой жидкости уравнение (8) совпадает с уравнением (1).

Основные уравнения (1), (2) позволяют вычислить среднюю концентрацию примеси $\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle$ или одночастичную плотность вероятностей $\phi(\mathbf{r}, t)$. Чтобы вычислить корреляции, высшие моменты или двухчастичные распределения, необходимо рассматривать произведение полей $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = q(\mathbf{r}_1, t)q(\mathbf{r}_2, t)$, которое описывается линейным уравнением

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_1, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_2, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\right)\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \\ &\qquad = \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2}\right)\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \\ &\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = q_0(\mathbf{r}_1)q_0(\mathbf{r}_2),\end{aligned} \tag{9}$$

с последующим усреднением. Отметим, что усреднение произведения $\tilde{q}(\mathbf{r}_1, t)\tilde{q}(\mathbf{r}_2, t)$ из уравнения (3) по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\alpha}$ не дает решение уравнения (9), так как

$$\langle\tilde{q}(\mathbf{r}_1, t)\tilde{q}(\mathbf{r}_2, t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \langle\tilde{q}(\mathbf{r}_1, t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}}\langle\tilde{q}(\mathbf{r}_2, t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

Таким образом, для того чтобы интерпретировать решение (9) как плотность вероятностей необходимо смоделировать непрерывное поле q системой *частиц*. Тогда k-частица пассивной примеси описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}^{(k)}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}^{(k)}(t), t) + \boldsymbol{\alpha}^{(k)}(t), \quad \mathbf{r}^{(k)}(0) = \xi^{(k)}, \tag{10}$$

где источники $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}(t)$ предполагаются статистически независимыми случайными процессами. Введем случайную функцию

$$\tilde{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \delta(\mathbf{r}^{(1)}(t) - \mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}^{(2)}(t) - \mathbf{r}_2),$$

описывающую совместную плотность вероятностей для двух частиц. Функция ϕ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\mathbf{U}(\mathbf{r}_1, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\mathbf{U}(\mathbf{r}_2, t)\right)\tilde{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \\ &\qquad = -\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\right)\tilde{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t),\end{aligned}$$

которое после усреднения по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ для функции

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle\tilde{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(2)}}$$

принимает вид

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\mathbf{U}(\mathbf{r}_1, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\mathbf{U}(\mathbf{r}_2, t)\right)\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \\ &\qquad = \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2}\right)\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \\ &\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \delta(\xi^{(1)}(t) - \mathbf{r}_1)\delta(\xi^{(2)}(t) - \mathbf{r}_2).\end{aligned} \tag{11}$$

Последнее уравнение для несжимаемого потока жидкости тождественно с (9). Для сжимаемой жидкости уравнение (11) описывает произведение двух плотностей $\tilde{R}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \rho(\mathbf{r}_1, t)\rho(\mathbf{r}_2, t)$, удовлетворяющих уравнению непрерывности (2). Уравнение (11) определяет *двухточечную плотность вероятностей* для лагранжевых координат (10).

Дальнейшая цель состоит в усреднении полученных выше линейных стохастических уравнений (1), (2), (9)–(11) по ансамблю реализаций поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, для того чтобы получить эволюцию средних полей $\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle_{\mathbf{u}}$, двухточечных корреляций

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)\rangle = \langle q(\mathbf{r}_1, t)q(\mathbf{r}_2, t)\rangle_{\mathbf{u}}$$

и т.п.

2. Точные решения

Усреднение уравнений (1), (2) по ансамблю реализаций поля $\{\mathbf{u}\}$ дает эволюционное уравнение для среднего поля, в котором случайное поле скоростей $\mathbf{u}$ связано с флуктуационным членом

$$\left\langle \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}q\right\rangle \tag{12}$$

случайного решения q, которое является функционалом поля $\mathbf{u}$, т.е. $q = q[\mathbf{u}; \ldots]$. Таким образом, для получения эволюционного уравнения для среднего поля необходимо расщепить корреляцию (12). Методы расщепления зависят от природы случайного поля $\mathbf{u}$. В случае гауссова случайного поля расщепление осуществляется на основе так называемой *формулы Фурутцу–Новикова* [12, 13] (см. также [8—10])

$$\begin{aligned}\langle u_i(\mathbf{r}, t)R[\mathbf{u}]\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\int \mathrm{d}t'\langle u_i(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r}', t')\rangle\times \\ \times\left\langle\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')}R[\mathbf{u}]\right\rangle,\end{aligned} \tag{13}$$

справедливой для произвольного функционала $R[\mathbf{u}]$ от случайного поля $\mathbf{u}$ и являющейся по сути дела формулой интегрирования по частям в функциональном пространстве [14]. Случай негауссовых флуктуаций скорости потока жидкости рассматривался в работе [15].

Применяя формулу (13) к корреляции (12) в усредненном уравнении (2), получаем для средней концентрации примеси уравнение

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle + \\ &\quad + \int_0^t \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')\frac{\partial}{\partial r_i}\left\langle\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')}q(\mathbf{r}, t)\right\rangle = \\ &\quad = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle,\end{aligned} \tag{14}$$

где $B_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r}', t')\rangle$ — пространственно-временна́я корреляционная функция поля $\mathbf{u}$. Уравнение (14) является точным для произвольного гауссового поля $\mathbf{u}$ с нулевым средним значением, однако оно не замкнуто из-за наличия в эволюционном уравнении для среднего поля члена со средним значением вариационной производной по $\mathbf{u}$. Последний член $\delta q/\delta\mathbf{u}$ описывается стохастическим уравнением, получаемым варьированием уравнения (1) по $\mathbf{u}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')}q(\mathbf{r},\,t)= =\kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')}q(\mathbf{r},\,t),$$
$$\left.\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')}q(\mathbf{r},\,t)\right|_{t\to t'+0}=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}q(\mathbf{r},\,t'). \qquad (15)$$

Отметим, что уравнение (15), по существу, является уравнением, описывающим функцию Грина для исходного уравнения (1). Усреднение по ансамблю реализаций (15) с использованием формулы Фурутцу–Новикова приводит к появлению вариационной производной второго порядка $\langle\delta^2 q/\delta u_i\,\delta u_j\rangle$ и т.д. Получаемая система уравнений нуждается в дополнительном замыкании, которое можно осуществить точно в некоторых модельных случаях. Мы рассмотрим два случая: дельта-коррелированное во времени случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ и телеграфный процесс.

