

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Динамика и информация

Б.Б. Кадомцев

Статья посвящена обсуждению вопросов динамического и информационного аспектов поведения сложных физических систем. В классической физике информационная связь появляется при взаимодействии сложных нелинейных систем со стохастическим поведением, когда малое внешнее воздействие может приводить к сильному изменению траектории классической системы в фазовом пространстве. В квантовых системах информационная связь с окружением проявляется в процессах измерения, когда у квантового объекта происходит разрушение когерентности волновой функции, а во внешнем окружении появляется соответствующая информация. Такие процессы можно описать в терминах коллапсов волновых функций. В статье рассмотрены многочисленные примеры коллапсов, приводящих, в частности, к классическому поведению макротел при их информационной связи с неравновесным окружением. В статье подробно обсуждается парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена и его возможная роль в процессах передачи информации на расстояние.

PACS numbers: 03.30.+p, 03.65.Bz, 05.45.+b, 05.70.Ln, 31.50.+w, 89.70.+c

Содержание

Введение (449).

1. Информация (450).
2. Энтропия (451).
3. Цикл Карно (452).
4. Необратимые процессы (453).
5. Энтропия и информация (454).
6. Энтропия еще раз (455).
7. Управление (456).
8. Газодинамика (457).
9. Волны (457).
10. Корреляционная функция (460).
11. Уравнение Шрёдингера (460).
12. Частица в термостате (461).
13. Дуализм волна—частица (462).
14. Радиоактивный распад (464).
15. Кот Шрёдингера (466).
16. Необратимость нашего окружения (466).
17. Кто бросает кости? (467).
18. Броуновское движение (468).
19. Микромир и макромир (470).
20. Поведение микрочастицы (471).
21. Восприятие (474).
22. Флуктуации и необратимость (476).
23. Измерение в квантовой теории (481).

24. Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена (486).
 25. Неравенства Белла (487).
 26. Квантовая криптография (488).
 27. Случайная волновая функция (489).
 28. Мезомир (491).
 29. Коллапсы волновых функций (495).
 30. Вторичное квантование (499).
 31. Молекулярный хаос (501).
 32. Конвекция (504).
 33. Самоорганизация (507).
 34. Приближение к равновесию и коллапсы (509).
 35. Эффект Соколова (511).
 36. Квантовый телеграф (515).
 37. Сверхсветовая коммуникация (516).
 38. Настоящее, прошлое, будущее (519).
 39. Свобода воли (522).
 40. Иерархические системы (524).
- Заключение (526).
Список литературы (529).

Введение

Все мы привыкли к тому, что основные разделы физики построены на принципах динамики. Все начинается с механики материальной точки и с законов Ньютона, которые вводят основные динамические понятия: массу, скорость, импульс и силу. Теоретическая механика всего лишь оформляет элементарные законы механики в более пышные одежды дифференциальных уравнений и вариационных принципов. На базе простейших законов движения материальной точки строятся более сложные уравнения движения сплошных сред: газов, жидкостей и упругих тел. Здесь впервые появляются непрерывные функции координат и времени, играющие роль полей, хотя собственно полями

Б.Б. Кадомцев. Российский Научный центр "Курчатовский институт", Институт ядерного синтеза, 123182, Москва, пл. Курчатова, 46
Тел. (095) 196-98-14
Факс (095) 190-42-44
E-mail: postmaster@ufn.msk.su

Статья поступила 28 декабря 1993 г.

принято считать поля в вакууме, например электромагнитное поле. Уравнения для полей — это тоже уравнения динамики. Термодинамика только на первый взгляд кажется феноменологической наукой, а в действительности она может быть построена на базе статистической физики, представляющей собой лишь специфическую разновидность динамики. Тот факт, что физика строится на принципах динамики, проявляется и в основных физических единицах измерения (например, сантиметр, грамм, секунда), которые изначально вводятся в механике материальной точки, а затем переносятся в другие, более сложные разделы физики.

Нечто, совсем не похожее на динамику, появляется в квантовой теории при интерпретации квадрата волновой функции как соответствующей вероятности. Вероятность здесь выходит на первый план как существенный элемент теории, и до сих пор не прекращаются дискуссии о смысле волновой функции и описываемой ею эволюции вероятностей наблюдения за той или иной физической величиной. Вслед за А. Эйнштейном хотелось бы считать, что квантовая вероятность соответствует неполноте описания микрообъекта и что может существовать более точная теория, которая объяснит случайность наблюдаемых величин на базе динамики некоторых скрытых параметров. Однако в последние годы было убедительно показано, что локального реализма (т.е. локальных скрытых параметров) нет. Следовательно, квантовая вероятность, как это подчеркивалось Н. Бором, носит более глубокий характер, она придает волновой функции своеобразные черты, имеющие информационный характер.

Математически точное определение величины информации появилось вместе с рождением кибернетики — науки об управлении и автоматизации динамических процессов. А именно, если некоторая физическая величина может а priori принимать несколько значений, то наблюдение одного из этих значений сразу увеличивает информацию об этой физической величине. Если у автомата имеется достаточное количество энергии, то после получения информации он может изменить значение физической величины в нужную сторону.

Сигнал о значении измеряемой величины может быть сколь угодно мал. Сигнал управления также может быть очень мал, если он подается на достаточно мощный усилитель.

Таким образом, для управления важна не величина сигнала, а его форма, т.е. смысловое содержание. Можно сказать, что при взаимодействии автоматов важен не столько обмен энергией, сколько обмен символами (т.е. сигналами).

Но эти утверждения относятся не только к искусственно созданным автоматам, но и к естественным физическим системам, находящимся на границе устойчивости. Малые сигналы, действующие на такие системы, могут приводить к существенным последствиям. Речь фактически идет об открытых физических системах, через которые могут протекать большие потоки энергии. Такие системы, будучи сильно неравновесными, обнаруживают сложное динамическое поведение. Их обычно так и называют — сложные физические системы.

Для описания сложных физических систем оба аспекта — динамический и информационный — могут играть одинаково важную роль. Мы приходим к про-

блеме совместного воздействия на систему сил и информации в условиях сильного отклонения от термодинамического равновесия. Оказывается, что игра нелинейных динамических процессов в таких системах очень часто приводит к самоорганизации, когда и динамическое, и информационное содержание процесса оказываются согласованными с большой точностью и складываются в единый "организм".

Все эти вопросы актуальны для современной физики, составляя мощный ее пласт. Здесь мы хотели бы познакомить читателя с наиболее интересными идеями и направлениями исследований в этой области. Изложение намеренно построено на популярном уровне, и очень часто строгость приносилась в жертву живости аргументации. Соответственно, статья выглядит, скорее, как набор размышлений на базе тех физических представлений, которые сами по себе служат предметом серьезных книг и монографий, но которые трудно было бы вместить в один единый текст, не идя умышленно на сильное упрощение стиля изложения. Наряду со многими хорошо известными фактами и их теоретическими трактовками статья содержит некоторые новые, подчас непривычные рассуждения. Кому-то они могут показаться неубедительными, а подчас и просто неправильными. Но я рекомендую читателям не делать поспешные суждения: некоторые вопросы обсуждаются повторно или даже несколько раз с несколько иных точек зрения, и убедительность соответствующих выводов становится все больше и больше. Впрочем, возможно, читатель не согласится с частью моих рассуждений, и я буду рад, если при этом у него возникнет желание более глубоко разобраться в обсуждаемых вопросах и составить свои собственные суждения о данном предмете.

Список литературы, к сожалению, никак не может претендовать на полноту: в нем приведены ссылки только на те статьи и книги, которые естественно возникали по мере изложения. Извинением мне служит лишь то обстоятельство, что и само изложение не является достаточно фундаментальным.

1. Информация

В наш век, когда потоки информации обрушиваются на нас буквально со всех сторон, казалось бы нет нужды объяснять, что такое информация. Однако это не совсем так. Существует точное математическое определение объема информации, и для тех, кто раньше с этим понятием не встречался, мы постараемся не спеша, шаг за шагом объяснить, что это такое.

Самый привычный вид информации — это печатное слово. Например, текст, который Вы читаете, дает Вам возможность воспринимать информацию, заложенную в эту статью. Она содержится в символах, расположенных построчно: это буквы, пробелы между словами, знаки препинания. Представляется совершенно очевидным, что чем больше страниц текста, тем большее количество информации содержится в этом тексте. Но чтобы определить объем информации в виде конкретного числа, удобно начать с очень упрощенного примера. Допустим, что наш текст передается с помощью азбуки Морзе, когда каждой букве сопоставляется некоторый набор точек и тире. Более того, рассмотрим упрощенный случай, когда текст идет подряд без всяких промежутков

между буквами и словами. Тогда мы увидим одну сплошную ленту только из точек и тире. В каждой позиции может быть только один из двух символов: либо точка, либо тире. Когда имеется только один из двух вариантов символов, то принято говорить, что каждая из ячеек имеет один бит информации. Вся лента Морзе, имеющая N символов, содержит N бит информации. Можно сказать, что такая лента "запомнила" определенный текст, и в каждой из ее N "ячеек памяти" заложен один бит информации. Полное количество различных текстов, которые можно записать на ленте из N ячеек, равно, очевидно, 2^N .

Если мы условимся измерять объем информации в битах, то для соответствующей величины информации I_B можно записать [20] соотношение

$$I_B \equiv N \equiv \log_2 M_N. \quad (1)$$

Здесь \log_2 — это логарифм при основании 2, а $M_N = 2^N$ — полное число различных текстов. Согласно (1) объем информации равен просто минимальному числу двоичных ячеек, с помощью которых эту информацию можно записать.

Соотношение (1) можно представить в несколько ином виде. А именно, если у нас имеется множество M_N различных текстов, вероятность P_N того, что читаемый нами текст совпадет с наугад выбранным из M_N различных текстов, равно, очевидно, $P_N = 1/M_N$. Поэтому вместо (1) можно использовать выражение

$$I_B = -\log_2 P_N. \quad (2)$$

Чем больше N , тем меньше величина P_N и тем больше объем информации I_B , содержащейся в данном конкретном тексте.

Вернемся теперь к обычному буквенному тексту. Пусть число букв алфавита равно 32 (как, например, в русском алфавите без буквы ё). Число $32 = 2^5$, и, следовательно, достаточно иметь пять двоичных ячеек, чтобы каждой букве сопоставить одну единственную комбинацию, например, из точек и тире. Если к строчным буквам добавить еще прописные, то число букв удвоится до 64 и потребуется еще один бит информации, тогда объем информации на одну букву, строчную или заглавную, станет равным $I_B = 6$. Добавление интервалов между словами и знаков препинаний дополнительно увеличивает величину информации, приходящейся на один знак текста.

Однако такой прямой подсчет объема информации на один знак не вполне точен. Дело в том, что в алфавите имеются буквы, которые встречаются в тексте крайне редко. В азбуке Морзе на такие буквы можно истратить больше точек и тире, а на часто используемых буквах можно, наоборот, сэкономить, сопоставляя им более короткие "отрезки" ленты. Точное определение количества информации было установлено Шэнноном [21]. Оно выглядит следующим образом:

$$I = -\sum_i p_i \ln p_i. \quad (3)$$

Здесь суммирование проводится по всем символам, а p_i означает вероятность появления символа с номером i . Общее выражение (3) охватывает и часто используемые буквы, и те буквы, у которых вероятность появления в

тексте очень мала. В выражении (3) используется натуральный логарифм: соответствующую ему единицу информации называют "нат".

Как известно из теории вероятностей, для случайной величины x_i можно ввести определение среднего значения, или математического ожидания, по формуле

$$\langle x_i \rangle = \sum p_i x_i, \quad (4)$$

где суммирование производится по всем возможным реализациям случайной величины x_i с вероятностью p_i для i -й реализации. Как мы видим, выражение (3) можно записать также в виде

$$I = -\langle \ln p_i \rangle. \quad (5)$$

Если речь снова идет о тексте, а величина I относится к одной ячейке текста, т.е. к одному знаку, то p_i — это вероятность появления символа с номером " i ". Например, если это буква "а", то соответствующую вероятность можно найти, подсчитывая, сколько раз буква "а" встречается на одной странице, и деля полученное число на полное число знаков на одной странице.

Если известна величина информации (3), относящаяся к одному знаку, то для текста из N знаков эту информацию следует увеличить просто в N раз. Разумеется, формулой (3) можно пользоваться и для всего текста. При этом вероятности p_i существенно меньше, поскольку резко возрастает число возможных комбинаций, а результат останется тем же: информацию одного знака нужно умножить на N .

В формулах (2) и (3) используются логарифмы при разных основаниях: в (2) — это логарифм при основании 2, а в (3) — натуральный логарифм. Поскольку для любого числа N справедливы соотношения $N = 2^{\log_2 N} = e^{\ln N}$, то имеем

$$I_B = \frac{I}{\ln 2} \cong 1,44I. \quad (6)$$

Другими словами, число бит почти в полтора раза больше числа нат.

Как мы увидим ниже, для рассуждений в физике (а не в компьютерной технике) удобнее пользоваться информацией по Шэннону (3), т.е. измерять ее в натах. При желании с помощью (6) можно найти затем число бит, отвечающих заданной величине I . Информация по Шэннону (3) может использоваться не только для текста, но и для любой другой дискретной (цифровой) информации. Например, черно-белое изображение на телевизоре можно разложить на множество дискретных точек белого и черного цветов, а также нескольких промежуточных серых оттенков. Тогда величина (3) определит объем информации для данного мгновенного изображения на экране. Аналогичное определение годится также для цветного изображения на экране телевизора или для бумажного отпечатка из-под принтера, если соответственным образом учесть информацию цветового оттенка.

Как мы увидим ниже, информация (3) играет большую роль в физических неравновесных процессах. Подчеркнем, что речь идет именно о числовом выражении объема информации безотносительно к его смысловому содержанию.

2. Энтропия

Понятие энтропии — это одно из фундаментальных понятий физики. По-видимому, читатель уже знает, что это такое. Тем не менее, чтобы не нарушать связности и последовательности изложения, мы на некоторое время задержимся на разъяснении этой физической величины. При этом нам удобно будет использовать самый простой физический объект, а именно, идеальный газ.

Пусть одноатомный идеальный газ с плотностью частиц n и температурой T занимает объем V . Температуру T мы будем измерять в энергетических единицах, например в эргах, если используется система единиц СГС — сантиметр, грамм, секунда. Соответственно, в наших соотношениях не будет фигурировать постоянная Больцмана. Каждый атом газа имеет среднюю кинетическую энергию теплового движения, равную $3T/2$. Поэтому полная тепловая энергия газа равна

$$E = \frac{3}{2} TnV. \quad (7)$$

Как известно, давление газа равно $p = nT$. Если газ может обмениваться теплом с внешней средой, то закон сохранения энергии газа выглядит как соотношение

$$dE = -p dV + dQ. \quad (8)$$

Таким образом, изменение внутренней энергии газа может происходить как за счет совершаемой им работы, так и вследствие поступления некоторого количества тепла dQ извне. Уравнение (8), как известно, выражает собой первый закон термодинамики, т.е. закон сохранения энергии. При этом предполагается, что газ находится в равновесии, т.е. $p = \text{const}$ по всему объему газа.

Если допустить еще, что газ находится в полном термодинамическом равновесии, $T = \text{const}$, то соотношение (8) можно рассматривать как элементарный процесс вариации параметров газа при их очень медленном изменении, когда термодинамическое равновесие не нарушается. Именно для таких процессов и вводится понятие энтропии S с помощью соотношения

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (9)$$

Другими словами, утверждается, что у равновесного газа кроме внутренней энергии есть еще одна важная внутренняя характеристика, связанная с тепловым движением его атомов. Согласно (8), (9) при постоянном объеме $dV = 0$, изменение энергии пропорционально изменению энтропии, а в общем случае

$$dE = -p dV + T dS. \quad (10)$$

Так как $p = (N/V)T$, $E = (3/2)NT$, где $N = nV = \text{const}$ есть полное количество атомов рассматриваемого газа, то соотношение (10) можно записать в виде

$$dS = N \left(\frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right). \quad (11)$$

Отсюда интегрированием (11) немедленно получаем

$$S = N \left[\ln(VT^{3/2}) + \text{const} \right] \equiv Ns. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования мы сохранили здесь на всякий случай, чтобы оставить себе некоторую дополнительную свободу в дальнейших рассуждениях. Как мы видим, энтропия газа пропорциональна числу частиц, и выражение в квадратных скобках, равное s , представляет собой энтропию, приходящуюся на одну частицу.

Если объем и температура газа изменяются таким образом, что $VT^{3/2}$ остается постоянным, то и энтропия S не изменяется. Согласно (9) это означает, что газ не обменивается теплом с внешней средой, т.е. газ отделен от нее надежными теплоизолирующими стенками. Такой процесс получил название адиабатического. В адиабатическом процессе

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (13)$$

где $\gamma = 5/3$ называется показателем адиабаты. Это соотношение получается из условия $VT^{3/2} = \text{const}$ и соотношения $p = nT$. Как мы видим, при адиабатическом процессе температура и давление изменяются с плотностью по закону

$$T = \text{const} \cdot n^{\gamma-1}, \quad p = \text{const} \cdot n^\gamma. \quad (14)$$

3. Цикл Карно

В дальнейших рассуждениях нам довольно часто придется прибегать к так называемым мысленным экспериментам с различного рода идеальными процессами и идеальными устройствами. В термодинамике основным из таких идеальных устройств является тепловая машина Карно, которая позволяет совершать работу за счет тепловой энергии.

Допустим, что имеется два термостата при разных температурах T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$. Первый термостат можно назвать нагревателем, а второй — холодильником. Согласно Карно идеальный газ может быть использован как рабочее тело для производства работы за счет тепловой энергии. Допустим, что при температуре T_1 объем газа равен V_1 , а давление $p = p_1 = (N/V_1)T_1$. Здесь N — полное число частиц. С помощью адиабатического обратимого процесса рабочий газ можно охладить до температуры T_2 , поскольку согласно (14) температура газа понижается при его расширении как $T \sim V^{-\gamma+1}$. При $\gamma = 5/3$ имеем $T \sim V^{-2/3}$. Таким образом, при $V_2/V_1 = (T_2/T_1)^{-3/2}$ газ в первом состоянии имеет температуру T_1 , а во втором — T_2 с адиабатическим переходом от одного состояния к другому. При адиабатическом расширении газа от начального объема V_1 к конечному объему V_2 газ совершает работу $W = \int p dV$. Поскольку согласно (13) давление изменяется пропорционально $V^{-\gamma} = V^{-5/3}$, т.е.

$$p = \frac{NT_1}{V_1} \left(\frac{V_1}{V} \right)^{5/3},$$

то эта работа равна

$$W = \frac{3}{2} NT_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3} \right] = \frac{3}{2} N(T_1 - T_2). \quad (15)$$

Согласно закону сохранения энергии именно на эту величину и уменьшается внутренняя энергия газа.

Если совершить обратное сжатие газа от объема V_2 до V_1 , то над газом придется совершить работу, равную (15), и энергия газа вновь восстановится. Пока здесь никакого цикла нет: это просто прямой и обратный процессы, ничего не изменяющие во внешнем мире. Цикл возникает, когда рабочее тело получает тепло от нагревателя и отдает его холодильнику. У нагревателя — это изотермическое расширение газа при температуре T_1 от начального объема V_1 до некоторого промежуточного объема V_1^* . Затем газ адиабатически расширяется до конечного объема V_2^* . Так, чтобы конечная температура была равна T_2 , т.е. $V_2^*/V_1^* = (T_2/T_1)^{-3/2}$. После этого газ изотермически сжимается до объема V_2 и адиабатически переводится в исходное состояние. Прямая и обратная работы на адиабатических участках цикла в точности компенсируют друг друга, поскольку согласно (15) работа W определяется только разностью начальной и конечной температур. А вот работы на изотермических участках цикла оказываются разными. В самом деле, если в нагревателе телу сообщается количество теплоты Q_1 , то имеем $Q_1 = T_1(S_* - S)$, где S — начальная энтропия газа, а S_* — ее значение после подогрева. На адиабатических участках энтропия не меняется, так что в холодильнике следует уменьшить энтропию от значения S_* до S_1 , передав газу отрицательное тепло (т.е. отняв тепло), равное $Q_2 = -T_2(S_* - S)$. При этом, поскольку на изотермических участках внутренняя энергия не меняется, разность работ W_1 и W_2 равна $W = W_1 - W_2 = (T_1 - T_2)(S_* - S)$. Теперь можно подсчитать коэффициент полезного действия цикла, равного отношению произведенной работы W к тому количеству тепла Q_1 , которое было получено от нагревателя:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (16)$$

Самой важной особенностью машины Карно является ее полная обратимость — пустив машину в обратную сторону, можно создать холодильную машину, осуществляющую перенос тепла от горячего тела к холодному за счет производимой извне работы.

Именно это обстоятельство в сочетании со вторым законом термодинамики позволяет утверждать, что (16) представляет собой максимально возможный КПД тепловой машины.

Сам второй закон термодинамики формулируется как невозможность создания вечного двигателя второго рода: нельзя осуществить такой процесс, который позволил бы совершать работу за счет тепла, ничего не изменяя при этом во внешнем мире.

Допустим на момент, что можно создать машину с КПД, большим, чем (16). Тогда такую машину можно было бы состыковать с машиной Карно в холодильном режиме. Такая комбинация машин позволила бы просто выкачивать тепловую энергию и превращать ее в работу, а это запрещено вторым началом термодинамики. Следовательно, выражение (16) представляет собой максимально возможную величину КПД для любой тепловой машины. Любопытно задаться вопросом, а что производит во внешнем мире сам цикл Карно? Машина Карно за один цикл получает энергию Q_1 от нагревателя при температуре T_1 и тем самым забирает у внешнего мира энтропию Q_1/T_1 . Затем она передает тепло Q_2 холодильнику при температуре T_2 и передает

энтропию Q_2/T_2 . Таким образом, полное изменение энтропий, вносимое машиной Карно, равно

$$\Delta S = Q_1 T_1^{-1} - Q_2 T_2^{-1} = 0, \quad (17)$$

если учесть выражения для Q_1 и Q_2 . Как мы видим, машина Карно, будучи полностью обратимой, не меняет энтропию внешнего мира, хотя и переводит часть тепла в механическую работу. При этом тепло, тем не менее, перетекает от горячего тела к холодному.

4. Необратимые процессы

Цикл Карно — это идеальный мысленный полностью обратимый процесс. Все реальные тепловые машины работают с необратимыми процессами, и поэтому желательно понять, в чем смысл такой необратимости. При этом удобно все же стартовать с машины Карно.

В цикле Карно есть адиабатические и изотермические участки. Что касается адиабатического процесса сжатия или разрежения газа, его довольно легко представить себе очень близким к обратимому. Для этого достаточно лишь иметь скорости сжатия и разрежения, значительно меньшие скорости звука, и создать достаточно хорошую теплоизоляцию, которая сама по себе обеспечивается при больших размерах газового объема. Гораздо хуже обстоит дело с изотермическими участками — ведь в них нужно обеспечить теплоприток или теплоотток. Если на этих участках поспешить, то можно сильно потерять в КПД, поскольку у газа не будет возможности полностью реализовать всю амплитуду нагрева до температуры T_1 и охлаждения до температуры T_2 . В пределе очень быстрых тепловых колебаний можно потерять всю работу, способствуя лишь более быстрому перетоку тепла от горячего тела к холодному.

Давайте более подробно рассмотрим необратимый процесс перетока тепла за счет теплопроводности. А именно, пусть имеется стенка или просто стержень длиной L с температурами на концах T_1 и T_2 . Если теплопроводность стержня равна κ , то вдоль стержня перетекает тепловой поток

$$q = \kappa \frac{T_1 - T_2}{L}. \quad (18)$$

Соответственно, через каждое поперечное сечение стержня протекает поток энтропии, равный $q_S = q/T$. Если температура линейно зависит от координаты x :

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)x}{L}, \quad (19)$$

то поток энтропии, как функция x , равен

$$q_S = \frac{qL}{(L - x)T_1 + T_2x}. \quad (20)$$

Этот поток возрастает вдоль стержня при движении от теплого торца, $T = T_1$, к холодному, $T = T_2$. Как мы видим, на холодном торце поток энтропии в T_1/T_2 раз больше, чем на горячем торце. Другими словами, внутри стержня производится избыточная энтропия, которая вытекает затем в сторону холодильника. В дополнение к входящему в стержень в единицу времени потоку энтропии q/T_1 внутри стержня производится энтропия и после этого наружу выбрасывается больший поток q/T_2 .

Вспомним, что машина Карно совершала работу $W = \eta q_1 = [1 - (T_2/T_1)]q_1$, где q_1 — входящий поток. Стало быть, выходящий поток $q_2 = q_1 - W = (T_2/T_1)q_1$ у машины Карно соответствовал отсутствию внутреннего рождения энтропии. А если КПД будет меньше, то тепловая машина будет производить энтропию, равную

$$\frac{q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} = \frac{1}{T_2}(q_1 - \eta q_1) - \frac{q_1}{T_1} = \frac{q_1}{T_2}(\eta_C - \eta). \quad (21)$$

Здесь $\eta_C = 1 - (T_2/T_1)$ — коэффициент полезного действия цикла Карно, а η — реальный коэффициент полезного действия. Если $\eta = 0$, то работа не совершается, $W = 0$, и $q_2 = q_1 = q$. В этом случае чистый тепловой поток, не производя никакой работы, "занимается" просто тепловым "загрязнением" среды, производя в ней энтропию с темпом

$$q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Итак, тепловой поток сам по себе приводит к тому, что энтропия среды возрастает, и этот процесс будет продолжаться вплоть до полного выравнивания температур горячего и холодного тел.

5. Энтропия и информация

Действуя в духе идеальных мысленных экспериментов, рассмотрим теперь случай, когда весь наш идеальный газ состоит только из одной частицы. Поначалу кажется, что это абсолютно абсурдный подход, но не будем слишком поспешны в своих суждениях. Если одна частица заключена в сосуде объемом V со стенками, находящимися при температуре T , то рано или поздно она придет в равновесие с этими стенками. В каждый момент времени она, разумеется, находится в одной определенной точке пространства и имеет вполне определенную скорость. Однако мы можем условиться проводить все процессы настолько медленно, что частица не только успеет в среднем заполнить все пространство объема V , но и сможет многократно поменять величину и направление скорости при неупругих столкновениях со стенками сосуда. В этом случае можно говорить о частице, имеющей максвелловское распределение по скоростям и в среднем равномерно заполняющей сосуд. Здесь очень важным является условие, что мы ничего не хотим знать о частице кроме того, что она соударяется со стенками и оказывает на них среднее давление и что ее распределение по скоростям является максвелловским с температурой T .

Теперь мы можем, например, адиабатически сжимать эту частицу, и в среднем ее действие на стенки будет в точности таким же, как у N частиц, но только в N раз меньшими. Не спеша можно изменять и температуру частицы, соответствующим образом меняя температуру стенок сосуда и давая возможность частице прийти в тепловое равновесие со стенками.

Среднее давление одной частицы на стенку при $N = 1$ равно, очевидно, $p = T/V$, а средняя плотность $n = 1/V$. Для этой частицы мы опять можем организовать цикл Карно и тем самым создать идеальную тепловую микромашину, полностью обратимую и имеющую КПД $\eta = 1 - (T_2/T_1)$. Теперь с помощью некоторых идеаль-

ных устройств и с привлечением второго начала термодинамики мы постараемся установить связь между энтропией и информацией. Начнем с самого простого случая изотермических процессов. Итак, положим $T = \text{const}$. С помощью первого начала термодинамики при $T = \text{const}$ и соотношения $p = T/V$ получаем

$$T dS = p dV = T \frac{dV}{V}. \quad (22)$$

Здесь следовало бы использовать малую букву s для удельной энтропии, но мы сохранили обозначение S , чтобы перейти затем к более общим соотношениям.

Отсюда находим, что изменение энтропии не зависит от величины T , так что можно положить

$$S = \ln \frac{V}{V_0}. \quad (23)$$

Здесь небольшой объем $V_0 \ll V$ мы вели намеренно просто для нормировки: величина V_0 должна быть заметно больше размера частицы, чтобы не нарушалось приближение идеального газа.

Работа изотермического процесса тоже выглядит довольно просто

$$W = \int p dV = T \int \frac{dV}{V} = T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (24)$$

Как мы видим, $W = T(S_2 - S_1)$, т.е. работа выражается просто через разность соответствующих энтропий. Подчеркнем еще раз, что мы имеем в виду очень медленный полностью обратимый процесс.

Продолжим наши идеальные мысленные эксперименты. Допустим, что у нас есть идеальные перегородки, которыми мы можем делить сосуд на части без затраты энергии или рождения новой энтропии. Разделим наш сосуд на две равные части с объемом $V/2$ каждая. Частица при этом остается в одной из половин, но в какой из них, мы пока не знаем. Допустим теперь, что у нас имеется средство или некоторый измерительный прибор, с помощью которого можно определить, где именно находится частица. Например, мы смогли бы обнаружить ее в одной из половин с помощью пружинных весов в поле силы тяжести или просто по факту исчезновения давления на перегородку со стороны пустого полуобъема. Если это так, то из начального симметричного распределения вероятностей 50 % на 50 % нахождения в двух половинах мы получим вероятность 100 % для одной из половин. Происходит как бы "стягивание", или "коллапс", распределения вероятностей. Соответственно, и новая энтропия $S_2 = \ln(V/2V_0)$ оказывается меньше исходной энтропии на величину $\Delta S = \ln 2$. За счет уменьшения энтропии можно совершить механическую работу. Для этого достаточно сдвигать перегородку в сторону пустого объема вплоть до полного его исчезновения, когда частица вновь займет полный объем. Соответствующая работа равна $W = T\Delta S = T \ln 2$. Если при этом во внешнем мире ничего бы больше не менялось, то повторяя эти циклы, можно построить вечный двигатель второго рода. Но поскольку второй закон термодинамики запрещает получение работы просто за счет тепла, то во внешнем мире должно что-то происходить. Что же происходит еще? Обнаружение частицы в одной из половин меняет

информацию о частице. А именно, из двух возможных половинок указывается только одна, в которой находится частица. Это знание соответствует в точности одному биту информации. Процесс измерения уменьшает энтропию частицы и ровно настолько же увеличивает информацию измерительного прибора. Если совершать повторные деления пополам полученных ранее половинок, четвертушек, восьмушек и т.д., то энтропия будет последовательно уменьшаться, а информация увеличиваться. Другими словами,

$$S + I = \text{const.} \quad (25)$$

Чем больше известно о частице, или в более общем случае о физической системе, тем меньше ее энтропия.

Но теперь мы можем сделать вывод, что появление информации во внешнем мире (или внешних приборах) невозможно без возрастания энтропии внешнего окружения на величину, не меньшую ΔI . В противном случае с помощью нашей обратимой тепловой микромашинки можно было бы черпать энергию прямо из тепловой энергии. Другими словами, информация, т.е. определенная порция порядка, может быть усвоена внешними приборами, автоматами или просто внешним миром только за счет появления во внешнем окружении дополнительного беспорядка (теплового движения) с возрастанием энтропии не меньшим, чем усвоено информации.

Внешний прибор или среду, которая воспринимает информацию и может ее использовать для последующих действий, можно условно назвать демоном Максвелла. Именно для сходной ситуации Максвелл и придумал своего демона: если демон может отличать горячие частицы от холодных, то с помощью перекрытия отверстия заслонкой он сможет перекачать тепло от холодного газа к горячему. Приведенные здесь рассуждения аналогичны демону Максвелла. Они опираются на универсальный второй закон термодинамики. Именно второе начало термодинамики требует, чтобы демон сам увеличивал энтропию в процессе "трудов тяжких" по распознаванию информации I .

Согласно (25) сумма S и I постоянна. Если в нашей модели частицу удастся поместить в элементарную ячейку объема V_0 , то при этом $S = 0$, а информация достигает своего максимального значения $I_{\text{max}} = -\ln p_{\text{min}} = \ln(V/V_0)$, поскольку вероятность p_{min} найти частицу в данной ячейке равна отношению объемов: $p_{\text{min}} = V_0/V$. Для того чтобы зафиксировать частицу в элементарном объеме, т.е. усвоить информацию $I = \ln(V/V_0)$, потребуется произвести не меньшее количество энтропии в приборе или за его пределами. Если в последующем частица начнет заполнять (в среднем) больший объем, информация будет постепенно утрачиваться, а энтропия частицы возрастать.

Еще раз подчеркнем, что за информацию приходится "платить" увеличением энтропии S_e внешних систем, причем $\Delta S_e \geq I$. В самом деле, если бы за один бит информации прибор увеличивал бы свою энтропию на величину ΔS_e , меньшую одного бита, то мы могли бы обратить тепловую машину. А именно, расширяя полувобъем, занятый частицей, мы увеличили бы ее энтропию на величину $\ln 2$, получая работу $T \ln 2$, а суммарная энтропия системы частица плюс прибор уменьшилась бы. Но это невозможно по второму закону термодинамики.

До сих пор мы рассуждали об энтропии, связанной с пространственной локализацией частицы. Но то же самое рассуждение можно повторить и в отношении измерения скорости. Удобно выбрать случай только одного измерения, например движения только по оси x .

Допустим, что у нас имеется прибор, который может измерять x -компоненту скорости частиц u с точностью Δu . Удобно считать, что Δu пропорциональна u , чтобы ввести некоторое единообразие в последующих оценках. Допустим, что в трубу длиной L вдоль оси x влетает частица со скоростью u , и на влете ее скорость измеряется с точностью Δu . Выждав время $t = L/u$, можно ввести заслонку на расстоянии $\Delta L \sim L \Delta u/u$ от закрытого торца и запереть там частицу. Мерой локализации служит величина $\Delta L/L$, примерно одна и та же для всех частиц максвелловского распределения. Такая локализация вновь уменьшает энтропию на величину $\ln(L/\Delta L)$, и в соответствии со вторым законом термодинамики она обязательно должна сопровождаться возрастанием энтропии в приборе, измеряющем скорость частицы. Другими словами, любое измерение, которое увеличивает информацию о частице, должно обязательно сопровождаться увеличением энтропии прибора или окружения. Это своеобразная "плата за знание" (более подробно см. в [22—25]).

6. Энтропия еще раз

Соотношение (25) наводит на мысль, что энтропия физической системы связана каким-то образом с распределением вероятностей. И это на самом деле так, что подробно излагается в книгах и учебниках по статистической физике. Мы здесь кратко познакомим читателя с этим вопросом опять-таки на самом простом примере идеального газа.

В статистической физике существует знаменитая формула Больцмана — энтропия равна логарифму числа состояний Γ , которые может принимать данная физическая система:

$$S = \ln \Gamma. \quad (26)$$

Отметим еще раз, что мы используем здесь энергетические единицы для измерения температуры, и поэтому в приведенной формуле отсутствует постоянная Больцмана. Γ — это число возможных микроскопических состояний, которые отвечают одному и тому же макроскопическому состоянию. Предполагается, что при тепловом движении система пробегает все возможные состояния с примерно одинаковой вероятностью. Соответственно, вероятность p_i отдельного состояния приблизительно равна $p_i \approx 1/\Gamma$. Если вероятности отдельных состояний различаются, то более точное определение для энтропии выглядит следующим образом:

$$S = - \sum_i p_i \ln p_i = -\langle \ln p_i \rangle. \quad (27)$$

Здесь угловые скобки означают математическое ожидание, т.е. среднее значение.