2.1. Дельта-коррелированное случайное поле

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ — гауссово дельта-коррелированное поле с параметрами

$$\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)\rangle=0,$$
$$B_{ij}(\mathbf{r},\,t;\,\mathbf{r}',\,t')=\langle u_i(\mathbf{r},\,t)u_j(\mathbf{r}',\,t')\rangle= =2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}';\,t)\delta(t-t'). \qquad (16)$$

Тогда для дельта-коррелированного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ (16) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle+ +2\int\limits_0^t \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}',\,t)\delta(t-t')\times \times\frac{\partial}{\partial r_i}\left\langle\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')}q(\mathbf{r},\,t)\right\rangle=\kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle$$

и вариационная производная выражается через величину $\delta q(\mathbf{r},\,t)/\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')$ при $t\to t'$, т.е. через начальное условие к (15). В результате имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle- -2\int\limits_0^t \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}',\,t)\delta(t-t')\times \times\frac{\partial}{\partial r_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_i}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle=\kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle.$$

Выполняя интегрирование по t' и $\mathbf{r}'$, получаем замкнутое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle-A_j(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle= =\left(B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial r_i}+\kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle,$$

где функция

$$A_j(\mathbf{r},\,t)=\left.\frac{\partial}{\partial r_i}B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}',\,t)\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}.$$

Если случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ однородно и изотропно (или поток жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r},\,t)$ несжимаем), то функция $A_j(\mathbf{r},\,t)=0$. В этом случае $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}',\,t)=B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\,t)$, и $B_{ij}^{\text{eff}}(0,\,t)=\delta_{ij}B(t)$, где $B(t)=N^{-1}B_{ii}^{\text{eff}}(0,\,t)$ и величина N означает размерность пространства $N=1;2;3$. Следовательно, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle=\big(B(t)+\kappa\big)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle. \qquad (17)$$

Подобным образом получаем уравнение и для корреляционной функции $\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t)=\langle q(\mathbf{r}_1,\,t)q(\mathbf{r}_2,\,t)\rangle_{\mathbf{u}}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r}_1,\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}+\mathbf{V}(\mathbf{r}_2,\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\right)\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t)+ +\int\limits_0^t \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\mathbf{r}'\left(B_{ij}(\mathbf{r}_1,\,t;\,\mathbf{r}',\,t')\frac{\partial}{\partial r_{1i}}+\right. \left.+B_{ij}(\mathbf{r}_2,\,t;\,\mathbf{r}',\,t')\frac{\partial}{\partial r_{2i}}\right)\left\langle\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')}q(\mathbf{r}_1,\,t)q(\mathbf{r}_2,\,t)\right\rangle= =\kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2}\right)\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t),$$

которое в случае однородного, изотропного и дельта-коррелированного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ превращается в уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r}_1,\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}+\mathbf{V}(\mathbf{r}_2,\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\right)\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t)= =\left[\big(B(t)+\kappa\big)\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2}\right)+\right. \left.+2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\,t)\frac{\partial}{\partial r_{1i}}\frac{\partial}{\partial r_{2j}}\right]\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t). \qquad (18)$$

В частном случае отсутствия среднего потока $\mathbf{V}(\mathbf{r},\,t)=0$ и постоянства $q(\mathbf{r},\,0)=q_0$, случайное поле $q(\mathbf{r},\,t)$ будет также однородным и изотропным полем. Следовательно,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,t)=\Gamma(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\,t),$$

и уравнение (18) упрощается

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\mathbf{r},\,t)=2\big(B(t)+\kappa\big)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}-2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}\Gamma(\mathbf{r},\,t), \qquad (19)$$

где $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$.

Отметим, что уравнения (17), (19) для несжимаемого потока жидкости имеют вид стандартного *уравнения Фоккера–Планка* для одноточечного и двухточечного распределений вероятностей лагранжевых координат, и, более того, лагранжево решение задачи (10) является *марковским процессом*. Для турбулентного потока жидкости уравнение (19) анализировалось в работе [16].

2.2. Телеграфный случайный процесс

Пусть теперь случайное поле скоростей имеет структуру $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)=\mathbf{g}(\mathbf{r},\,t)z(t)$, где $\mathbf{g}(\mathbf{r},\,t)$ — детерминированная функция, а $z(t)$ — телеграфный процесс, определяемый формулой (см., например, [9, 10])

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)}.$$

Случайная величина a принимает значения $\mp a_0$ с вероятностями $1/2$, а целочисленный случайный процесс $n(t_1,\, t_2)$ — стандартный *пуассоновский поток точек* со средним значением $\langle n(t_1,\, t_2)\rangle = \nu|t_2 - t_1|$, обладающий свойствами:

1) $n(t_1;\, t_3) = n(t_1;\, t_2) + n(t_2;\, t_3)$ для любых $t_1 < t_2 < t_3$;

2) $n(t_1;\, t_2)$ и $n(t_2;\, t_3)$ статистически независимы для любых $t_1 < t_2 < t_3$;

3) вероятность осуществления m событий на интервале $[t_1,\, t_2]$

$$P\big(n(t_1;\, t_2) = m\big) = \frac{\langle n(t_1;\, t_2)\rangle^m}{m!} \exp\big(-\langle n(t_1;\, t_2)\rangle\big).$$

Процесс $z(t)$ — стационарный марковский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t')\rangle = a_0^2 \exp(-2\nu|t_1 - t_2|)$$

и радиусом корреляции $l_0 = 1/2\nu$.

Как и ранее, усредним уравнения (1), (2) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. В этом случае имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z + \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\langle z(t) q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z = \\ = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z + \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Psi(\mathbf{r},\, t) = \\ = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z\,, \qquad (20)$$

где введена новая неизвестная корреляционная функция

$$\Psi(\mathbf{r},\, t) = \langle z(t) q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z\,.$$

Последняя, как можно показать, описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Psi(\mathbf{r},\, t) + a_0^2\, \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z = \\ = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\Psi(\mathbf{r},\, t), \qquad (21)$$

которое играет роль аналога формулы Фурутцу–Новикова в предыдущем разделе (дельта-коррелированный случай). Вывод (21) основывается на следующей *формуле дифференцирования* для телеграфного процесса:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\nu\right)\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \left\langle z(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_t[z(\tau)]\right\rangle,$$

справедливой для корреляции процесса $z(t)$ с произвольным функционалом $R_t[z(\tau)]$, определенным для $\tau \leqslant t$ (см., например, [9, 10, 17]). Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (20), (21) для неизвестных величин среднего поля $\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle$ и корреляции Ψ.

Отметим, что в предельном случае $\nu \to \infty$, $a_0^2 \to \infty$, $a_0^2/2\nu \to \mathrm{const}$ телеграфный процесс эквивалентен гауссовому дельта-коррелированному процессу. Так как в этом предельном случае

$$\Psi(\mathbf{r},\, t) = -a_0^2\, \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z$$

приходим к единственному уравнению для среднего поля $\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z$, которое для несжимаемой жидкости соответствует уравнению Фоккера–Планка.

Описанный выше прием удобен для работы с телеграфным процессом, однако используемый метод в действительности носит более общий характер. Для иллюстрации рассмотрим вывод этих же уравнений с другой точки зрения. Усреднив уравнение (1), возвращаемся к уравнению (20)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z + g(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\langle z(t) q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z = \\ = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z\,.$$

Для расщепления корреляции $\langle z(t) q(\mathbf{r},\, t)\rangle$ используем теперь равенство [9, 10]

$$\big\langle z(t) R_t[z(\tau)]\big\rangle = \\ = a_0^2 \int_0^t \mathrm{d}t' \exp[-2\nu(t - t')]\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{R}_t[t';\, z(\tau)]\right\rangle, \qquad (22)$$

где функционал

$$\tilde{R}_t[t';\, z(\tau)] = R_t[z(\tau)\theta(t' - \tau)]$$

и через

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

обозначена стандартная единичная функция Хевисайда. Формула (22) очень близка по внешнему виду к формуле (13) для гауссового процесса с экспоненциальной корреляционной функцией. Единственное отличие в том, что правая часть (22) содержит обрезанный функционал $\tilde{R}_t$ на интервале $[t';\, t]$ вместо функционала $R_t[z(\tau)]$ во всем интервале времени t. Следовательно,

$$\tilde{R}_t[t';\, z(\tau)] = \begin{cases} R_t[z(\tau)], & \tau < t', \\ R_t[0], & \tau > t'. \end{cases}$$

Таким образом, получаем из (22)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z + a_0^2\, \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int_0^t \mathrm{d}t' \times \\ \times \exp[-2\nu(t - t')]\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{q}[t';\, z(\tau)]\right\rangle = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle_z\,.$$

Функционал $\tilde{q}[t';\, z(\tau)]$ описывается уравнением (1), в котором случайная компонента скорости заменена на

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{g}(\mathbf{r},\, t) z(t)\theta(t' - t).$$

Таким образом, для $t > t'$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\tilde{q}(\mathbf{r},\, t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\tilde{q}(\mathbf{r},\, t) \quad \text{при} \quad t > t' \tag{24}$$

с начальным условием

$$\tilde{q}(\mathbf{r},\, t)\Big|_{t=t'} = q(\mathbf{r},\, t'). \tag{25}$$

Варьируя (24), (25) по $z(t')$, получаем при $t > t'$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{q}(\mathbf{r},\, t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{q}(\mathbf{r},\, t) \tag{26}$$

с начальным условием

$$\frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{q}(\mathbf{r},\, t)\Big|_{t=t'} = -\mathbf{g}(\mathbf{r},\, t')\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}q(\mathbf{r},\, t'),$$

т.е. уравнение типа (15), но без флуктуирующей компоненты скорости. Если ввести теперь функцию

$$\Psi(\mathbf{r},\, t) = a_0^2\int_0^t \mathrm{d}t' \exp[-2\nu(t - t')]\left\langle\frac{\delta}{\delta z(t')}\tilde{q}[t';\, z(\tau)]\right\rangle,$$

то, как легко видеть из (24), (25), функция Ψ удовлетворяет уравнению (21). Таким образом, для флуктуаций скорости в модели телеграфного процесса получаем замкнутую систему уравнений (20), (21).

Отметим, что для флуктуаций скорости рассмотренного типа $\mathbf{u}(\mathbf{r},\, t) = g(\mathbf{r},\, t)z(t)$, где $z(t)$ — *марковский гауссов процесс*, имеющий те же параметры a_0 и ν, стохастическое уравнение для вариации $\delta q/\delta z$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{u}(\mathbf{r},\, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta z(t')}q(\mathbf{r},\, t) = \\ = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\frac{\delta}{\delta z(t')}q(\mathbf{r},\, t).$$

Это уравнение похоже на (26), но имеет дополнительный адвективный член $\mathbf{u}(\mathbf{r},\, t)\partial/\partial\mathbf{r}$ в левой части. Опуская этот член, возвращаемся к стохастическому уравнению, соответствующему телеграфному процессу. Таким образом, можно рассматривать уравнение, соответствующее телеграфному процессу, как приближенное для гауссового марковского процесса. Другой путь — увидеть связь гауссова марковского процесса $z(t)$, имеющим корреляционную функцию

$$\sigma^2 \exp[-2\nu(t - t')],$$

с телеграфными процессами состоит в анализе предельного перехода суммы независимых телеграфных процессов $\{z_j(t)\}$

$$z(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_1^N z_k(t)$$

с корреляционными функциями [9, 10]

$$\langle z_i(t)z_j(t')\rangle = \delta_{ij}\frac{\sigma^2}{N}\exp\left(-2\nu|t - t'|\right).$$

3. Приближенные методы

Обсудим теперь приближенные методы анализа переноса примеси случайным полем скоростей, так как в действительности флуктуации поля скорости мало похожи на дельта-коррелированные случайные поля или случайные поля телеграфного типа. Такие поля могут возникать только как некоторые асимптотические пределы. Другими словами, асимптотические разложения точных решений должны сводиться к упрощенным уравнениям, статистически эквивалентным моделям дельта-коррелированного случайного поля или телеграфного случайного процесса.

3.1. Метод последовательных приближений

Пусть теперь поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},\, t)$ будет гауссовым полем с корреляционным тензором $B_{ij}(\mathbf{r},\, t;\, \mathbf{r}',\, t')$. В этом случае имеем точное уравнение (14), которое содержит вариационную производную $\delta q/\delta\mathbf{u}$. Последняя величина описывается стохастическим уравнением (15). Усредняя (15) по ансамблю реализаций, получаем другое точное уравнение, содержащее вторую вариационную производную $\delta^2 q/\delta\mathbf{u}\,\delta\mathbf{u}$ и т.д. Для замыкания получаемой системы можно построить метод последовательных приближений на n-м уровне, т.е. для величины $\delta^n q/\delta\mathbf{u}\ldots\delta\mathbf{u}$. Обычно процедура замыкания основывается на предположении дельта-коррелированности поля $\mathbf{u}$ (см., например, [8–10, 18]), т.е. на уточнении шаг за шагом функциональной зависимости q от $\mathbf{u}$. В некоторых случаях из физических соображений можно считать, что поправка на n-м уровне к $q[\mathbf{u}]$ не дает существенный вклад в общее решение и может быть отброшена. Отметим, что в случае отсутствия среднего потока $\mathbf{V} = 0$ при достаточно быстром убывании корреляционных функций $B_{ij}(\mathbf{r},\, t)$ по пространственно-временно́й переменной дельта-коррелированное приближение правильно предсказывает асимптотику решения при $t\to\infty$. Этот факт также подтверждается численным моделированием [19]. Однако, если корреляционные функции $B_{ij}(\mathbf{r},\, t)$ имеют более сложную структуру (например, для турбулентного поля скорости [11]), а также в случае наличия среднего потока, дельта-коррелированного приближения явно недостаточно.

Для практических целей часто достаточно замкнуть усредненное уравнение (15) на втором шаге, используя дельта-коррелированное приближение. Хотя такая процедура замыкания и широко используется в физике плазмы и ионосферы, в частности, в задачах генерации магнитного поля турбулентными потоками жидкости и газа [20], не имеется удовлетворительного математического оправдания этой процедуре замыкания, а также условий ее применимости (даже для больших n).