Для идеального газа вероятности p_i распадаются на конфигурационную и скоростную части, т.е. на вероятности распределения по пространству и по скоростям. Число возможных состояний в пространстве объема V для $N \gg 1$ частиц можно опять найти, вводя элементар-

ный объем V_0 . Кажется, что число таких состояний равно просто $(V/V_0)^N$. Однако это не совсем так: атомы газа одинаковы и поэтому их перестановка между собой не создает нового состояния. Поэтому приведенное выше число нужно разделить еще на $N! \cong N^N$, где в формуле Стирлинга для $N!$ сохранен только главный член. Что касается скоростной части Γ , то она равна просто $-N\langle \ln f_0 \rangle$, где f_0 — функция Максвелла для распределения одного из атомов по скоростям:

$$f_0(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}\right). \quad (28)$$

Здесь m — масса атома, \mathbf{v} — вектор скорости. Итак, по формуле (27) получаем для идеального газа

$$S = N \left[\ln \frac{V}{NV_0} + \ln(c_0 T)^{3/2} \right]; \quad (29)$$

здесь $c_0 = 2\pi e/m$ — просто постоянный множитель, появившийся при усреднении $\ln f_0$, e — основание натурального логарифма. В отличие от найденного ранее термодинамического выражения (12), в формуле (29), как мы видим, имеется явное выражение для константы интегрирования, а именно, в формуле (12) $\text{const} = \ln(c_0/NV_0)$.

Формально выражение (3) для информации и (27) для энтропии тождественны между собой. Но они имеют совершенно различный смысл. А именно, информация (3) соответствует одной единственной выборке из огромного, скажем Γ , числа возможных состояний. И мера этой информации есть $I = \ln \Gamma$. Энтропия же соответствует возможности нахождения системы с некоторой вероятностью $1/\Gamma$ в каждом из доступных состояний. Величина $S = \ln \Gamma$ соответствует максимальному "заполнению" всех состояний. Величины I и S оказались формально равными именно потому, что I отвечает максимальной информации только одного состояния, а S определена по множеству всех состояний.

Пусть, например, объем информации I соответствует тексту данной статьи. А энтропия этого текста равна нулю, так как мы имеем только одну фиксированную последовательность написания букв и других типографских знаков и, стало быть, $\Gamma = 1$. Допустим теперь, что весь текст пришел в "тепловое движение", в результате которого буквы начинают быстро перепрыгивать, меняясь местами. Очень скоро вся информация будет полностью потеряна, но зато в тепловом движении будут пробегаться все возможные состояния из общего числа Γ , т.е. $S = \ln \Gamma$. В промежуточном варианте, когда часть текста сохраняется, а другая часть переходит в полностью хаотическое "тепловое движение", мы придем к соотношению (25): $S + I = \text{const}$. Энтропия и информация замкнутой системы оказываются как бы взаимными по отношению друг к другу: "забывание" информации автоматически приводит к увеличению энтропии.

В соответствии со вторым началом термодинамики энтропия замкнутой системы не может убывать со временем. В рассмотренном примере это означает, что граница между "тепловой" и "информационной" частями текста может естественно передвигаться только в одном направлении, а именно, в сторону забывания информации. Новая часть информации, т.е. осмысленное "замораживание" части текста, бывшего в тепловом движении,

может происходить только за счет дополнительного стирания некоторого куска основного текста, если этот процесс происходит без внесения дополнительной информации извне. Порядок может возникать только за счет уничтожения другого порядка (в замкнутой системе).

Из этих рассуждений видно, что вопросы анализа порядка и рождения новой информации требуют, как правило, выхода за пределы некоторой изолированной физической системы. Поэтому основными для нас будут открытые неравновесные системы, к рассмотрению которых мы будем переходить шаг за шагом, от простого к сложному.

7. Управление

В продолжение наших идеальных мысленных экспериментов мы рассмотрим еще одну постановку задачи. Пусть рассматриваемая нами частица совершает броуновское движение на плоскости x, y . Вероятность ее положения на плоскости подчиняется уравнению Фоккера–Планка, которое в простейшем варианте выглядит, как уравнение диффузии:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \Delta p. \quad (30)$$

Здесь $p(x, y, t)$ — плотность вероятности для положения частицы на плоскости, Δ — двумерный лапласиан, D — коэффициент диффузии. Для решения в виде функции точечного источника имеем

$$p = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right). \quad (31)$$

С помощью этого выражения находим выражение для энтропии:

$$s = \int p \ln p \, d\mathbf{r} = \ln(4\pi eDt).$$

Здесь e — основание натуральных логарифмов, при этом мы учли, что величина $\langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt$.

Выберем некоторое значение $t = t_0$, соответствующее локализации частицы, описываемой средним значением $\langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt_0$. Подождем теперь некоторое время $\Delta t = t - t_0$, равное t_0 . За это время энтропия возрастет на величину $\Delta s = \ln 2$. Допустим теперь, что у нас есть устройство, которое может автоматически перемещать кювету с жидкостью, в которой находится броуновская частица. Это устройство может центрировать положение частицы и вновь восстановить ее прежнюю локализацию. Но для этого нужно измерить положение частицы с точностью, не меньшей величины этой локализации. Для восприятия этой информации и для последующего ее использования при перемещении кюветы энтропию прибора следует увеличить на величину, не меньшую $\ln 2$.

Итак, если с помощью этого устройства осуществлять контролируемую локализацию частицы, то можно приостановить рост энтропии самой частицы, но только за счет постоянного рождения энтропии внутри или вне прибора с темпом \dot{s} , не меньшим $\ln 2/t_0$. Диссипация и соответствующая ей необратимость как бы перебрасываются за пределы кюветы с броуновской частицей.

Они переносятся в систему управления положением частицы. А сама частица превращается в открытую систему, из которой постоянно удаляется "шлак" избыточной энтропии, возникающей за счет диссипации. При этом суммарная энтропия частицы и устройства контроля, разумеется, возрастает, но это возрастание происходит где-то вдали от интересующего нас объекта. Данный пример показывает, что рождение энтропии не обязательно должно происходить строго локально, а может осуществляться где-то далеко от рассматриваемой системы.

8. Газодинамика

На первый взгляд кажется, что диссипация должна всегда и неуклонно приближать физическую систему к термодинамическому равновесию. В каком-то смысле это так, но реальные процессы могут быть гораздо сложнее, и это видно на простейшем примере газодинамики.

В общем случае поведение разреженного газа хорошо описывается кинетическим уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \text{St}(f). \quad (32)$$

Здесь f — локальная функция распределения частиц по скоростям, а $\text{St}(f)$ — член столкновений. Именно столкновения и осуществляют приближение к локальному равновесию, т.е. диссипацию. Если столкновения достаточно часты, то функция распределения становится максвелловской:

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right]. \quad (33)$$

Здесь n , T , \mathbf{u} — локальные значения плотности, температуры и средней скорости. Для максвелловской функции распределения имеем полное локальное равновесие, т.е. $\text{St}(f_0) = 0$. Но если n , T , \mathbf{u} являются функциями координат и времени, то левая часть (32) при подстановке $f = f_0$ не обратится автоматически в нуль. Это значит, что полного термодинамического равновесия нет, хотя член столкновений интенсивно пытается это равновесие установить. Нетрудно заметить, что изменение величин n , T , \mathbf{u} во времени должно подчиняться определенным связям, налагаемым самим видом уравнения (32). Дело в том, что член столкновений устроен таким образом, что он сохраняет число частиц, их суммарный импульс и суммарную энергию. Поэтому и левая часть уравнения (32) должна подчиняться этим ограничениям.

Проинтегрируем, например, уравнение (32) по скоростям. Предполагая, что f совпадает с f_0 , получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{nu}) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение непрерывности автоматически учитывает тот факт, что член столкновений не уничтожает и не рождает новых частиц. Если умножить теперь (32) на m и снова проинтегрировать по \mathbf{v} с учетом $f = f_0$, то, принимая во внимание (34), получим уравнение Эйлера

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0, \quad (35)$$

где оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla),$$

а величина $p = nT$ представляет собой локальное давление газа.

Аналогичным образом, умножая (33) на $mv^2/2$ и интегрируя его по скоростям в предположении $f = f_0$, можно с учетом (34), (35) получить соотношение

$$\frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} p \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad (36)$$

где $p = nT$.

Таким образом, вместо уравнения Больцмана мы получили систему уравнений (34) – (36) для двух скалярных и одной векторной величины, а вместо шестимерного фазового пространства оказалось возможным использовать обычное конфигурационное пространство.

Уравнения идеальной газодинамики тем точнее, чем больше $\text{St}(f)$, т.е. чем чаще происходят столкновения между атомами. Математически это означает, что уравнения гидродинамики представляют собой асимптотическую форму уравнения Больцмана при $\text{St} \rightarrow \infty$. Столкновения сами по себе выделили нам набор величин n , T , \mathbf{u} , превратившихся в динамические переменные. Их можно назвать параметрами порядка, поскольку они служат основной характеристикой локального термодинамического равновесия.

Переменные n , T , \mathbf{u} можно рассматривать как гладкие функции координат. Их поведение определяется уравнениями газовой динамики. Разумеется, на фоне этой динамики присутствуют малые термодинамические флуктуации, обязанные дискретной структуре атомарного газа, но не они нам сейчас интересны. Уравнениями газовой динамики, нелинейными по своей структуре, естественно пользоваться для описания таких процессов, когда изменение в пространстве и времени соответствующих динамических переменных n , T , \mathbf{u} существенно превосходит термодинамический фон обычных флуктуаций. Следовательно, мы можем говорить о состояниях и процессах, очень далеких от термодинамического равновесия.

Уравнения газовой динамики представляют собой лишь простейший пример описания физических систем, далеких от равновесия. И в других неравновесных физических системах довольно часто возникают ситуации, когда сами собой возникают некоторые параметры порядка, которые начинают затем играть роль динамических переменных. Наша задача будет заключаться в качественном описании таких динамических систем с учетом роли информационных процессов.

Как мы уже имели возможность убедиться ранее, информационные процессы очень тесно переплетены с диссипативными необратимыми процессами в системах, далеких от термодинамического равновесия. Мы будем разбираться в этих вопросах, по возможности, шаг за шагом, от простого к сложному.

9. Волны

Весьма широкий класс газодинамических процессов составляют течения или колебания газа со скоростями, значительно меньшими скорости звука. Сюда вклю-

чается и собственно звук с малой амплитудой и нежизнеспособные течения с $\text{div } \mathbf{u} = 0$. С последними мы встретимся позднее, а сейчас познакомимся со звуком. Будем считать, что амплитуда колебаний мала, так что отклонения плотности $\tilde{n} = n - n_0$ и давления $\tilde{p} = p - p_0$ от их равновесных значений n_0, p_0 малы. Считая малой также и скорость \mathbf{u} , уравнения газодинамики можно линеаризовать. А решения линейных однородных уравнений всегда можно считать составленными из элементарных решений типа плоских волн $\exp(-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где \mathbf{k} — волновой вектор. Для плоской волны уравнения (34)–(36) примут вид

$$\omega \tilde{n} = n_0 \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad m n_0 \omega \mathbf{u} = \mathbf{k} \tilde{p}, \quad \omega \tilde{p} = \gamma p_0 \mathbf{k} \mathbf{u}. \quad (37)$$

Здесь $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты. Из двух последних уравнений (37) находим

$$\omega^2 - c_s^2 k^2 = 0, \quad (38)$$

где $c_s = (\gamma p_0 / m n_0)^{1/2}$ — скорость звука.

Соотношение (38), связывающее между собой частоту и волновой вектор, называется дисперсионным уравнением. Отметим, что согласно второму из уравнений (37) перемещение среды происходит по направлению волнового вектора. Сравнивая первое и третье уравнения (37), мы видим, что

$$\frac{\tilde{p}}{p_0} = \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}}{n_0}.$$

А так как $p = nT$, то отсюда следует, что при распространении звука возникает возмущение температуры, так что $T/T_0 = (2/3)\tilde{n}/n_0 = (\gamma - 1)\tilde{n}/n_0$. Это вполне естественно, так как давление газа при идеальных звуковых колебаниях изменяется по закону адиабаты.

Найдем теперь выражение для плотности импульса P и плотности энергии ε звуковой волны. Обозначая угловыми скобками усреднение по пространству, получаем во втором приближении по амплитуде колебаний

$$\mathbf{P} = \langle m n \mathbf{u} \rangle = \langle m \tilde{n} \mathbf{u} \rangle = \frac{\mathbf{k}}{\omega} m n_0 \langle u^2 \rangle, \quad (39)$$

где u — компонента скорости вдоль \mathbf{k} .

Здесь мы воспользовались первым соотношением (37), чтобы выразить \tilde{n} через u . Что касается энергии колебаний, то она складывается из кинетической и потенциальной энергий. Потенциальную энергию легко найти, если два последних уравнения (37) записать в виде более простого соотношения

$$\ddot{\xi} = -\alpha \xi, \quad (40)$$

где $\alpha = k^2 c_s^2$, ξ — смещение среды, т.е. $\dot{\xi} = u$, а u — компонента скорости \mathbf{u} по направлению волнового числа (только она и испытывает колебания). Для волны с заданным волновым числом мы имеем просто гармонический осциллятор, а у него средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии. Таким образом, имеем просто

$$\varepsilon = m n_0 \langle u^2 \rangle. \quad (41)$$

Сравнивая между собой выражения (39), (41), мы видим, что имеет место замечательное соотношение

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \varepsilon = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{1}{v_\phi} \varepsilon, \quad (42)$$

где $v_\phi = \omega/k$ есть фазовая скорость волны. Это очень важное соотношение. Оно имеет гораздо более общий характер и относится не только к звуковой волне, но и к любым другим волнам малой амплитуды в изотропных средах. Поясним, что оно означает.

Любую продольную волну можно возбудить силой, которая прикладывается вдоль волнового вектора в резонансе с волной. Пусть эта сила \mathbf{F} , рассчитанная на единицу объема среды, движется с фазовой скоростью v_ϕ . За время t приложенная извне сила приведет к появлению импульса $\mathbf{P} = \mathbf{F}t$. В то же время эта сила совершит работу $W = Fs$, где $s = v_\phi t$ — путь, пройденный точкой волны с одной и той же резонансной фазой. Но по закону сохранения энергии $W = \varepsilon$, так что $\varepsilon = v_\phi P$.

Любопытно рассмотреть, что происходит с волной при движении среды, скажем, со скоростью \mathbf{v}_0 вдоль оси z . В выражении $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, описывающем распространение волны в неподвижной среде, мы должны заменить \mathbf{r} на $\mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t$, и тогда получим новую экспоненту $\exp(-i\omega' t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где

$$\omega' = \omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0 = \omega - k_z v_0. \quad (43)$$

Это хорошо известный доплеровский сдвиг частоты. Вместе с частотой меняется и плотность энергии:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{P} \mathbf{v}_0 = \frac{\omega'}{k} P. \quad (44)$$

Здесь ε — плотность энергии волны в системе координат, движущейся вместе со средой, а ε' — плотность энергии в лабораторной системе. Согласно (44) при $\omega' = 0$ плотность энергии ε' обращается в нуль. Такую волну можно возбуждать без затраты энергии. Для звуковой волны с $\omega = k c_s$ условие $\omega' = 0$ согласно (43) выглядит как

$$\cos \theta \equiv \frac{k_z}{k_0} = \frac{c_s}{v_0}. \quad (45)$$

Это хорошо известное условие черенковского излучения. В случае звуковой волны условие (45) определяет раствор конуса Маха.

При достаточно большой скорости среды частота ω' может оказаться отрицательной. При этом и энергия волны в лабораторной системе координат становится отрицательной: для возбуждения волны потребуются не сообщать энергию среде, а отбирать ее от среды. В этом случае говорят об аномальном эффекте Доплера.

Соотношения для энергии и импульса волны удобно представить несколько в другом виде. Допустим для простоты, что волна распространяется вдоль оси x . Скорость колебаний среды для волны с данным волновым числом k можно представить в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} u_k \exp(-i\omega_k t + i k x) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{-k} \exp(-i\omega_{-k} t - i k x),$$

где u_{-k}, ω_{-k} означают просто соответствующие величины для амплитуды и частоты при множителе s

отрицательным волновым числом $-k$. Но так как u должна быть действительной величиной, то $u_{-k} = u_k^*$, $\omega_{-k} = -\omega_k$. Нетрудно видеть, что среднее по x значение квадрата скорости

$$\langle u^2 \rangle = u_k u_k^* = |u_k|^2.$$

Выберем теперь некоторую определенную точку на оси x , скажем, $x = 0$. Тогда скорость и в этой точке можно представить в виде

$$u = \left(\frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} a_k(f) + \left(\frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} a_k^*(t), \quad (46)$$

где амплитуды a_k , a_k^* (их называют фазорами) даются выражениями

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k \exp(-i\omega_k t), \\ a_k^* &= \left(\frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k^* \exp(-i\omega_k t). \end{aligned} \quad (47)$$

Плотность энергии волны выражается через амплитуды a_k , a_k^* очень простым образом, а именно, $\varepsilon_k = mn_0 \langle u^2 \rangle = \omega_k a_k a_k^*$. Скорость u в точке $x = 0$ можно представить также в виде

$$u_k = \left(\frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} (X_k \cos \omega_k t + Y_k \sin \omega_k t).$$

Коэффициенты X_k , Y_k называются квадратурными компонентами, потому что разность фаз между косинусом и синусом равна $\pi/2$. Нетрудно проверить, что

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k + a_k^*), \quad Y_k = \frac{1}{2i}(a_k - a_k^*).$$

Поскольку плотность импульса P_k выражается через плотность энергии как

$$P_k = \frac{k}{\omega_k} \varepsilon_k,$$

то с помощью амплитуд a_k , a_k^* находим простое выражение для P_k : $P_k = k a_k a_k^*$. Введем теперь вспомогательную функцию $\psi(x, t)$, определяемую соотношением

$$\psi = \left(\frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k \exp(-i\omega_k t + ikx). \quad (48)$$

Нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$\varepsilon = \omega_k |\psi|^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} |\psi|^2. \quad (49)$$

Другими словами, величину $|\psi|^2$ можно интерпретировать как некоторое условное "число волн" в единице объема. Плотность энергии и плотность импульса получаются простым умножением "элементарной энергии" ω_k и "элементарного импульса" \mathbf{k} на условную "плотность волн".

Выражения (49) легко обобщаются на волновые пакеты, когда величина $|\psi|^2$ локализована в некоторой сравнительно широкой области пространства, обращаясь в нуль за пределами этой области.

В этом случае выражение (49) можно проинтегрировать по пространству и получить значения полной энергии и полного импульса для волнового пакета.

Заметим, что соотношения (49) могут быть распространены на любые волны малой амплитуды, поскольку выражение $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega_k)\varepsilon$ является универсальным. Соответственно, значение собственной частоты ω_k в выражении (49) не обязательно должно быть равно $c_s k$, как для звуковой волны, а может определяться соответствующими дисперсионными соотношениями для любой однородной среды.

Согласно дисперсионному уравнению (39) для каждого значения волнового вектора \mathbf{k} можно найти два значения частоты: $\omega = c_s k$ и $\omega = -c_s k$. Соответственно, допускается существование двух волн: одна распространяется вдоль \mathbf{k} , а другая — в противоположном направлении. Для одной из волн дисперсионное уравнение (если корень не кратный) записывается в виде $\omega = \omega_k$, где ω_k — соответствующее собственное значение для частоты. А для суперпозиции таких волн, принадлежащих одной и той же ветви колебаний, мы имеем соотношение

$$\sum_{\mathbf{k}} (\omega - \omega_k) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (50)$$

Здесь $\psi_{\mathbf{k}}$ — это элементарная плоская волна, отвечающая зависимости $\psi_{\mathbf{k}} \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Легко видеть, что

$$\omega = i \frac{\partial}{\partial t},$$

так что для $\psi(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}$ имеем

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \equiv H \psi. \quad (51)$$

Выражение в правой части этого уравнения можно рассматривать как результат действия некоторого оператора H на пространственные координаты функции ψ . Например, для звуковой волны, распространяющейся вдоль x , частота $\omega_{\mathbf{k}} = kc_s$, так что $H = -ic_s \partial/\partial x$. Для других волн выражение для H может быть более сложным. Мы рассмотрим здесь лишь один частный случай, а именно, эволюцию огибающей волнового пакета.

Введем на некоторое время обозначение ψ' для волновой функции (это — самый простой термин для названия ψ'): $\psi' = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}$. Пусть теперь $\psi' = \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$. Здесь $\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}}$ ($k = k_0$) — частота волны с волновым числом $k = k_0$, а функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ играет роль амплитуды, т.е. огибающей волны с заданными $k = k_0$ и $\omega = \omega_0$. Будем считать, что $\psi(\mathbf{r}, t)$ является плавной функцией переменных \mathbf{r}, t . Тогда разложение $\psi(\mathbf{r}, t)$ в сумму гармоник типа $\exp(-i\mathbf{v}t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ будет содержать частоты $v \ll \omega_0$ и волновые векторы $\mathbf{k} \ll \mathbf{k}_0$. Пользуясь этим, воспользуемся разложением $\omega_{\mathbf{k}}$ в ряд Тейлора по $\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$:

$$\omega_{\mathbf{k}} \cong \omega_0 + v_g \kappa_k + \frac{1}{2} v_g' \kappa_k^2 + \frac{1}{2k_0} v_g \kappa_{\perp}^2. \quad (52)$$

Здесь

$$v_g = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k}, \quad v_g' = \frac{\partial v_g}{\partial k} = \frac{\partial^2 \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k^2},$$

а член с κ_{\perp}^2 появился из-за того, что

$$k = (\kappa_x^2 + \kappa_{\perp}^2)^{1/2} \cong k_x + \frac{1}{2k_0} \kappa_{\perp}^2.$$

Если подставить полученные соотношения в (51), то после сокращения на общий фазовый множитель $\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$ получим

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = i v_g \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_0} v_g \Delta_{\perp} \psi. \quad (53)$$

Это уравнение описывает эволюцию огибающей волнового пакета. Оно называется параболическим уравнением Леонтовича. Если пространственные размеры волнового пакета очень велики, то двумя последними членами в правой части (53) можно пренебречь, и тогда волновой пакет просто переносится с групповой скоростью $v_g = \partial \omega_x / \partial k$. Заметим, что поскольку уравнение (53) написано для огибающей, абсолютная фаза комплексной амплитуды ψ перестала иметь смысл: замена ψ на $\psi \exp(i\alpha)$, где $\alpha = \text{const}$, оставляет уравнение (53) неизменным.

10. Корреляционная функция

В реальных условиях нередко возникают ситуации, когда возбуждается сразу много волн с различными частотами и амплитудами. Например, в случае звуковых волн — это шум большого города или большого скопления людей на вокзале. Большой набор волн можно считать волновым хаосом, и для его описания могут быть использованы методы статистической физики. Чтобы познакомиться с элементами такого описания, мы рассмотрим простейший случай одной ветви колебаний в одномерной среде. Соответствующие рассуждения можно опять проводить с использованием волновой функции $\psi(x, t)$, поскольку в линейных волнах все остальные физические величины, испытывающие малые колебания, можно выразить через ψ . Итак, пусть

$$\psi(x, t) = \sum_k a_k \exp(-i\omega_k t + ikx), \quad (54)$$

где a_k — амплитуда волны с волновым числом k , а ω_k — соответствующая частота колебаний. Среднее по времени и по пространству значение от $\psi(x, t)$, очевидно, равно нулю. А если волн много и их фазы меняются со временем, то и средние значения $\langle a_k \rangle$ можно считать равными нулю. Это приближение называется приближением хаотических фаз. Но если взять произведение $a_k a_k^*$, то его среднее значение не зависит от фазы, так что можно считать $\langle a_k a_k^* \rangle \equiv a_k^2$, где a_k^2 — некоторое среднее значение квадрата амплитуды. Величина a_k^2 как функция k называется спектральной функцией, или попросту спектром.

Найдем теперь величину $\langle \psi(x, t) \psi^*(x', t') \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по случайным фазам и амплитудам элементарных волн. Эта величина называется корреляционной функцией. Если подставить сюда суммы (54) для ψ и ψ^* и учесть, что после усреднения по фазам остаются только произведения $a_k a_k^*$, то получим

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, t) \psi^*(x', t') \rangle &= \\ &= \sum_k a_k^2 \exp[-i\omega_k(t - t') + ik(x - x')]. \end{aligned} \quad (55)$$

Это хорошо известное соотношение позволяет вычислить корреляционную функцию по заданной спектральной плотности.

Заметим, что средний квадрат модуля волновой функции в данной точке x равен просто

$$|\psi|^2 = \sum_k a_k^2. \quad (56)$$

Временная зависимость корреляционной функции от $t - t'$ согласно (55) определяется как спектральным составом волн, так и законом дисперсии $\omega = \omega_k$.

11. Уравнение Шрёдингера

Квантовая механика показала, что все микрочастицы обладают волновыми свойствами. А именно, каждой свободной частице соответствует волна с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , так что энергия этой частицы равна $\hbar\omega$, а импульс $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, где \hbar — постоянная Планка. Для свободной частицы с массой m энергия равна $p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$. Другими словами, $\varepsilon = \hbar\omega_k = \hbar^2 k^2/2m$. Соответственно, уравнение (51) для свободной частицы принимает вид уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (57)$$

Заметим, что подобно уравнению Леонтовича (53) уравнение Шрёдингера инвариантно по отношению к замене ψ на $\psi \exp(i\alpha)$, где $\alpha = \text{const}$ — постоянный сдвиг фазы. Если частица не является свободной, а движется в потенциале $U(\mathbf{r})$, то суммарная энергия ε равна сумме кинетической и потенциальной энергий, $\varepsilon = (p^2/2m) + U$, и соответственно, уравнение Шрёдингера записывается в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\mathbf{r})\psi \equiv H\psi, \quad (58)$$

где H — оператор Гамильтона.

Уравнение (57) по аналогии с (51) можно было бы считать относящимся к классическому волновому полю. Тогда $|\psi|^2$ можно было бы интерпретировать как плотность одинаковых бозе-частиц в данной точке пространства. Перенесение уравнения Шрёдингера на одну частицу потребовало интерпретации $|\psi|^2$ как плотности вероятности, и мы подробно обсудим этот подход в последующем изложении.

А пока рассмотрим уравнение свободного движения (57) для одной частицы в случае только одного измерения, когда $\psi = \psi(x, t)$.

Уравнение (57) похоже на уравнение диффузии, но только с дополнительной мнимой единицей в левой части уравнения. Поэтому и подход к его решению может быть сходен с решением параболического уравнения диффузии. Допустим, например, что при $t = 0$ волновая функция имеет вид

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi b^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} \right). \quad (59)$$

Эта функция нормирована на единицу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^2 dx = 1.$$

Она описывает волновой пакет, локализованный на интервале Δx масштаба b . Прямой подстановкой можно проверить, что в последующие моменты времени решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\psi(x, t) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad (60)$$

где $a^2 = b^2 - i(\hbar t/m)$. С помощью этой функции нетрудно вычислить среднеквадратичное значение $\langle x^2 \rangle$. Оно оказывается равным

$$\langle x^2 \rangle = b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2}. \quad (61)$$

Это выражение в точности соответствует известному соотношению неопределенностей

$$\Delta x \cdot \Delta p > \hbar. \quad (62)$$

А именно, если начальная локализация Δx составляет величину b , то неопределенность скорости $\Delta v \sim \hbar/mb$ приводит к расширению волнового пакета со скоростью Δv , и при больших значениях времени локализация Δx возрастет как $\Delta x \sim t(\hbar/mb)$.

Локализованное возмущение (59) можно было бы удержать с помощью гармонического потенциала $U = (1/2)\alpha x^2$. Нетрудно проверить, что при этом константа "упругости" $\alpha = \hbar^2/mb^4$, а энергия осциллятора $\varepsilon = \hbar\omega_0/2 = (1/2)\hbar(\alpha/m)^{1/2}$. При $b \rightarrow \infty$ константа $\alpha \rightarrow 0$.

12. Частица в термостате

Рассмотрим квантовую частицу с одной степенью свободы в термостате, который представляет собой ящик длиной L вдоль оси x . Движением частицы вдоль осей y и z мы пока не интересуемся. Предполагая, что стенки ящика зеркально отражают частицу, мы должны выбрать для частицы следующие собственные функции:

$$\psi_n = \exp(-i\omega_n t) \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (63)$$

Здесь $\omega_n = \varepsilon_n/\hbar$ — собственная частота, $\varepsilon_n = p_n^2/2m = (\pi\hbar/L)^2/2m$ — собственная энергия, $n = 1, 2, 3, \dots$ — любое натуральное число. Нормировку у функций ψ_n мы выбрали таким образом, что $L\langle|\psi|^2\rangle = 1$.

Если стенки ящика находятся при температуре $T = \text{const}$, то частица должна прийти в термодинамическое равновесие со стенками при той же самой температуре. Это означает, что в соответствии с формулой Больцмана, или, что то же самое, с каноническим распределением статистической механики, вероятность p_n нахождения частицы в состоянии " n " равна

$$p_n = Z^{-1} \exp(-\beta\varepsilon_n). \quad (64)$$

Здесь Z — нормировочный множитель, $\beta = 1/T$. Так как $\sum_n p_n = 1$, то

$$Z = \sum_n \exp(-\beta\varepsilon_n), \quad (65)$$

и по этой причине функцию Z называют статистической суммой.

Иногда вместо Z вводят в рассмотрение свободную энергию $F = -T \ln Z$, и тогда выражение (64) записывается в виде

$$p_n = \exp(-\beta\varepsilon_n + \beta F). \quad (66)$$

С помощью этого соотношения нетрудно найти среднюю энергию частицы

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle = \sum_n p_n \varepsilon_n$$

и другие термодинамические величины. Чтобы упростить соответствующие соотношения, мы предположим, что размеры системы очень велики, так что нижний уровень имеет энергию $\varepsilon_i \ll T$. Тогда вместо суммирования по n в (65) можно произвести интегрирование, считая n непрерывной переменной. Теперь нетрудно найти выражение для Z :

$$Z = \left(\frac{2}{\pi} \frac{L}{b_0}\right)^{1/2}, \quad (67)$$

где

$$b_0 = \frac{\hbar}{(mT)^{1/2}}.$$

Соответственно, можно найти выражения для других физических величин. В частности, для средней энергии находим

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} T. \quad (68)$$

Первый закон термодинамики для одномерной частицы можно записать в виде

$$d\varepsilon = -p dL + T ds. \quad (69)$$

Здесь ε , p , s — энергия, давление и энтропия, отнесенные к одной частице, L — длина сосуда. Допустим, например, что стенки теплонепроницаемы, так что $ds = 0$, и процесс является адиабатическим. При этом все вероятности p_n должны сохранять свои прежние значения, что возможно лишь при

$$TL^2 = \text{const}. \quad (70)$$

Это и есть закон адиабаты для одномерного случая. Если принять $p = T/L$, где величина $1/L$ играет роль "плотности частиц", то согласно (69) закон сохранения энергии при $ds = 0$ и связи (70) удовлетворяется. Что касается энтропии, то ее лучше определить в соответствии со статистической механикой

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n = \beta(\varepsilon - F). \quad (71)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (66). В другой где
записи соотношение (71) выглядит как

$$F = \varepsilon - Ts. \quad (72)$$

Для свободной частицы в очень большом ящике находим

$$s = \ln \frac{L}{b_0} + s_0, \quad b_0 = \frac{\hbar}{(mT)^{1/2}}, \quad (73)$$

где

$$s_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\pi}$$

— малое число, которым можно пренебречь по сравнению с $\ln(L/b_0)$. Полученные выше выражения (68), (73) и соотношение $p = T/L$ справедливы только при $L \gg b_0$. Если уменьшать длину L , приближая ее к b_0 , то наш переход от суммирования по n к интегрированию перестает быть справедливым. Легко видеть, что при приближении $L \rightarrow b_0$ нижний энергетический уровень ε_1 становится сравнимым с T . Соответственно, при малых L частица "сядет" на самый нижний энергетический уровень, и ее энергия при уменьшении L будет возрастать как L^{-2} . Энтропия s будет равна нулю, а давление p будет изменяться как L^{-3} , мы как бы доходим до "размера" частицы b_0 , и для дальнейшей деформации частицы требуется большая затрата энергии.

Итак, грубо можно сказать, что b_0 — это характерный "размер" частицы при температуре T , и тогда отношение L/b_0 означает число ячеек, по которым можно размещать частицу с температурой T .

С помощью распределения вероятностей p_n можно найти еще одну величину, которая в квантовой механике получила название матрицы плотности $\rho(x, x')$. Матрица плотности похожа на корреляционную функцию для случайного набора классических волн. Она определяется следующим выражением:

$$\rho(x, x') = \langle \psi(x) \psi^*(x') \rangle = \sum_n p_n \psi_n(x) \psi_n^*(x'). \quad (74)$$

При $L \gg b_0$ функция $\rho(x, x')$ зависит только от разности $x - x'$. Поэтому при вычислении (74) можно произвести усреднение по x при заданной разности $x - x'$. Далее, поскольку согласно соотношениям (66), (72), (73) вероятность

$$p_n = \left(\frac{\pi b_0^2}{2L^2} \right)^{1/2} \exp(-\beta \varepsilon_n),$$

то вычисление ρ может быть проведено достаточно быстро. При этом опять суммирование по n может быть заменено на интегрирование, и для $\rho(x, x')$ получаем

$$\rho(x, x') = \frac{1}{L} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{2b_0^2} \right], \quad (75)$$

где $b_0^2 = \hbar^2/mT$.

Заметим, что это выражение может быть представлено в виде

$$\rho(x, x') = \frac{\sqrt{2\pi}b_0}{L} \rho_0(x, x'),$$

$$\rho_0(x, x') = \left(\frac{1}{2\pi b_0^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{2b_0^2} \right]. \quad (76)$$

Функция $\rho_0(x, x')$ нормирована на единицу, т.е. интеграл от ρ_0 по x' равен единице. Функция $\rho_0(x, x')$ — это как бы распределение плотности по x' при фиксированном значении точки x , которая в свою очередь с вероятностью $2\pi b_0/L$ может быть расположена в одной из ячеек.

13. Дуализм волна — частица

Существует определенное сходство в формальных выражениях для матрицы плотности в квантовой механике и для корреляционной функции случайного классического волнового поля. Однако, по существу, эти физические объекты разительно отличаются друг от друга. Дело в том, что волновая функция квантовой механики в простейшем случае относится только к одной частице. Грубо говоря, она реальна только там, где эта частица существует, и имеет мало смысла для тех областей, где частицы нет. Можно сказать и по-другому. В квантовой механике все физические величины получаются в результате действия некоторых операторов на волновую функцию. Соответственно, средние значения этих величин можно получить путем их усреднения с весом $|\psi|^2$. Отсюда видно, что абсолютная фаза и абсолютная амплитуда волновой функции не имеют физического смысла, а могут быть по своему усмотрению выбраны для удобства расчетов. Поэтому сильные относительные изменения амплитуды в далеких по расстоянию точках не приводят к заметному изменению физических величин, если градиент ψ при этом изменяется ничтожно мало. По этой причине $|\psi|^2$ -функция приобретает смысл распределения вероятностей, а не распределения реальной плотности или волнового движения, как в случае классических полей.

Рассмотрим с этой точки зрения частицу в термостате. Как мы видели выше, энергия свободной частицы в таком термостате не зависит от длины L , если только $L \gg b_0$.

Повторим теперь с квантовой частицей тот же мысленный эксперимент, который был проведен с классической частицей. А именно, перегородим наш термостат непроницаемой перегородкой, разделив его на две части. При этом возмущение системы будет мало, и частица по-прежнему будет иметь энергию $T/2$, если только $L \gg b_0$. Частица при этом окажется только в одной из половин, но пока еще для внешнего мира это ничего не означает: при многократном повторении эксперимента все будет выглядеть так, как если бы $|\psi|^2$ равнялось $1/L$ и в той, и в другой половинах.

Но допустим, что у нас есть способ "узнать", в какой из половин находится частица. В квантовой механике такое обнаружение частицы в одном из состояний называется "измерением". Как только это измерение сделано, $|\psi|^2$ в пустой половине исчезает, а в половине с частицей удваивается. Происходит коллапс волновой функции. При этом энтропия частицы уменьшается на $\ln 2$, т.е. на один бит.

Если бы во внешнем мире при этом ничего не изменилось, то можно было бы приступить к сооруже-

нию вечного двигателя второго рода. А поскольку это невозможно, то во внешнем мире рассматриваемое нами измерение должно сопровождаться необратимым возрастанием энтропии на величину не менее одного бита. Можно сказать, что коллапс волновой функции — это реальный физический акт, но он производится не столько какими-либо приборами, сколько необратимым процессом внешнего мира.

Можно было бы попытаться "поймать" частицу в меньший интервал $L_0 \ll L$. Если опять $L_0 \gg b_0$, то перегородка не меняет энергии частицы, а ее энтропия уменьшается до $\ln(L_0/b_0)$, т.е. на величину $\ln(L/L_0)$. Не менее чем на эту величину должна возрасти энтропия внешнего мира. Как мы видим, такой коллапс может происходить довольно непринужденно, если только $L_0 > b_0$. Можно сказать, что величина b_0 характеризует эффективный "размер" частицы, и на расстояниях, значительно больших b_0 , квантовая частица мало чем отличается от классической. Другими словами, несмотря на волновые свойства, квантовая частица в сосуде большого размера может вести себя подобно классической частице.

Обсудим теперь этот же вопрос с несколько иной точки зрения. Волновая функция (63) может быть представлена в виде суммы

$$a [\exp(-i\omega_n t + ik_n x) - \exp(-i\omega_n - ik_n x)],$$

где a — некоторая амплитуда, а $k_n = \pi n/L$ — волновое число. Как мы видим, это суперпозиция двух волн, одна из которых бежит направо, а другая — налево. Волновое число k_n пропорционально импульсу частицы $p_n = \hbar k_n$. Значит, ψ_n описывает частицу, которая бегает между зеркальными стенками и обладает постоянным импульсом p_n . Такое движение при неподвижных стенках могло бы продолжаться вечно. Состояние такого типа в квантовой механике называется чистым.

Но при наличии теплообмена со стенками чистое состояние сохраниться не может: согласно (64) каждому такому состоянию отвечает лишь некоторая вероятность p_n . Если бы у нас имелась не одна частица, а очень много тождественных бозе-частиц, скажем, $N \gg 1$, то в каждом состоянии мы могли бы иметь много частиц. В этом случае вероятность p_n , умноженная на полное число частиц N , соответствовала бы просто распределению Максвелла, а матрицу плотности $\rho(x, x')$, умноженную на полное число частиц, можно было бы рассматривать как классическую корреляционную функцию случайного волнового поля $N^{1/2}\psi(x, t)$. При этом мы могли бы исходить из естественного предположения, что фазы собственных волн ψ_n взаимно случайны, так что усреднение по ним и приводит к усредненной корреляционной функции.

Если мы переходим к одной частице, то картина становится чисто вероятностной. В каждый момент времени частица может находиться только в одном из взаимно некогерентных состояний: одна частица не может иметь сразу многих импульсов. Если бы мы внезапно открыли одну из крышек и позволили бы частице убежать далеко от сосуда, то мы смогли бы обнаружить частицу только с одним из возможных значений импульса. Точно так же нельзя иметь два значения импульса и у классической частицы. Таким образом, p_n представляет собой только вероятность

нахождения частицы в состоянии " n ". Разрушение взаимной когерентности ψ_n -функций вследствие теплообмена со стенкой оставляет только одну возможность: частица остается в одном из взаимно некогерентных состояний. Происходит как бы скрытый "коллапс" волновой функции, но пока это еще не реальный коллапс: внешний мир может еще не иметь информации о том, на каком уровне находится частица.

Если производить очень медленные действия с частицей, например перемещать торцевую перегородку или вводить новые перегородки, то частица может успевать переходить с уровня на уровень и в среднем принимать максвелловское распределение. С точки зрения внешнего мира такая частица ведет себя как малая термодинамически равновесная система. Можно и в этом случае иметь дело с матрицей плотности $\rho(x, x')$, но соответствующие ей изменения или действия нужно усреднять по промежуткам времени, значительно большим, чем время установления термодинамического равновесия.

Если же попытаться достаточно быстро локализовать частицу в пространстве или установить величину ее импульса, то при этом автоматически произойдет коллапс вероятностей, сопровождаемый коллапсом волновой функции. Именно этот акт не может быть произведен без возрастания энтропии во внешнем мире. Другими словами, акт коллапса — это миниатюрный необратимый процесс, что-то вроде микроскопического рождения или смерти.

Рассмотренный нами пример показывает, что реальный акт измерения в квантовой механике можно представлять себе как бы составленным из двух действий: подготовка ψ -функции к разложению на взаимно некогерентные компоненты и затем коллапс в одну из этих компонент. Разрушение когерентности может происходить просто за счет внешних шумов или теплового движения, а для осуществления коллапса при измерении необходим реальный неравновесный процесс, который порождает информацию в измеряющем приборе и рождает не меньшее количество энтропии во внешнем мире. В реальных условиях обе эти составляющие измерения могут совмещаться или быть трудно различимыми. Они скорее важны для логической ясности, чем для практической реализации.

Продолжим обсуждение поведения частицы в сосуде длины L , но теперь предположим, что только один из торцов поддерживается при температуре T , а второй торец является очень холодным, т.е. находится при температуре практически нулевой. Тогда рассматриваемая нами частица получает возможность переносить тепловой поток q . Легко оценить максимально возможную величину q_{\max} . Она достигается, если при первом же ударе о теплую стенку частица получает тепловую энергию $T/2$. Перелетая к холодной стенке, частица передает ей энергию того же масштаба, а затем возвращается к теплой стенке за новой порцией тепла. Пусть $v_T = (T/m)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость. Время пролета до второй стенки и возвращения к первой стенке не может быть меньше $2L/v_T$. Таким образом, тепловой поток ограничен величиной $q_{\max} = Tv_T/4L$. Реальный тепловой поток может быть гораздо меньше: его величина зависит от того, насколько эффективно частица успевает осуществить теплообмен со стенками при каждом ударе.

Допустим теперь, что вначале частица была внесена в некотором локализованном состоянии (59) с начальной локализацией шириной b . Если эта частица к тому же движется со скоростью $v_0 = p_0/m$, то соответствующая волновая функция, как нетрудно проверить, будет равна просто $\psi(x, t) = \psi(x - v_0 t, t) \exp(-i\omega t + ikx)$, где $\hbar k = p_0 = mv_0$, $\hbar\omega = p_0^2/2m$. Если v_0 имеет масштаб тепловой скорости v_T , то время пролета от одной стенки до другой составляет величину $t \sim L/v_T$. Согласно (61) за это время частица дополнительно расплывается, но если b^2 подобрана таким образом, что ширина расплывания сохраняет масштаб начальной ширины, т.е. $b^2 \sim \hbar t/m \sim \hbar L/v_T m$, то можно приближенно считать, что волновой пакет сохраняет свою ширину. Как мы видим, $b^2 = Lb_0$, где величина $b_0^2 = \hbar/mT$ определяет минимальную ширину локализации матрицы плотности. При $L \gg b_0$ величина " b " значительно превышает b_0 , но в то же время оказывается в $(b_0/L)^{1/2}$ раз меньше, чем L .

Поскольку рассматриваемая нами система сильно неравновесна, то нельзя исключить ситуацию, что при каждом ударе о холодную стенку факт удара может регистрироваться, т.е. как бы "измеряться" самой стенкой.

Такой процесс означает, что фононы, порождаемые частицей, неупруго отражающейся от холодной стенки, могут производить в стенке необратимые деформации или другие возбуждения мягких мод, которые затем "запоминаются" в том или ином виде. Необратимые процессы внутри стенки могут автоматически "измерять" частицу, т.е. производить дополнительное коллапсирование волновой функции. Величина $(Lb_0)^{1/2}$ при этом определяет минимальный размер волнового пакета: он достигается при условии, что "измерение" происходит при каждом ударе. Как мы видим, волновой пакет при этом может стать похожим на классическую частицу. Однако ширина этого пакета $b \geq (Lb_0)^{1/2}$ существенно превышает минимальный масштаб $b_0 = \hbar(mT)^{1/2}$. Согласно соотношению неопределенностей величина b соответствует неопределенность импульса $\Delta p \sim \hbar/b$. Можно сказать, что каждый волновой пакет ушिरен на несколько энергетических уровней, так что $\Delta v/v_T \sim b_0/b$. Если ширина локализации $b \ll L$, то частица может бегать как неравновесный волновой пакет, и чтобы заполнить весь дозволённый интервал скоростей $\sim v_T$, ей придется испытать много столкновений со стенками.

Если мы начнем увеличивать температуру холодной стенки, приближая ее к температуре теплой стенки, то степень неравновесности будет уменьшаться. Соответственно, будет уширяться ширина неравновесного пакета b . И в пределе мы опять придем к ситуации, когда волновая функция частицы расплывется на весь размер L . Если при этом взаимодействие со стенками исчезающе мало, то частица будет очень долго находиться на каждом энергетическом уровне ε_n , испытывая медленное броуновское движение по уровням за счет взаимодействия с тепловыми колебаниями стенок.

Итак, приведенные рассуждения показывают, что дуализм волна — частица в квантовой механике может во многом зависеть от внешних условий, в которых находится частица.

Аппарат квантовой механики позволяет описывать широкий набор конкретных физических ситуаций. В частности, для описания теплового движения частицы в

виде движущихся пакетов можно опять воспользоваться матрицей плотности $\rho(x, x')$, однако эта матрица плотности будет отличаться от термодинамической матрицы плотности (74), поскольку для каждого волнового пакета фазы близких гармоник оказываются коррелированными между собой, т.е. каждый такой пакет выглядит как суперпозиция $\sum_n c_n \psi_n$. Если мы произведем усреднение (74), то получим выражение

$$\rho(x, x') = \sum_{n,m} W_{nm} \psi_n \psi_m^*, \quad (77)$$

в котором недиагональные матричные элементы W_{nm} не обязаны обращаться в нуль. Более того, в случае $W_{nm} = c_n c_m^*$ мы получим просто единственное чистое состояние, которое отвечает выбранному нами волновому пакету.

Если опять провести аналогию с классическим полем, то можно сказать, что в случае чистого состояния фазы отдельных волн скоррелированы друг с другом, т.е. не являются полностью хаотическими. Переход к тепловому равновесию сопровождается хаотизацией фаз и разрушением когерентности. При этом частица может находиться только в одном из взаимно некогерентных состояний. Соответственно, при полной хаотизации фаз недиагональные члены в (77) исчезают, и мы приходим к обычному определению равновесной матрицы плотности с больцмановским распределением вероятностей W_{nm} по энергиям.

14. Радиоактивный распад

С помощью нашей идеализированной модели одной частицы в одномерном термостате мы рассмотрим еще один процесс, который напоминает радиоактивный распад ядра. А именно, в термостате длиной L мы устроим миниатюрную ловушку для частицы, вводя дополнительную перегородку на расстоянии " b " от одного из торцов, допустим, левого. Пусть $b \ll b_0$, где $b_0 = \hbar(mT)^{1/2}$ — ширина минимальной локализации частицы с энергией $\sim T$. Первый нижний энергетический уровень в нашем малом отсеке, $\varepsilon_{\min}^* = \pi^2 \hbar^2 / 2mb^2$, значительно превышает температуру. Поэтому температура левого торца не играет никакой роли: частица все равно будет находиться на высоком уровне ε_{\min}^* , а следующий уровень настолько высок, что вероятность попадания туда частицы пренебрежимо мала.

Итак, пусть наша частица находится в чистом состоянии с энергией ε_{\min}^* в малой ловушке с размером $b \ll L$. Сделаем теперь в перегородке малое отверстие, чтобы волновая функция частицы смогла медленно вытекать в основную область термостата. Разумеется, вместо дырочки можно использовать энергетический барьер — аналог перегородки с возможностью вытекания волновой функции за счет так называемого туннелирования — подбарьерного "просачивания" частицы в свободную область.

Этот процесс есть точная аналогия α -распада тяжелого ядра. Поскольку при $L \gg b$ волновая функция в свободной области всегда будет мала по сравнению с ψ -функцией в малом отсеке, то волновая функция малого отсека будет экспоненциально убывать со временем: $\psi_b \sim \exp(-t/2\tau)$, $|\psi_b|^2 \sim \exp(-t/\tau)$. Если бы в малом отсеке было очень много частиц, скажем, в начальный

момент N_0 , то со временем их число убывало бы как $N = N_0 \exp(-t/\tau)$. Но если у нас только одна частица, то нужно говорить о вероятностях.

Кажется совершенно очевидным, что вероятность находиться частице в малом отсеке равна $p_1 = \exp(-t/\tau)$, а вероятность находиться в основной части термостата равна $p_2 = 1 - \exp(-t/\tau)$. У классической частицы именно так и проходил бы необратимый процесс ее проникновения через "прохудившуюся" перегородку. Пространственная часть энтропии (28) для частицы в термостате была бы значительно больше единицы, и монотонное возрастание вероятности p_2 автоматически сопровождалось бы монотонным возрастанием энтропии (энтропию малого отсека можно считать равной нулю). Но квантовая частица ведет себя несколько сложнее.

Допустим, сначала, что правый торец представляет собой чистую перегородку при нулевой температуре. Тогда, казалось бы, вероятности p_1 и p_2 должны относиться к малому отсеку и термостату, а их величины должны даваться приведенными выше соотношениями. Но мы тут же приходим к противоречию, поскольку энтропия $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ будет сначала возрастать, достигая максимума при $p_1 = p_2 = 1/2$, а затем будет убывать до нуля при $p_1 \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow 1$. На самом деле, рассматриваемое нами состояние, состоящее из суперпозиции волновых функций в малом отсеке и в основном объеме, без вмешательства извне является чистым. До измерения оно имеет одно единственное состояние. Только после многократных измерений можно получить величины для вероятностей нахождения в малом объеме p_1 или для попадания в большой объем p_2 .

До проведения измерения состояние является чистым, даже если оно не обладает фиксированной энергией. Например, если распад протекает очень медленно, можно было бы в какой-то момент посредине процесса адиабатически медленно увеличить длину L путем сдвига более далекого торца-загородки. При этом энергия той части волновой функции, которая была снаружи от малого отсека-ловушки, заметно понизилась бы по сравнению с ε_{\min}^* . А вытекающая из отсека ψ -функция по-прежнему имела бы энергию ε_{\min}^* . Таким образом, у нас образовалась бы ψ -функция в виде суперпозиции двух состояний с различными энергиями.

До проведения измерений эта суперпозиция опять является чистым состоянием. С помощью внешней силы на частоте, отвечающей разности энергетических уровней, можно было бы свободно изменять соотношение между амплитудами двух подуровней. Таким образом, до проведения измерения узнать о факте радиационного распада нельзя.

Однако, если допустить, что правая торцевая крышка не является зеркально отражающей, то первый же удар о нее частицы засвидетельствует, что частица несколько раньше вылетела из малого начального объема. Такой удар с возбуждением фононов в торцевой крышке служит измерительным актом, после которого ψ -функция малого объема практически исчезает, а ψ -функция в основном объеме термостата приобретает нормировку на единицу. Другими словами, неупругий удар о стенку осуществляет коллапс вероятностей (до того момента существовавших как возможности, но не как реальные числа), а именно, $p_1 \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow 1$. Только многократное повторение процесса распада может дать зависимость

$N = N_0 \exp(-t/\tau)$, на основании которой можно составить представление об эволюции средних по ансамблю априорных вероятностей p_1 и p_2 .

После первого удара частица оказывается зафиксированной внутри термостата, будучи "измеренной" вместе с приближенной траекторией от точки "распада", а затем начинается процесс установления равновесия с термостатом. Частица обменивается фононами со стенкой, ее средняя энергия понижается, а распределение по уровням приближается к максвелловскому. В конце концов энергия частицы достигнет среднего теплового значения $\varepsilon = T/2$, а остаток энергии $\varepsilon_{\min}^* - T/2$ будет передан стенке в виде порции тепла $\Delta Q = \varepsilon_{\min}^* - (T/2)$. Внутренняя энтропия частицы достигнет при этом величины (73), т.е. $s \cong \ln(L/b_0)$, а энтропия термостата возрастет на величину $\Delta S = \Delta Q/T = (\varepsilon_{\min}^*/T) - (1/2)$. Вся эта вторая стадия процесса носит существенно необратимый характер с возрастанием энтропии.

Но вернемся опять к первой стадии, т.е. до первого удара. Пусть ψ_b — нормированная волновая функция в малом отсеке, а ψ_L — нормированная волновая функция в свободном объеме холодного термостата. Обе эти функции отвечают одной и той же энергии, если $\tau \rightarrow \infty$. При конечных значениях τ волновую функцию можно представить в виде суперпозиции

$$\psi = c_b \psi_b + c_L \psi_L, \quad (78)$$

где c_b , c_L — соответствующие амплитуды. Согласно правилам квантовой механики величины $|c_b|^2$, $|c_L|^2$ соответствуют вероятностям соответствующих состояний при проведении многократных измерений. Каждое из таких измерений осуществляет коллапс волновой функции либо в ψ_b , либо в ψ_L . В рассматриваемом нами случае роль измерительного прибора играет второй торец большого объема, а само измерение осуществляет коллапс $\psi \rightarrow \psi_L$. Измерительный прибор, согласно квантовой механике, не может преднамеренно произвести этот коллапс. Он просто выжидает тот момент, когда коллапс случается, и по многим результатам измерений дает возможность найти $p_2(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$. Сам акт коллапсирования является сугубо случайным. Как выразился А. Эйнштейн, процесс выглядит так, как если бы "Бог играл в кости". Сам Эйнштейн полагал, что за этой случайностью скрывается более глубокая закономерность. Но поскольку она не найдена, приходится оставаться на ортодоксальной квантовомеханической точке зрения.

Итак, мы можем заключить, что наш процесс релаксации неравновесного состояния начинается с первого неупругого удара частицы о стенку термостата. Этот удар, с точки зрения квантовой механики, представляет собой случайный акт коллапса волновой функции: $\psi \rightarrow \psi_L$. Одно чистое состояние частицы превращается в другое чистое состояние, но при этом в стенке происходит необратимый процесс излучения фонона, который уходит во внешний мир. От него может остаться память в виде одного бита информации, спрятанного где-то глубоко в стенке. В принципе, если бы рядом со стенкой размещался некоторый автомат, то этот бит информации мог бы быть превращен в последующее действие автомата по заранее составленному алгоритму. Например, он мог бы использовать часть энергии "распада" для производства работы.

Рассмотрим еще один мысленный эксперимент. Допустим, что узкая ловушка шириной $b \ll b_0$ размещена не в торце, а точно посередине термостата длиной L . Предположим также, что у ловушки имеется два малых отверстия, так что частица с равной вероятностью может выскочить либо в левый, либо в правый полубъемы.

Процесс релаксации опять начинается с первого удара. Теперь это может быть удар либо о левую, либо о правую стенку. Первый удар оставляет в соответствующей стенке один бит информации. После этого происходит последующий процесс релаксации, который опять рождает энтропию $\Delta S = \Delta Q/T = (e_{\min}^*/T) - (1/2)$ в соответствующей стенке. А вот энтропия частицы будет равна на этот раз $s \approx \ln(L/2b_0) = \ln(L/b_0) - \ln 2$, поскольку область, занятая частицей, равна лишь половине длины L . Энтропия частицы оказалась на 1 бит меньше. Смещая затем центральную перегородку в сторону пустого объема, можно было бы совершить работу. Но для этого нужно знать, в какой именно половине находится частица, а для этого требуется использовать тот самый бит информации, который ушел в стенку при первом ударе. Таким образом, мы опять не сможем безвозмездно использовать тепловую энтропию частицы.

Итак, рассмотренный нами "радиоактивный" распад — это необратимый процесс релаксации к термодинамическому равновесию. Он начинается с необратимого акта коллапса волновой функции, при котором рождается энтропия во внешнем мире. Вслед за этим происходит тепловая релаксация, при которой возрастает как энтропия частицы, так и энтропия внешнего мира. В нашем примере запас энергии содержался в самой частице и поэтому для диссипации не потребовалось дополнительной энергии или дополнительного введения неэнтропии извне системы.

15. Кот Шрёдингера

Итак, волновая функция ψ имеет следующий физический смысл. В случае многих тождественных частиц величина $|\psi|^2$ пропорциональна плотности частиц в данной точке пространства. Если мы переходим к одной частице, то $|\psi|^2$ приобретает смысл вероятности находиться данной частице в данной точке пространства. Волновая функция эволюционирует в соответствии с линейным уравнением Шрёдингера, которое допускает суперпозицию линейных решений, т.е. суперпозицию различных состояний. В такой суперпозиции складываются именно функции, а не их квадраты $|\psi|^2$. Поэтому обычный закон сложения вероятностей действует лишь в том случае, если волновые функции различных состояний не перекрываются в пространстве или имеют взаимно некоррелированные фазы. Такая декорреляция может возникнуть при взаимодействии частицы с внешним окружением. Если это окружение фиксирует одно из состояний частицы, то волновая функция как бы коллапсирует.

Внешний мир предполагается классическим, т.е. макротела предполагаются не волновыми, а точечными (или протяженными) объектами с фиксированными координатами, изменяющимися со временем по законам классической механики. Но такой подход означает, что между волновым микромиром и классическим макромиром располагается пропасть: при обычном

подходе нельзя перейти из одного мира в другой. А именно, если идти со стороны микромира, то следует включать в описание с помощью уравнения Шрёдингера для многих частиц объекты все большего и большего размера, включая в пределе всю Вселенную. Напротив, если идти со стороны классического макромира, то естественно продолжить классическое описание вплоть до самых малых частиц и самых малых размеров. Граница между микромиром и макромиром не определена, и ее обсуждение вызывало и продолжает вызывать много вопросов.

Наиболее четко соответствующее противоречие было указано Шрёдингером [26] в его знаменитом мысленном эксперименте с котом. Допустим, что имеется счетчик Гейгера, который регистрирует пролетающие через него α -частицы от α -распада ядер. К этому счетчику пристыковано устройство, которое может разбить ампулу с цианистым калием в случае пролета частицы. Если ампула находится вместе с живым котом под стеклянным колпаком, то согласно стандартной квантовой механике существует возможность суперпозиции живого и погибшего кота, если счетчик не произвел еще измерения и находится в состоянии суперпозиции зарегистрированного и незарегистрированного пролета частицы.

Разумеется, реального парадокса здесь нет. Сама регистрация пролета частицы представляет собой необратимый процесс, сопровождающийся коллапсом волновой функции, и уж только вслед за этим может сработать автомат по разбиванию ампулы. Суперпозиция этого состояния с неслучившимся процессом регистрации частицы просто невозможна. Однако ортодоксальная квантовая механика не охватывает процесса необратимого измерения, и возможность нереальной суперпозиции показывает, что между квантовым микромиром и классическим макромиром существует промежуточная область, которая не покрывается стандартной квантовой механикой и требует специального рассмотрения. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже.

16. Необратимость нашего окружения

Не только жизнь на Земле, но и многие другие неравновесные процессы на нашей планете в существенной мере определяются потоком излучения от Солнца. Солнечная постоянная, т.е. поток энергии на среднем расстоянии Земли от Солнца, составляет величину $1,4 \cdot 10^6$ эрг $\text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$. Если не учитывать альбедо, то вся эта энергия в конце концов превратится в тепловую энергию при температуре T около 300 К. Нетрудно оценить соответствующий темп рождения энтропии, приходящийся на 1 см^2 в секунду: $\dot{S}_0 \sim 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-2} \text{с}^{-1}$. Если учесть, что температура Солнца составляет около $6 \cdot 10^3$ К, т.е. в двадцать раз превышает температуру поверхности Земли, и тот факт, что солнечная радиация заключена в очень малом телесном угле, то легко оценить, что доля солнечной энтропии в величине \dot{S}_0 составляет не более одного процента. Другими словами, солнечная энергия имеет очень высокую степень упорядоченности и до превращения в тепло она несет с собой поток информации \dot{I}_0 того же порядка величины, что и \dot{S}_0 . Поток информации \dot{I}_0 составляет гигантскую величину масштаба $\sim 4 \cdot 10^{19}$ бит $\text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$. Она не сопоставима

ни с одним из искусственных потоков информации, созданных человеком.

Разумеется, если этот поток информации отнести к тому числу молекул, которым этот поток передается, то в расчете на одну молекулу получаются гораздо более скромные числа. Например, если разделить поток \dot{I} на число молекул атмосферы Земли, отнесенное к 1 см^2 поверхности, то поток информации, приходящийся на одну молекулу, не превысит одного бита в неделю. Но все же и это число не так уж мало. Следует еще учесть, что не вся энергия переходит в тепло. А именно, часть солнечной энергии перехватывается атмосферой и служит источником формирования воздушных потоков, ветров, облаков, осадков и т.д. Другая часть энергии идет на фотосинтез белков растительным миром, которые в свою очередь служат питанием и поддерживают жизнь животного мира. Таким образом, наряду с деградацией упорядоченной солнечной энергии и превращением ее в тепло, идет одновременный процесс самоорганизации и усложнения структур окружающей нас Природы. Все процессы развития только потому и происходят, что они сопровождаются мощным процессом роста энтропии за счет уменьшения степени порядка энергии, поступающей от Солнца.

В целом, атмосфера и биосфера Земли представляют собой сложную открытую систему. Стационарный баланс потоков энергии устанавливается за счет теплового излучения Земли в космическое пространство: на Землю приходит энергия с малой энтропией, а уходит с энтропией намного большей. Но нельзя сказать, что необратимый процесс возрастания энтропии идет совершенно монотонно во всех составных частях сложной системы. Напротив, общий рост энтропии сопровождается процессом создания упорядоченных структур с уменьшением локальных величин энтропии. Именно за счет глобального роста энтропии и возникает возможность противоположного процесса локальной организации и развития порядка. Ситуация здесь сходна с ирригационной системой, использующей механизмы для перекачки воды с нижнего уровня на более высокий: сама падающая вниз вода приводит в действие водяное колесо, перекачивающее часть воды вверх. Большой поток вниз создает малый поток вверх.

Крупный физик нашего времени профессор Хокинг использовал следующий лекторский прием для демонстрации необратимости. Он показал небольшой эпизод из кинофильма, когда чашечка с кофе соскальзывала со столика, падала на пол и разбивалась, а кофе разливался по полу. "Всем нам хорошо знаком такой сценарий", — комментировал он этот эпизод. "Обратный процесс просто невозможен", — добавлял он и показывал кино в обратную сторону: лужица кофе собиралась в складывающуюся из осколков чашечку, затем чашечка с кофе подпрыгивала и успокаивалась на поверхности столика. Естественно, что и каждый из нас не поверит в возможность такого чуда, хотя, может быть, и не каждый будет размышлять о том, что происходит при этом с энтропией.

Но ведь данный эпизод начался с того, что чашечка с кофе стояла на столе. А миллион лет тому назад ничто не свидетельствовало в пользу того, что такая чашечка появится в результате чисто необратимого процесса с непрерывной деградацией глобального порядка и монотонного роста полной энтропии при термализации

потока энергии, приходящего от Солнца. Именно за счет этой общей деградации энергии и стал возможен процесс, опять-таки необратимый, встречного развития с уменьшением локальной энтропии и созданием сложно организованной материи. Именно он-то и привел, в конце концов, к появлению чашечки с кофе на столике.

Можно сказать, что не только в общей открытой системе, через которую протекает упорядоченная энергия с рождением энтропии, но и в отдельных открытых частях такой системы идут сразу два процесса: деградация по пути к хаотическому тепловому движению молекул и самоорганизация с усложнением структур и роста относящейся к ним доли информации (т.е. уменьшение энтропии).

Для полного понимания необратимости следует учитывать сразу оба процесса: самоорганизацию с небольшим уменьшением энтропии и деградацию порядка с термализацией энергии и рождением энтропии в гораздо более мощном темпе. Полное понимание необратимости невозможно без понимания как разрушения, так и упорядочения.

17. Кто бросает кости?

Присущее квантовой теории вероятностное описание событий естественно вызывает вопрос о том, не стоит ли за случайными событиями более сложная детерминированная картина физических процессов, которую мы пока просто не умеем описать из-за ее сложности. Попытки введения в квантовую теорию так называемых скрытых параметров делались неоднократно. Но вместе с тем достаточно убедительно было показано, начиная с работ фон Неймана, а затем в более поздних исследованиях, что логическая структура квантовой теории является замкнутой и исключает возможность введения скрытых параметров. (Рассуждения самого фон Неймана не вполне точны (см., например, [34]), но это обстоятельство не меняет сути дела.)

Откуда же берется случайность? Кто же в конце концов бросает кости? Чтобы понять, о чем идет речь, нужно обсудить сначала саму игру. Пусть два игрока бросают поочередно кубик, шесть граней которого имеют номера от единицы до шести. Эта нумерация обычно обозначается просто числом точек на гранях. После бросания кубика игроки по условленным заранее правилам устанавливают, кто и сколько выиграл. Обычно каждая из граней выпадает совершенно случайно с вероятностью $1/6$. Почему же случайно?

Дело в том, что до полного успокоения кубик успевает совершить очень много кувырканий. Допустим, например, что кубик совершает 100 оборотов. Тогда, чтобы повторно выпала та же самая грань, кубик нужно бросать с точностью, не меньшей $1/600$. Здесь цифра 6 учитывает число граней. С такой точностью повторить бросок кубика практически невозможно. Более того, если бы в бросании кубика появилась повторяемость, то второй игрок мог бы заподозрить первого игрока в шулерстве. Итак, за случайность в данном случае ответственны руки игроков. И то, что выпадение чисел случайно, говорит скорее в пользу несовершенства игроков, не умеющих точно координировать свои движения, чем в пользу их сознательного поведения.

Вместо бросания кубика можно было бы придумать устройство, обеспечивающее совершенно хаотическое движение кубика в закрытом от игроков ящике. Время от времени игроки открывали бы крышку этого ящика и считывали бы результат. Вот здесь-то мы и обнаруживаем объективно происходящий случайный процесс. А именно, движение кубика в ящике можно рассматривать как аналог хаотического теплового движения. Следовательно, кубик в закрытом ящике обладает энтропией $S = \ln 6$. Как только крышка открывается и оба игрока бросают взгляд на кубик, происходит следующее. Энтропия кубика коллапсирует в нуль, поскольку теперь грань кубика точно определена с вероятностью единица. Вместе с тем, у каждого из игроков появляется информация $I = \ln 6$, которая может затем развиваться в последующие события: один из игроков может побледнеть, а другой улыбнуться от радости. Но для того чтобы эта информация была воспринята, каждый из игроков должен непременно уничтожить часть своей упорядоченной структуры и перевести в хаос, т.е. в энтропию, не менее чем $I = \ln 6$ своей собственной информации.

Допустим теперь, что наши игроки решили вместо кубика использовать броуновскую частицу, чтобы полностью исключить любую возможность регулярности движения. Нам довольно безразлично, какую позицию они решили считать выигрышной, и предположим просто, что они периодически измеряют положение частицы, а потом возвращают ее в начало координат. Пусть эта частица представляет собой пылинку, парящую в воздухе сосуда объемом 1 см^3 . Движение такой пылинки происходит совершенно независимо от наблюдателей и абсолютно хаотично. Именно здесь-то и был бы уместен оборот: "Бог играет в кости". Но не будем спешить.

Рассмотрим, насколько случайно рассматриваемое движение. В одном кубическом сантиметре воздуха содержится порядка $N \sim 10^{19}$ молекул. Следовательно, на одну молекулу приходится объем $V_0 \sim 10^{-19} \text{ см}^3$. Если мы хотим зафиксировать каждую из молекул в объеме, не меньшем V_0 , то согласно формуле (29) конфигурационная часть энтропии газа составит величину, не меньшую $N \sim 10^{19}$. Допустим теперь, что мы хотим зафиксировать, т.е. как бы "заморозить" это состояние. Тогда оно станет обладать информацией $I \sim S \sim 10^{19}$. Пусть к тому же у нас появилось желание контролировать эту сложную систему, подправляя ее каждый раз через промежутки времени $\tau \sim l/c_s \sim 10^{-11} \text{ с}$. Здесь $l \sim 10^{-6} \text{ м}$ — среднее расстояние между молекулами, а $c_s = 300 \text{ м с}^{-1}$ — скорость звука. Мы видим, что для управления движением газа необходимо иметь поток информации, превращаемый в энтропию, масштаба $\sim 10^{30} \text{ с}^{-1}$. Эта величина в 10^{10} раз больше, чем может обеспечить поток солнечной энергии на 1 см^2 . Другими словами, если у кого-то и появилось бы желание помочь одному из игроков, то он должен был бы обладать духовным потенциалом, способным поддерживать упорядоченное движение молекул за счет хаотизации потока информации масштаба приходящего от Солнца на один квадратный километр.

Поэтому более правильным будет сказать, что не Бог играет в кости, а наоборот, из-за полного безразличия Бога к данной игре она протекает на базе чистой случайности, порождаемой стихийной Природой.

Случайность можно считать неотъемлемым свойством материи, находящейся в тепловом движении.

Наблюдение за случайным процессом обнаруживает хаотичность последовательных числовых значений случайной величины. Поэтому наиболее правильный подход к их описанию базируется на понятиях вероятностей или функций распределения вероятностей, если случайная величина может рассматриваться как непрерывная. Если в рассмотрение включаются случайные события, то при наличии информационных связей их следует анализировать с учетом одновременно протекающих сложных событий у наблюдателя или, в общем случае, во внешнем Мире.

18. Броуновское движение

Рассмотрим теперь движение броуновской частицы более подробно. Мы начнем с одномерного движения классической частицы. Наиболее удобный подход к описанию движения такой частицы опирается на уравнение Ланжевена

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F}{m}. \quad (79)$$

Здесь v — скорость частицы, γ — коэффициент трения, m — масса частицы, а F представляет собой случайную силу, создаваемую хаотическими ударами молекул о частицу.

Пусть при $t = 0$ скорость частицы равна нулю. Тогда согласно (79) имеем

$$v = \frac{1}{m} \int_0^t \exp[-\gamma(t-t')] F(t') dt'. \quad (80)$$

Если среднее значение силы $\langle F \rangle = 0$, то и среднее значение скорости равно нулю. Однако среднеквадратичное значение отлично от нуля и равно

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t \exp[-2\gamma t + \gamma(t' + t'')] \langle F(t') F(t'') \rangle dt' dt''. \quad (81)$$

Так как удары молекул совершаются очень часто, то сила F имеет очень малый масштаб временной корреляции, так что приближенно можно считать $\langle F(t') F(t'') \rangle = F^2 \tau \delta(t' - t'')$. Здесь F^2 — характерный масштаб квадрата силы, а τ — характерное время корреляции. После этого выражение (81) принимает вид

$$\langle v^2 \rangle = \frac{F^2 \tau}{2m^2 \gamma} [1 - \exp(-2\gamma t)]. \quad (82)$$

Как мы видим, при малых t среднеквадратичное значение $\langle v^2 \rangle$ возрастает со временем как $\langle v^2 \rangle = F^2 \tau m^{-2} t$, а при $t \rightarrow \infty$ оно стремится к постоянному значению $F^2 \tau / 2m^2 \gamma$. Но при тепловом равновесии это предельное значение должно равняться T/m , так что получаем

$$D_v \equiv \frac{F^2 \tau}{2m^2 \gamma} = \frac{\gamma T}{m}. \quad (83)$$

Здесь мы ввели обозначение D_v для коэффициента диффузии по скорости. Согласно (82) при малых значениях t величина $\langle v^2 \rangle = 2D_v t$. Введем еще в рассмотрение

функцию распределения по скоростям $f(v, t)$. Если бы случайная функция отсутствовала, то все значения скорости убывали бы как $v_0 \exp(-\gamma t)$. В этом случае функция распределения изменялась бы по закону $f(v, t) = e^{\gamma t} f_0(v e^{\gamma t})$, где $f_0(v_0)$ — распределение по скоростям при $t = 0$.