3.2. Приближение телеграфного случайного процесса

Пусть корреляционные функции $B_{ij}(\mathbf{r},\, t;\, \mathbf{r}',\, t')$, как функции разности времен $t - t'$, характеризуются корреляционным радиусом t_0, т.е.

$$B = B\left(\frac{t - t'}{t_0}\right).$$

Учитывая, что уравнение (14) содержит интегрирование по t', основная область интегрирования $\delta q/\delta\mathbf{u}$ определяется масштабом t_0. Если предположить из физических соображений, что на таких масштабах флуктуации поля скоростей $\mathbf{u}$ не существенны для $\delta q/\delta \mathbf{u}$ (т.е. последняя величина функционально не зависит от $\mathbf{u}$), то можно опустить флуктуирующий член в (15). Таким образом, получаем описание в замкнутой форме, которое можно назвать приближением телеграфного случайного процесса, поскольку, как было показано выше, оно является точным описанием для телеграфного процесса. Теперь имеем систему связанных уравнений для двух средних величин $\langle q(\mathbf{r}', t)\rangle$ и $\langle \delta q/\delta \mathbf{u}\rangle$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle + \int_0^t \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial r_i}\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} q(\mathbf{r}, t)\right\rangle = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} q(\mathbf{r}, t)\right\rangle =$$
$$= \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} q(\mathbf{r}, t)\right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} q(\mathbf{r}, t)\right\rangle\bigg|_{t\to t'} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r}, t')\rangle. \tag{27}$$

Выше было сказано, что уравнение для вариационной производной, по существу, эквивалентно уравнению для функции Грина исходной задачи (1) при отсутствии флуктуаций скорости. Отметим в этой связи, что система (27) эквивалентна системе, полученной в работе [21] на основе совершенно другого метода. Другое хорошо известное уравнение следует из (27) в отсутствии среднего потока и молекулярной диффузии [6]. Система уравнений (27), однако, слишком сложна для непосредственного анализа и нуждается в дальнейших упрощениях.

3.3. Диффузионное приближение

Сделаем теперь дополнительное предположение относительно флуктуаций поля скоростей. А именно, предположим, что на масштабах корреляционного радиуса t_0 влияние поля скорости $\mathbf{u}$ на динамику q несущественно, так же как на функциональную зависимость q от $\mathbf{u}$. На таких масштабах динамика пассивной примеси может быть описана приближенным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) q(\mathbf{r}, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} q(\mathbf{r}, t),$$
$$q(\mathbf{r}, t)\Big|_{t\to t'} = q(\mathbf{r}, t').$$

Как следствие, получаем дополнительное соотношение между величинами $q(\mathbf{r}, t)$ и $q(\mathbf{r}, t')$, которое позволяет исключить второе уравнение из (27). Следовательно, получаем замкнутое уравнение первого порядка по t для средней концентрации $\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle$. Отметим, что для больших масштабов времени, а именно, для $t \gg t_0$ поведение поля $q(\mathbf{r}, t)$ становится подобным марковскому случайному полю во времени t, что и оправдывает название этого приближения как приближения диффузионного случайного поля (диффузионное приближение) [22].

4. Случай плоско-параллельного течения

Рассмотрим теперь применение развитого выше формализма для плоско-параллельного потока несжимаемой жидкости со средним профилем скорости

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l},$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$. В этом случае уравнение (1) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) q(\mathbf{r}, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} q(\mathbf{r}, t) \tag{28}$$

и соответствующие лагранжевы уравнения для "частицы" принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t) + \alpha_1(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = +u_2(\mathbf{r}, t) + \alpha_2(t), \tag{29}$$

где $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ статистически независимые стохастические процессы "белого шума".

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ предполагается несжимаемым гауссовым однородным, изотропным и стационарным случайным полем с пространственно-временно́й корреляционной функцией

$$B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t)\rangle,$$

характеризуемой следующими величинами: дисперсией $\sigma_u^2 = B_{ii}(0, 0)$ и пространственно-временными корреляционными радиусами l_0 и t_0. Введем вместо B_{ij} его пространственную спектральную плотность $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$ согласно формуле

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\, E_{ij}(\mathbf{k}, t)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Для однородной и изотропной "турбулентности"

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t)(\delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}) \tag{30}$$

и, следовательно,

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\, E(k, t)(\delta_{ij} - k_i k_j k^{-2})\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

а дисперсия поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_u^2 = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}k\, kE(k, 0), \quad B_{ij}(0, t) = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}k\, kE(k, t)\delta_{ij}\,. \tag{31}$$

Рассмотрим уравнение (28) с начальным условием, соответствующим "точечному распределению"

$$q(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{32}$$

В этом случае решение уравнения (28) будет функцией параметра $\mathbf{r}_0$, т.е. $q(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)$, а в случае произвольного случайного начального распределения примеси

$$q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r})$$

решение определяется сверткой

$$q(\mathbf{r},\,t) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_0 q(\mathbf{r},\,t|\mathbf{r}_0) q_0(\mathbf{r}_0).$$

В силу начального условия (32), как указывалось выше, решение задачи (28) для среднего значения $\langle q(\mathbf{r},\,t|\mathbf{r}_0)\rangle$ совпадает с "одночастичной" плотностью вероятностей для лагранжевой координаты частицы (29), а величина $\langle q(\mathbf{r}_1,\,t|\mathbf{r}_0^{(1)}) q(\mathbf{r}_2,\,t|\mathbf{r}_0^{(2)})\rangle$ совпадает с "двухчастичной" плотностью вероятностей.

Итак, рассмотрим задачу (28), (32). Интерес представляет средняя концентрация примеси $\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle$. Усредняя уравнение (28) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}$, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle + \int\limits_0^t \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\,t-t')\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial r_i}\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right\rangle = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle. \qquad (33)$$

Для вариационной производной $\delta q(\mathbf{r},\,t)/\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')$ имеем следующее стохастическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t) +$$
$$+ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\frac{\partial}{\partial r_j} q(\mathbf{r},\,t') =$$
$$= \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t),$$
$$\left.\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right|_{t=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right|_{t\to t'+0} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} q(\mathbf{r},\,t') \qquad (34)$$

или уравнение с начальным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t) =$$
$$= \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t) \quad (t > t'),$$
$$\left.\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right|_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} q(\mathbf{r},\,t'). \qquad (35)$$

Обычно в геофизических задачах величина κ — коэффициент молекулярной диффузии — достаточно мала. И член, содержащий κ, может быть опущен в уравнениях (34), (35) (во всяком случае нас интересует предел $\kappa \to 0$), т.е. для вариационной производной можно рассматривать уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t) = 0 \quad (t > t'),$$
$$\left.\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right|_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} q(\mathbf{r},\,t'). \qquad (36)$$

Однако можно сохранить член, содержащий κ в уравнении (33), так как он в некоторых случаях может быть регуляризирующим фактором.

Рассмотрим теперь различные приближения.

1. В приближении дельта-коррелированного случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},\,t)$ величина $\delta q/\delta u_j$, входящая в (33), определяется начальным условием (36) для $t' = t$, т.е. выражением

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} q(\mathbf{r},\,t) \qquad (37)$$

и уравнение (33) для $t \gg t_0$, где t_0 — временнóй радиус корреляции поля $\mathbf{u}$, преобразуется в уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle = \int\limits_0^t \mathrm{d}t' B_{ij}(0,\,t')\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle +$$
$$+ \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle,$$

которое может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle = D\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle, \qquad (38)$$

где, согласно (31), величина

$$D = \kappa + D^{\mathrm{T}}, \qquad (39)$$

и

$$D^{\mathrm{T}} = \pi \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, k E(k,\,t)$$

— коэффициент "турбулентной" диффузии.

Уравнение (39) теперь принимает вид уравнения Фоккера–Планка для плотности вероятностей лагранжевой координаты частицы (29).