Легко видеть, что при этом

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (vf).$$

С другой стороны, если γ обратилась бы в нуль, а случайная сила присутствовала, то возникла бы диффузия по скоростям. В самом деле, при этом

$$f(v, t + \Delta t) = f(v - \Delta v, t) \cong f(v, t) - \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (\Delta v)^2,$$

где Δv можно найти по формуле (80). Усредняя, получим $\langle (\Delta v)^2 \rangle = 2D_v \Delta t$. Соответственно, разлагая левую часть по Δt и устремляя Δt к нулю, получим уравнение диффузии. Вместе с членом с γ оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} vf + D_v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (84)$$

Это уравнение называется уравнением Фоккера–Планка. При больших временах достигается стационарное распределение, которое в силу соотношения (83) принимает вид распределения Максвелла

$$f_m = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right). \quad (85)$$

Время установления максвелловского распределения обычно бывает очень мало.

Если условиться рассматривать промежутки времени значительно большие $1/\gamma$, то движение частицы по координате x можно рассматривать как диффузию. В самом деле, найдем величину

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle v(t') v(t'') \rangle dt' dt''. \quad (86)$$

Поскольку v выражается с помощью формулы (80) через интеграл от случайной силы, а силу мы считаем δ -коррелированной, то

$$\langle v(t') v(t'') \rangle = \frac{T}{m} \exp[-\gamma(t' - t'')],$$

и выражение (86) приводит к соотношению $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, где коэффициент диффузии равен $D = 2T/\gamma m$. Соответственно, по аналогии с выкладками, приведенными к уравнению (84), нетрудно получить уравнение для вероятности распределения частицы $p(x, t)$ по координате x

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (87)$$

Итак, описание эволюции частицы по скорости приводит к уравнению Фоккера–Планка, а диффузия частицы с установившимся по скорости распределением при $\gamma t \gg 1$ описывается уравнением (87).

Если вначале частица локализована по скорости и по координате и ее энтропия очень мала, то со временем энтропия будет монотонно возрастать. В распределении по скорости это происходит за счет приближения к максвелловскому распределению, а конфигурационная составляющая энтропии увеличивается благодаря тому, что частица диффузионно занимает все больший и больший интервал по x .

Перейдем теперь к обсуждению броуновского движения квантовой частицы. Здесь нам хочется подчеркнуть качественную сторону вопроса, и поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь крайне упрощенного варианта движения. А именно, рассмотрим уже обсуждавшийся качественно в разделе 13 пример частицы в ограниченном одномерном сосуде со стенками, находящимися при разных температурах. Тем самым мы сразу учтем возможность протекания неравновесного процесса.

Итак, пусть частица с массой m находится внутри сосуда длиной L , у которого один торец находится при температуре T_1 , а второй при температуре $T_2 < T_1$. Температуру холодильника T_2 мы будем всегда считать ниже температуры нагревателя T_1 . Рассматриваем только одномерное движение.

Пусть в начальный момент частица была локализована в интервале $b \ll L$. Тогда в течение некоторого времени, пока волновой пакет не расплылся, можно использовать классическое рассмотрение. Пусть v — скорость частицы. При столкновении со стенками эта скорость будет случайно изменяться, так что в течение некоторого времени для изменения скорости можно использовать уравнение Ланжевена. Что касается движения по координате x , то нас оно мало интересует: ведь это просто свободный пролет от одной стенки к другой и обратно. Время пролета от одной стенки до другой составляет величину L/v , так что частота столкновений с каждой из стенок равна $v/2L$.

Допустим, что при каждом столкновении со стенкой частица может терять часть импульса, так что ее скорость уменьшается на величину αv_T , где $v_T = (T_1/m)^{1/2}$, а коэффициент α есть просто число, меньшее единицы. Тогда потерю импульса при столкновении с одной из стенок можно описать как равномерное торможение с темпом

$$-\frac{\gamma}{2} v \cong \frac{\alpha v_T}{2L} v.$$

Если приближенно считать, что потери импульса на горячей и холодной стенках не сильно отличаются от этого значения, то для потерь на обеих стенках величина $\gamma = \alpha v_T/L$. Существует хорошо известная флуктуационно-диссипационная теорема, согласно которой доказывается, что тот же самый механизм, который отвечает за диссипацию, порождает и сами флуктуации. В нашем случае — это нагрев частицы за счет диффузии. Учитывая соотношение (83), мы можем записать уравнение Фоккера–Планка в прежнем виде (84), но при $T_2 \neq T_1$ мы имеем разные коэффициенты диффузии на левой и правой стенках, так что

$$D_v = \frac{\gamma}{2m} (T_1 + T_2). \quad (88)$$

Нетрудно видеть, что распределение частицы по скоростям приближается к максвелловскому со средней температурой $T_0 = (T_1 + T_2)/2$.

Обсудим теперь вопрос, как долго нам позволено пользоваться классическим подходом. Для этого нужно понять, как быстро волновой пакет будет расплываться со временем. Сначала посмотрим, что происходит с температурой частицы, если она еще не достигла равновесного значения. Умножим уравнение (84) на mv^2 и проинтегрируем его по скоростям. Предполагая, что распределение по скоростям близко к максвелловскому, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma(T - T_1) - \gamma(T - T_2). \quad (89)$$

Мы воспользовались здесь соотношением (88) для величины D_v .

Согласно (89) частица стремится к равновесию с каждым из торцов с темпом $\sim \gamma$. В равновесии, т.е. при $T = (T_2 + T_1)/2$, частица получает тепло от горячей стенки с темпом $q = \gamma(T_1 - T_2)/2$ и точно с таким же темпом передает это тепло холодной стенке. Другими словами, q — это величина теплового потока, переносимого частицей. В результате теплопереноса в холодную стенку поступает поток энтропии, равный

$$\dot{S}_e = \frac{q}{T_2} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right). \quad (90)$$

Но за счет этого потока энтропии в стенке могут происходить необратимые процессы типа запоминания информации о факте удара частицы о стенку. Можно сказать, что этот рост энтропии свидетельствует о своего рода "измерении", проведенным над частицей. Его можно представить себе как некоторый процесс разрушения взаимно когерентных частей волнового пакета. Грубо говоря, если величина $\Delta S_e \sim 1$, то волновой пакет может расщепиться на две взаимно некогерентные половины. При этом осуществляется коллапс волновой функции: одна из ее половин уничтожается, и тем самым увеличивается запас информации, т.е. "знания" у холодной стенки в отношении пакета, но это знание "покупается" ценой увеличения энтропии стенки $\Delta S_e \sim 1$. Если такой процесс повторяется многократно, то волновой пакет частицы будет в среднем удерживаться в локализованном состоянии. Ширину локализации пакета можно оценить с помощью соотношения (61), которое описывает расширение пакета со временем, если его начальная локализация была равна b : $\langle x^2 \rangle = b^2 + (\hbar^2 t^2 / m^2 b^2)$. Если пакет "поджимается" при последовательных столкновениях с холодной стенкой, то ширина расплывания должна быть масштаба начальной ширины пакета. Другими словами, при $t \sim 1/\dot{S}_e$ имеем $b^2 \sim \hbar^2 / m^2 b^2 \dot{S}_e^2$. Отсюда находим ширину локализации:

$$b \cong \left(\frac{\hbar}{m \dot{S}_e} \right)^{1/2}. \quad (91)$$

Согласно соотношению (90) при температуре T_1 , заметно большей T_2 , величина \dot{S}_e имеет порядок величины $\gamma = \alpha v_T / L$, где α — численный множитель, который можно считать порядка единицы. Таким образом, согласно (91) получаем оценку $b \sim (b_0 L)^{1/2}$, где введенная нами раньше величина $b_0 = \hbar(mT)^{-1/2}$ представляет собой характерную ширину локализации матрицы плотности. Даже для электрона при $L = 1$ см и $T = 10$ эВ

оценка для b дает сравнительно малую величину: $b \sim 10^{-4}$ см. Другими словами, неравновесность приводит к сильной локализации частицы с появлением у нее тех свойств, которые мы обычно и связываем с микро-частицей.

Если $b \ll L$, то поведение такой частицы можно описывать классической механикой. Каждый из возможных волновых пакетов будет иметь ширину "по скорости" масштаба $v_T b_0 / b \ll v_T$. Следовательно, распределение частицы по скоростям можно считать непрерывным с некоторой функцией распределения $f(v)$.

19. Микромир и макромир

Открытие квантовой механики сразу поставило много вопросов, ответы на которые до сих пор нельзя считать вполне удовлетворительными. Впрочем, это не мешает пользоваться мощным теоретическим аппаратом квантовой теории в применении к обширному кругу физических явлений. И нигде еще квантовая механика не потерпела фиаско, объясняя практически все, что было обнаружено экспериментально (мы имеем в виду прежде всего нерелятивистскую теорию). Тем не менее остается вопрос, почему теория предсказывает только вероятности случайных процессов микромира, да и почему эти процессы являются случайными. А самое главное, трудно понять, где лежит граница между квантовой и классической физикой.

То, что классические макроскопические тела не имеют никаких видимых волновых свойств, очевидно каждому из нас. А с другой стороны, все микро-частицы ведут себя в точности так, как предсказывает квантовая механика, свидетельствуя об универсальности волновой сущности микромира. Итак, где же лежит промежуточная область, и если она есть, то каким теоретическим аппаратом ее можно описывать?

В этом разделе мы обсудим этот вопрос чисто качественно, чтобы было яснее, в каком направлении движения мысли будет строиться дальнейшее изложение. Главное, что характерно для предметов нашего окружения, это их постоянная информационная связь. Вся природа купается в лучах солнечного света, переливаясь всеми красками, и этого уже достаточно, чтобы живые существа вели постоянное наблюдение за своим окружением. Аналогичная связь через свет может существовать и между объектами неживой природы. С точки зрения квантовой механики это означает, что положение макротел постоянно "измеряется" окружающими их живыми и неживыми телами. Поэтому ψ -волны макротел подвержены постоянному разрушению когерентности. Мы живем в мире разрушенной когерентности и непрерывно продолжающегося ее разрушения. Попробуем оценить, где пролегает естественная граница между микромиром и макромиром. Для этого мы воспользуемся соотношением (91) для ширины неравновесного волнового пакета.

Пусть имеется макротело с плотностью $\rho = 1$ г см⁻³, имеющее поперечный размер L . Масса этого тела $m = \rho L^3$. На тело прямо или косвенно поступает поток информации, превращаемый затем в энтропию, который можно оценить как $\dot{S}_e = L^2 \dot{S}_0$, где $\dot{S}_0 \sim 10^{19}$ см⁻² с⁻¹ — поток, создаваемый на Земле Солнцем.

Рассмотрим теперь тело, у которого ширина локализации (91) имеет масштаб его собственных размеров.

Такое тело, очевидно, и находится где-то на границе между макро- и микромиром. Подставляя величины, получаем оценку

$$L \sim \left(\frac{\hbar}{\rho \dot{S}_0} \right)^{1/7} \approx 10^{-5} \text{ см.} \quad (92)$$

Разумеется, это слишком грубая оценка, но уже она показывает, что к макромиру принадлежат все тела, видимые глазом, в том числе с помощью микроскопа. Напомним, что длина волны видимого света составляет величину $\lambda \sim 10^{-4}$ см, так что минимальные размеры макротела $\sim 0,1$ мкм заведомо не превышают λ .

Итак, все предметы нашего макроскопического окружения "схлопнули" свои волновые пакеты до размеров, значительно меньших их поперечных размеров, и представляются нам четко очерченными и допускающими описание в классических терминах твердых, жидких или газообразных тел. Для этого достаточно ввести соответствующие классические переменные и действовать в духе классической теоретической механики. Другими словами, мы приходим к обычной динамике.

У микрочастиц, напротив, преобладает волновое поведение. И если мы захотим что-то узнать о поведении микрочастицы, нам придется привести ее во взаимодействие с макроскопическим прибором, поставленным между частицей и наблюдателем. Этот прибор, включая его составные части, все время находится в состоянии информационного обмена с окружением. Благодаря ему волновая функция прибора "живет" в режиме неустранимого разрушения ее когерентности. Именно разрушение когерентности волновой функции прибора и происходит чисто случайно за счет многих связей с классическими объектами окружения.

Сам прибор устроен таким образом, что разным состояниям микрочастицы соответствуют разные состояния "стрелки прибора". Выбор внешним миром одного из показаний стрелки автоматически разрушает когерентность волновой функции микрообъекта. Все это выглядит как чисто случайный процесс, но при его многократном повторении проглядываются черты статистической закономерности, которые описываются на языке превращения чистого ансамбля в смешанный. При этом $|\psi|^2$ играет роль плотности вероятности. Прибор лишь указывает, в какой части из приготовленного прибором полного набора состояний оказалась сама частица при данном измерении.

20. Поведение микрочастицы

Любой предмет или живое существо при взаимодействии с окружающим миром проявляет только малую часть своих свойств или структурных возможностей. Обычный атомарный подход предполагает, что все эти внутренние свойства можно шаг за шагом исчерпать, т.е. полностью их объяснить, если узнать все свойства малых составных элементов объекта в их взаимодействии между собой. Идя по этому пути, мы естественно приходим к простейшему объекту, а именно, к малой частице, проявляющей только свою динамику, т.е. механические свойства.

В классической механике такой объект называется материальной точкой, т.е. телом очень малого размера, не имеющим никакой внутренней структуры. Все, чем обладает такая точка, — это ее масса, положение в

пространстве и отклик на внешние силы в соответствии со вторым законом Ньютона. В одномерном случае — это

$$m\ddot{x}_0 = \dot{p}_0 = F. \quad (93)$$

Здесь x_0 — координата точки, m — ее масса, $p_0 = m\dot{x}_0$ — импульс, \dot{x}_0 — скорость, \ddot{x}_0 — ускорение, F — сила, действующая на точку. В случае потенциального поля сил $F(x_0) = -\partial U/\partial x_0$, где $U(x_0)$ — потенциальная энергия. Такой подход к малой частице кажется абсолютно безупречным и самым точным. Однако он не всегда адекватно описывает взаимодействие такой частицы с внешним миром. Действительно, если эта частица помещена в термостат и с ней производятся очень медленные действия, типа изменения занимаемого ею объема или ее средней кинетической энергии, то более правильным становится ее термодинамическое описание в терминах термодинамических величин — температуры, объема, энтропии, внутренней и свободной энергий и т.д. Описание объекта должно точно соответствовать взаимодействию этого объекта с внешним окружением.

При термодинамическом описании нет нужды интересоваться мгновенным положением частицы в пространстве, а достаточно лишь знать ее усредненные характеристики. Естественно, что в этом случае описание проводится с неполной информацией о частице. Более общий подход к неполному описанию частицы основан на введении функции распределения $f(x, v, t)$ для вероятности нахождения координаты и скорости частицы соответственно вблизи x и v , так что величина $f(x, v, t)\Delta x \cdot \Delta v$ соответствует вероятности попадания координаты в интервал Δx , а скорости — в интервал Δv . Эволюция функции $f(x, v, t)$ определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (94)$$

Для малой частицы описание (94) кажется наиболее адекватным. Оно естественно охватывает оба предельных случая: в одном случае, когда распределение по скоростям и по координате успевает восстанавливаться к распределению Максвелла–Больцмана, получается термодинамический предел, а при

$$f_e = \delta(x - x_0)\delta(v - v_0) \quad (95)$$

мы имеем дело с материальной точкой с координатами $x_0(t)$, $v_0(t)$. В соотношении (95) формально стоят δ -функции, равные всюду нулю, кроме точек, где их аргумент обращается в нуль. Для физических рассуждений удобно считать, что x и v являются непрерывными величинами, а дискретными, так что пространство x, v разбито на очень малые ячейки размером Δx , Δv . Тогда функция (95) должна равняться величине $(\Delta x \cdot \Delta v)^{-1}$ только в одной ячейке, а во всех остальных ячейках она обращается в нуль.

Если подставить функцию (95) в уравнение (94) и проинтегрировать его с весом x , а затем с весом v , то получится уравнение (93). Таким образом, описание движения частицы в динамических переменных x , $p = mv$ отвечает максимальной локализации (95). Будем считать, что координата x изменяется только в пределах ограниченного отрезка длиной L , а скорость ограничена

сверху некоторым пределом c . Тогда полное число ячеек фазового пространства будет равно $N = Lc(\Delta x \cdot \Delta v)^{-1}$. Соответственно, функция (95) отвечает состоянию только с одной занятой ячейкой, т.е. с максимальной информацией $I = \ln N$ и нулевой энтропией. Если выбирать более гладкие распределения, то соответствующие им значения энтропии будут тем больше, чем больше число занятых ячеек Γ : $S = \ln \Gamma$. Соответственно, информация будет уменьшаться: $I = \ln N - \ln \Gamma$. В пределе, когда частица заполнит равномерно весь интервал L , а распределение по скоростям станет максвелловским, энтропия достигнет своего максимального значения при заданной средней энергии. Соответственно, информацию такого состояния следует считать равной нулю, так что предельное значение скорости при заданной температуре T равно просто $c \cong (T/m)^{1/2}$.

Итак, описание с помощью функции распределения легко справляется с задачей перехода к термодинамическому пределу. Однако и у такого описания есть свой собственный, пока еще не очень заметный дефект, — оно относится только к малой частице макромира. Такая частица, по сути дела, находится в постоянном информационном "общении" с внешним миром, причем соответствующее информационное взаимодействие является настолько слабым, что оно никак не сказывается на ее динамике.

В самом деле, кинетическое описание допускает решение вида (95). С помощью кинетического уравнения (94) легко устанавливается, что x_0, p_0 удовлетворяют уравнению (93). Соответственно, это означает, что если координата x равнялась величине $x_0(t)$ в момент времени t и величине $x_0(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$, ее скорость определяется как $(x_0(t + \Delta t) - x_0(t))/\Delta t$. Другими словами, для измерения скорости требуется дважды измерить координату: в момент времени $t + \Delta t$ и в момент времени t . Только будучи уверенным, что повторное измерение не нарушает состояния частицы при первом измерении, можно говорить о существовании скорости v_0 и, соответственно, об импульсе p_0 , который входит в уравнение динамики (93). Разумеется, измерение и взаимодействие частицы с прибором — это объективно протекающие процессы. Поэтому более правильным является утверждение, что уравнения динамики базируются на предположениях о том, что частица находится в постоянной информационной связи с внешним миром, и эта связь не нарушает динамических свойств частицы. Именно эти характеристики уместно связать с объектами макромира. Однако для частиц микромира, как показало открытие квантовой механики, исходные положения об одновременном существовании координаты и импульса частицы оказываются неверными.

В основе квантовой механики лежит совершенно новый подход к процессу измерения, точнее сказать, к информационному взаимодействию микрочастицы с предметами макромира. А именно, основной принцип квантовой теории состоит в том, что сам процесс измерения, который, казалось бы, может допускать предельно малый обмен энергией между частицей и прибором, тем не менее оказывает существенное влияние на динамику микрочастицы. Каждое измерение существенно меняет состояние микрочастицы, поэтому повторное измерение может относиться только к новому состоянию, а прежнее оказывается нарушенным самим

измерением. Как же в этом случае описывать микро-частицу?

Первый вывод напрашивается сам собой. Если каждое измерение что-то разрушает, то закономерность можно уловить, только проводя много аналогичных экспериментов. Это значит, что каждое отдельное измерение может давать несколько отличные от других результаты: события будут случайными, и только усредненные статистические результаты смогут выявлять закономерность. Но ведь то же самое имеет место и при описании с помощью функции распределения $f(x, v, t)$. В чем разница? Разница заключается в том, что макроскопическое описание допускает решение (95) с минимальной энтропией, которое основано на возможности повторных измерений без нарушения состояния частицы, а в микромире нарушение состояния происходит при любом измерении.

Условимся называть решение (95) с минимальной энтропией чистым классическим ансамблем: многократные измерения, проводимые над таким состоянием будут давать всегда один и тот же результат. Именно этот факт и соответствует утверждению $S = 0$. Но кроме чистого состояния (95) существуют состояния с $S \neq 0$. Мы их будем называть смешанными. Заметим, что любое смешанное состояние можно рассматривать как композицию чистых:

$$f(x, f, t) = \int c(x_0, v_0, t) f_0 dx_0 dv_0, \quad (96)$$

где $c(x_0, v_0, t)$ — функция переменных x_0, v_0 , совпадающая по виду с $f(x, v, t)$.

Но и квантовая частица может находиться в смешанном состоянии: это просто случайно выбранный представитель из статистического ансамбля с некоторым распределением вероятностей по отдельным состояниям, которые можно назвать чистыми. Частица в смешанном состоянии взаимодействует с внешним миром так, как будто не весь ее информационный потенциал принимает участие в таком взаимодействии. В пределе максимума энтропии и минимума информации для квантовой частицы также применимо термодинамическое описание в терминах температуры и энтропии.

Утверждение квантовой механики состоит в том, что даже в чистом квантовом состоянии частица при взаимодействии с макроприбором проявляет себя как случайный объект, требующий статистического описания. Постараемся понять, почему логика квантовой механики естественно приводит к волновому уравнению. Допустим, что у нас имеется прибор, который может измерять координату частицы. После каждого измерения состояние частицы разрушается, т.е. превращается в нечто такое, что либо не может быть чистым состоянием, либо переводится в другое чистое состояние, но явно отличающееся от исходного. Повторное измерение координаты чистого состояния не сможет дать результат, который имел бы прямое соответствие с первым измерением координаты. Поэтому самое естественное допущение состоит в том, что измерения координаты будут давать некоторую статистическую закономерность. Пусть $p_x(x)$ есть плотность вероятности для получения результата измерения координаты частицы в интервале $(x, x + dx)$.

Кроме координаты y частицы есть вторая динамическая характеристика — импульс p . Импульс p нельзя измерить прибором, измеряющим координату: если запрещены повторные измерения, не разрушающие состояния, то скорость частицы найти по результатам измерения ее координат нельзя. Следовательно, импульс нужно измерять другим прибором, например, по импульсу отдачи при отражении от зеркальной перегородки прибора, который может затем замерить импульс этой перегородки. Пусть $p_p(p)$ есть вероятность обнаружения импульса частицы в интервале $(p, p + dp)$.

Итак, можно производить два несовместимых вида измерений: измерять либо координату частицы, либо ее импульс. Эти измерения могут производиться над одним и тем же состоянием частицы, но совершенно разными приборами. В каждом случае говорят о полном наборе измеряемых величин и, соответственно, о полном измерении.

Пусть состояние частицы эволюционирует во времени. Тогда получаемые приборами вероятности будут функциями времени: $p_x = p_x(x, t)$, $p_p = p_p(p, t)$. Постараемся понять, что можно сказать об этих вероятностях с помощью логических и наглядных физических соображений. Чтобы не усложнять рассуждений, мы допустим, что частица движется свободно, т.е. $U = 0$. В этом случае энергия $\varepsilon = p^2/2m$, поэтому измерение функции распределения по импульсам автоматически дает функцию распределения по энергии.

Допустим, что мы создаем состояние с точно заданным импульсом $p = p_0$ и точно заданной энергией $\varepsilon_0 = p_0^2/2m$. Такое состояние с точки зрения механики абсолютно стационарно во времени, и поэтому вероятность p_x никак не должна зависеть от времени. Но это означает автоматически, что p_x не должна зависеть от x , поскольку при равномерном смещении по x мы снова должны получить стационарное состояние.

Итак, стационарное состояние отвечает вероятностям: $p_x = \text{const}$, $p_p = \delta(p - p_0)$. Рассмотрим теперь слабонестационарное состояние, когда p_x является медленно меняющейся функцией координаты x и времени t , а $p_p(p)$ является узко локализованной функцией вблизи значения $p = p_0$.

Если ширина локализации частицы по x очень велика, то и прибору, измеряющему положение частицы нет необходимости стремиться к очень точной локализации частицы: для обнаружения медленного изменения p_x вдоль x масштаб Δx для измерения частицы может быть большим. Но тогда мы приходим к почти классической частице и естественно считать, что $p_x(x, t)$ будет переноситься со скоростью частицы, которая близка к p_0/m : $p_x \cong p_x(x - p_0 t m^{-1})$. Таким образом, мы получаем аналог соотношения (95) с той лишь разницей, что масштаб локализации по x достаточно велик и вероятности p_x , p_p относятся к показаниям разных приборов, так что их нельзя объединить в одно произведение (95).

По аналогии с выражением (95) допустим, что существует такая функция $W(x, p)$, которая при интегрировании по p или x дает, соответственно, выражения $p_x(x)$ или $p_p(p)$:

$$p_x(x) = \int W(x, p) dp, \quad p_p(p) = \int W(x, p) dx. \quad (97)$$

Функция $W(x, p)$ называется функцией Вигнера. В классическом случае $W(x, p)$ должна совпадать с функцией распределения по x и p , но в квантовом случае это не так, поскольку измерения значений x и p производятся разными приборами. Соответственно, $W(x, p)$ не обязательно должна быть знакоположительной и даже действительной функцией. Кроме того, функция Вигнера может не распадаться на произведение функции только от x и функции только от p . И, наконец, для случая плавного распределения $p_x(x)$ по x функцию $W(x, p)$ можно считать близкой к $W(x - p t m^{-1}, p)$ с зависимостью от второго аргумента, сильно локализованной вблизи $p = p_0$. Пока это все не противоречит классическому распределению вероятностей. Для того чтобы произошел переход к квантовому описанию, должна появиться величина с размерностью длины, которая указывала бы, на каких масштабах длины появляется новая физика. Но оказалось, что такой универсальной величины с размерностью длины нет. Зато была найдена универсальная величина \hbar — константа Планка с размерностью действия.

С помощью \hbar и p можно попытаться искать минимальную длину. Например, мы могли бы связать такую длину с величиной \hbar/p и, соответственно, импульс с обратной длиной. Математически более естественно считать, что импульс пропорционален производной $\hbar \partial/\partial x$. Однако среднее значение производной $\partial/\partial x$ при любом распределении $p_x(x)$ обращается в нуль. Поэтому эта производная должна действовать не на вероятность, а на что-то другое, например на какую-то новую величину типа фазы волны в волновом пакете. По аналогии с классическими волновыми полями приходится вводить волновую функцию ψ . Более точно, если $\psi_k(x) = e^{ikx}$, то p определяется как

$$p\psi_k = -i\hbar \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \hbar k \psi_k.$$

Таким образом, для плоской волны импульс $p = \hbar k$, где k — волновое число, а постоянная Планка \hbar указывает на то, что у одной единственной частицы импульс p при заданном значении волнового числа k не может быть сколь угодно мал, а ограничен снизу квантом действия.

Функция ψ должна быть каким-то образом связана с вероятностями $W(x, p)$, $p_x(x)$, $p_p(p)$. Допустим, что ψ зависит также от времени, скажем, по закону

$$\psi_k(x, t) = \exp(-i\omega t + ikx).$$

Частота ω скорее всего должна зависеть от волнового числа, т.е. $\omega = \omega_k = \omega_k(k)$. Если это так, то путем суперпозиции функций ψ_k можно строить волновые пакеты, распространяющиеся с групповой скоростью. Именно такие пакеты с набором волновых чисел вблизи определенного значения $k = k_0 = p_0/\hbar$ и соответствуют вероятности $p_k \cong p_x(x - p_0 t m^{-1})$ для очень широкого распределения плотности вероятности p_x по оси x . Зная, что у волнового пакета $p_0/m = v_g = \partial\omega_k/\partial k$, и учитывая, что $p_0 = \hbar k$, мы сразу находим закон дисперсии: $\omega_k = \hbar k^2/2m$. Вспоминая, как устроены классические волновые пакеты, мы естественно приходим к соотношению

$$p_x(x, t) = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2. \quad (98)$$



Рис. 1. Восприятие осуществляется при переходе из состояния a в состояние b . В ответ на событие u_i в наблюдаемом объекте U анализатор A фиксирует событие a_i за счет начального запаса информации в питающей системе F

Далее, можно замкнуть соотношения (97), считая, что функция Вигнера равна

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(x) \psi(x') \exp\left[\frac{ip}{\hbar}(x - x')\right] dx'. \quad (99)$$

Другими словами, $W(x, p)$ соответствует фурье-преобразованию матрицы плотности $\psi^*(x)\psi(x')$ по одной из координат, а вероятность $p_p(p)$ равна модулю квадрата амплитуды в фурье-разложении $\psi(x)$ по гармоникам вида $\exp(ikx)$, где $x = p/\hbar$.

Итак, логика информационного взаимодействия микрочастицы с макроприбором в предположении разрушения состояния при измерении и существования кванта действия \hbar неумолимо приводит к волновой механике, затем к уравнению Шрёдингера и вероятностному истолкованию ψ .

21. Восприятие

Измерение в квантовой механике — это сугубо необратимый информационный процесс, и для его описания нам понадобятся некоторые вспомогательные рассуждения и построения. Напомним еще раз, что для информационных процессов важна не столько энергетическая (которая тоже необходима), сколько содержательно-смысловая сторона передаваемых или принимаемых сигналов. Динамика — это обмен импульсом и энергией, информатика же — это обмен символами между партнерами, участвующими в процессе информационного взаимодействия.

Здесь мы обсудим информационный аспект процесса измерения, который можно назвать детектированием или восприятием сигналов, подготовленных анализатором. Непосредственно с измеряемым объектом U (unity) взаимодействует именно анализатор A , который может находиться в одном из состояний a_i . Мы будем для простоты считать, что все эти состояния эквивалентны между собой и связаны с объектом измерения таким образом, что все a_i равновероятны. Пусть полное число состояний a_i равно N . Тогда вероятность любого из этих состояний равна $1/N$. Измерение считается выполненным, если состояние a_i зарегистрировано детектором-получателем информации. Далее эта информация может быть воспринята. В этом разделе мы обсудим именно само восприятие.

Будем считать, что детектор состоит из двух частей — получателя информации P (perceptor) и питающей системы F (feeder), которая осуществляет информационную подпитку системы P . Пусть P и F также содержат ровно по N элементов. Допустим, что до получения

информации система P является чистой, т.е. лишенной какой-либо начальной информации.

Систему без информации можно представлять себе в двух вариантах: либо это просто набор N чистых ячеек, либо у этих ячеек быстро и хаотически меняются состояния, скажем, от нуля к единице и обратно. В первом случае мы имеем дело просто с памятью M (memo), к рассмотрению которой нам также придется прибегать в дальнейшем. А во втором случае мы имеем как бы термостат с чисто тепловым движением или его хаотическим аналогом. Поэтому мы будем обозначать его буквой C (capicity). В случае M мы имеем систему с равными нулю как информацией, так и энтропией, а в случае C в исходном состоянии информация равна нулю, а энтропия достигает максимального значения $S = \ln N$. В данном разделе мы рассматриваем чисто физические процессы с возможностью обмена информацией с внешним миром, и поэтому для наших рассуждений большее удобство представляет исходно стохастизированная система с нулевой информацией и максимальной энтропией, т.е. система типа C .

Рассмотрим теперь систему F , которая может служить источником информационной подпитки рецептора P в состоянии C . Будем считать, что F также состоит из N ячеек, но имеет только одну заполненную или возбужденную ячейку. Энтропия F равна нулю, а информация $I = \ln N$.

Рассмотрим, далее, модель восприятия для чисто классического случая, когда выпадение случайного значения измеряемой величины никак не связано с процессом измерения. Пусть система U имеет N состояний u_i , которые могут реализовываться с равной вероятностью $1/N$. Будем считать, что между состояниями измеряемого объекта u_i и состояниями анализатора a_i имеется взаимно однозначное соответствие, так что выпадение u_i немедленно влечет за собой событие a_i .

Таким образом, в классическом случае мы имеем как бы одно событие (u_i, a_i) . Например, изменение направления ветра u_i меняет направление флюгера a_i , и если эти направления будут затем наблюдаться каждый час, то мы получим цепочку случайных событий (u_i, a_i) . Но эти события пока не восприняты и не "поняты". Чтобы произошло восприятие, должен протечь необратимый процесс записи факта a_i где-то в регистрирующем приборе. Такая запись может быть организована следующим образом (рис. 1).

После того, как в системе U произошло событие u_i , анализатор, пробегаая последовательно ячейки U и обнаруживая факт u_i , откликается на u_i событием a_i за счет запаса информации в питающей системе F . Эта система устроена почти так же, как и анализатор A , но находится

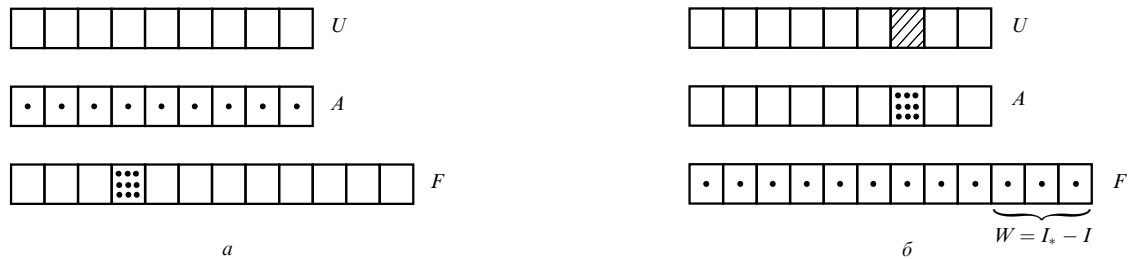


Рис. 2. Запись события u_i в анализаторе A при неполном использовании информации I_* питателя F : избыточная информация $W = I_* - I$ теряется из-за диссипации в окружении

в состоянии максимального порядка, когда только одна из ячеек заполнена, а остальные ячейки пусты. Исходная информация события u_i , например выпадения одной из граней кубика, равняется $\ln N$, где N — число ячеек U . Анализатор A откликается на это тем, что в соответствующей u_i ячейке a_i появляется сигнал. При этом информация системы A скачком увеличивается от нуля до $\ln N$, а энтропия падает от начального значения $\ln N$ до нуля. В соответствии со вторым началом термодинамики такое падение энтропии возможно только за счет хаотизации системы питания F , энтропия которой возрастает от нуля до $\ln N$.

Обратим внимание на то, что при взаимодействии систем A и F полная энтропия сохраняется. Это означает, что процесс передачи информации от F к A является полностью обратимым: от состояния систем A, F на рис. 1,б можно вернуться к состоянию A, F рис. 1,а без нарушения второго начала термодинамики. Поэтому на этом этапе появление сигнала a_i в анализаторе не носит еще характера необратимой записи информации.

Но нужно иметь в виду, что практически такой идеальный прибор осуществить трудно в силу естественных внешних помех. Поэтому более реальное устройство для детектирования сигнала должно выглядеть так, как изображено на рис. 2.

Если за счет необратимых процессов часть информации питателя F может быть потеряна, то нужно "подкормить" и расширить сам питатель, т.е. следует увеличить его запас информации. Это можно сделать путем увеличения числа N_* его ячеек, так что $N_* > N$ и $I_* > I$. Теперь в процессе записи информации, находящейся в A , часть запаса информации I_* может быть потеряна, т.е. разрушена из-за диссипативных взаимодействий с окружающей средой. При этом информация $W = I_* - I = \ln(N_*/N)$ отдается внешней среде в виде потерь (waste). Можно сказать, что взаимодействие с равновесной средой приводит к увеличению энтропии системы $A + F$ на величину W . Введем величину $\eta_I = I/I_* \leq 1$, которую естественно назвать информационным КПД или информационной эффективностью. Ясно, что все реально протекающие процессы имеют КПД $\eta_I < 1$.

Если $\eta_I < 1$, то процесс регистрации сигнала a_i становится необратимым: просто так вернуться от рис. 2,б к рис. 2,а уже нельзя. Поэтому мы можем сказать, что теперь сигнал a_i "воспринят", или "записан". Нетрудно видеть, что кроме анализатора A , изображенного на рис. 2, можно представить себе еще один или даже несколько аналогичных анализаторов. Все они, разумеется, "увидят" один и тот же сигнал u_i . Пусть, например, U — это кубик с занумерованными гранями, а событие u_i — случайное выпадение одной из граней.

Анализаторы типа A — это игроки, следящие за тем, какая грань кубика окажется сверху. Зарегистрированные ими события a_i — это то, что они увидели и отметили в своей памяти.

Игроки могут захотеть бросить кубик повторно. Но перед этим они должны подготовиться к восприятию результата нового бросания. Для этого следует "очистить" анализатор A от сигнала (рис. 2,б), перебрасывая запись сигнала в другую систему памяти точно таким же процессом, как из сигнала u_i был получен сигнал a_i . Кроме того, нужно "запитать" информацией питатель F . Для этого можно воспользоваться точно таким же процессом, каким F "запыхивал" A , а именно, нам следует иметь питатель F' с информацией $I_{**} > I_*$, и затем с эффективностью $\eta_I = I_*/I_{**} < 1$ мы можем перевести F в состояние на рис. 2,а. Другими словами, чтобы бросать кубик и воспринимать результаты этих событий, нужно "питаться" информацией откуда-то извне.

Информационный процесс на рис. 2 включает в себя два необратимых процесса: само событие u_i и регистрацию события a_i с помощью F и с потерей информации $I_* - I$, т.е. с возрастанием энтропии объединенной системы $A + F$. Событие u_i приходит извне и может быть либо чисто случайным, либо представителем вполне регулярной последовательности. Что же касается процесса в системе $A + F$, то это типично необратимый процесс с возрастанием энтропии и потерей информации W . Случайность или неслучайность цепочки последовательных актов восприятия целиком определяется входом, т.е. наличием или отсутствием регулярности в последовательности событий u_i .

Допустим теперь, что объект U является не классическим, а квантовым. Тогда ячейки на рис. 2,а отвечают собственным функциям полного базиса, а сам объект U представляет собой суперпозицию этих собственных функций. Анализатору A не остается ничего другого, как тоже быть квантовым объектом, так что его ячейки, соответствующие условным показаниям стрелки прибора, также являются собственными векторами, коррелированными с U . Собственно измерение происходит, когда в игру вмешивается необратимая система F , связанная с внешним миром. Именно она и совершает необратимый процесс "измерения", соответствующий переходу от рис. 2,а к рис. 2,б. При этом система F увеличивает свою энтропию, а системы U и A одновременно коллапсируют в u_i, a_i . Через систему F квантовые системы U, A приходят в соприкосновение с внешним классическим миром. Это соприкосновение разрушает когерентность исходных состояний систем U, A и сразу же коллапсирует их в u_i, a_i . При многократном проведении однотипных измерений, коллапс будет

случайно приходится то на одну, то на другую ячейку, так что усредненная по многим измерениям картина приобретет характер смешанного состояния, описываемого статистически, например, с помощью матрицы плотности.

Итак, именно система F служит границей между квантовым и классическим миром. В интервале времени между измерениями квантовое описание выражается через эволюцию волновой функции ψ чистого состояния или матрицу плотности ρ смешанного состояния.

Приведенные рассуждения являются довольно общими и пока еще не дают прямого рецепта для описания реальной связи и взаимодействия между квантовым микромиром и классическим макромиром. Чтобы перейти к этому описанию, нам следует познакомиться с еще одним очень важным явлением — флуктуациями. Но перед этим хотелось бы сделать одно общее замечание.

Сложные физические объекты могут быть описаны с разной степенью подробности, и не только потому, что точное описание требует больших усилий или большего объема компьютерных расчетов. Весь наш опыт показывает, что при взаимодействии с внешним миром физические объекты никогда не раскрывают весь свой внутренний потенциал сложности. Соответственно, неполное или даже феноменологическое описание физических явлений или физических объектов иногда лучше отвечает и сути дела, и пониманию того, что происходит. В особенности, это относится к коллективным явлениям, когда огромное количество частиц оказывается вовлеченным в общеколлективное движение. Так, например, газодинамика лучше и более адекватно описывает ветровые потоки, чем просто молекулярная динамика. Точно так же процессы, связанные с тепловым движением атомов, лучше и более доступно для понимания описываются термодинамикой и статистической физикой. Можно сказать и по-другому: существуют физические явления, для которых неполное описание с пренебрежением излишних деталей является более адекватным и даже лучше отражает суть описываемых процессов.

В частности, статистическое описание с введением вероятностей и усреднением по распределениям вероятностей лучше соответствует описанию объектов, составленных из очень большого числа атомов. Если число атомов уменьшать, то на фоне вероятностного описания, которое не теряет своего усредненного по многим однотипным процессам смысла, начинают выступать и играть все большую роль индивидуальные процессы. Их можно назвать флуктуациями, и далее можно довольно произвольно выбирать степень детализации их описания. Например, движение броуновской частицы можно описывать как диффузию. А можно, повторяя часто измерения, описывать это движение как случайную марковскую цепь. В пределе, следя за частицей через очень малые промежутки времени, мы можем говорить об очень сложной траектории такой частицы. В любом случае, в применении к классической частице у нас не возникает сомнений в возможности сколь угодно точного описания. Однако для квантовой частицы это не так: наблюдение сопровождается взаимодействием с макромиром, и это взаимодействие не может быть сколь угодно малым. Чтобы найти пути к более полному пониманию соответствующих эффектов, целесообразно сначала познакомиться с флуктуациями.

22. Флуктуации и необратимость

Термодинамические соотношения, которыми мы пользовались выше в разделах 2–5, относятся только к усредненным величинам. Это усреднение в реальных физических условиях может происходить как бы само собой, за счет медленности протекающих процессов. Соответственно, и усреднение формально должно производиться только по времени. В статистической физике показывается, что в случае большого числа частиц соответствующее усреднение может производиться не только по времени, но и по фазовому пространству, что в конце концов приводит к каноническому распределению. Однако дискретность, т.е. атомарная структура вещества, полностью не исчезает и проявляется во флуктуациях — малых отклонениях от статистического равновесия. В данном разделе мы познакомимся с простейшими примерами флуктуаций и обсудим их связь с необратимостью.

Рассмотрим опять идеальный газ. Пусть N невзаимодействующих классических частиц находятся в объеме V . Тогда средняя плотность частиц определяется соотношением $n = N/V$. Тепловое движение частиц приведет к тому, что число частиц в некотором заданном малом объеме V_0 не будет точно равно $N_0 = NV_0$, а будет флуктуировать около этого значения. Соответствующие флуктуации находятся очень просто. Пусть сумма по всем частицам вида

$$n_\mu(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (100)$$

представляет собой реальную микроскопическую плотность частиц в точке \mathbf{r} . Здесь δ -функция вида $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ локализована в точке нахождения частицы номера " i ". Теперь мы можем положить $n_\mu = n + \delta n$, где n — это средняя плотность, а величина

$$\delta n(\mathbf{r}) = n_\mu - n = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - n. \quad (101)$$

Функция $\delta n(\mathbf{r})$ представляет собой набор "пиков" на фоне отрицательного однородного значения ($-n$). Среднее значение $\langle \delta n \rangle = 0$. Чтобы найти величину флуктуаций, вводят обычно корреляционную функцию $\langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle$. С помощью (101) формально находим

$$\begin{aligned} \langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \sum_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle - n^2. \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь в первом слагаемом мы оставили только слагаемые с одинаковыми индексами i, j и положили $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$, а во втором слагаемом мы сохранили лишь члены с $i \neq j$. Легко видеть, что полученное соотношение может быть представлено в виде

$$\langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle = n \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{V} \right). \quad (103)$$

С помощью этого соотношения легко найти флуктуацию числа частиц в малом объеме V_0 . Для этого его нужно проинтегрировать дважды по \mathbf{r} и \mathbf{r}' в объеме V_0 . В результате получаем для отклонения δN_0 от среднего

значения $N_0 = V_0 n$

$$\langle \delta N_0^2 \rangle = N_0 \left(1 - \frac{V_0}{V} \right). \quad (104)$$

При $V_0 \ll V$ отсюда следует хорошо известное соотношение $\delta N_0 = N_0^{1/2}$, а при $V_0 = V$ получаем естественный результат, что полное число частиц во всем объеме V не флуктуирует. Относительные флуктуации плотности становятся особенно большими, когда в объеме V находится лишь одна частица: $N = 1$, $n = 1/V$.

Легко проверить, что соотношение (104) сохраняет свой вид и для одной частицы, так что для флуктуации "числа частиц" в объеме V_0 получаем соотношение

$$\langle \delta N_0^2 \rangle^0 = \frac{V_0(V - V_0)}{V^2}. \quad (105)$$

Это соотношение абсолютно симметрично по отношению к внутреннему, V_0 , и внешнему, $(V - V_0)$, объемам. При $V_0 \rightarrow 0$ и $V_0 \rightarrow V$ флуктуации исчезают. А при малом значении V_0 по сравнению с V имеем $\langle \delta N_0^2 \rangle = V_0/V$. Это соотношение имеет очевидный физический смысл: V_0/V — это просто та доля времени, когда внутри объема V_0 находится точно одна частица, так что $\langle \delta N_0^2 \rangle$ равняется единице, умноженной на вероятность попадания частицы в объем V_0 . Мы видим, что для одной частицы квадрат флуктуации числа частиц $\langle \delta N_0^2 \rangle$ равен среднему числу частиц $N_0 = V_0/V$ в объеме V_0 . Другими словами, флуктуации очень велики, и поэтому они могут существенно повлиять на логику некоторых наших предыдущих рассуждений.

Вернемся опять к рассмотренному в разделе 3 процессу получения работы за счет тепловой энергии одной единственной частицы с использованием демона Максвелла, т.е. измерения положения или скорости частицы. Для простоты опять начнем с одномерного случая, считая, что частица находится в термостате с двумя торцами, расположенными на расстоянии L друг от друга по оси x . Сталкиваясь с торцами, частица в среднем поддерживает максвелловское распределение по скоростям с температурой T . Если эффективная масса M звуковой волны, создаваемой ударом частицы в торце, значительно превышает массу m рассматриваемой частицы, то при каждом столкновении с торцом абсолютная скорость частицы изменяется только на малую $\sim m/M$ долю своей величины. Малость величины m/M достигается за счет того, что фононы в веществе из тяжелых атомов также являются "тяжелыми" и медленными. При $m/M \ll 1$ атому придется испытать много столкновений, чтобы восстановить любое нарушение максвелловского распределения. Процесс релаксации в этом случае сходен со случайными блужданиями, описываемыми уравнением Ланжевена. За много столкновений максвелловское распределение обязательно будет восстановлено, и этот процесс нетрудно описать в рамках броуновского движения по импульсам.

Для нас удобен более простой случай, когда $m = M$. При этом приближенно можно считать, что одного лишь удара достаточно для достижения максвелловского распределения в отлетающих от стенки частицах, независимо от того, с какой скоростью частицы подлетели к стенке. Итак, допустим, что одна частица с максвелловским распределением по скоростям заполняет весь

термостат длиной L . Начнем теперь наш мысленный эксперимент по совершению работы. Пусть некоторый детектор зафиксировал факт удара частицы о торец и вслед за этим за время, меньшее b/v_T , на расстоянии " b " от торца вставляется перегородка, запирающая частицу в малом отсеке. Медленно сдвигая перегородку в направлении второго торца можно совершать над ней отрицательную работу W за счет тепловой энергии частицы, равной $T/2$ в случае теплового равновесия.

Кажется, что в этой схеме эксперимента возникает угроза для второго закона термодинамики. В самом деле, фиксируя удар частицы о стенку, мы получаем только один бит информации, поскольку на фоне многих промежутков времени, когда не было ударов и не было поступления новой информации, вдруг лишь один промежуток оказался с сигналом "удар". А это ровно один бит информации. Соответственно, на "усвоение" этой информации с последующим приведением в действие перегородки приходится увеличить внешнюю энтропию S_e на величину $\ln 2$. А вот выигрыш в работе, кажется, может быть гораздо больше: ведь начальный объем " b " можно расширить до величины L , которая может быть гораздо больше L . Соответственно, и энтропия возрастет на величину $\ln(L/b) \gg 1$. Однако не будем спешить с выводами. Оказывается, что для правильности рассуждений нужно учесть наличие флуктуаций.

Начнем с некоторого общего замечания. В статистической физике доказана знаменитая флуктуационно-диссипационная теорема, смысл которой заключается в следующем: механизм любой диссипации является одновременно и механизмом рождения флуктуаций. Именно за счет этого баланса флуктуации никогда не вымирают, а поддерживаются на том уровне, который диктуется дискретностью, т.е. атомарной природой вещества.

В нашем случае диссипация, т.е. максвеллизация вероятности распределения частицы по скоростям, создается при столкновениях с теплыми торцами. Вместе с тем именно столкновения с торцами и служат источником поддержания флуктуаций. Рассмотрим этот процесс несколько подробнее.

Допустим сначала, что у нас имеется облако из многих, скажем, $N \gg 1$ частиц. Пусть $f(x, v, t)$ — функция распределения этих частиц по координате x и скорости v . Если это облако налетает на зеркальную стенку, то оно отражается без искажения, и, соответственно, никаких необратимых процессов не происходит. Но если эта стенка является "теплой", то отражение каждого атома является неупругим, и после многих повторных отражений функция распределения будет приближаться к максвелловской функции. Диссипация, казалось бы, будет "рассасывать" и размывать все малые возмущения, в том числе и те, которые были связаны с атомарным строением облака. Но это, разумеется, не так: микроскопическая функция распределения f_μ будет всегда иметь вид

$$f_\mu = \sum_i \delta(x - x_i) \delta(v - v_i), \quad (106)$$

где координаты частиц x_i , v_i подчиняются микроскопическим уравнениям динамики и тем самым отвечают наиболее полному описанию движения частиц. Соответственно, и флуктуации типа (102) должны сохраняться. Возрождение флуктуаций можно описать как случайный

процесс, при котором из падающего потока с гладкой функцией распределения как бы изымается одна частица, а в обратном потоке появляется частица с некоторыми определенными значениями x_i , v_i , подчиняющимися в среднем статистике неупругого отражения. Таким образом, неупруго отражающая стенка осуществляет одновременно механизмы рассасывания флуктуаций и рождения новых флуктуаций случайной "инжекцией" частиц с одновременным изъятием их из усредненной функции распределения.

Если частиц много, то и сами флуктуации малы, а механизм их возрождения является слабо возмущающим воздействием на усредненное распределение.

Рассмотрим теперь, что происходит при $N = 1$. Пусть по направлению к стенке летит "облако" плотности вероятности $p(x, v, t)$. Где-то внутри него "спрятана" одна единственная частица. За время Δt на поверхность стенки налетает слой $\Delta x = v\Delta t$ этого облака. Толщина этого слоя пропорциональна текущей скорости v . Если мы интересуемся только вероятностью $p(x, v, t)$, то в нашей модели мы должны взять "долю" $\int p(x, v, t) v \Delta t \cdot dv$, относящуюся к вероятности нахождения частицы в данном слое, и превратить ее в максвелловское распределение с "отражением" от стенки. Если на стенку налетало максвелловское распределение, то и от стенки отлетит то же самое максвелловское распределение.

Совсем другой язык описания следует использовать, если мы хотим подробно проследить за флуктуациями. Во всем "облаке" $p(x, v, t)$ находится только одна частица, хотя и не известно, где она расположена. Нетрудно видеть, что неупругое соударение частицы со стенкой можно рассматривать как случайное событие, которое мгновенно уничтожает априорную вероятность $p(x, v, t)$, превращая ее в δ -функцию типа $\delta(v - v_0)\delta(x - v_0 t)$, где v_0 — скорость после соударения в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$. Происходит коллапс, т.е. схлопывание протяженного облака вероятностей $p(x, v, t)$ в узко локализованную δ -функцию. Повторные столкновения частицы с торцом осуществляют тот же самый процесс: налетающая априорная вероятность в какой-то момент времени исчезает, а частица с приписанной к ней δ -функционной плотностью вероятностей отлетает от стенки.

Если в облаке имеется много, скажем, N , частиц с одним и тем же распределением $p(x, v, t)$, то $Np(x, v, t) = f(x, v, t)$ и каждое столкновение "выхватывает" только одну частицу, так что функция распределения "мгновенно" трансформируется из $Np(x, v, t)$ в $(N - 1)p(x, v, t) + \delta(v - v_0)\delta(x - v_0 t)$. При $N \gg 1$ случайный процесс создания флуктуаций не очень сильно нарушает исходное максвелловское распределение. Флуктуации в этом случае происходят по закону $N^{1/2}$ и при больших N становятся относительно малыми.

А для одиночной частицы флуктуации очень велики: они превращают движение частицы в классическое перелетание от одного торца к другому со случайным изменением скорости после каждого удара. Тем не менее, кажется очевидным, что при очень медленном перемещении заслонки-поршня, когда столкновения можно считать очень частыми, усредненное по времени распределение частиц по скоростям можно считать максвелловским. Оказывается, однако, что и это совсем не так, поскольку существуют флуктуации.

Пусть перегородка, расположенная в начальный момент на расстоянии " b " от левого торца и отгородившая частицу от остального объема размером $L \gg b$, начинает медленно двигаться с постоянной скоростью εv_T , где $\varepsilon \ll 1$ — очень малое число, $v_T = (T/m)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость. Частица в малом отсеке будет, в основном, максвеллизирована, так что над перегородкой будет совершаться работа с мощностью

$$P = -\dot{W} = \frac{T}{b} \dot{x} = \varepsilon v_T \frac{T}{b},$$

поскольку среднее давление частицы на стенку равно T/b . Однако существует малая вероятность того, что после отскока от теплой стенки ее скорость будет меньше εv_T . Такая частица никогда не догонит движущуюся перегородку, и, стало быть, с вероятностью масштаба ε давление на перегородке может неожиданно упасть до нуля и никогда больше не восстановиться. В среднем это происходит за $1/\varepsilon$ ударов о стенку, и так как среднее время между соударениями имеет порядок величины b/v_T , то до исчезновения давления перегородка успевает сместиться на расстояние $\Delta x = \varepsilon v_T (b/v_T)/\varepsilon \cong b$. Другими словами, при совершении работы мы можем только удвоить длину отсека с частицей, а затем давление на поршень неожиданно исчезает и дополнительную работу совершить уже нельзя. Энтропию частицы при этом удается увеличить только на один бит, т.е. ровно настолько, насколько увеличилась энтропия окружения при первоначальном измерении удара частицы о стенку. Чтобы совершить дальнейшую работу, можно остановить перегородку и подождать, пока частица догонит перегородку, а затем восстановит свое максвелловское распределение. Измерив факт хотя бы одного "полновесного" столкновения с перегородкой, можно снова расширять объем с частицей. Но на это измерение следует затратить информацию, т.е. увеличить энтропию окружения на один бит. За счет последующего расширения объема опять удастся увеличить энтропию частицы только на один бит, расширяя объем вдвое до следующего исчезновения давления на поршне. Итак, демону Максвелла снова приходится считаться со вторым началом термодинамики.

Заметим, что если вместо одной частицы мы имеем N частиц и эти частицы не взаимодействуют между собой, то эффект исчезновения давления при перемещении перегородки будет приложим к каждой частице в отдельности, так что в среднем давление исчезнет при удвоении объема даже при $N \gg 1$.

На первый взгляд кажется, что наш пример слишком искусственен и что можно найти условия, при которых одним измерением удара о торец можно отгородить частицу на расстоянии " b " от торца, а затем, расширяя объем до полной длины L , увеличить энтропию частицы на величину $\ln(L/b)$ и совершить соответствующую работу за счет тепловой энергии. Однако это не так. Рассмотрим, например, более реалистичный случай, когда частица находится в цилиндрическом термостате радиуса a . Тогда максвелловское распределение может устанавливаться за счет столкновений с боковыми стенками, так что появление медленного продольного движения частицы со скоростью, меньшей скорости поршня, большой роли не играет: частица сможет быстро восстановить продольную скорость за счет максвеллизации распределения боковыми стенками.

Пусть $v_* = v_T/a$ есть средняя частота столкновений частицы с боковыми стенками. Удобно рассмотреть предельный случай $b \gg a$; тогда именно v_* будет определять темп восстановления максвелловского распределения. Казалось бы, при малой скорости расширения $\dot{x} = \varepsilon v_T$, $\varepsilon \ll 1$, проблемы восстановления максвелловского распределения не возникнет и давление на поршне будет в среднем все время равно T/b . Но это не так: в игру вступают эффекты диффузии. Дело в том, что при каждом столкновении с боковой стенкой происходит случайное изменение как поперечной, так и продольной компонент скорости. Поэтому перемещение частицы в продольном направлении принимает характер случайных блужданий с коэффициентом диффузии $D = v_* a^2 = v_T a$. Участок сосуда длиной " b " такая частица заполняет за время $t = b^2/D$, так что скорость перемещения перегородки не должна превышать величины $\dot{x} = b/t = D/b = v_T a/b$, чтобы распределение вероятности по x "не отрывалось" от движущейся перегородки. Но и этого еще мало. При каждом ударе о боковую стенку происходит локализация функции распределения частицы вблизи точки удара, а затем это локализованное облако долго блуждает вдоль оси x . Время $t \sim b^2/D$ — это время блуждания внутри отсека шириной b от одного торца до другого, так что средняя частота столкновений с перегородкой будет порядка

$$v = \frac{1}{t} = \frac{D}{b^2} = \frac{v_T a}{b}.$$

Эта величина при $a/b \ll 1$ гораздо меньше средней частоты столкновений v_T/b для свободно движущейся частицы. Таким образом, в узкой трубке работа, совершаемая частицей над поршнем, оказывается существенно меньше, и большая скорость максвеллизации ничуть не помогает, но даже мешает совершению работы.

Итак, флуктуации играют большую роль, в особенности, если речь идет об одной частице. Подчеркнем, что флуктуации можно рассматривать как составную часть необратимого процесса: диссипация рассасывает последствия флуктуативного поведения, но вместе с тем рождает новые флуктуации. В частности, процесс максвеллизации частицы на теплой стенке можно рассматривать как случайно повторяющийся процесс уничтожения плотности вероятности, текущей к стенке, и рождения узко локализованного по x и v состояния: это типичный коллапс распределения вероятностей для классической частицы.

Рассмотрим теперь квантовую частицу, у которой имеется ограничение $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$ для неопределенностей по координате Δx и импульсу Δp . Пусть эта частица находится в смешанном состоянии, например представляет собой набор волновых пакетов с вероятностью $|C_i|^2$ нахождения в i -м пакете. Такая частица мало отличается от классической, если каждый из волновых пакетов не успевает расплываться за время наблюдения. Столкновение частицы с теплой стенкой приводит к тому, что только один из волновых пакетов остается реально существующим после неупругого отражения: в остальных пакетах частицы нет, и они автоматически уничтожаются. И если в данном процессе для внешнего окружения действительно важно, в каком состоянии отлетает частица, то можно сказать, что происходит коллапс смешанного состояния.

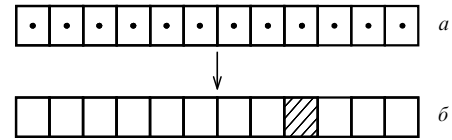


Рис. 3. В результате флуктуаций частица из первоначально однородного состояния (а) локализуется в одну единственную ячейку (б)

Несколько сложнее выглядит картина при коллапсе чистого состояния. Допустим, что на стенку падает очень широкий почти монохроматический пакет с $\Delta x \cdot \Delta p \ll \hbar$. Величина $|\psi|^2$ в таком пакете играет роль распределения вероятностей, и поэтому она, в принципе, может коллапсировать точно так же, как плотность распределения вероятностей классической частицы. Если бы $|\psi|^2$ было классическим распределением вероятностей, то неупругое отражение, сопровождаемое "записью" информации об ударе в самом теле, просто случайно "выхватывало" бы частицу из облака $|\psi|^2$, уничтожив полностью падающую часть и испустив сильно локализованную отраженную часть плотности вероятности. Что-то похожее происходит и с квантовой частицей. Если разрезать падающий волновой пакет на широкие доли толщиной Δx , то при достаточно большой величине Δx коллапс произойдет только в один из слоев. Сам факт локализации по x автоматически уширяет распределение по импульсам на величину $\hbar/\Delta x$. Это уширение не может быть больше меры неупругости столкновения. Если, например, при столкновении скорость частицы меняется на величину масштаба v_T , то минимальный размер неупругого отраженного пакета может составлять величину $\sim \hbar/mv_T = b_0$. Поскольку неупругое отражение частицы происходит от многих атомов стенки, то при $\Delta v \sim v_T$ величина b_0 соответствует длине когерентности пакета. Естественно допустить, что частица попадает только в один из когерентных пакетов. Если по каким-либо обстоятельствам вероятностная локализация частицы окажется существенно больше ширины когерентности, то это означает, что мы опять получаем смешанное состояние с некоторым распределением вероятностей $|C_i|^2$ нахождения частицы в i -м чистом состоянии.

Мы неоднократно будем возвращаться к феномену коллапса волновой функции. А теперь еще раз подчеркнем необратимый характер флуктуационных эффектов. Рассмотрим опять одну единственную частицу в длинной трубке — термостате длиной L . Если мы локализуем частицу в какой-то точке, находящейся в средней части трубки, то она начнет диффундировать вдоль x с коэффициентом диффузии D . Это типично необратимый процесс, сопровождаемый ростом энтропии по закону $S \sim \ln(Dt)$. С другой стороны, каждый удар о боковую стенку можно рассматривать как случайное событие, которое локализует частицу на длине масштаба a . Каждый такой удар — это тоже необратимый процесс, но не с возрастанием энтропии, а с ее убыванием. В чем тут дело?

Этот весьма принципиальный вопрос следует рассмотреть подробнее.

Пусть частица находится в трубке длиной L , разделенной на $N = L/b$ одинаковых ячеек, длиной " b " каждая (рис. 3,а). В начальном состоянии положение частицы не известно, а ее энтропия равна $S = \ln(L/b)$. Пусть теперь

частица оказалась в заштрихованной ячейке на рис. 3,б. Процесс появления частицы можно описать, например, как чисто флуктуационный коллапс: одним ударом о боковую стенку частица "заявляет" о своем положении, а все остальные вероятности обращаются в нуль. Происходит случайное событие со сбросом энтропии частицы до нуля, но при этом обязательно появление одного бита информации в стенке заштрихованной ячейки на рис. 3,б. Эта информация могла бы подвергнуться последующей переработке: воспринимающая система могла бы "записать" эту информацию, как одну из $N = L/b$ возможностей, так что соответствующая величина I равнялась бы $I = \ln(L/b)$. При этом I относилась бы к информации внешней системы наблюдения относительно положения частицы, и мы имели бы $I + S = \text{const} = \ln(L/b)$.

Если удар частицы о стенку запускает в действие внешнюю информационную систему, то с помощью полученной информации можно получать работу за счет теплового движения. А если этого не делать, то воспринятая информация просто "забывается" в необратимом процессе возрастания энтропии. Чтобы получить максимум работы, нужно использовать максимальные возможности для восприятия информации и последующего возрастания энтропии частицы в процессе расширения свободного объема.

В другом крайнем случае можно не предпринимать никаких действий с полученной информацией и даже не "воспринимать" ее, оставаясь в незнании, где именно находится частица. Тогда равновесное "путешествие" частицы по трубке на рис. 3,а будет простым тепловым блужданием с постоянной (в среднем) энтропией $S = \ln(L/b)$.

Таким образом, с информацией о частице можно поступать самыми различными способами. Пусть, например, в стенке каждой ячейки на рис. 3,а имеется датчик, который регистрирует удар частицы о стенку. Если поперечный размер трубки больше длины ячейки "b", то повторные удары в одной ячейке будут редки, так что частица между ударами будет успевать "перепрыгивать" из одной ячейки в другую. Проводя много измерений, можно измерить среднюю частоту столкновений со стенками τ и средний квадрат смещения $(1/2)(\Delta x)^2/\tau$ между столкновениями. По этим величинам можно вычислить коэффициент диффузии $D = (\Delta x)^2\tau$, и затем можно использовать статистическое описание для броуновского движения частицы. Фактически вместо описания индивидуальной частицы мы вводим ансамбль одинаковых систем, и тогда средняя эволюция этого ансамбля соответствует вероятностному, т.е. неполному, описанию динамики частицы.

Соответствующий диффузионный процесс является необратимым с монотонным возрастанием энтропии, если в начальном состоянии она была не максимальна. Например, если вначале ансамбль одинаковых систем соответствовал положению частицы в заштрихованной ячейке с нулевой энтропией, то в последующие промежутки времени "облако" вероятностей будет расширяться по закону $(\Delta x)^2 = 2Dt$, а энтропия будет возрастать со временем по логарифмическому закону. Но если из этого ансамбля выделить одну единственную индивидуальную частицу, то первый же удар о стенку, зарегистрированной некоторой ячейкой, приведет к коллапсу

априорной вероятности $p(x, v, t)$ в одну ячейку с резким сбросом энтропии частицы до нуля.

Кажется, что этот коллапс происходит независимо от наличия или отсутствия датчиков на стенках. На самом деле это не так: процесс коллапса жестко связан с системой измерения. Например, все электрические сигналы от датчиков можно свести на один вход, и тогда будет зарегистрирован только факт удара, т.е. как бы факт коллапса без указания, в какую именно ячейку произошел коллапс. А если сделать необратимые датчики типа миниатюрных фотопластинок, то факт коллапса будет зафиксирован в одной из ячеек, но пока что без немедленного восприятия его внешними регистрирующими приборами.

В последних примерах очень хорошо видно, что для регистрации самого лишь факта коллапса достаточно одного бита информации. Коллапс — это необратимый процесс, точнее, случайное событие, отвечающее удару, а объем соответствующей новой информации I и величина уменьшения предшествующей энтропии S зависят прежде всего от того ансамбля, который моделирует усредненные статистические характеристики движения частицы. Следовательно, величины S и I относятся не столько к частице, сколько к совместной системе — частица плюс ее ближайшее окружение, включая наблюдение и восприятие информации о частице.

Два этих физических явления удобно разделить между собой. Первое событие — случайное появление частицы в одной из возможных позиций с соответствующей "маркировкой" номера ячейки — мы будем называть "хинт" (от английского слова hint — намек). Хинт — это "выпадение" числа на брошенном кубике. Хинт плюс восприятие или "запись" информации составляют собой то, что называется "наблюдением" или "измерением". Полный процесс измерения может идти с сильным изменением — "коллапсом" априорной вероятности и, соответственно, с большим изменением энтропии, относящейся к ансамблю — представителю коллективного аспекта динамики данной частицы.

Итак, измерение в классической механике можно представлять себе как комбинацию (связку) хинта — выпадения данного числового значения для измеряемой величины и последующей регистрации и записи этого значения. Суммарно — это необратимый процесс, сопровождаемый возрастанием энтропии внешнего мира.

Рассмотрим еще один аспект взаимодействия классической частицы с макрообъектом. До сих пор мы считали, что стенки сосуда или термостата имеют строго очерченные геометрические размеры, и вероятностное описание требовалось только для частицы. В общем случае это не так: сами стенки находятся в хаотическом случайном движении, а кроме того, внешние приборы могут быть не достаточны для точного и постоянного во времени слежения за положением макроскопических тел. Допустим, что положение стенок определено с некоторой погрешностью, и имеется некоторая плотность вероятности для распределения положений границы стенки (рис. 4).

На рис. 4 сплошная линия показывает основную (в среднем) границу твердого тела, а пунктирные линии — неопределенность. На эту границу падает "облако" распределения вероятностей $p(x, v, t)$. После неупругого отражения в теле может остаться один бит информации о факте удара, а от тела отлетает частица. Если вдали от

тела эта частица будет зарегистрирована либо прибором, либо самопроизвольным необратимым процессом, для которого факт появления частицы играет определенную роль в дальнейшей эволюции системы, то отраженную частицу следует считать находящейся в локализованном состоянии: $p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$, где \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — координаты сразу после удара при $t = 0$.

Как мы видим, в этих условиях после отскока частицы от границы тела распределение вероятностей частицы коллапсирует, а с неопределенностью самого тела пока еще ничего не происходит: частица может отскочить как от сплошной, так и от любой из пунктирных линий (см. рис. 4). Но если от одной и той же точки стенки отскочит не одна, а две падающие частицы, то точка их пересечения может быть локализована, и во внешний мир будет перенесена информация, что только точка сплошной линии является реальной. Еще двух частиц будет достаточно для того, чтобы зафиксировать угол направления сплошной линии в плоскости чертежа. Произойдет коллапс не только вероятностей для движения частиц, но и коллапс вероятностей расположения твердого тела. Как мы видим, одной лишь информационной связи с внешним миром достаточно для того, чтобы функция распределения вероятностей положения твердого тела коллапсировала в состояние, отвечающее вполне определенному положению классического объекта (разумеется, с точностью до тепловых флуктуаций границы).

Рассмотрим теперь, что происходит с падением и последующим отражением квантовой частицы от макротела с фиксированной границей. Если налетающее "облако" $|\psi|^2$ или матрицы плотности частицы являются достаточно протяженными, то картина будет мало отличаться от классической. Независимо от того, является ли падающее состояние чистым или смешанным, от границы тела при неупругом взаимодействии (с соответствующим "измерением" внутри тела) отразится сильно локализованное "облако". Возникнет лишь ограничение на неопределенность координаты и импульса, соответствующее соотношению неопределенностей Гейзенберга. Но если граница макротела сама имеет неопределенность, отвечающую излишне протяженной волновой функции макротела, то картина изменится. Последовательные отражения одной за другой частиц будут приводить к сужению локализации макротела. И так как распыление квантового пакета макротела происходит очень медленно, то в конце концов пакет приобретет черты классического объекта. Именно взаимодействие с внешним миром превращает макротела в классические объекты с локализованными волновыми функциями. В общем случае при взаимодействии микрочастиц с другими объектами мы получаем два предела: микромир легких частиц и макромир очень массивных тел, с некоторой промежуточной областью между ними для тел с малыми, но макроскопическими масштабами.

23. Измерение в квантовой теории

Обсудим более подробно проблему измерений в квантовой механике. Для этого удобно вернуться к рис. 1, где схематически изображен процесс восприятия информации, возникающей в результате события u_i в физической системе U . Строки A , F рисунков 1, 2 поясняют, как эта информация может быть воспринята. Но для нас сейчас

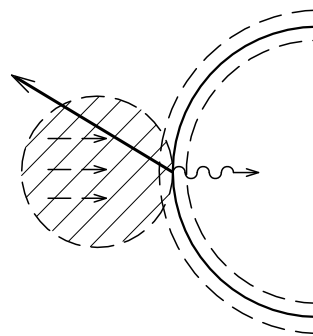


Рис. 4. Падающее на стенку "облако" распределения вероятностей превращается в одну отраженную частицу. Граница твердого тела имеет неопределенность, условно обозначенную пунктирными линиями. Волнистая линия — информация об ударе, "записанная" в макротеле, сплошная стрелка — информация, ушедшая во внешний мир

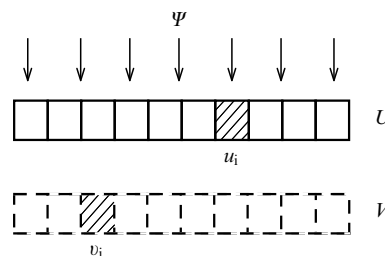


Рис. 5. Селективное измерение $M(u_i)$ в квантовой теории отвечает случайному событию, когда физическая величина U , имеющая возможность принимать одно из N значений, оказывается в одной единственной ячейке u_i : пунктиром отмечена возможность добавления к системе еще одной физической величины v

важна только первая строка U , которая показывает сам факт события u_i . Именно с такого события и начинается измерение будь то классической или квантовой системы.