2. В приближении телеграфного случайного процесса для среднего значения вариационной производной имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right\rangle = 0 \qquad (t > t'),$$
$$\left.\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right\rangle\right|_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\,t')\rangle. \qquad (40)$$

В этом приближении имеем замкнутую систему уравнений (33) и (40) второго порядка по времени. Из (40) можно получить соотношение между величинами $\langle \delta q/\delta u\rangle$ и $\langle q\rangle$ в виде

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',\,t')} q(\mathbf{r},\,t)\right\rangle = -\exp\left[-(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right]\times$$
$$\times \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\,t')\rangle. \qquad (41)$$

Подставляя (41) в (33), получаем интегро-дифференциальное уравнение для $\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\,t)\rangle +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}\mathbf{r}' B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\,t-t')\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial r_i} \exp\left[-(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\, t')\rangle, \tag{42}$$

которое, принимая во внимание несжимаемость поля $\mathbf{u}$, после интегрирования по $\mathbf{r}'$, может быть записано в окончательном виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle + \\ +\frac{\partial}{\partial r_i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l},\, \tau)\times \\ \times \exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\, t-\tau)\rangle. \tag{43}$$

Отметим, что в (43)

$$\exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\partial}{\partial r_j}\langle q(\mathbf{r},\, t-\tau)\rangle = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial r_j}+\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y}\delta_{j2}\,\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r}-\tau v(y)\mathbf{l},\, t-\tau)\rangle.$$

3. В диффузионном приближении величина $\langle q(\mathbf{r},\, t')\rangle$ в правой части (42) может быть определена из первоначальной динамической системы (28) в отсутствии флуктуационного члена и члена с параметром κ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)q(\mathbf{r},\, t) = 0, \\ q(\mathbf{r},\, t)\Big|_{t=t'} = q(\mathbf{r},\, t')$$

и, следовательно,

$$\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle = \exp\left[-(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right]\langle q(\mathbf{r},\, t')\rangle$$

или

$$\langle q(\mathbf{r},\, t')\rangle = \exp\left[(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right]\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle. \tag{44}$$

Подставляя (44) в (43), получаем замкнутое уравнение первого порядка во времени

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle + \\ +\frac{\partial}{\partial r_i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l},\, \tau)\exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\times \\ \times \frac{\partial}{\partial r_j}\exp\left(\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t-\tau)\rangle,$$

которое может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle = \kappa\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle + \\ +\frac{\partial}{\partial r_i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\left(D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},\, \tau)\frac{\partial}{\partial r_j}+D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r},\, \tau)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle q(\mathbf{r},\, t-\tau)\rangle. \tag{45}$$

Здесь величины

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},\, \tau) = B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l},\, \tau), \\ D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r},\, \tau) = \tau B_{i2}(\tau v(y)\mathbf{l},\, \tau)\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y}$$

— коэффициенты диффузии. Уравнение (45) правильно описывает динамику величины $\langle q(\mathbf{r},\, t)\rangle$ также для временных масштабов $t \leqslant t_0$, где t_0 — корреляционный радиус во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},\, t)$. Однако в этом случае статистическое решение уравнения (29) для частицы не обладает марковским свойством. Если упростить задачу, рассматривая поведение системы на временных масштабах $t \gg t_0$, то можно заменить верхние пределы в интегралах (45) на бесконечность, и тогда на этих временных масштабах решение уравнения (29) будут марковским процессом.

Выше были рассмотрены приближенные методы описания диффузии пассивной примеси в среднем плоско-параллельном потоке жидкости. Полученные уравнения относительно сложны. В общем случае их невозможно решить аналитически. Однако в геофизических приложениях имеется ряд более простых задач, представляющих непосредственный интерес и допускающих достаточно полный анализ. Среди этих задач отметим следующие:

1) $v(y) = \beta y$ — *линейный сдвиговой поток*,

2) $v(y) = v_0\theta(y-y_0) - v_0\theta(y_0-y)$ — *тангенциальный разрыв*,

3) $v(y) = v_0\sin(\beta y)$ — *колмогоровское течение*,

4) $v(y) = \tilde{v}(y)\theta(y_0-|y|)$ — *струйный поток*.

Оставляем в стороне вопрос об их устойчивости (см., например, [11, 23, 24]).

В некоторых случаях уравнение (38) может быть легко решено для точечного начального условия $\langle q(\mathbf{r},\, 0)\rangle = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ и его решение соответствует гауссовой плотности вероятностей для решения системы уравнений (29), которая статистически эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = v(y)+\tilde{\alpha}_1(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \tilde{\alpha}_2(t), \tag{29'}$$

где $\tilde{\alpha}_i(t)$ — статистически независимые процессы "белого шума" с корреляционными функциями

$$\langle\tilde{\alpha}_i(t)\tilde{\alpha}_j(t')\rangle = 2D^{1/2}\delta(t-t').$$

Легко написать решение системы (29′)

$$y(t) = y_0 + w_2(t), \\ x(t) = x_0 + w_1(t) + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, v\big(y_0+w_2(\tau)\big), \tag{46}$$

где

$$w_i(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\,\tilde{\alpha}_i(\tau)$$

— независимые *винеровские процессы* с характеристиками

$$\langle w_i(t)\rangle = 0, \quad \langle w_i(t)w_j(t')\rangle = 2D\delta_{ij}\min\{t,\, t'\}.$$

Из (46) следует, что координата $y(t)$ имеет гауссову плотность распределения вероятностей с параметрами

$$\langle y(t)\rangle = y_0, \quad \langle y^2(t)\rangle = y_0^2 + 2Dt,$$

что соответствует обычному *броуновскому движению* с турбулентным коэффициентом диффузии D.

Теперь из (46) легко вычислить любые моментные функции $\langle x^n(t)\rangle$ и корреляции $\langle x^n(t)y^m(t)\rangle$ для лагранжевых частиц. С точки зрения эйлерова описания для средней концентрации, эти величины характеризуют расплывание "облака" примеси, так как уравнения для среднего значения концентрации $\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle$ и одноточечной плотности вероятностей тождественны, как это указывалось неоднократно выше. Так, величина

$$\langle \mathbf{r}(t)\rangle = \frac{1}{Q}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{r}\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle$$

определяет положение "центра тяжести" во времени облака примеси, а более высокие моменты, как например,

$$\langle r_i(t)r_j(t)\rangle = \frac{1}{Q}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\, r_i r_j\langle q(\mathbf{r}, t)\rangle$$

характеризуют деформацию этого облака.

Так, в простейшем примере сдвигового течения равенства (46) соответствуют совместной гауссовой плотности вероятностей с параметрами [25, 26]

$$\begin{aligned}
&\langle x(t)\rangle = \beta y_0 t + x_0, \quad \langle y(t)\rangle = y_0,\\
&\sigma_{xx}^2 = 2Dt\left(1 + \beta t + \frac{1}{3}\beta^2 t^2\right),\\
&\sigma_{yy}^2 = 2Dt, \quad \sigma_{xy}^2 = 2Dt(1+\beta t),
\end{aligned} \tag{46'}$$

где

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle, \quad \sigma_{yy}^2 = \langle (y - \langle y\rangle)^2\rangle,\\
&\sigma_{xy}^2 = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle.
\end{aligned}$$

Решение (46′) также хорошо известно в случае отсутствия сдвига ($\beta = 0$) и соответствует обычному совместному броуновскому движению в (x, y)-плоскости с турбулентным коэффициентом диффузии.