Следуя логике и обозначениям книги Ю. Швингера "Квантовая кинематика и динамика" (М.: Наука. Физматлит, 1992), будем считать, что событие u_i представляет собой факт измерения, приводящего к селекции u_i среди множества других возможных реализаций физической величины U . Обозначим это событие символом $M(u_i)$. Как показывает рис. 5, символ $M(u_i)$ означает просто, что квантовая частица, которая могла бы быть в любом из N возможных состояний, в данном событии оказывается в ячейке u_i . Другими словами, $M(u_i)$ соответствует коллапсу $U \rightarrow u_i$.

Тот же самый процесс можно разъяснить в нескольких терминах. Допустим, что мы имеем квантовую частицу с волновой функцией ψ , падающую на прибор, т.е. на некоторое макротело, имеющее сложное внутреннее устройство. На входе в прибор имеется анализатор, который указывает, как именно может быть воспринята информация о падающей частице. В квантовой механике это означает способ установления собственных векторов ψ_i , по которым может быть разложена ψ -функция: $\psi = \sum_i c_i \psi_i$. Собственные функции ψ_i считаются ортогональными и нормированными, и каждая из них отвечает собственному значению u_i физической величины U . Пусть имеется N таких функций и, соответственно, число ячеек (см. рис. 5) равно N . Прибор селективного измерения на рис. 5 при каждом акте измерения оста-

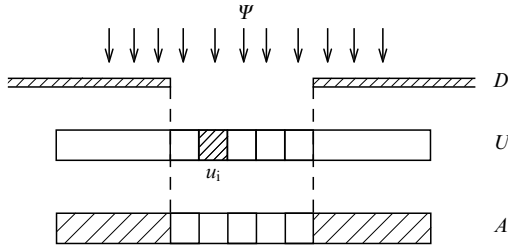


Рис. 6. Диафрагма D может уменьшить число состояний, доступных для регистрации анализатором A (недоступная область заштрихована)

влияет только одну функцию ψ_i . Если все остальные функции уничтожаются, то происходит коллапс $\psi \rightarrow \psi_i$, который соответствует всего лишь тому факту, что подвергающаяся измерению частица "попала" в состояние " i ". Подчеркнем, что при таком селективном измерении с последующим восприятием соответствующей информации факт отсутствия частицы в одной из оставшихся пустых ячеек для последующей "истории" ровным счетом ничего не означает: реальной и содержательной является лишь информация со значением физической величины U , равным u_i .

Единичный акт измерения можно считать чисто случайным, и он явно не достаточен для того, чтобы установить, какова структура ψ -функции. Только повторяя измерения много раз, можно найти средние значения для вероятностей реализации значений u_i рассматриваемой физической величины U . Многократное повторение измерений порождает смешанный ансамбль, который можно описывать матрицей плотности, если в этом есть необходимость. Но сейчас мы сосредоточим наше внимание на самом измерении.

Итак, символ $M(u_i)$ соответствует событию селективного измерения, которое оставляет (или "пропускает") частицу со значением u_i у величины U , отбрасывая (т.е. уничтожая) все другие состояния.

Класс селективных измерений допускает естественное расширение. А именно, пусть в приборе установлена диафрагма D , которая отсекает часть падающей на прибор ψ -функции (рис. 6). Тогда ячейки, попавшие под диафрагму, никогда не будут зарегистрированы. В частности, если диафрагма закрывает все ячейки, кроме " i "-й, то будет отобран подансамбль со значением u_i величины U . А если перекрыть все ячейки, то мы получим измерение, которое естественно обозначать символом 0. Напротив, если полностью открыть диафрагму и не регистрировать, какое именно значение u_i будет получено, то такое крайнее неселективное измерение можно обозначать символом 1. Нетрудно, далее, ввести операции сложения и умножения символов измерения. Операция сложения порождает не столь селективное измерение, когда в результате измерений получается подансамбль, отвечающий всем фигурирующим в сумме значениям величины U , т.е. одно из них нельзя отличить от других с помощью такого измерения. Измерение, которое отвечает сумме по всем u_i , т.е. пропускающее весь ансамбль без разделения его на подансамбли, очевидно, следует считать равным единице. Операция умножения символов измерения обозначает последовательное выполнение измерений (читать справа налево). Из физического смысла введенных операций следует, что

сложение коммутативно и ассоциативно, а умножение ассоциативно.

Свойства элементарных операций под селективными символами измерений записываются в виде

$$\begin{aligned} M(u_i)M(u_i) &= M(u_i), \\ M(u_i)M(u_j) &= 0 \text{ при } i \neq j, \\ \sum_i M(u_i) &= 1, \end{aligned} \quad (107)$$

где символы 0 и 1 отвечают измерениям, которые либо отбрасывают, либо пропускают все системы. По смыслу этих последних измерений они обладают алгебраическими свойствами

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, \quad 0 \cdot 0 = 0, \\ 1 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 0, \\ 1 + 0 &= 1, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot M(u_i) &= M(u_i) \cdot 1 = M(u_i), \\ 0 \cdot M(u_i) &= M(u_i) \cdot 0 = 0, \\ M(u_i) + 0 &= M(u_i). \end{aligned} \quad (109)$$

До сих пор мы имели в виду только одну физическую величину U , действие которой на волновую функцию ψ рассматривается в квантовой механике как оператор

$$U\psi = U \sum_i c_i \psi_i = \sum_i c_i u_i \psi_i.$$

Естественно, что физических величин может быть много. Соответственно, может быть много измерительных приборов. Две физические величины $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ называются совместимыми, если измерение одной из них не разрушает знания, полученного предшествующим измерением другой. На рис. 5 они обозначены символами U , V . Соответствующие селективные измерения $M(u_i^{(1)})$ и $M(u_j^{(2)})$, выполненные в том или ином порядке, порождают ансамбль систем, в которых величины $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ одновременно имеют вполне определенные значения $u_i^{(1)}$ и $u_j^{(2)}$. Соответственно, можно ввести символ составного селективного измерения:

$$M(u_i^{(1)}, u_j^{(2)}) = M(u_i^{(1)})M(u_j^{(2)}) = M(u_j^{(2)})M(u_i^{(1)}). \quad (110)$$

Под полным набором совместимых физических величин $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(k)}$ понимается такой набор физических величин, каждая пара которого совместима, и в то же время не существует никаких других физических величин, совместимых с каждым из $U^{(s)}$. Тогда символ

$$M(u) = \prod_{s=1}^k M(u_i(s)) \quad (111)$$

описывает полное измерение. Оно отвечает максимальному количеству признаков, которые могут быть получены одновременно, без неконтролируемого изменения значения одного из них, полученного в предварительно проведенном измерении. Символические свойства полных измерений также соответствуют соотношениям (108), (109).

Сделаем еще один шаг на пути к расширению класса измерений. А именно, рассмотрим измерения, которые могут приводить к изменению состояния. Пусть символ $M(u_i, u_j)$ обозначает селективное измерение, при котором

воспринимаются только системы в состоянии "j", а возникают системы в состоянии "i". Соответственно, значение u_j физической величины U переводится в значение u_i . Разумеется, $M(u_i, u_i) = M(u_i)$. Нетрудно видеть, что измерения типа $M(u_i, u_j)$ обладают свойством

$$M(u_i, u_j)M(u_k, u_l) = \delta_{jk}M(u_i, u_l), \quad (112)$$

где $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $\delta_{ii} = 1$. В самом деле, левый сомножитель $M(u_i, u_j)$ пропускает только те состояния, у которых величина U принимает значение u_j , т.е. u_k обязано быть равным u_j . Заметим, что если сомножители в (112) поменять местами, то получим

$$M(u_k, u_l)M(u_i, u_j) = \delta_{li}M(u_k, u_j), \quad (113)$$

откуда видно, что умножение символов измерения (112), (113) некоммутативно.

Наряду с полным набором U могут существовать и другие полные наборы: V, W, \dots , которые взаимно несовместимы. Символы измерения вида $M(u_i, u_j)$ можно построить для каждого из таких наборов. Естественно, возникает вопрос о том, как выглядит селективное измерение, связывающее два таких набора. Символом $M(u_i, v_j)$ обозначается процесс измерения, которое отсекает все значения, кроме v_j , у физической величины V и которое выпускает из себя систему в состоянии u_i физической величины U .

Сконструируем теперь составное измерение $M(u_i, v_j)M(w_k, z_l)$. Конечным результатом такого измерения является отбор состояния z_l и перевод его в u_i , т.е. оно должно быть селективным измерением типа $M(u_i, z_l)$. Однако на первом этапе возникает система в состоянии w_k , и только вторая ступень отбирает состояние v_j . Если бы v_j и w_k принадлежали к одной физической величине, т.е. $V \equiv W$, то мы получили бы промежуточный множитель δ_{jk} , равный либо нулю, либо единице. Однако в общем случае разных величин $V \neq W$ можно ожидать, что переходный множитель будет флуктуировать от измерения к измерению. В среднем только некоторая доля состояний, выходящих из W , будет восприниматься второй ступенью измерения составного прибора. Поэтому естественно допустить, что в среднем

$$M(u_i, v_j)M(w_k, z_l) = \langle v_j | w_k \rangle M(u_i, z_l). \quad (114)$$

Здесь величина $\langle v_j | w_k \rangle$ есть число, так что матрица $\langle v_j | w_k \rangle$ характеризует статистическую связь между состояниями V и W . В частном случае $V \equiv W$ имеем, очевидно,

$$\langle v_j | v_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (115)$$

Так как $M(u_i, u_i) = M(u_i)$, то из общего соотношения (114) получаем

$$M(v_j)M(w_k, z_l) = \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, z_l), \quad (116)$$

$$M(u_i, v_j)M(z_l) = \langle v_j | z_l \rangle M(u_i, z_l). \quad (117)$$

Появление числовых множителей типа $\langle v_j | w_k \rangle$ в соотношениях (114)–(117) имеет принципиальное значение для квантовой теории. Формально эти множители возникли как свойство измерений, но, как мы увидим далее, они фактически ведут к принципу суперпозиции

состояний — основному положительному принципу квантовой механики.

Но сначала рассмотрим некоторые простейшие следствия из полученных выше соотношений. Полагая $w_k = z_l$ в (116) и учитывая соотношение $M(w_k, w_k) = M(w_k)$, получим

$$M(v_j)M(w_k) = \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, w_k). \quad (118)$$

Рассмотрим теперь тройное произведение $M(v_j)M(u_i)M(w_k)$, которое мы просуммируем по всем промежуточным значениям u_i . Тогда, с одной стороны, мы получим просто величину (118), а с другой — для первой пары сомножителей можно воспользоваться соотношением (118), а затем воспользоваться связью (117), так что получим

$$\begin{aligned} \sum_{u_i} M(v_j)M(u_i)M(w_k) &= \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, w_k) = \\ &= \sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle M(v_j, w_k). \end{aligned} \quad (119)$$

Сравнивая два последних выражения, находим

$$\sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle = \langle v_j | w_k \rangle. \quad (120)$$

В частном случае, когда $V \equiv W$, получаем

$$\sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (121)$$

Пока это чисто алгебраические соотношения, являющиеся простым следствием введенных выше определений для символов измерения. Но рассмотрим более простое произведение $M(v_j)M(u_i)M(v_j)$. По аналогии с последним выражением в (119) (без суммирования по u_i), получим

$$M(v_j)M(u_i)M(v_j) = p(u_i, v_j)M(v_j), \quad (122)$$

где величина

$$p(u_i, v_j) = \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | v_j \rangle = p(v_j, u_i). \quad (123)$$

Смысл левой части соотношения (122) состоит в том, что прибор отбирает сначала состояние v_j , затем из него отбирается та часть, которая может быть пропущена как u_i , а затем из прибора вновь исходит состояние v_j . Таким образом, $p(u_i, v_j)$ играет роль вероятности для состояния v_j пройти через весь прибор, т.е. $p(u_i, v_j)$ можно интерпретировать как вероятность обнаружить состояние u_i в исходном состоянии v_j . Вероятность p следует считать вещественной неотрицательной величиной. Поэтому естественно принять, что сомножители в (123) являются взаимно сопряженными:

$$\langle v_j | u_i \rangle = \langle u_i | v_j \rangle^*. \quad (124)$$

В силу соотношений (121), (124) матрицу S с матричными элементами $S_{ij} = \langle u_i | v_j \rangle$ следует считать унитарной.

Приведенные выше соотношения можно записать в более привычном виде, если воспользоваться языком волновой механики. Пусть ψ есть измеряемая волновая

функция. Она может быть представлена в виде суперпозиции собственных функций операторов U , V :

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i = \sum_j b_j \varphi_j, \quad (125)$$

где $U\psi_i = u_i\psi_i$, $V\varphi_j = v_j\varphi_j$. Естественно, что символы измерения тоже можно рассматривать как операторы, так что

$$M(u_i)\psi = c_i\psi_i, \quad M(v_j)\psi = b_j\varphi_j. \quad (126)$$

Каждая из функций φ_l может быть выражена как линейная суперпозиция функций ψ_k просто в силу свойств собственных функций (мы допускаем, что эрмитовы операторы V , W обладают всеми нужными свойствами). Пусть это соотношение имеет вид

$$\psi_i = \sum_j S_{ij}\varphi_j. \quad (127)$$

Применим к этому соотношению оператор $M(v_k)$. В правой части этого соотношения он оставит только одно слагаемое с $j = k$, а в левой части вместо $M(v_k)$ можно использовать оператор $M(v_k)M(u_i)$, поскольку $M(u_i)\psi_i = \psi_i$. Но теперь мы можем воспользоваться соотношением типа (118), согласно которому имеем

$$M(v_l)M(u_i)\psi_i = \langle v_l | u_i \rangle \varphi_l, \quad (128)$$

поскольку $M(v_l, u_i)\psi_i = \varphi_l$. Следовательно,

$$S_{il} = \langle v_l, u_i \rangle, \quad \text{т.е.} \quad \psi_i = \sum_j \langle v_j | u_i \rangle \varphi_j. \quad (129)$$

Мы получили соотношение для перехода от одного представления к другому. Если считать, как обычно, что ψ_i , φ_l представляют собой ортонормированные базисы, то нетрудно получить

$$b_j = \sum_i \langle v_j | u_i \rangle c_i. \quad (130)$$

Если построить теперь выражение $|b_j|^2$, то в правой части (130) у нас возникнет суперпозиция слагаемых вида $c_i^* c_i$. Сделаем допущение, что разности фаз у взаимно ортогональных амплитуд не имеют прямого физического смысла и могут быть хаотическими. Тогда после усреднения по фазам получим

$$|b_j|^2 = \sum_i p(u_i, v_j) |c_i|^2, \quad (131)$$

где вероятность перехода определена соотношением (123). Теперь соотношение (131) выглядит как связь между вероятностями, если величины $|b_j|^2$ и $|c_i|^2$ интерпретировать как вероятности. При этом делается (иногда неявное) допущение, что фазы отдельных мод в разложении ψ -функции по собственным функциям являются взаимно хаотическими. Таким образом, измерение в квантовой механике изначально опирается на появление некогерентности у взаимно ортогональных мод.

Вернемся к рис. 5. Селективное измерение $M(u_i)$ намечает только ту ячейку, в которой окажется физическая величина U , если соответствующая информация воспринимается прибором. При этом волновая функция

коллапсирует в ψ_i , а все коэффициенты c_k , за исключением c_i , исчезают. Что касается коэффициента c_i , то он превращается в единицу. Таким образом, в рамках изложенной логики измерение оказывается как бы составленным из двух тесно связанных элементов: символ измерения $M(u_i)$ "указывает пальцем" на величину u_i , а восприятие u_i осуществляет коллапс функции $\psi \rightarrow \psi_i$ и распределения вероятностей $|c_k|^2 \rightarrow \delta_{ik}$.

Символ измерения построен таким образом, что он не определяет еще полностью результат измерения. В частности, если на рис. 5 вслед за "линейкой" клеток u_i величины U расположить аналогичную "линейку" величины V , то можно осуществить процесс, когда первая линейка пропустит только ψ_i , т.е. ψ превратится в $c_i\psi_i$, не будучи еще измеренной. Таким образом, именно символ измерения и играет роль хинта, т.е. намек на то, какая величина может оказаться измеренной. Затем $\psi_i = \sum_j \langle v_j | u_i \rangle \varphi_j$ упадет на вторую линейку, и только там и произойдет окончательный коллапс $\psi \rightarrow \varphi_j$ с соответствующим составным измерением. Если повторять его много раз, меняя ячейки "i", то можно получить соотношение (131), связывающее между собой вероятности $|b_j|^2$ и $|c_i|^2$ с помощью вероятности перехода $p(u_i, v_j)$.

Поскольку в составном измерении $M(v_j, u_i)$ определен порядок выполнения операций, то появляется возможность временной последовательности измерений. В частности, если уровню U отвечает функция $\psi(0)$, то уровню V на рис. 5 можно приписать функцию $\psi(t)$, связанную с $\psi(0)$ соотношением

$$\psi(t) = S\psi(0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \psi(0), \quad (132)$$

где H — оператор Гамильтона. Тогда и S -матрица приобретает смысл оператора перехода от начального времени $t = 0$ к некоторому последующему моменту времени t . А волновая функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера.

Теперь мы можем более точно осознать, в чем состоит принцип суперпозиции. Соотношение (131) означает, что для любой линейной суперпозиции волновых функций, т.е. для любого разложения ψ -функции по любому из базисов, у нас имеется готовая вероятностная интерпретация того, что будет происходить при измерениях: квадраты амплитуд дают вероятности, а квадраты матричных элементов — вероятности переходов. А вся временная эволюция этих будущих возможных элементов процесса измерения определяется линейным уравнением Шрёдингера.

Почему же мы пришли к квантовой механике? Если вернуться еще раз к началу этого раздела и снова пройти по логике введения символов измерения $M(u_i)$, то совершенно не очевидно, что они приведут не к классической механике, а к квантовой. Намек на появление элементов квантовомеханического подхода возникает впервые в формуле (114), когда первый раз вводится матричный элемент $\langle v_j | w_k \rangle$, т.е. число, отличное от тривиальных нуля и единицы в формулах (107)–(109). А при составлении симметричного выражения (122) возник квадрат матричного элемента (123), который можно интерпретировать как вероятность перехода.

Но самый главный и решающий шаг к волновой механике делается при переходе от (130) к (131), когда предположение о хаотичности фаз у взаимно ортогона-

льных амплитуд позволяет сделать вывод о том, что только квадраты амплитуд вида $|c_i|^2$ имеют реальный физический смысл и интерпретируются как соответствующие вероятности.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Все действия над символами перехода мы условились производить в порядке справа налево. Но их можно читать и слева направо, разумеется, в некотором другом понимании. Например, соотношение (114) можно прочитать слева направо, считая, что первый оператор слева воспринимает u_i , а выпускает v_j , второй воспринимает w_k и испускает z_l и т.д. Но можно было бы построить этот же самый процесс в обычном порядке, т.е. получить

$$M(z_l, w_k)M(v_j, u_i) = \langle w_k | v_j \rangle M(z_l, u_i). \quad (133)$$

Появившийся здесь матричный элемент согласно соотношению (124) равен $\langle w_k | v_j \rangle = \langle v_j | w_k \rangle^*$. Смысл прочтения соотношения (133) по элементам справа налево был интерпретирован нами как выполнение операций последовательно во времени, т.е. из прошлого в будущее. Следовательно, прочтение (114) слева направо означает выполнение действий в последовательности из будущего в прошлое. Как мы видим, вся разница между (114) и (133) состоит лишь в комплексном сопряжении операторов. Таким образом, начиная с введения символов составного измерения и далее, мы уже "вступили на тропу" квантовой механики, создавая символическую основу для полностью обратимых операций. Вся последующая логика автоматически приводит к выводу о полной обратимости квантовомеханических процессов: чтобы изменить время, достаточно лишь перейти к комплексно сопряженным величинам. Соответственно, соотношение (122) можно интерпретировать как условие "встречи" прошлого с будущим. В этом месте прибор может разорвать квантовомеханическую причинную связь прошлого с будущим, но на результаты его измерения накладывается вероятностная связь (123).

Из этих рассуждений ясно видно, что логика квантовой механики проводит жесткое разграничение между двумя классами событий. Собственным предметом квантовой механики является изучение полностью обратимых процессов, начиная от некоторого заданного извне состояния и вплоть до входа в прибор, где происходит сильно необратимый процесс коллапса волновой функции. Волновая механика описывает эволюцию волновой функции и предсказывает лишь вероятности тех или иных результатов измерений. Таким образом, волновая механика — это скорее мощный аппарат для изучения возможностей, чем "приземленная" теория реально протекающих процессов. В особенности отчетливо это видно в так называемой "многомировой интерпретации" квантовой механики [27], но мы не будем сейчас отвлекаться на обсуждение этого предмета.

Вместо этого рассмотрим конкретный пример типично квантового процесса — радиоактивного распада. Схематически он изображен на рис. 7.

Допустим, что в точке R находится радиоактивное ядро R , которое при распаде испускает α -частицы. Согласно квантовой механике волновая функция α -частицы состоит из локализованной внутри ядра части и вытекающего вовне волнового потока, условно изображенного на рис. 7 волновыми стрелками. Допустим, что регистрирующий α -частицы прибор состоит из множе-

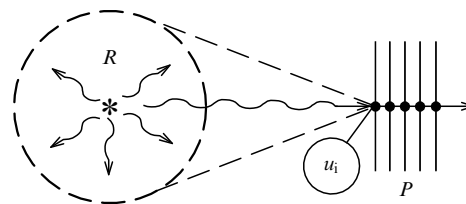


Рис. 7. Схематическое изображение прибора для измерения α -частицы при радиоактивном распаде ядра R . Пунктиром отмечен вариант измерения, когда точное положение ядра R неизвестно

ства тонких пластинок, каждая из которых содержит огромное число ячеек, соединенных со счетчиками, регистрирующими факт прохождения α -частицы через ту или иную из ячеек. Все ячейки находятся в ждущем режиме и не передают никакой информации в запоминающее устройство прибора, если сигналов на ячейках нет.

Пусть теперь в некоторый момент времени t ячейка u_i самой первой пластинки зарегистрировала факт прохождения α -частицы и передала эту информацию для переработки и восприятия внутри прибора. С ψ -функцией при этом произойдут огромные изменения. По отношению к будущему происходит полный коллапс волновой функции в компактный волновой пакет, который будет затем пересекать все остальные пластинки вдоль пунктирной линии, изображенной на рис. 7. Соответственно, только эти ячейки и откликнутся на α -частицу. Но не менее удивительный феномен возникает по отношению к прошлому. А именно, вся волновая функция в прошлом также коллапсирует в волновой пакет, движущийся по направлению к ячейке u_i , так что по скорости частицы v и расстоянию L от R до u_i можно приближенно найти время $t - (L/v)$, когда этот коллапс произошел. В этот расчетный момент не только коллапсирует в волновой пакет вся внешняя волновая функция, кроме бегущего к прибору волнового пакета, но и уничтожается волновая функция α -частицы внутри ядра.

Если начальная волновая функция самого ядра не была локализованной, а покрывала пунктирный круг на рис. 7, то первое измерение на первой пластинке еще не фиксирует луча α -частицы внутри пунктирных касательных к этому кругу. Но уже второе измерение на последующей пластинке фиксирует сам луч, по которому прилетела α -частица. Впрочем, одних лишь измерений с одной α -частицей недостаточно, чтобы точно зафиксировать положение ядра на луче и определить момент времени α -распада, т.е. коллапса волновой функции на самом ядре. В этом отношении сохраняется некоторая неопределенность. Но если у нас имеется небольшая крупинка радиоактивного элемента, то многие измерения α -частиц зафиксируют положение этой крупинки (если эта информация не была получена другим образом).

Допустим теперь, что вместо радиоактивного ядра R мы используем его классический имитатор, т.е. малую классическую "теплую" ловушку, которая может испускать классические частицы с тем же самым временем жизни. Будем считать, что и измерительный прибор имеет сходную конструкцию. Нетрудно видеть, что соответствующий классический "распад" будет иметь много общего с рис. 7. Вместо потока ψ вовне "ядра" мы будем иметь теперь поток плотности вероятности.

Измерение " u_i " опять схлопывает этот поток в компактный сгусток, который в будущем пересечет все пластинки прибора P , а в прошлом происходит коллапс вероятности, сходный с коллапсом волновой функции. С точностью до соотношений неопределенностей оба процесса очень похожи друг на друга. Но в классическом случае мы точно знаем, что существуют частицы с классическими траекториями, и вероятностное описание используется просто в силу неполного знания "жизни" классической частицы внутри ловушки. А в квантовом случае точной траектории нет, и вероятность становится неотъемлемым свойством эволюции квантового объекта. Казалось бы, квантовое и классическое описания должны совпадать в применении к объектам и процессам, которые с точностью до соотношения неопределенностей близки друг к другу. Но на самом деле это не так.

Квантовая механика строится как теория полностью обратимых процессов, но только "между измерениями". В ней нет понятия классического тела и нет описания процессов взаимодействия микро- и макротел. Сила квантовой механики заключается в том, что она универсально описывает все явления, но только в рамках обратимых процессов. Именно в последнем и состоит ее слабость, поскольку процесс измерения является для нее внешним явлением, не входящим в круг теории. Исходя из рис. 7, можно видеть, в каком направлении следует расширять теорию.

Будем удалять прибор P дальше и дальше от ядра R , устремляя $L \rightarrow \infty$. Процесс коллапса ψ -функции вблизи ядра от этого, очевидно, не изменится. Другими словами, распад ядра и соответствующий коллапс ψ -функции можно рассматривать как результат измерения, проводимого в далеком будущем. Если оставаться на позициях причинности, то влияние из будущего не может быть ничем иным, как беспричинным случайным процессом. Итак, более общий взгляд на эволюцию квантовых систем должен сочетать причинное развитие событий в соответствии с уравнением Шрёдингера и "беспричинные" коллапсы, представляющие собой результат "измерений в будущем". Как должны быть построены эти коллапсы, мы рассмотрим несколько позже.

24. Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР)

На самой заре становления квантовой теории, в 1935 г., Эйнштейн, Подольский и Розен опубликовали статью [2], озаглавленную "Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным?". Именно в ней авторы сформулировали свой знаменитый парадокс, который вызывал оживленные дискуссии, продолжавшиеся вплоть до сего времени.

Эйнштейн, Подольский и Розен рассмотрели две квантовомеханические системы, которые некоторое время взаимодействуют между собой, а затем перестают взаимодействовать. Например, это могут быть две частицы, которые, провзаимодействовав на близком расстоянии, затем разлетаются далеко друг от друга. Если теперь производить измерения над первой системой, то для разных результатов измерений вторая система также оказывается в разных состояниях, описываемых разными волновыми функциями, хотя фактически никакого физического воздействия на вторую систему при этом не оказывается. Пару частиц с волно-

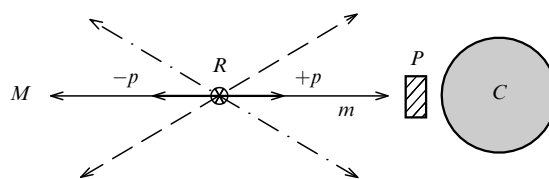


Рис. 8. Распад нестабильной молекулы R на две частицы с регистрацией частицы прибором P ; C — газовое облако

вой функцией, не распадающейся на произведение функций каждой из частиц, называют обычно ЭПР-парой. Состояния, у которых волновая функция не распадается на произведение индивидуальных функций, были названы Шрёдингером "entangled states". Наиболее точный перевод этого термина на русский язык звучит, вероятно, как "повязанные состояния". В таких состояниях имеется достаточно жесткая внутренняя корреляция. Именно вследствие этой корреляции измерение над одной частицей приводит к изменению волновой функции второй частицы, даже если вторая частица находится очень далеко от первой частицы. На первый взгляд это выглядит как абсолютно парадоксальная ситуация, свидетельствующая о наличии некоторого нелокального взаимодействия, или, как говорят, об "отсутствии локальной реальности".

Формальное разрешение этого парадокса было дано Бором почти сразу же после появления статьи Эйнштейна, Подольского и Розена. Оно состоит в том, что в квантовой механике нельзя говорить о состоянии безотносительно к окружению, в частности безотносительно к измерительным приборам. И если при измерении импульса одной частицы можно однозначно предсказать импульс второй частицы, то это происходит именно в силу определенной конфигурации приборов. Точное знание импульса второй частицы получено при конкретном расположении измерительных приборов, и именно эта макроскопическая обстановка позволяет выявить внутренние корреляции в квантовой системе.

Однако такой подход к разрешению парадокса удовлетворял не всех, высказывались и другие идеи. Обсудим этот парадокс на более конкретном примере (рис. 8).

Пусть нестабильная частица R распадается на две частицы — M, m . Это может быть распад возбужденной молекулы на два атома, или α -распад радиоактивного ядра, либо распад типа оже-эффекта, когда возбужденный атом испускает электрон, а сам переходит в устойчивое состояние. Если в начальном состоянии частица R покоилась, то вылетающие в противоположные стороны частицы M, m имеют равные по величине и противоположные по направлению импульсы. Допустим, что прибор P измерил импульс p частицы m . Очевидно, что одновременно будет измерен и импульс частицы M , хотя расстояние между частицами может быть очень велико и прямое взаимодействие прибора на вторую частицу практически исключено. Измерение импульса частицы M превращает ее волновую функцию в широкий волновой пакет типа плоской волны с импульсом $-p$ и амплитудой, медленно убывающей к краям пакета. Ясно, что теперь частица M не может уже двигаться по направлениям, указанным на рис. 8 пунктирной и штрихпунктирной линиями. Происходит реальный коллапс волновой функции частицы M к направлению, отмеченному сплошной линией. Если измерить теперь импульс

частицы M , то он окажется равным $-\mathbf{p}$. Но если мы попытаемся измерить координату частицы M , то соответствующий прибор уничтожит широкий волновой пакет, так как импульс частицы M будет нарушен. Можно сказать, что прибор P готовит начальное состояние волновой функции частицы M , а затем эта волновая функция эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера. Самое интересное состоит в том, что прибор осуществляет изменение волновой функции частицы M посредством влияния только на второго партнера ЭПР-пары, т.е. на волновую функцию частицы m .

Приглядимся к рис. 8 еще раз. Если вместо квантовой системы у нас был бы "классический имитатор", то соответствующий коллапс был бы совершенно очевиден и естествен. В самом деле, сплошные, пунктирные и штрихпунктирные линии относились бы к разным случайным событиям. Их вероятности могли бы быть совершенно одинаковыми, и тогда регистрация частицы m прибором P означала бы, что в данном акте измерения произошло именно то событие, которое может регистрироваться прибором P . Этот прибор получил бы информацию $I = -\sum_i p_i \ln p_i$, а вероятности p_i сколлапсировали бы в единицу для сплошной линии и уничтожились бы во всех других состояниях. Этот необратимый процесс измерения, как мы видели ранее, должен сопровождаться необратимыми процессами восприятия, так что суммарная энтропия системы частица плюс прибор не может убывать.

Но как мы видели ранее, широкие квантовые пакеты ведут себя практически как локализованные частицы. Поэтому и картина рис. 8 не должна уж очень сильно отличаться от "классического имитатора". Рассмотрим случай, когда масса легкой частицы m значительно меньше массы тяжелой частицы M . Тогда скорость легкой частицы будет значительно больше скорости тяжелой частицы, так что именно она первой попадает во внешний мир. Уберем прибор P и заменим его на газовое облако C . Попадая в это облако, легкая частица "самоизмеряется", становясь участником неравновесного процесса. Можно сказать так: отдельные волновые пакеты легкой частицы теряют взаимную когерентность из-за взаимодействия с облаком C , и первоначально чистое состояние легкой частицы становится смешанным. Энтропия частицы возрастает от нуля до $S = -\sum_i p_i \ln p_i$, где p_i — вероятности некогерентных пакетов, i — номер пакета. В силу корреляции между M и m то же самое происходит с тяжелой частицей: она теряет "чистоту" своего состояния и приобретает ту же самую энтропию S . Если теперь в облаке произойдет необратимый процесс коллапса, например за счет энергии самой частицы m , то вероятности p_i сколлапсируют, так что останется только одно состояние с вероятностью, равной единице. Одновременно происходит коллапс волновой функции частицы M . Можно сказать, что такой коллапс является прямым следствием запрета "состояния кота Шрёдингера": не может существовать суперпозиции состояний, относящихся к существенно разным сценариям развития истории, т.е. эволюции неравновесного мира. Следует еще раз подчеркнуть, что коллапс волновой функции связан именно с соприкосновением (прямым или косвенным) квантового объекта с внешним миром.

Макроскопические изолированные системы с низким уровнем тепловых шумов также могут проявлять квантовые свойства. Такие объекты называют иногда чисто

жаргонно "квантовыми котами" [28, 29]. Только их соприкосновение с классическим миром, например, в виде диссипации и может перевести их статистические свойства в русло классической логики [30, 31].

Итак, коллапс волновой функции — это скорее свойство окружения квантового объекта, а не самого объекта: именно внешний мир превращает сначала $|\psi|^2$ в набор вероятностей p_i , а затем неравновесной эволюцией превращает их в набор из нулей и одной единицы для того состояния, в которое происходит коллапс. Коллапс — это случайный процесс типа "бросания костей". Именно он и остается "за кадром" в традиционном аппарате квантовой теории, являющейся теорией обратимых процессов. Чтобы учесть коллапсы, нужно явно дополнить уравнения эволюции соответствующими операторами, которые учитывали бы реальное необратимое развитие квантовых систем во времени. Как это можно сделать, мы увидим позднее.

25. Неравенства Белла

Квантовая теория стала привычным инструментом современной физики. Тем не менее остался некоторый "червь сомнения", который тревожит души теоретиков и экспериментаторов, и прямая проверка основных принципов волновой механики продолжает оставаться на повестке дня. В частности, остается желание исключить прямыми экспериментами альтернативную, но несостоятельную теорию скрытых параметров.

В 1965 г. Д. Белл опубликовал статью [3], в которой проблема скрытых параметров была рассмотрена с некоторой новой точки зрения. А именно, он показал, что предположение о существовании скрытых параметров, т.е. близкая к классическим представлениям гипотеза о статистике событий, позволяет получить ряд неравенств, которые не согласуются с квантовой теорией и могут быть прямо проверены в эксперименте. Мы познакомимся здесь только с самым простым примером неравенств Белла.

В его основе лежит анализ корреляционного эксперимента типа предложенного Эйнштейном, Подольским, Розеном, но в более простом варианте, рассмотренном Д. Бомом [32]. А именно, пусть молекула, находящаяся в синглетном состоянии, разлетается на два атома, каждый из которых имеет спин $1/2$ (в единицах \hbar). После распада, в силу закона сохранения момента импульса, общий момент обеих частиц по-прежнему будет равен нулю. Убедимся сначала, что квантовый подход действительно приводит к парадоксу ЭПР. Если измерить проекцию σ_x момента импульса первой частицы на ось x , то вторая частица автоматически окажется в состоянии $-\sigma_x$. В классическом случае проекции спина второй частицы на другие оси, скажем, Y или Z , автоматически обратились бы в нуль. Но в квантовом случае это не так. Оператор σ_y не коммутирует с σ_x , а его собственные значения равны $\pm 1/2$. Поэтому измерения σ_y у второй частицы будут равны величине $\pm 1/2$ с равной вероятностью.

Построим теперь одно из неравенств Белла. Допустим, что у второй частицы существуют одновременно все три компоненты спина, которые при измерениях могут давать величины $\pm 1/2$. Произведем теперь много измерений, получив ансамбль состояний. Обозначим через X^+ случай, когда $\sigma_x = 1/2$, через X^- — случай

когда $\sigma_x = -1/2$, и т.д. Тогда получим

$$N(X^+, Y^-) = N(X^+, Y^-, Z^+) + N(X^+, Y^-, Z^-), \quad (134)$$

где N — число измерений в ансамбле со свойствами, обозначенными в круглых скобках. Аналогично получаем

$$N(Y^-, Z^+) = N(X^+, Y^-, Z^+) + N(X^-, Y^-, Z^+), \quad (135)$$

$$N(X^+, Z^-) = N(X^+, Y^+, Z^-) + N(X^+, Y^-, Z^-). \quad (136)$$

Из написанных выше трех соотношений, очевидно, следует

$$N(X^+, Y^-) \leq N(Y^-, Z^+) + N(X^+, Z^-). \quad (137)$$

Вернемся теперь к двум частицам, разлетающимся в синглетном состоянии, так что спины двух частиц в точности противоположны друг другу. Например, если первая частица имеет состояние X^- , то вторая будет иметь X^+ . Соответственно, если мы заменим знаки у вторых (т.е. первых при прочтении справа налево) знаков внутри круглых скобок (137), что получим соотношение

$$n(X^+, Y^+) \leq n(Y^-, Z^+) + n(X^+, Z^+), \quad (138)$$

в котором $n(X^+, Y^+)$ означает число пар частиц ансамбля, у которых первая частица имеет проекцию спина $\sigma_x = +1/2$, а вторая — $\sigma_y = +1/2$, и т.д. Соотношение (138) и представляет собой одно из неравенств Белла. Естественно, что таких соотношений можно написать не одно, а несколько. Они соответствуют допущению о наличии скрытых параметров и, соответственно, могут нарушаться в реальных квантовых объектах в силу некоммутативности компонент спина.

Эксперименты, проведенные на различных квантовых объектах, показали, что неравенства Белла в самом деле нарушаются в соответствии с квантовой теорией. Мы упомянем здесь только два из этой серии экспериментов. В экспериментальной работе А. Аспекта с коллегами [39] изучались корреляции поляризации пар фотонов с помощью изменяющихся во времени анализаторов. Они переключались с темпом быстрее c/L , где c — скорость света, L — расстояние между детекторами. Результаты оказались в полном соответствии с квантовой механикой: корреляции существуют в любой момент времени и не переносятся каким-либо сигналом. Неравенства Белла исключались с надежностью в пять стандартных отклонений. А в самом последнем по времени эксперименте Т. Киса и др. [40] неравенства Белла нарушались с надежностью в 22 стандартных отклонения. Таким образом, многие эксперименты по нарушению неравенств Белла надежно подтверждают принцип квантовой механики и исключают "локальный реализм", т.е. существование скрытых параметров.

26. Квантовая криптография

Парадокс ЭПР и связанные с ним неравенства Белла выглядят как своего рода нелокальные взаимодействия, т.е. бессильные переносы информации на большое расстояние, возможно, даже со сверхсветовой скоростью. Поэтому в научной литературе не раз обсуждался вопрос

о возможности создания "сверхсветового телеграфа". Нетрудно видеть, что в прямом варианте одиночной ЭПР-пары парадокс ЭПР для этой цели не подходит. В самом деле, измерение, проводимое над первой частицей, является чисто случайным и его невозможно заранее предсказать и контролировать. Ситуация здесь, хотя и отличается от классической, но в некотором смысле сходна с тем, как если бы черный и белый шары были спрятаны порознь в разные ящики, а ящики разнесены далеко друг от друга. Вскрытие первого из ящиков сразу показывает, какого цвета шар находится как в нем, так и во втором ящике. Никакой передачи информации здесь нет: это просто заранее известная корреляция вероятностей. Квантовый случай отличается лишь тем, что до открытия ящика шары не имеют цвета. Но как только мы открыли первый ящик и "засветили шар" (как это происходит с фотопластинкой), то сразу же у него появляется цвет, а второй шар приобретает противоположный цвет внутри второго ящика. В квантовой механике со вторым шаром можно проводить и другие типы измерений с некоммутирующими операторами, но при определении "цвета" ничего другого, кроме цвета, противоположного цвету первого шара, обнаружить нельзя. Поскольку первое событие является чисто случайным, то корреляции одиночных ЭПР-пар нельзя напрямую использовать для мгновенной передачи информации [5].

Однако ЭПР-корреляции оказались интересными с точки зрения их возможного использования для засекречивания (кодировки) передаваемых сообщений. Основная идея здесь базируется на том, что любое вмешательство в квантовую систему, скажем, типа "подслушивания", разрушает чистое состояние и поэтому не может остаться незамеченным при правильном использовании чистых состояний. Это направление получило название "квантовой криптографии" [6 – 9]. Мы познакомимся здесь только с двумя простейшими примерами квантовой криптографии. По-видимому, наиболее простой вариант квантовой криптографии предложен А. Эккертом [6]. Он основан на неравенствах Белла. Два участника процесса передачи и приема информации должны приготовить много ЭПР-пар атомов со спином $1/2$, имеющих суммарный спин, равный нулю. Эти пары делятся попалам между действующими лицами, которые затем производят измерения спинов по согласованной программе так, чтобы нарушались неравенства Белла. Оказывается, что при соответствующем выборе программы измерений эти нарушения могут быть максимальными [10]. В данной схеме корреляционных экспериментов информация появляется в процессе измерений, и ее нельзя "подслушать". А умышленное вмешательство третьего лица, не знающего программы измерений, легко обнаруживается.

Существуют и более прямые пути для квантовой кодировки информации без использования неравенств Белла [7, 8]. Один из наиболее интересных вариантов переноса квантовой информации был предложен Беннетом с соавторами [9]. Они назвали его телепортацией квантового состояния с помощью двойного, т.е. классического и ЭПР-канала. Термин "телепортация" авторы заимствовали из научной фантастики, где описывается процесс, когда личность или другой объект "рассыпаются" в одном месте, а полная информация об их структуре передается в другое место, где и собираются их точные копии.

В данном случае речь идет о следующем процессе. Вначале готовится синглетная ЭПР-пара тождественных частиц со спином $1/2$ у каждой. Одна частица остается у отправителя информации, а вторая — отсылается получателю. Допустим теперь, что отправитель хочет телепортировать получателю третью частицу в неизвестном состоянии $|\phi\rangle$ со спином $1/2$. Оказывается, что для этой цели ему достаточно произвести совместное измерение спина в двойной системе — первого партнера ЭПР-пары и третьей частицы. Для этого можно воспользоваться базисом Белла [10], содержащим четыре ортогональных состояния — одно синглетное и три триплетных (соответственно, со спином 0 и 1). Но и у трех частиц, т.е. ЭПР-пары и третьей частицы в неизвестном состоянии $|\phi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, полное число ортогональных состояний равно четырем, и их можно представить в виде суперпозиции некоторых собственных функций, содержащих амплитуды a, b . После измерения классическую информацию об этих амплитудах отправитель может послать получателю, который сможет построить состояние $|\phi\rangle$ простым поворотом прибора вокруг осей x, y, z относительно второго партнера ЭПР-пары.

27. Случайная волновая функция

Рассмотрим теперь несколько более сложный мысленный эксперимент, с помощью которого мы в крайне упрощенной форме познакомимся с эволюцией квантовой системы, находящейся в постоянной информационной связи с внешним миром. А именно, мы предположим, что квантовая частица подвергается "измерению" не с помощью приборов, а вследствие взаимодействия с неравновесным окружением. Соответствующая схема эксперимента представлена на рис. 9.

Пусть микрочастица с массой m заключена между двумя горизонтальными стенками, находящимися при нескольких различных температурах: $T_1 \neq T_2$. Тогда, сталкиваясь поочередно с верхней и нижней стенками, частица при неупругом взаимодействии может переносить порции тепла от горячей стенки к холодной. В холодной стенке каждая такая порция распространяется в толщу материала стенки и может быть там "измерена". Более точно, такая порция тепла чем-то сходна с радиоактивным распадом, так что она естественным образом может коллапсировать: можно сказать, что она "измеряется из будущего". Коллапс каждой из порций тепла приводит к коллапсу ψ -функции микрочастицы, и, соответственно, движение частицы вдоль оси x можно рассматривать как последовательность случайных коллапсов.

Поскольку взаимодействие частицы со стенками носит случайный характер, то и ψ -функция становится случайной. Для ее описания можно развить соответствующие строгие методы статистической физики, но в данный момент нам более целесообразно сосредоточиться на качественной картине явления. Поэтому мы пойдем на существенные упрощения, описывая ψ -функцию только ее моментами, т.е. усредненными значениями для положения волнового пакета $\langle x \rangle$, его ширины $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ и скорости $v = \langle p \rangle / m$, где p — импульс, а угловые скобки означают усреднение с весом $|\psi|^2$.

Допустим, что сразу после неупругого столкновения со стенкой волновая функция имеет вид локализованного пакета (59) с импульсом $p = u/m$:

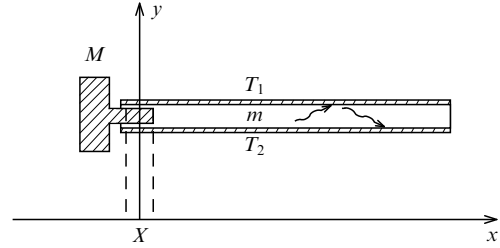


Рис. 9. Микрочастица m , двигаясь вдоль оси y , поочередно неупруго сталкивается со стенками сосуда. Температура верхней стенки T_1 не совпадает с температурой нижней стенки T_2 , и частица переносит, в среднем, тепло от одной стенки к другой. В левый торец сосуда входит "пробка" макроскопического тела M , так что при перемещении вдоль x микрочастица имеет возможность сталкиваться с макротелом

$$\psi_0 = (\pi b^2)^{1/4} \exp\left(ikx' - \frac{x'^2}{2b^2}\right), \quad (139)$$

где $k = u/\hbar m$, $x' = x - \xi$ (ξ — координата "центра тяжести" пакета), $b^2 = \langle (x')^2 \rangle$ — ширина пакета, начальный момент времени принят за нуль. В последующие моменты времени волновая функция будет эволюционировать, так что соответствующий пакет будет расплываться согласно формулам (60), (61), а именно,

$$\psi_t(x, t) = \exp(-i\omega t + ikx')\psi_{0t}(x' - ut, t), \quad (140)$$

где $\omega = \hbar k^2 / 2m$, а функция $\psi_{0t}(x', t)$ дается соотношением (60), т.е.

$$\psi_{0t} = \left(\frac{b^2}{\pi a^4}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right), \quad (141)$$

где $a^2 = b^2 - i(\hbar/m)t$. Согласно (61) ширина пакета возрастает как

$$\langle x'^2 \rangle = b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2}. \quad (142)$$

Пусть τ есть среднее время между последовательными "измерениями". Тогда в среднем ширина пакета перед столкновением со стенкой будет определяться соотношением (142) при $t = \tau$. Квадрат ширины локализации волнового пакета b^2 сразу после неупругого столкновения с холодной стенкой определяется процессами "измерения" порций тепла, которые происходят в самой стенке. А величина среднего времени τ пропорциональна расстоянию между стенками и является свободным параметром. Она может быть выбрана таким образом, чтобы второе слагаемое в (142) было много больше первого. Другими словами, широкий волновой пакет после "измерения" сжимается до размеров, много меньших его ширины на подлете. Обозначим через a_0^2 величину (142) при $t = \tau$, т.е. непосредственно перед неупругим ударом. Усредняя (142) по времени между ударами, можно определить среднее значение $\bar{a}^2 = (a_0^2 + 2b^2)/2$. Таким образом, волновой пакет осциллирует по ширине между b^2 и a_0^2 , имея средний квадрат ширины \bar{a}^2 .

Между двумя последовательными ударами волновой пакет в среднем смещается на величину $\Delta \xi = u\tau$. Если считать, что скорости u имеют максвелловское распре-

деление с температурой $T = (T_1 + T_2)/2$, то среднее значение для квадрата смещения по ξ перед вторым ударом будет равно $T\tau^2/m$. Смещения за счет расширения пакета и его свободного перемещения статистически независимы друг от друга, так что для вероятности $p(\xi, t)$ положения ξ волнового пакета получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}, \quad D = \frac{1}{2\tau} \left(a_0^2 + \frac{T\tau^2}{m} \right). \quad (143)$$

Итак, случайное блуждание квантовой частицы можно рассматривать как диффузию волнового пакета с вероятностью распределения $p(t, \xi)$ его центра тяжести, эволюция которой определяется уравнением (143). Распределение по скорости v можно считать максвелловским, а квадрат ширины $\langle x'^2 \rangle$ периодически то сжимается до b^2 после удара, то расширяется до величины a_0^2 перед следующим ударом.

Теперь рассмотрим, как такая случайно движущаяся квантовая частица взаимодействует с макроскопическим телом с массой M . Пусть волновая функция макротела равна $\Psi(X)$, где X — координата правой границы тела, о которую может ударяться частица. До взаимодействия с частицей волновую функцию $\Psi(X)$ можно считать стационарной, поскольку при $M \gg m$ квантовым расплыванием $\Psi(X)$ можно пренебречь. При своем движении вдоль сосуда микрочастица рано или поздно столкнется с макротелом и, отразившись от него, полетит вправо. Так как координата макротела не определена, то мы получим суперпозицию волновых пакетов.

Пусть $\Psi(X)$ локализована вблизи $X \cong 0$, как показано на рис. 9. Нетрудно видеть, что при $X > 0$ отраженный пакет окажется несколько правее, а при $X < 0$ несколько левее по сравнению с отраженным от границы $X = 0$. Таким образом, после отражения точка $x - X < 0$ переходит в положение $x' = -x + 2X > 0$, и волновая функция примет вид

$$\Psi(X)\psi(-x + 2X, t), \quad (144)$$

где ψ -функция микрочастицы дается выражением (140). Другими словами, в рассматриваемом приближении та часть волнового пакета, которая при свободном движении оказалась бы за поверхностью тела, т.е. при $x - X < 0$, просто зеркально отражается от плоскости X и оказывается в точке $X - (x - X) = 2X - x$.

Перед последующим ударом о стенку термостата волновая функция микрочастицы выглядит как волновой пакет (141). Однако сразу после удара она локализуется в узкий волновой пакет с квадратом ширины, равным b^2 . При этом никакой суперпозиции разных волновых пакетов быть не может: "измерение" оставляет только один пакет, уничтожая все другие составные части ψ -функции. Происходит реальный коллапс волновой функции. Координата макротела X при этом будет также измерена с точностью до a_0 : после удара с "измерением" координата микрочастицы x зафиксирована с точностью до b , так что в волновой функции (144) сомножитель $\Psi(X)$ также сколлапсирует, и величина $\langle (X - \text{const})^2 \rangle = a_0^2$, т.е. координата $X \cong X_0 = \text{const}$ с точностью до $a_0/2$.

Схема на рис. 9 является, по существу, схемой косвенного измерения координаты макротела. После

каждого такого косвенного измерения начальная функция $\Psi(X)$ коллапсирует в пакет шириной меньше $a_0/2$. Величина $|\Psi(X)|^2$ до коллапса принимает на себя роль классической плотности вероятности распределения средних значений координаты X для каждого из локализованных волновых пакетов, которые случайным образом порождаются столкновениями легкой частицы с горизонтальной стенкой.

Рассмотренный нами мысленный эксперимент указывает путь к теории описания явлений с естественно развивающимися процессами коллапса волновых функций. Во-первых, случайное "вторжение" коллапсов в эволюцию системы во времени показывает, что основную роль начинают играть не квазистационарные состояния, а расплывающиеся во времени волновые пакеты. Эти пакеты кроме квантовомеханических свойств приобретают черты протяженных классических объектов, так что для них естественно использовать смесь классического и квантового описаний. Естественно возникающая некогерентность состояний придает макротелам привычный характер точно детерминированного поведения и "наводит мосты" между классическим макромиром и квантовым микромиром.

У читателя, естественно, может возникнуть вопрос: зачем нам понадобилось считать $T_1 \neq T_2$? Казалось бы, и обычный термостат должен разрушать квантовую когерентность и создавать смешанные состояния типа волновых пакетов из любого чистого состояния. На самом деле, это скорее вопрос не реального поведения, а логического обоснования. И при $T_1 = T_2$ у нас есть основания говорить об отсутствии когерентности, но мы не можем с достоверностью утверждать, что эта некогерентность сопровождается "измерением" и коллапсом волновых функций. Случайные процессы коллапсирования более естественны для термодинамически неравновесных систем.

Впрочем, к этому вопросу нам, вероятно, придется еще не раз возвращаться. А сейчас рассмотрим более подробно, как можно описывать эволюцию случайной волновой функции. Пусть $\psi(x, t)$ — случайная волновая функция, описывающая одномерное движение частицы при наличии случайных измерений. Временная эволюция ψ может быть описана уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + M\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + M(\psi)\psi. \quad (145)$$

Здесь M — случайный оператор "измерения". Будем считать, что M "вмешивается" в эволюцию системы по закону случая, т.е. в соответствии с распределением Пуассона со средним интервалом времени между "измерениями" $\Delta t = \tau$. Пусть сразу же после "измерения", которому мы припишем $t = 0$, функция ψ коллапсирует в пакет (139). Так как этот пакет содержит два параметра u, ξ , то в определение оператора M должна входить инструкция, как этими параметрами следует распорядиться. Перед следующим ударом решение ψ имеет вид (140), т.е. $\psi_t = \exp(-iHt/\hbar)\psi_0$, где t отсчитывается от предыдущего удара. Мы условились считать $b \ll a$, так что приближенно можно положить

$$p(u, u', \xi, t) = p(u, u') |\psi_t(x = \xi)|^2. \quad (146)$$

Здесь $p(u, u', \xi, t)$ — распределение вероятностей для величин u, ξ в том случае, если повторный удар происходит через интервал времени t после первого; $p(u, u')$ — вероятность изменения скорости пакета от значения u' перед "измерением" до значения u после "измерения". В частном случае полного "забывания" величины скорости перед "измерением" вероятность $p(u, u')$ не зависит от u' , так что величина $p(u, u') = p(u)$ имеет максвелловское распределение с температурой T . Если повторных "измерений" много, то величину вероятности перехода можно усреднить по времени:

$$p(u, u', \xi) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) p(u, u', \xi, t) \frac{dt}{\tau}. \quad (147)$$

Здесь первый множитель под интегралом показывает вероятность отсутствия удара до момента t , а величина dt/τ равна вероятности "измерения" на интервале dt . Если мы переходим к усредненной по времени вероятности, то число ударов за время Δt следует считать равным $\Delta t/\tau$. Таким образом, предлагаемая логика автоматически приводит к классической цепи Маркова, а квантовый подход понадобился лишь для нахождения вероятностей перехода от одного "измерения" к другому. В итоге, для многих последовательных измерений мы получаем диффузионное уравнение (143) для $p(\xi, t)$ с максвелловским распределением частицы по скоростям. От этих вероятностей можно было бы перейти к матрице плотности $\rho(x, x') = \langle \psi^*(x) \psi(x') \rangle$. Но как мы видим, в этом нет большой нужды. Найденные нами усредненные волновые пакеты, которые входят в выражение (147), играют роль базиса, в котором матрица плотности имеет диагональный вид: $\rho(x, x')$ представляет собой случайную выборку одного из таких пакетов с вероятностью, которая предписывается извне оператором измерения $M(\psi)$. В результате для описания статистических свойств случайной волновой функции большую роль играют именно свойства "измерения", а свободный пролет частицы от одного "измерения" до другого "измерения" определяет лишь величину коэффициента диффузии D .

Рассмотрим еще раз, как действует оператор $M(\psi)$ в правой части уравнения (145). Как мы установили выше, перед его воздействием волновая функция выглядит как сравнительно широкий волновой пакет (141) шириной $\sim a_0$. А сразу же после измерения образуется пакет шириной $\sim b \ll a_0$. Таким образом, $|\psi|^2$ перед измерением имеет величину $\sim 1/a_0$, а после измерения $\sim 1/b$. Картина выглядит так, как если бы волновой пакет шириной $\sim a_0$ был нарезан на дольки шириной b . Число таких долек a_0/b . При каждом измерении частица попадает только в одну из долек, и поэтому квадрат волновой функции увеличивается в a_0/b раз. Таким образом, оператор $M(\psi)$ оказывается сильно нелинейным: он уничтожает волновую функцию во всех ячейках, кроме одной, а в этой последней он увеличивает амплитуду в $(a_0/b)^{1/2}$. Это есть естественное следствие коллапса при сохранении нормировки. Но оказывается, что с матрицей плотности, и, в частности, с $\rho(x, x) = |\psi(x)|^2$, изменения происходят (если и происходят) гораздо менее впечатляющие. Действительно, требуется, по крайней мере, a_0/b измерений, чтобы частица по одному разу попала в каждую из долек, полученных "нарезанием"

исходного пакета. Поэтому средняя по числу измерений a_0/b вероятность попасть частице в данную дольку оказывается примерно такой же, что и у исходного пакета. А если учесть, что вероятность данного "измерения" мы условились считать пропорциональной $|\psi_t(x)|^2$, то она оказывается в точности такой же, как и после измерения.

Теперь мы видим, что оператор $M(\psi)$ по отношению к его действию на ψ_t мало чем отличается от макроскопического прибора: он осуществляет коллапс волновой функции по правилам теории измерений квантовой механики т.е. в одно из взаимно ортогональных состояний. Если трактовать эти измерения в терминах превращения чистого ансамбля в смешанный, то нетрудно видеть, что матрица плотности $\rho(x, x')$ изменяется при таких измерениях очень мало. В самом деле, осциллирующая зависимость от $x - x'$ матрицы плотности определяется, в основном, не размерами волновых пакетов, а максвелловским распределением по импульсам. Поэтому описание смешанного состояния в терминах матрицы плотности не является достаточно чувствительным, чтобы определить, происходят ли в самом деле коллапсы: усреднение по ансамблю легко уничтожает соответствующую очень "деликатную" информацию.

Для описания "измерений", приводящих к разрушению когерентности и "коллапсу" волновой функции, требуются более аккуратные подходы, в которых соответствующие процессы описываются явным образом.

Как известно из квантовой теории, универсальных измерений нет: какие именно физические величины будут измерены и каким собственным векторам они соответствуют, целиком зависит от устройства прибора, точнее, от макроскопических условий измерительного процесса.

Мы рассмотрим здесь еще один конкретный пример естественно протекающего процесса измерения, а именно, радиоактивный распад. При α -распаде радиоактивного ядра волновая функция α -частицы состоит из двух частей: локализованной вблизи ядра функции, убывающей со временем как $e^{-t/2\tau}$, и стационарной функции снаружи ядра, описывающей ее поток в бесконечно удаленные области. Факт распада можно описывать случайным оператором "измерения" $M(\psi)$. На этот раз оператор $M(\psi)$ должен по закону случая выбрать некоторый луч, выходящий из ядра, и создать на нем волновой пакет, убегающий вдоль луча со скоростью испускаемой α -частицы. Действие оператора $M(\psi)$ можно условно рассматривать как результат измерения, произведенного в бесконечности и, стало быть, в бесконечно будущем. А в уравнении Шрёдингера он появляется как случайный коллапс волновой функции. Нетрудно опять установить, что сам коллапс представляет собой сильно нелинейный процесс, происходящий по закону случая, но если рассматривать только величину $|\psi|^2$ как представителя плотности вероятности ансамбля одинаковых систем, то соответствующие процессы выглядят как очень "мягкие", не меняющие среднего значения $\langle |\psi|^2 \rangle$ по ансамблю.

28. Мезомир

Теперь мы можем обсудить, как устроен мезомир, т.е. область физических явлений между классическим макромиром и квантовым микромиром. Естественно

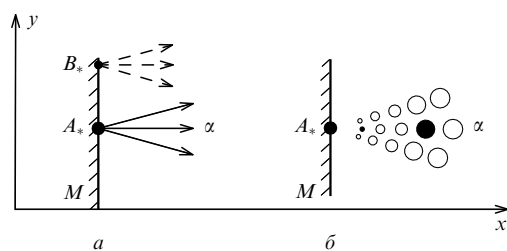


Рис. 10. Если на поверхности макроскопического тела нанесена радиоактивная метка A_* , то измерение вылетающей α -частицы может быть использовано для измерения y -координаты макротела (пунктиром на рис. a показаны нереализованные траектории). При наличии внешних возмущений ψ -функция α -частицы распадается на некогерентные волновые пакеты (b), из которых только один пакет является реальным — в него случайно "попадает" α -частица

стартовать с микромира, который является как бы базисом для описания всего остального круга явлений.

Квантовая теория сама по себе логична и замкнута. Для микрообъектов с любым числом частиц, включая квантованные поля, динамическое поведение описывается обобщенным уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (148)$$

где ψ — волновая функция всей системы, зависящая от большого числа координат, а оператор H — гамильтониан системы. Волновую функцию можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве, поэтому ее называют иногда вектором состояния.

Уравнение Шрёдингера описывает эволюцию квантовой системы, стартуя с некоторого начального состояния и оканчиваясь на измерении, т.е. взаимодействии с макроприбором. Что же касается макроприбора, то он предполагается чисто классическим объектом и описывается в терминах классических переменных. Между двумя этими пределами и находится мезомир, понимание которого является совершенно необходимым, если мы хотим связать между собой два предела — микромир и макромир. Начнем обсуждение этого вопроса опять с мысленного эксперимента. А именно, пусть на поверхность твердого макротела нанесена "радиоактивная метка" (рис. 10, a). Если вылетающая из метки α -частица "измерена" прибором, то тем самым измеряется и координата " y " поверхности макротела: после измерения можно с достоверностью утверждать, что радиоактивное ядро заведомо находилось в точке A_* , а не в другой возможной точке B_* . До измерения точки B_* и A_* могли быть эквивалентными либо по той причине, что волновая функция макротела имела в них одинаковую амплитуду (чистое состояние), либо просто потому, что внешнему наблюдателю не было известно, в какой из двух точек, A_* или B_* , реально находится метка. В первом случае измерение α -частицы автоматически приводит к коллапсу волновой функции макротела, а во втором случае снимается "априорная" неопределенность в вероятности нахождения метки и "коллапсирует" вероятность, т.е. внешний мир получает информацию о положении метки. Заметим, что сама α -частица могла бы вылетать вдоль любого из лучей, выходящих из точки A_* , но случайно был выбран луч, отмеченный на рис. 10, a жирной стрелкой. Это означает, что у α -частицы волновая функция коллапсирует на один из лучей.

Можно представить себе, что выбор одного из лучей произошел по той причине, что небольшие внешние возмущения несколько сбивают относительные фазы волновой функции на разных лучах, превращая их в "лучевые пакеты". Но если это так, то и вдоль луча может происходить процесс сбоя фазы, так что волновая функция α -частицы вместо сферической волны, расходящейся из точки A_* , может превратиться в набор волновых пакетов, изображенных на рис. 10, b . Сама частица может попасть только в один из этих пакетов (он на рис. 10, b изображен черным кружком), а остальные пакеты — это всего лишь упущенные возможности для пребывания там частицы.

Нетрудно теперь убедиться, что такое представление и является правильным. В самом деле, если вернуться к формулам (130), (131), то можно еще раз установить, что квадраты амплитуд превращаются в вероятности только при хаотизации разности фаз различных ортогональных состояний. Непересекающиеся волновые пакеты на рис. 10, b как раз и представляют такие взаимно ортогональные состояния. Хаотизация фаз как бы разбивает когерентную волновую функцию на отдельные блоки, и величина $|\psi|^2$ в каждом из таких блоков превращается в вероятность. С точки зрения перехода чистого состояния в смешанное хаотизация фаз является как бы очень слабо изменяющимся переходом: $|\psi|^2$ нигде не меняется по величине и только превращается в вероятность, т.е. в априорную возможность. Частица может попасть только в одну из ячеек, т.е. в один из волновых пакетов, но для внешнего наблюдателя это еще не известно. И лишь реальное наблюдение приводит к коллапсу вероятности в одну из ячеек. По нашей предыдущей терминологии попадание частицы в ячейку — это всего лишь символ измерения, или "хинт", т.е. намек на то, что будущее измерение зафиксирует частицу именно в этой ячейке. Явление это скорее информационное, чем динамическое. Соответственно, для того чтобы "поставить" одну из ячеек как "ячейку с частицей", требуется только один бит информации.

Расположение ячеек, рис. 10, b и размеры этих ячеек во многом зависят от того, насколько интенсивны внешние возмущения, разрушающие когерентность чистого состояния. Но поскольку ψ -функция вылетающей из радиоактивного ядра частицы прогрессивно распространяется от ядра A_* в бесконечность, то в реальном мире разрушение когерентности все равно рано или поздно произойдет: если внешние возмущения уменьшать, то ячейки на рис. 10, b просто удалятся вправо и станут крупнее. А сама частица рано или поздно все равно попадет в одну из ячеек, и тем самым объективно, т.е. независимо от наблюдателя, коллапс ψ -функции оказывается как бы осуществленным. Последующее измерение сколлапсирует всего лишь вероятность и тем самым подтвердит, что радиоактивный распад произошел и α -частица летит вдоль одного из возможных лучей.

Коллапс волновой функции происходит лишь в один из волновых пакетов, в пределах которого фаза не сильно искажается. Поэтому сначала коллапс ψ -функции, а затем измерение $|\psi|^2$ на сравнительно далеком от A_* расстоянии определяют (приблизенно) всю картину исходного вылета частицы из ядра и дальнейшего ее движения вдоль луча. Можно сказать, что коллапс волновой функции происходит сам собой, хотя более

логично считать, что он создается "измерением" на очень большом расстоянии от ядра A_* . Теперь мы можем представить себе ситуацию, когда "измерение" отодвигается очень далеко, т.е. практически бесконечно далеко, от A_* , и тогда коллапс ψ -функции можно рассматривать как результат измерения, проводимого на бесконечно большом расстоянии в бесконечно будущем времени.

Соответственно, можно сформулировать принцип коллапсирования. Он сходен с принципом излучения в электродинамике. Напомним, что при рассмотрении излучения электромагнитной волны периодическим диполем для получения однозначного решения приходится использовать краевое условие в виде отсутствия опережающей, т.е. приходящей из бесконечности, волны. Принцип этот не универсален: если излучение происходит в замкнутом резонаторе, то, безусловно, следует учитывать обе, уходящую и приходящую на излучатель, волны. Но в открытом пространстве опережающая волна считается отсутствующей, что эквивалентно наличию очень малого затухания волны, т.е. небольшой "затравочной" диссипации. "Отсекание" опережающей волны и делает решение однозначным.

Для квантовой частицы мы также должны наложить условие отсутствия приходящей из бесконечности волны. Но кроме того, мы можем допустить, что на бесконечности происходит "измерение", т.е. коллапс волновой функции. Этот удаленный коллапс приводит к коллапсу ψ -функции в волновой пакет на всем пути движения частицы вдоль луча, на котором эта частица оказалась. Так что результативно само измерение вроде как бы и не требуется.

Принцип коллапсирования мы можем распространить на все квантовые частицы, уходящие от макротел в бесконечность. Тем самым мы как бы утверждаем, что расходящаяся на бесконечность волновая функция не может быть реальным объектом, если эта функция соответствует одной единственной частице. Такая частица должна проявить себя при взаимодействии с внешним миром только в ограниченном объеме, поскольку она соответствует единой сущности.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда граница твердого тела освещается потоком света и отраженные от нее фотоны улетают на бесконечность (рис. 11).

Пусть вся поверхность этого тела зачернена, и только небольшой участок вблизи точки A_* является зеркальным. Этот участок вполне аналогичен радиоактивной метке: отраженные от него фотоны могут быть измерены на бесконечности, и внешнее окружение получит информацию о положении точки A_* . Соответственно, эта точка будет зафиксирована вне зависимости от того, было ли ее начальное положение неопределенным по классике (т.е. имело некоторое распределение вероятности положения), или оно было неопределенным из-за того, что макротело имело протяженную волновую функцию. В частности, измерительным прибором может служить глаз, и тогда картина выглядит так, как если бы сам наблюдатель осуществил коллапс волновой функции как фотона, так и макротела. Разумеется, коллапс в данном случае никак не связан с наблюдательными и интеллектуальными способностями человека: регистрация отраженного фотона любым прибором приводит в точности к тому же эффекту. Более того, участие этого фотона в любом необратимом процессе, происходящем сколь угодно далеко от A_* , можно

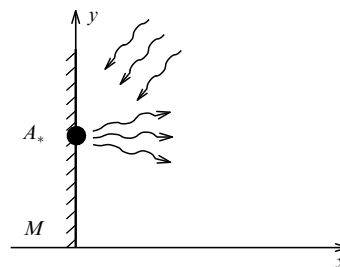


Рис. 11. На границе твердого тела M с черной поверхностью расположено небольшое зеркало A_* , отражающее фотоны. "Измерение" этих фотонов на бесконечности фиксирует координаты точки A_* с точностью до длины волны

рассматривать как "измерение", которое сопровождается коллапсом волновой функции.

Допустим теперь, что зеркало A_* фактически является стрелкой прибора, так что разным координатам y_i положения A_* на поверхности тела соответствуют разные величины u_i некоторого физического объекта U . Если объект U квантовый, то и величины u_i могут принимать некоторые дискретные значения. Соответственно, отраженные от A_* фотоны, которые могут быть "измерены" где-то на далеком расстоянии от A_* , приводят к коллапсу ψ -функции зеркала, т.е. стрелки прибора. При этом происходит измерение физической величины U при некотором ее значении u_i , а результат измерения может быть воспринят внешним миром и при желании "записан" в памяти по отраженному от A_* фотону. Нетрудно видеть, что при таком измерении происходят два необратимых процесса. Сначала из-за хаотизации фаз происходит расслоение единого когерентного состояния на множество волновых пакетов. При этом единая ψ -функция оказывается разбитой на куски с небольшим искажением фаз, но частица (фотон) может находиться только в одной из областей когерентности. Волновая функция как бы распадается в набор вероятностей, и только внутри одного из пакетов остается чистое состояние с частицей. Можно сказать, что волновая функция представляет собой нечто более "нежное", чем распределение вероятностей или информации: у разных частей волновой функции чистого состояния имеется еще некоторое "сродство через фазы".

Теперь нетрудно понять, что представляет собой классический мир. А именно, у макроскопических тел большого размера с большой массой даже редкие "измерения" достаточны для того, чтобы локализация их волновых пакетов была ничтожно мала по сравнению с размерами тела. Такие тела "навечно" приобретают характеристики классических объектов с точно заданными координатами. Классический мир — это мир крупных размеров и больших масс. Соответственно, любые измерения, которые затем воспринимаются классическими объектами, сопровождаются коллапсом волновых функций в соответствии с рецептами квантовой механики. Для редукции волновых пакетов классических тел нашего окружения вполне достаточны те объективно происходящие "измерения", которые осуществляются неравновесным излучением Солнца.