В случае колмогоровского течения имеем

$$\begin{aligned}
&\langle y(t)\rangle = y_0,\\
&\langle x(t)\rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D}\sin(\beta y_0)\cdot\left[1 - \exp(-\beta^2 Dt)\right]
\end{aligned} \tag{46''}$$

и при условии $t \gg 1/D\beta^2$

$$\langle x(t)\rangle_{t\to\infty} = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D}\sin(\beta y_0),$$

т.е. частица в среднем находится в конечной части пространства. В этом случае и корреляция $x(t)$ и $y(t)$ также не зависит от времени

$$\langle (x(t) - x_0)(y(t) - y_0)\rangle_{t\to\infty} = x_0 + \frac{4v_0}{\beta^3 D}\cos(\beta y_0).$$

Однако в этом пределе величина $x(t)$ ведет себя, как броуновская частица с турбулентным коэффициентом диффузии D, т.е. $\sigma_{xx}^2 \sim 2Dt$.

Отметим, что после потери устойчивости течения Колмогорова устанавливается квазипериодический в плоскости (x, y) поток. Диффузия примеси в потоке такого типа с $\mathbf{V} = (B\cos y,\ A\sin x)$ рассматривалась в работе [27].

5. Особенности статистических решений

Для того чтобы увидеть особенности статистических решений, ограничимся простейшей постановкой задачи — рассмотрим одномерную задачу в отсутствии среднего потока и пренебрежем коэффициентом молекулярной диффузии. В этом случае имеем следующие уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)q(x, t) = 0, \quad q(x, 0) = q_0(x), \tag{47}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\right)\rho(x, t) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \tag{48}$$

вместо уравнений (1), (2).

Отметим, что одномерная задача всегда описывает поток сжимаемой жидкости, а величина

$$p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}q(x, t),$$

определяющая пространственный градиент концентрации примеси, также описывается уравнением (48).

Решая уравнение (47) методом характеристик, имеем вместо уравнений (5) уравнения лагранжевого описания

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t|\xi) = u(x(t|\xi), t), \quad x(0|\xi) = \xi,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t|\xi) = 0, \quad q(0|\xi) = q_0(\xi).
\end{aligned} \tag{49}$$

Следовательно, $q(t|\xi) = q_0(\xi)$. Как указывалось выше, расходимость, описываемая величиной $j(t|\xi) = |\partial x(t|\xi)/\partial\xi|$, играет большую роль при переходе к эйлеровскому описанию. Она удовлетворяет уравнению, вытекающему из уравнения (49)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j(t|\xi) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}j(t|\xi), \quad j(0|\xi) = 1. \tag{50}$$

Для описания статистических свойств $x(t|\xi)$ и $j(t|\xi)$, как неоднократно указывалось выше, надо ввести функцию

$$\Phi_t(x, j|\xi) = \delta(x(t|\xi) - x)\delta(j(t|\xi) - j),$$

удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x, j|\xi) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial j}j\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)\Phi_t(x, j|\xi),\\
&\Phi_0(x, j|\xi) = \delta(x - \xi)\delta(j - 1).
\end{aligned} \tag{51}$$

Далее, для простоты будем считать случайное поле $u(x, t)$ гауссовым однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным полем с параметрами

$$\begin{aligned}
&\langle u(x, t)\rangle = 0,\\
&B(x - x', t - t') = \langle u(x, t)u(x', t')\rangle.
\end{aligned}$$

В этом случае имеем

$$\left\langle\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}u(x,\,t)\right\rangle=\frac{\partial}{\partial x}B(x-x',\,t-t')\Big|_{x'=x}=0. \qquad (52)$$

Ограничимся для простоты также приближением дельта-коррелированного во времени полем $u(x,\,t)$, когда корреляционная функция $B(x,\,t)$ аппроксимируется выражением

$$B(x,\,t)=2B^{\text{eff}}(x)\delta(t),\quad 2B^{\text{eff}}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,B(x,\,\tau). \qquad (53)$$

Усредняя теперь уравнение (51) по ансамблю реализаций поля $u(x,\,t)$ с помощью формулы Фурутцу–Новикова, получаем уравнение для совместной плотности вероятностей смещений "частицы" и ее расходимости $P_t(x,\,j|\xi)=\langle\Phi_t(x,\,j|\xi)\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x,\,j|\xi)=$$
$$=\int\mathrm{d}x'\left(\frac{\partial}{\partial x}B^{\text{eff}}(x-x')+\frac{\partial}{\partial j}j\frac{\partial B^{\text{eff}}(x-x')}{\partial x}\right)\times$$
$$\times\left\langle\frac{\delta}{\delta u(x',\,t)}\Phi_t(x,\,j|\xi)\right\rangle.$$

Учитывая, что

$$\frac{\delta}{\delta u(x',\,t)}\Phi_t(x,\,j|\xi)=$$
$$=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')+\frac{\partial}{\partial j}j\frac{\partial\delta(x-x')}{\partial x}\right)\Phi_t(x,\,j|\xi),$$

а также, принимая во внимание (52), последнее равенство можно переписать в виде уравнения Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x,\,j|\xi)=D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_t(x,\,j|\xi)+$$
$$+D_2\left(\frac{\partial}{\partial j}j+\frac{\partial}{\partial j}j\frac{\partial}{\partial j}j\right)P_t(x,\,j|\xi),$$
$$P_0(x,\,j|\xi)=\delta(x-\xi)\delta(j-1),$$

или в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x,\,j|\xi)=D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_t(x,\,j|\xi)+D_2\frac{\partial}{\partial j}\frac{\partial}{\partial j}j^2P_t(x,\,j|\xi),$$
$$P_0(x,\,j|\xi)=\delta(x-\xi)\delta(j-1), \qquad (54)$$

где коэффициенты диффузии D_i определяются равенствами

$$D_1=B^{\text{eff}}(0),\quad D_2=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}B^{\text{eff}}(x)\Big|_{x=0}. \qquad (55)$$

Отметим, что использование диффузионного приближения вместо дельта-коррелированного во времени приводит к тому же уравнению (54), но с коэффициентами диффузии, зависящими теперь от времени

$$D_1(t)=\int\limits_0^t\mathrm{d}\tau\,B(0,\,\tau),\quad D_2(t)=-\int\limits_0^t\mathrm{d}\tau\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,\,\tau)\Big|_{x=0}.$$

При условии, что $t\gg t_0$, где t_0 — временно́й радиус корреляции, последние переходят в (55).

Из уравнения (54) следует, что диффузия "частицы" статистически независима от статистики расходимости и описывается гауссовым распределением вероятностей с параметрами

$$\langle x(t|\xi)\rangle=\xi,\quad\sigma_x^2(t)=\left\langle\left(x(t|\xi)-\langle x(t|\xi)\rangle\right)^2\right\rangle=2D_1t\,,$$

т.е. соответствует обычному броуновскому движению. Что же касается распределения вероятностей для расходимости, то оно логарифмически нормальное и статистически эквивалентно представлению расходимости в виде, не зависящем от параметра ξ [28]

$$j(t)=j(t|\xi)=\exp(-D_2t+w(t)), \qquad (56)$$

где $w(t)$ есть *винеровский процесс* с параметрами

$$\langle w(t)\rangle=0,\quad\langle w^2(t)\rangle=2D_2t\,.$$

Из представления (56), так же как и из уравнения (54), следует, что

$$\langle j(t)\rangle=1,\quad\langle j^n(t)\rangle=\exp[D_2n(n-1)t], \qquad (57)$$

т.е. среднее значение расходимости постоянно, а высшие моменты, начиная со второго, эспоненциально растут во времени. Отметим, что для обратной величины к расходимости $\tilde\rho(t)=1/j(t)$, имеющей смысл плотности частицы и удовлетворяющей в лагранжевом описании уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde\rho(t)=-\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}\tilde\rho(t),\quad\tilde\rho(0)=1,$$

также получаем логарифмически нормальное распределение вероятностей, моментные функции которого определяются равенством

$$\langle\tilde\rho^n(t)\rangle=\exp[D_2n(n+1)t]. \qquad (58)$$

Таким образом, средняя плотность пассивной примеси, так же как и ее высшие моменты, экспоненциально растут во времени.

Парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности частицы, заключающееся в одновременном росте статистических характеристик во времени, объясняется свойством логарифмически нормального распределения вероятностей [29]. Так, типичной реализацией случайной расходимости $j(t)$ является экспоненциально спадающая кривая

$$j(t)=\exp(-D_2t),$$

и существуют мажорантные оценки для реализаций случайного процесса $j(t)$. В частности, с вероятностью $p=1/2$

$$j(t)<4\exp\left(-\frac{1}{2}D_2t\right)$$

на любом интервале времени. Соответственно, для реализации плотности имеем типичную реализацию и мажорантную оценку снизу следующего вида

$$\tilde\rho(t)=\exp(D_2t),\quad\tilde\rho(t)>\frac{1}{4}\exp\left(\frac{1}{2}D_2t\right).$$

Приведенные оценки показывают, что статистика случайных величин $j(t)$ и $\tilde{\rho}(t)$ формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций и при этом частицы сжимаются, образуя кластеры, расположенные в большей степени разреженных зонах.

Рассмотрим теперь эйлерово описание нашей задачи. Введем функции

$$\Phi_{t,x}(q) = \delta(q(x,\, t) - q), \quad \Phi_{t,x}(\rho) = \delta(\rho(x,\, t) - \rho),$$

удовлетворяющие уравнениям Лиувилля

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_{t,x}(q) = 0,\\
&\Phi_{0,x}(q) = \delta(q_0(x) - q),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_{t,x}(\rho) = \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x}\Phi_{t,x}(\rho),\\
&\Phi_{0,x}(\rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho).
\end{aligned} \tag{59}$$

Усредняя теперь (59) по ансамблю случайного поля $u(x,\, t)$, получаем для плотностей вероятностей $P_{t,x}(q) = \langle \Phi_{t,x}(q)\rangle$, $P_{t,x}(\rho) = \langle \Phi_{t,x}(\rho)\rangle$ уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{t,x}(q) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{t,x}(q),\\
&P_{0,x}(q) = \delta(q_0(x) - q),
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{t,x}(\rho) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{t,x}(\rho) + D_2\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho^2 P_{t,x}(\rho),\\
&P_{0,x}(\rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho).
\end{aligned} \tag{61}$$

Решение уравнения (60) соответствует пространственной диффузии начального распределения. В простейшем случае однородного начального условия $q_0(x) = q_0 -$ const распределение вероятностей не зависит от x и $P_t(q) = \delta(q - q_0)$.

В случаях однородных начальных условий для плотности (61) $\rho_0(x) = \rho_0 - \text{const}$. Распределение вероятностей также не зависит от x, и уравнение (61) упрощается

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_t(\rho) = +D_2\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho^2 P_t(\rho),\\
&P_0(\rho) = \delta(\rho_0 - \rho).
\end{aligned} \tag{62}$$

Решение уравнения (62) соответствует логарифмически нормальному распределению и при этом

$$\langle \rho(x,\, t)\rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(x,\, t)\rangle = \rho_0^n \exp[D_2 n(n-1)t]. \tag{63}$$

Следствием (62), (63) является типичная реализация поля $\rho(x,\, t)$ в любой фиксированной пространственной точке

$$\rho(x,\, t) = \rho_0 \exp(-D_2 t)$$

и формирование эйлеровой статистики происходит за счет флуктуаций плотности относительно этой кривой, что подтверждает кластерный характер флуктуаций плотности среды.

Как отмечалось выше, пространственный градиент концентрации примеси

$$p(x,\, t) = \frac{\partial}{\partial x}q(x,\, t)$$

описывается уравнением, совпадающим с уравнением для плотности среды. В этом случае совместная плотность вероятностей величин $q(x,\, t)$ и $p(x,\, t) - P_{t,x}(q,\, p) = \langle \delta(q(x,\, t) - q)\delta(p(x,\, t) - p)\rangle$ также будет описываться уравнением (61), т.е. уравнением

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{t,x}(q,\, p) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{t,x}(q,\, p) + D_2\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}p^2 P_{t,x}(q,\, p),\\
&P_{0,x}(q,\, p) = \delta(q_0(x) - q)\delta\left(\frac{\partial}{\partial x}q_0(x) - p\right),
\end{aligned} \tag{64}$$

из которого следует, что совместные моментные функции

$$\langle q^n(x,\, t)p^m(x,\, t)\rangle \sim \exp[D_2 m(m-1)t]$$

и, следовательно, статистика градиентов концентрации примеси формируется выбросами относительно экспоненциально спадающей во времени типичной реализацией в фиксированной пространственной точке.

Из изложенного выше ясно следует, что для детального описания диффузии примеси недостаточно ограничиваться поведением отдельных моментных функций примеси и ее градиента или плотности в пространстве и времени, а необходимо изучать распределения вероятностей для этих величин. В общем случае трехмерной задачи, как указывалось выше, этому препятствует член, обусловленный молекулярной диффузией, и необходимо использовать приближенные методы. Некоторые приближенные методы развиваются в настоящее время в работах [30–32].

Что касается рассматриваемой одномерной задачи, то с учетом молекулярной диффузии вместо уравнения (47) имеем уравнение

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)q(x,\, t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,\, t),\\
&q(x,\, 0) = q_0(x)
\end{aligned} \tag{65}$$

и соответствующее уравнение для пространственного градиента концентрации примеси

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}u(x,\, t)\right)p(x,\, t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,\, t),\\
&p(x,\, 0) = \frac{\partial}{\partial x}q_0(x).
\end{aligned} \tag{66}$$

Согласно выше сказанному, поведение типичной реализации пространственного градиента концентрации пассивной примеси в отсутствии молекулярной диффузии характеризуется экспоненциальным спаданием во времени в любой точке пространства. Поэтому можно думать, что учет диффузионного члена в правой части (66) несуществен. Опуская этот член, мы приходим к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)q(x,\, t) = \kappa\frac{\partial}{\partial x}p(x,\, t),\\
&q(x,\, 0) = q_0(x),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)p(x,\, t) = -p(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,\, t),\\
&p(x,\, 0) = \frac{\partial}{\partial x}q_0(x),
\end{aligned} \tag{67}$$

т.е. в правую часть уравнения для $q(x, t)$ добавляется в качестве источника величина, описываемая замкнутым уравнением. Однако при этом естественно, что величины $q(x, t)$ и $p(x, t)$ статистически связаны.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{t,x}(q, p) = \delta(q(x, t) - q)\delta(p(x, t) - p).$$

Дифференцируя ее по x, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{t,x}(q, p) = -p\frac{\partial}{\partial q}\Phi_{t,x}(q, p) - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}\Phi_{t,x}(q, p). \tag{68}$$

Дифференцируя теперь $\Phi_{t,x}(q, p)$ по t, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_{t,x}(q, p) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\Phi_{t,x}(q, p) - \kappa\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}\Phi_{t,x}(q, p). \tag{69}$$

Усредняя (68), (69) по ансамблю реализаций случайного поля $u(x, t)$, для совместной плотности вероятностей $P_{t,x}(q, p) = \langle\Phi_{t,x}(q, p)\rangle$ имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{t,x}(q, p) = -p\frac{\partial}{\partial q}P_{t,x}(q, p) - \frac{\partial}{\partial p}\Psi_{t,x}(q, p),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{t,x}(q, p) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{t,x}(q, p) + D_2\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}p^2P_{t,x}(q, p) - \kappa\frac{\partial}{\partial q}\Psi_{t,x}(q, p),$$

где

$$\Psi_{t,x}(q, p) = \left\langle\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}\Phi_{t,x}(q, p)\right\rangle.$$

Откуда, после исключения неизвестной функции $\Psi_{t,x}(q, p)$, получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}P_{t,x}(q, p) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial p}P_{t,x}(q, p) + D_2\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}p^2P_{t,x}(q, p) + \kappa\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial x}P_{t,x}(q, p) + \kappa p\frac{\partial^2}{\partial q^2}P_{t,x}(q, p). \tag{70}$$

В частности, умножая (70) на p и интегрируя по p, получаем уравнение для плотности вероятностей концентрации пассивной примеси

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{t,x}(q) = D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{t,x}(q) - \kappa\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial x}\langle p|q\rangle - \kappa\frac{\partial^2}{\partial q^2}\langle p^2|q\rangle,$$

где

$$\langle p^n(x, t)|q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, p^n P_{t,x}(q, p).$$

Уравнение (70) в настоящее время еще не исследовано.

Отметим, что из (70) вытекает замкнутая система уравнений для моментных функций вида $\langle p^n(x, t)q^m(x, t)\rangle$, содержащая в качестве источника величины $\langle p^l(x, t)\rangle$, описываемые замкнутым образом с помощью независимого уравнения типа (62).

Заключение

Выше на основе функционального подхода подробно рассматривались различные приближенные методы описания статистических характеристик поля скалярной примеси в случайной поле скоростей и на примере простейшей задачи проиллюстрированы особенности статистических решений. Изложенный подход существенным образом базируется на условии конечности временнóго корреляционного радиуса поля скоростей, а условиями применимости данного подхода являются те или иные ограничения на корреляционный радиус (разные для различных приближений). Для бесконечного временнóго корреляционного радиуса (*случайное стационарное поле скоростей*) полученные уравнения не применимы. Это случай практически не изучен.

Автор признателен D. Gurarie и W. Woyczynski из Center for Stochastic and Chaotic Processes in Science и Technology Case Western Reserve University за полезные обсуждения рассмотренной проблемы.

Исследование, описанное в данной публикации, выполнено при поддержке International Science Foundation (грант MBP00) и Российского фонда фундаментальных исследований (Проект 94-05-16151).

Список литературы

1. Batchelor G.R. *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1959).
2. Batchelor G.R., Howells L.D., Townsend A.A. *J. Fluid Mech.* **5**, 134 (1959).
3. Roberts P.H. *J. Fluid Mech.* **11**, 257 (1961).
4. Kraichnan R.H. *Phys. Fluids* **11**, 945 (1968).
5. Kraichnan R.H. *Phys. Fluids* **13**, 22 (1970).
6. Saffman P.G. *Phys. Fluids* **12**, 1786 (1969).
7. McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Pironneau O.R. *SIAM J. Appl. Math.* **45**, 780 (1985).
8. Кляцкин В.И. *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами* (М.: Наука, 1975).
9. Klyatskin V.I. *Ondes et équations stochastiques dans les militux aleatoirement non homogènes* (Besançon, Cedex, France: Les Editions de Physique, 1985).
10. Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980).
11. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидродинамика* (М.: Наука, 1965, ч. I; 1967, ч. II).
12. Furutsu K. *J. Res. NBS D* **667**, 303 (1963).
13. Новиков Е.А. *ЖЭТФ* **47**, 1919 (1964).
14. Donsker M.D. *Proc. Conference on Theory and Applications of Analysis in Functional Space* (The M.I.T. Press, 1964), p. 17; перевод: *Математика* **11**, 128 (1967).
15. Самохин А.А., Чечеткин В.Р. *Изв. АН СССР. Сер. Физика атм. и океана* **27** (6), 621 (1991).
16. Лутовинов В.С., Чечеткин В.Р. *Изв. АН СССР. Сер. Физика атм. и океана* **25** (3), 266 (1989).
17. Шапиро В.Е., Логинов В.М. *Динамические системы при случайных воздействиях* (Новосибирск: Наука, 1983).
18. Кляцкин В.И., Татарский В.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **14**, 1400 (1972).
19. Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J.V. *J. Stat. Phys.* **71**, 235 (1993).
20. Вайнштейн С.И., Рузмайкин А.А., Зельдович Я.Б. *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980).
21. Lipscombe J.T., Frenkel A.L., ter Haar D. *J. Stat. Phys.* **63**, 305 (1991).
22. Klyatskin V.I. *Lect. Appl. Math.* **27**, 447 (1991).

23. Должанский Ф.В., Кляцкин В.И., Обухов А.М., Чусов М.А. *Нелинейные системы гидродинамического типа* (М.: Наука, 1974).
24. Гледзер Е.В., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применения* (М.: Наука, 1981).
25. Csanady G.T. *Turbulent Diffusion in the Environment* (Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1980).
26. Zambianchi E., Griffa A. *Preprint* (1993).
27. Crisanti A., Vulpiani A. *J. Stat. Phys.* **70**, 197 (1993).
28. Saichev A.I. *Dynamics of Systems* **1**, 1 (1993).
29. Кляцкин В.И., Саичев А.И. *УФН* **162** (3), 161 (1992).
30. Sinai Ya.G., Yakhot V. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1962 (1989).
31. Chen H., Chen S., Kraichnan R.H. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 265 (1989).
32. Kimura Y., Kraichnan R.H. *Phys. Fluids A* **5**, 2264 (1993).

STATISTICAL DESCRIPTION OF THE DIFFUSION OF TRACERS IN A RANDOM VELOCITY FIELD

V.I. Klyatskin
Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences
3, Pyzhevskii Pereulok, 109017, Moscow, Russia
Tel. (095) 233-4876,
Pacific Institute of Oceanology, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences
43, Ulitsa Baltiiskaya, 690041, Vladivostok, Russia

A single functional approach is used to treat the problem of the diffusion of tracers in a random velocity field posed in a general form. Approximate methods leading to various approximations and the conditions of their validity are discussed. Plane parallel average flow is considered in detail and some features of statistical solutions for the simplest case of it are discussed.

Bibliography — 32 references

Received 15 January 1994