Промежуточный между классическим и квантовым мирами мезомир оказывается гораздо сложнее и гораздо богаче с точки зрения протекающих в нем физических явлений. Тела промежуточного мира обнаруживают как

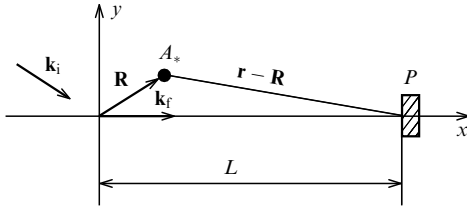


Рис. 12. Плоская волна легкой частицы падает на центр рассеяния A_* , представляющий собой "метку" тяжелой частицы. Рассеянная волна с волновым вектором k_f падает на прибор P и там измеряется

классические, так и квантовые свойства. Мезомир — это мир множества чередующихся коллапсов волновых функций и вероятностей, это мир рождающихся и умирающих когерентностей.

Универсального рецепта для описания мезомира, по-видимому, не существует: слишком уж велико разнообразие конкретных физических условий, в которых возможно сочетание классических и квантовых процессов. Один из возможных подходов мы описали в предыдущем разделе, но их может быть гораздо больше.

В настоящее время кажется более ясным, какие процессы не могут существовать. Так, например, суперпозиции типа шрёдингеровского кота должны быть заведомо запрещены. В самом деле, уже сама регистрация радиоактивного распада исключает возможность его суперпозиции с нераспавшимся ядром. Тем более не может существовать суперпозиция живого и мертвого кота, поскольку живое существо представляет собой макротело, тесно связанное с внешним миром и тем самым подверженное постоянным "измерениям". Как мы видим, логика мезомира исключает очень многие мыслимые, но физически невозможные состояния макромира, когда макротелам могут приписываться широкие когерентные волновые функции, несовместимые с реальными условиями. А в самом мезомире не исключены смешанные, т.е. классически-квантовые состояния и процессы, когда когерентность пакетов может уничтожаться и возрождаться вновь. Именно поэтому мезомир — это очень подвижный и живой мир сложно организованных коллективных явлений.

Вернемся теперь к рис. 11 и рассмотрим более подробно, как "измерения" во внешнем мире могут приводить к локализации волновой функции массивной частицы. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух частиц — очень массивной частицы с массой M и легкой с массой $m \ll M$ (рис. 12). Попытаемся выяснить, как измерения, проводимые над легкой частицей, приводят к косвенному "измерению", т.е. к сжатию волновой функции тяжелой частицы. Пусть волновая функция рассматриваемой системы выглядит как $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор легкой частицы, а \mathbf{R} — вектор положения тяжелой частицы. Мы предположим, что "метка" A_* на рис. 12 соответствует некоторому локальному потенциалу взаимодействия $U(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)$ рассматриваемых нами частиц. Допустим, что этот потенциал не только сильно локализован, но и не очень глубок, так что для описания взаимодействия, т.е. рассеяния легкой частицы на тяжелой, можно воспользоваться борновским приближением. Более конкретно, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть на тело M падает плоская волна легкой частицы с зависимостью от координат вида $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$. Здесь k_i — волновое число падающей волны (см.

рис. 12). Мы будем считать, что метка A_* находится вблизи начала координат, так что $R \ll r$.

Пусть, например, $R = 0$. Тогда падающая волна выглядит как $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$, а рассеянная — как $r^{-1} \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r})$ (мы не учитываем здесь общей временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$). Если мы теперь сместим центр рассеяния A_* в точку \mathbf{R} , то падающая волна в точке рассеяния приобретет множитель $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R})$, так что после рассеяния из этой точки в точку \mathbf{r} прибудет волна $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^{-1} \exp[i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}]$. Если прибор P находится очень далеко, то величину $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ в предэкспоненте можно считать равной просто $L = \text{const}$. Эта величина для нас несущественна, а вот фазовый множитель мы рассмотрим более подробно. Будем считать, что массивная частица покоится и что рассеяние легкой частицы является упругим, так что $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i| = k$. Кроме того, чтобы не усложнять выкладки, допустим, что падающая волна распространяется точно вдоль оси x , т.е. имеет вид $\exp(ikx)$, и что прибор также расположен на этой же оси. Кроме того, допустим, что \mathbf{R} имеет только две координаты, которые мы обозначим заглавными буквами X, Y . Считая $y, Y \ll L$, получаем выражение для фазового множителя рассеянной волны с точностью до Y^2

$$\exp \left[ikx + \frac{ik}{2} \frac{(y - Y)^2}{L} \right].$$

Допустим теперь, что эта волна измеряется прибором P , т.е. из нее выделяется локализованный по y пакет вида $\psi_P = \exp[ikx - (y^2/2b^2)]$, где b — ширина локализации пакета. Чтобы "спроектировать" волновую функцию на это состояние, достаточно умножить ее на ψ_P^* и проинтегрировать результат по x, y . В результате получаем выражение, пропорциональное экспоненте

$$\Phi = \exp \left[-\frac{k^2 b^2 Y^2}{2(L^2 + k^2 b^4)} \left(1 - \frac{iL}{kb^2} \right) \right]. \quad (149)$$

Эта экспонента должна умножаться на волновую функцию массивной частицы $\Psi(Y)$. Как мы видим, измерение легкой частицы автоматически приводит к локализации тяжелой частицы с формфактором Φ . Если не учитывать мнимую часть под знаком экспоненты Φ и сохранить только реальную часть формфактора Φ_R , то его можно представить в виде

$$\Phi_R = \exp \left(-\frac{Y^2}{2a^2} \right), \quad (150)$$

где

$$a^2 = \frac{L^2 + k^2 b^4}{k^2 b^2}.$$

В приведенных выражениях легко усматриваются два предельных случая: $L^2 \ll k^2 b^4$ и $L^2 \gg k^2 b^4$. В первом случае (близко расположенного прибора) имеем $a^2 = b^2$, т.е. локализация тяжелой частицы в точности совпадает с локализацией легкой частицы. В другом предельном случае, $L^2 \gg k^2 b^4$, величина $a = 1/\theta k$, где $\theta = b/L$ — угол раствора конуса, который "глядит" на прибор со стороны частицы. Так как $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, то даже при малых значениях $\theta \sim 1/10$ размер локализации частицы оказывается масштаба длины волны.

Заметим, что полное выражение (149) для Φ содержит еще экспоненту с мнимой фазой, которая при небольших

нарушениях когерентности может приводить к дополнительной локализации при $L^2 \gg k^2 b^4$, но мы пока не будем заниматься столь детальным рассмотрением.

В приведенных рассуждениях мы прибегали к понятию прибора. Но на самом деле он нам совсем не нужен: если локализация легкой частицы происходит где-то во внешнем мире, т.е. при взаимодействии с неизвестным нам "прибором", то этот процесс все равно приведет к локализации волновой функции тяжелой частицы. Если при этом $L^2 \gg k^2 b^4$ и угол θ мал (но не исчезающе мал), то локализация тяжелой частицы будет масштаба длины волны волновой функции легкой частицы.

С помощью рис. 12 мы рассмотрели локализацию по y , но тот же самый прибор, имеющий конечный размер по z , осуществляет аналогичную локализацию волновой функции по направлению оси z . А если повернуть прибор вместе с падающей волной на 90° , то можно осуществить локализацию по оси x . Естественно, что при спонтанно происходящих "измерениях" на многих падающих частицах будет достигаться полная локализация по всем направлениям.

Допустим, что такие "измерения" с разными падающими частицами повторяются одно за другим с некоторой средней частотой $\dot{N} = 1/\tau$, так что за большой промежуток времени t происходит большое число $N = \dot{N}t = t/\tau$ "измерений". Каждое измерение даст новый множитель в виде формфактора (150), так что после N измерений мы получим множитель Φ^N . Соответственно локализация станет равной $a/N^{1/2} = (a\tau/t)^{1/2}$. При очень большой массе M эта локализация будет продолжаться вплоть до перехода к классическому объекту с вполне определенной классической координатой Y (и, соответственно, X и Z). А если масса не очень велика, то процесс локализации будет скомпенсирован обратным расширением волнового пакета между последовательными "измерениями". Вспоминая соотношение (61) для уширения волнового пакета со временем, мы можем оценить минимальную локализацию частицы с массой M как

$$a_{\min} \approx \left(\frac{\hbar \tau}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{\hbar}{M \dot{N}} \right)^{1/2}. \quad (151)$$

Это выражение и определяет нам условную границу между макро- и мезомирами: если величину a_{\min} с практической точки зрения можно считать равной нулю, то мы имеем дело с макротелом с классическими координатами. В противном случае наряду со свойствами классического объекта тело может проявлять и волновые свойства, т.е. мы имеем дело с объектом мезомира.

Итак, с точки зрения волновых функций, макромир — это мир "окаменелостей": все прошлые "измерения", проведенные над макротелами в предыдущие эпохи, привели к тому, что эти макротела "потеряли" свои былые волновые свойства и стали классическими объектами с четко определенными координатами. При "соприкосновении" с микро- и мезомирами они могут лишь "вспоминать" свою волновую сущность в виде совместного "коллапса" волновой функции микромира и случайного выбора координаты классического объекта, например в виде показания "стрелки" измерительного устройства. Этот последний процесс также можно описать в рамках модели рассеяния легкой

частицы на "метке" A_* , схема которой изображена на рис. 12. Для этого требуется лишь, чтобы прибор P смог различить различные положения метки A_* в одном когерентном состоянии. Проще всего это можно сделать, дополняя прибор P набором коллиматоров с детекторами, чтобы каждая из этих пар была направлена в свою точку с координатой Y_i . Эти дискретные координаты Y_i должны быть подобраны таким образом, чтобы формфакторы для различных положений метки A_* не перекрывались между собой по координате Y . Тогда первое же срабатывание одного из детекторов измеряет одну из координат Y_i (с учетом направления на нее соответствующего коллиматора).

Если вместо прибора P опять выступает внешний мир, то рассеяние одной лишь легкой частицы сразу же приводит к коллапсу волновой функции макрообъекта по координате Y . Если микрочастицу "выпускать" во внешний мир через систему коллиматоров, так что каждый из них направлен только на одно из дискретных положений Y_i , то каждый коллапс микрочастицы сопровождается коллапсом $Y \rightarrow Y_i$. Повторяя "измерения" многократно, можно установить статистическое распределение координаты Y_i . Тем самым можно найти матрицу плотности смешанного состояния макрообъекта после "измерения", т.е. разрушения когерентности из-за рассеяния и последующего "выхода" во внешний мир рассеянной микрочастицы.

29. Коллапсы волновых функций

Выше мы познакомились с некоторыми примерами коллапса волновых функций: при радиоактивном распаде и при косвенных "измерениях" в результате коллапсирования волновой функции частицы, улетающей во внешний мир и теряющей там когерентность. Как правило, коллапс относится скорее к вероятностям "ожидания" со стороны внешнего мира, т.е. он фактически соответствует случайному "выпадению" определенного значения той или иной физической величины. Однако его удобнее относить к самой волновой функции. При таком подходе коллапс можно описывать "оператором измерения" M в обобщенном уравнении Шрёдингера (145). Выбранное нами название "оператора измерения" показывает, что этот оператор должен охватывать и процессы квантовых измерений. В последнем случае оператор M совпадает с проекционным оператором P_i : оператор P_i осуществляет проекцию начального состояния ψ на собственный вектор ψ_i , соответствующий собственному значению u_i измеряемой физической величины U . Поэтому при обсуждении реальных процессов измерения можно пользоваться проекционными операторами фон Неймана [33]. Однако наша более общая задача состоит не только в описании искусственно проводимых измерений, но и в описании естественно протекающих процессов коллапсирования волновых функций, составляющих вместе с обратимой динамикой согласно уравнению Шрёдингера реально развивающуюся "квантовую историю".

В этом разделе мы обсудим, какими общими свойствами должен обладать оператор измерения M в простейшем случае одной или двух частиц. Прежде всего отметим, что в уравнении (145) оператор $M(\psi)$ входит в виде слагаемого наряду с кинетической энергией и полной энергией $\hbar\omega$. Поэтому оператор M должен

иметь размерность энергии, т.е. отношения \hbar/t_0 , где t_0 — некоторое характерное время измерения. Таким образом, вмешательство оператора $M(\psi)$ в эволюцию квантовой частицы в общем случае должно возмущать не только волновую функцию, но и энергию этой частицы. Другими словами, измерение может сопровождаться обменом энергии с внешним окружением. Однако величина этой энергии может быть исчезающе мала, если либо измерение производится очень долго, либо коллапсирование происходит на столь широкие волновые пакеты, что соответствующим изменением энергии можно пренебречь. Например, при измерении физической величины U , оператор которой коммутирует с гамильтонианом частицы, возмущения энергии не происходит и соответствующее измерение может происходить без разрушения стационарного состояния.

Самый простой пример измерения физической величины — это эксперимент типа Штерна–Герлаха, когда при пропускании пучка частиц через неоднородное магнитное поле происходит расщепление этого пучка на компоненты, соответствующие разным значениям проекции спина на ось z . Пусть, например, проекция спина $\sigma_z/2$ принимает только два значения $\pm 1/2$. Тогда на детекторе будет только две линии. Пусть на вход прибора влетает волновой пакет прямоугольной формы по продольной координате x . Если длина пакета равна L , то пространственная часть квадрата волновой функции равна $|\psi|^2 = 1/L$. Перед падением на детекторы (их в данном случае два) волновой пакет расщепляется на две компоненты с величинами $\sigma_z = \pm 1$. Обозначим через v скорость частицы, а через τ — время регистрации частицы внутри детектора. Если $\tau \ll L/v$, то волновой пакет можно мысленно "нарезать" на слои шириной $l = v\tau$. Очевидно, что каждый из детекторов будет "послойно" анализировать пакет, и с вероятностью $l/2L$ один из детекторов зарегистрирует частицу и вместе с тем измерит величину σ_z . В данном примере можно считать, что на вход детектора падает вероятность распределения по x , равная $|\psi|^2$, так что фактически происходит коллапс вероятностей. Но нет большой ошибки сказать, что каждый из детекторов осуществляет коллапс волновой функции в слой шириной l в одном из детекторов, уничтожая всю оставшуюся часть волновой функции. Результат не изменится, если считать, что еще до падения на детектор происходит коллапс волновой функции в одну из компонент с $\sigma_z = +1$ или $\sigma_z = -1$, а затем уже эта компонента коллапсирует в слой шириной l на одном из детекторов. Введение соответствующего оператора $M(\psi)$ в обобщенное уравнение Шрёдингера, позволяет описать коллапс волновой функции как следствие коллапса вероятностей (бросания костей) при информационной связи квантовой частицы с внешним миром.

Рассмотрим теперь, как действует оператор $M(\psi)$ в случае радиоактивного распада. И в этом случае удобнее рассуждать с вероятностями, а не с волновыми функциями. Более того, удобно вместо $|\psi|^2$ ввести в рассмотрение очень много одинаковых радиоактивных ядер и рассуждать с числом ядер. Пусть зависимость $N = N_0 \exp(-t/\tau)$ показывает, как убывает со временем число радиоактивных ядер. Здесь N_0 — число ядер в начальный момент, а $1/\tau$ — константа темпа распада. Выберем некоторый интервал времени $\Delta t \ll \tau$ и рассмотрим, что происходит с волновыми функциями α - частиц,

вылетающих из ядер. Выберем некоторое значение $R = R_0$ для расстояния от радиоактивного источника и будем считать, что α -частицы "измеряются" за пределами этого радиуса, т.е. попадают в окружение атомов и молекул, в которых они производят неравновесные треки. Пусть v — скорость α -частиц. Тогда за время Δt они пройдут расстояние $\Delta R = v\Delta t$. Так как мощность источника равна N/τ , то в слое объема $4\pi R^2 v\Delta t$ окажется $\Delta N = N\Delta t/\tau$ частиц.

Пусть интервал ΔR выбран таким образом, что он соответствует ширине локализации волнового пакета после "измерения". Если и в поперечном направлении ширина локализации имеет порядок ΔR , то в рассматриваемом слое объема $4\pi R_0^2 \Delta R$ будет $N_S = 4\pi(R_0/\Delta R)^2$ ячеек, в одну из которых может попасть каждая из коллапсирующих частиц. В расчете на одну частицу вероятность попадания в ячейку равна

$$\Delta p = \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{N_S} = \frac{1}{\tau} \frac{(\Delta R)^3}{4\pi v R_0^2}.$$

Нетрудно видеть, что в расчете на одну частицу величина $1/\tau$ равна потоку через поверхность радиуса R_0 : $1/\tau = |\psi(R)|^2 \cdot 4\pi R^2 v_0$. Поэтому вероятность Δp равна просто $\Delta p = |\psi(R)|^2 (\Delta R)^3$. Соответственно, оператор $M(\psi)$ можно считать равным формфактору, который коллапсирует частицу в одну из ячеек объема $(\Delta R)^3$, уничтожая ψ -функцию во всех остальных ячейках. Этот процесс можно считать повторяющимся по закону случая вблизи сферы радиуса R_0 со средней частотой повторения $1/\Delta t = v/R_0$. Если процесс распада является медленным, то сумма вероятностей попадания во все ячейки объема $4\pi R_0^2 \Delta R$, т.е. $|\psi|^2 \cdot 4\pi R_0^2 \Delta R$, может оказаться значительно меньше единицы. Это означает, что процесс коллапсирования вблизи сферы радиуса R_0 должен повторяться много раз, прежде чем частица попадет хотя бы в одну из ячеек. Но если она туда попадает, то $|\psi|^2$ в ячейке должна быть увеличена до $(\Delta R)^{-3}$, а во всем остальном объеме волновая функция уничтожается.

Пакет, сколлапсированный в объем $(\Delta R)^3$, при дальнейшем удалении от источника будет расплываться, так что при больших временах его поперечная локализация согласно формуле (61) будет изменяться как $\Delta x \sim \hbar t/m\Delta R$. Что касается радиальной координаты пакета, то она тоже возрастает со временем как vt , так что при больших t пакет будет оставаться в пределах конуса с размером

$$\frac{\Delta x}{vt} = \frac{\hbar}{mv\Delta R}.$$

Отсюда видно, что выбор R_0 довольно произволен: если только $R_0 \gg \Delta R$, то дальнейшее распространение волновых пакетов мало зависит от величины R_0 . Более того, картину пакетизации можно представить себе в развитии, обратном по времени, вплоть до масштабов $R_0 \geq \Delta R$. Таким образом, оператор измерения M можно представить себе как случайный выбор волнового пакета с помощью некоторого формфактора, локализованного как вдоль радиуса, так и по углу. При этом не так существенно, в какой именно момент осуществляется сам коллапс: он может лишь быть "намечен" как "тренд" вблизи определенной точки с радиусом $R = vt$, а волновой пакет может формироваться со сдвигом во

времени, т.е. значительно позднее. Сам "тренд" соответствует одному биту информации о последующем формировании волнового пакета вблизи заданной точки с определенными угловыми координатами и радиальной координатой $R = vt$. Соответственно, и оператор "измерения" M допускает свободу в изменении ширины локализации волнового пакета вокруг случайно выбранных координат его центра.

Реальное "измерение" α -частицы может происходить на довольно большом расстоянии от ядра. Но получаемый при этом волновой пакет можно как бы "спроектировать" на прошлое. Соответственно, коллапс волновой функции можно считать феноменом спонтанного (самопроизвольного) стягивания волновой функции в волновой пакет в "предчувствии" измерения в будущем.

Коллапс — это необратимый процесс, но его развитие во времени не похоже на обычную причинную эволюцию из прошлого в будущее с последовательным прохождением через все промежуточные фазы: для столь подробного описания волновой функции потребовались бы промежуточные измерения, а они сами уничтожили бы когерентность состояния. Таким образом, оператор $M(\psi)$ в обобщенном уравнении Шрёдингера выглядит значительно сложнее, чем операторы физических величин.

С учетом коллапсов связь между прошлым и будущим может быть сложнее, чем это представляется с точки зрения обычного классического детерминизма. Для ее анализа оказываются удобными упрощенные схемы измерений.

Рассмотрим, например, ЭПР-пару в варианте Бома, когда две частицы со спином $1/2$ приготавливаются в начальный момент $t = 0$ в синглетном состоянии, а затем они разлетаются в разные стороны на большое расстояние друг от друга. Допустим теперь, что в момент t_1 у первой частицы измеряется x -компонента спина σ_{x1} , и это измерение дает значение $\sigma_{x1} = +1$. Это означает, что в силу корреляции у второй частицы происходит коллапс в состояние с $\sigma_{x2} = -1$. Поскольку у наблюдателя нет возможности управлять выбором величины σ_{x1} и значения $\sigma_{x1} = \pm 1$ выпадают совершенно случайно, то коллапс второго спина $\sigma_{x2} \rightarrow -1$ нельзя использовать для мгновенной передачи информации от первого наблюдателя ко второму. Пусть теперь второй наблюдатель измеряет компоненту σ_{y2} и с вероятностью $1/2$ получает значение $\sigma_{y2} = +1$. Соответственно, в коррелированной ЭПР-паре это измерение привело бы к редукции состояния первой частицы $\sigma_{y1} \rightarrow -1$. Если оба наблюдателя находятся недалеко друг от друга, то коллапс волновых функций будет создаваться первым по времени измерением. Однако при большом удалении частиц друг от друга понятие одновременности теряет абсолютный смысл: в лоренц-инвариантной теории порядок событий на пространственноподобной плоскости зависит от скорости системы координат.

Возникает вопрос, как процессы редукции волновых функций могут быть совместимы с лоренц-инвариантностью. Рассмотрим его несколько более подробно. Начнем с измерения $\sigma_{x1} = 1$ у первой частицы в момент времени t . Это измерение автоматически приводит к $\sigma_{x2} = -1$ у второй частицы. Поскольку над второй частицей никаких действий не совершалось, то представляется естественным, что значение $\sigma_{x2} = -1$ у спина второй частицы является вполне определенным не только при временах, больших t_1 , но и при $t < t_1$.

Другими словами, измерение $\sigma_{x1} = 1$ не только позволяет предсказать величину $\sigma_{x2} = -1$ у будущего измерения σ_{x2} , но и удостоверяет величину $\sigma_{x2} = -1$ в прошлом. Но аналогичное рассуждение можно распространить и на измерение спина второй частицы. А именно, измеренное значение $\sigma_{y2} = +1$ означает в силу корреляции, что σ_{y1} принимает достоверное значение $\sigma_{y1} = -1$ как после измерения $\sigma_{y2} = 1$, так и до проведения этого измерения. Теперь мы, казалось бы, приходим к некоторому парадоксу. А именно, если $\sigma_{x1} = 1$ измерено первым, то спин второй частицы принимает значение $\sigma_{x2} = -1$, а последующее измерение $\sigma_{y2} = 1$ разрушает когерентность и корреляцию ЭПР-пары. А если первым по времени измерено $\sigma_{y2} = 1$, то у первой частицы автоматически устанавливается значение $\sigma_{y1} = -1$, и последующее измерение $\sigma_{x1} = 1$ разрушает корреляцию ЭПР-пары. Что же касается последовательности измерений, то она может быть разной в разных лоренц-инвариантных системах координат. Поэтому не ясно, какой сценарий является истинным.

Но на самом деле здесь большого противоречия нет. Дело в том, что промежуточные коррелированные состояния типа $\sigma_{x1} = 1$, $\sigma_{x2} = -1$ и $\sigma_{y2} = 1$, $\sigma_{y1} = -1$ являются только возможными, но не реально измеренными состояниями. Реально же измеренное состояние с $\sigma_{x1} = 1$, $\sigma_{y2} = 1$ не сохраняет корреляции ЭПР-пары, хотя на первый взгляд операторы σ_{x1} и σ_{y2} кажутся коммутирующими, т.е. одновременно измеримыми. На самом деле, измерение одного оператора вносит возмущение в измерение второго именно из-за наличия корреляции (см. по этому поводу статью [11]). Поэтому измерения σ_{x1} и σ_{y2} будут давать некоррелированные пары $\sigma_{x1} = \pm 1$, $\sigma_{y2} = \pm 1$ без всякой причинной связи между измерениями.

Вернемся теперь к коррелированным измерениям типа $\sigma_{x1} = 1$, $\sigma_{x2} = -1$. Здесь мы имеем жесткую корреляцию. Поэтому совершенно безразлично, какое из измерений проводится первым: второе оказывается определенным как вперед, так и назад по времени. Второе измерение раскрывает лишь результат заранее предопределенный либо прошлым, либо будущим измерением над первой частицей. Разумеется, здесь совершенно условно можно говорить о первой и второй частицах — обе они эквивалентны. Поэтому в случае измерения σ_{x1} , σ_{x2} более логично считать, что выбор $\sigma_{x1} = 1$, $\sigma_{x2} = -1$ является совершенно спонтанным, т.е. произошедшим еще до реального проведенного измерения. Но еще более логично следует считать, что мы имеем пока только хинт-символ-измерения, который еще не превратился в реальный результат измерения. Только сам акт измерения осуществляет выбор значений σ_{x1} , σ_{x2} . Ситуация здесь сходна с радиоактивным распадом: ЭПР-пара как бы самопроизвольно выбирает поляризацию, согласованную с приборами. Эта поляризация и фиксируется затем приборами.

Следует подчеркнуть, что во всех трех рассмотренных случаях — измерениях σ_{x1} , σ_{x2} в ЭПР-паре, радиоактивном распаде и коллапса волновой функции тяжелой частицы при косвенном "измерении" из-за улетающей в бесконечность коррелированной легкой частицы — никакого энергетического возмущения извне не вносится. Достаточно считать, что где-то во внешнем мире появляется один бит информации, что вполне совместимо с неравновесностью внешнего мира. Если же

ограничиться чисто локальным рассмотрением, то соответствующий коллапс можно считать спонтанным. Его можно описывать оператором "измерения" M в обобщенном уравнении Шрёдингера. Этот оператор можно считать случайным с не очень точным указанием момента времени, когда он осуществляет коллапс.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример системы многих частиц, а именно, разреженный газ "классических" частиц. Допустим, что газ из атомов (или молекул) с плотностью n находится при температуре T . Пусть σ — поперечное сечение столкновений между частицами, так что величина $r_0 = \sigma^{1/2}$ характеризует средний размер атома, а величина $\lambda = 1/n\sigma$ представляет собой среднюю длину свободного пробега. У разреженного газа параметр плотности $\varepsilon = nr_0^3$ представляет собой очень малую величину: $\varepsilon \ll 1$. Допустим, что в начальный момент газ является классическим, т.е. средний размер локализации волновых функций, который мы обозначим через b , заметно меньше среднего расстояния между атомами $n^{-1/3}$. Тогда газ можно считать состоящим из множества отдельных волновых пакетов. Попробуем понять, что будет происходить с этими волновыми пакетами, и может ли начальная картина раздельных волновых пакетов сохраниться и в последующем.

Пусть $v_T = (T/m)^{1/2}$ представляет собой среднюю тепловую скорость. Величина

$$\tau = \frac{\lambda}{v_T} = \frac{1}{n\sigma v_T}$$

равна среднему времени между парными столкновениями атомов между собой. Выберем произвольный волновой пакет и рассмотрим, что с ним будет происходить. Если в начальный момент величина " b " была меньше r_0 и это неравенство сохраняется в течение времени τ , то волновой пакет будет эволюционировать как классическая частица, сталкиваясь и рассеиваясь на других атомах с частотой $\nu = 1/\tau$. Таким образом, через время τ начальный волновой пакет исчезает, превращаясь в рассеянную волну. А если $b > r_0$, то начальный пакет также исчезнет за время τ , но превратится не в один, а в $(b/r_0)^2$ рассеянных волн, поскольку на длине λ исходный пакет встретит $(b/r_0)^2$ различных атомов. Во втором случае, $(b/r_0)^2 > 1$, отдельные рассеянные волны потеряют взаимную когерентность, и исходный атом с вероятностью $(r_0/b)^2$ попадет в одну из рассеянных волн. А в первом случае, $b < r_0$, при первом рассеянии пакет может еще сохранить свою индивидуальность, но уже при небольшом числе последующих столкновений рассеянная волна станет настолько сложной формы, что когерентность между ее отдельными участками будет полностью потеряна. Частица при этом опять сможет попасть только в один из рассеянных пакетов.

Итак, мы можем сделать вывод о том, что в последующей эволюции газа может сохраниться его "пакетная структура". Нетрудно также оценить размеры установившихся (в среднем) волновых пакетов. Для этого можно воспользоваться соотношением неопределенностей. Пусть b — пространственная локализация пакета. Тогда неопределенность скоростей Δv составляет величину $\Delta v \sim \hbar/mb$. Средний размер пакета не сильно изменится за время между столкновениями τ , если $\Delta v \tau \sim b$. Отсюда находим

$$b = \left(\frac{\hbar}{m v_T \sigma n} \right)^{1/2} = (b_0 \lambda)^{1/2}, \quad (152)$$

где мы обозначили величину $b_0 = \hbar/mv_T$ порядка дебройлевской длины волны атома, движущегося с тепловой скоростью.

Давайте оценим величину (152) для воздуха при атмосферном давлении. Подставляя (в системе СГС) $\hbar = 10^{-27}$, $m = 3 \cdot 10^{-23}$, $v_T = 3 \cdot 10^4$, $\sigma = 10^{-15}$, $n = 3 \cdot 10^{19}$, получаем приблизительно $b \approx 2 \cdot 10^{-7}$. Эта величина несколько меньше среднего расстояния между атомами $n^{-1/3} \approx 3 \cdot 10^{-7}$. Как мы видим, воздух можно условно считать газом классических частиц, в том смысле, что эффективные размеры волновых пакетов молекул азота и кислорода не превышают среднего расстояния между молекулами.

В наших рассуждениях мы не учитывали, что для тождественных бозе-частиц волновая функция должна быть симметризована по всем молекулам. Но это обстоятельство не очень сильно влияет на наши выводы, если действительно $b < r_0$. Благодаря тождественности частиц волновой пакет одной частицы не отличим от волнового пакета второй сталкивающейся частицы, но пакетизированная структура газа при этом все равно сохраняется.

В наших рассуждениях ключевым моментом является исходное положение, что частица может попадать только в одну из составных взаимно некоррелированных частей сложного волнового пакета. Именно это положение и лежит в основе статистической интерпретации квадрата волновой функции $|\psi|^2$. Превращение одного пакета в набор некоррелированных пакетов равносильно превращению чистого состояния в смешанное, т.е. как бы превращению волновой функции в вероятности. Поскольку в данном случае никакого внешнего измерения не производится, то формально нет и коллапса вероятностей. Для внешнего мира обсуждаемый нами переход частицы в одну из составных частей пакета не является наблюдаемым. Следовательно, хотя внутри газа и происходит эволюция волновых пакетов с соответствующими коллапсами, во внешнем мире они проявляются только в виде вероятностей, которые должны описываться статистически с помощью матрицы плотности. Не будучи наблюдаемыми, коллапсы волновых функций равновесного газа не могут сами по себе приводить к коллапсу распределения вероятностей макроскопических тел, находящихся с этим газом во взаимодействии. Однако молекулы газа могут разрушать когерентность волновых функций макротел (например, броуновской частицы). Для этого требуется разрушить когерентность между отдельными компонентами в суперпозиции волновых функций макротела. Для нарушения фаз компонент во времени требуется несколько изменить их частоты, и тогда за время t можно добиться изменения фазы ~ 1 , если $\Delta\omega \sim 1/t$. Так как величине $\Delta\omega$ соответствует возмущение энергии $\Delta E = \hbar\omega$, то нарушение когерентности требует обмена энергией $\Delta E \sim \hbar/t$.

Резюмируя выше сказанное, можно сделать следующие выводы. В обобщенной квантовой механике, включающей описание необратимых процессов "измерения", существует два типа коллапсов волновых функций. Первый из них отвечает неравновесному процессу

"измерения" во внешнем мире, он имеет чисто информационный характер, может протекать без возмущения энергии и выглядит как спонтанное стягивание волновой функции. Именно такие процессы протекают в измерительных приборах. Процессы второго рода связаны с неконтролируемыми возмущениями. Они выглядят как разрушение когерентности с обменом энергии и описываются на языке превращения чистых ансамблей в смешанные. Сюда относятся прежде всего все процессы, связанные с тепловым движением частиц. Их естественно описывать на языке матрицы плотности, которая при слабом разрушении диагональных членов автоматически превращается в функцию распределения вероятностей.

Что касается коллапсов, связанных с появлением информации во внешнем мире, то наиболее естественным является их описание с помощью оператора "измерения" M . Действие такого оператора сводится к случайным переходам волновой функции к новым более локализованным состояниям. Это своего рода последовательное применение проекционных операторов. Каждый из таких проекционных операторов в обозначениях Дирака можно записать в виде $P = |\psi_c\rangle\langle\psi_c|$, где ψ_c — волновая функция после коллапса. Действие оператора P выглядит как

$$P_c\psi = \psi_c \int \psi_c^* \psi dx = |\psi_c\rangle\langle\psi_c|\psi\rangle, \quad (153)$$

если $\psi(x)$ зависит только от одной переменной x . В общем случае действие P_c на ψ , т.е. проекция ψ на ψ_c равна скалярному произведению волновых функций ψ_c и ψ , умноженному на волновую функцию ψ_c . Оператор M отличается от P только тем, что после проектирования волновая функция должна быть нормирована на единицу. Кроме того, оператор M , как правило, представляет собой набор многих случайных проектирований. Поскольку обе функции, ψ и ψ_c , эволюционируют с одним и тем же оператором Гамильтона H , то во многих случаях точный момент времени для применения оператора M не играет роли: в частности, его можно считать примененным из будущего, если в промежутке от данного времени t до бесконечности нет других коллапсов.

30. Вторичное квантование

В системах многих одинаковых частиц более удобным оказывается аппарат вторичного квантования. Мы обсудим его здесь только в той мере, в какой он необходим для последующих рассуждений. Пусть $\psi_N(x_1, \dots, x_N, t)$ есть волновая функция тождественных частиц, зависящая только от одной из пространственных координат x_i для каждой i -й частицы из общего числа N . Для простоты мы допустим, что эти частицы удовлетворяют бозе-статистике, т.е. волновая функция симметрична по переменным x_i . На языке вторичного квантования нет необходимости фиксировать число частиц N , допуская возможность как рождения и аннигиляции частиц, так и изменения чисел заполнения различных квантовых состояний. Поэтому вместо одной функции ψ_N можно представить себе набор функций $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \dots$ с разным числом частиц. Эти функции можно расположить в виде столбца, и тем самым мы получим так называемый вектор состояния в пространстве Фока. Оказывается, что вместо рассмотрения функции ψ_N

удобно ввести операторные функции, действующие на вектор состояния. Эти операторные функции представляют собой вторично квантованное, или просто квантовое, поле. В рассматриваемом нами случае пространства Фока вводят два операторных поля: оператор рождения $\Psi^+(x)$ и оператор уничтожения $\Psi^-(x)$ одной частицы. Иногда у оператора $\Psi^-(x)$ значок "минус" опускают, и тогда Ψ^+ означает просто эрмитово сопряженный оператор по отношению к Ψ . Оператор Ψ при действии на функцию ψ_N переводит ее в ψ_{N-1} , а оператор Ψ^+ переводит ψ_{N-1} в ψ_N . Явное выражение для этих операторов имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x)\psi_N(x_1, \dots, x_N) &= \\ &= \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{l=1}^N \delta(x - x_l) \psi_{N-1}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (154)$$

$$\Psi^+(x)\psi_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}) = N^{1/2}\psi_N(x, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (155)$$

Добавим сюда еще одно полезное соотношение для коммутатора операторов $\Psi(x)$ и $\Psi^+(y)$

$$\begin{aligned} [\Psi(x), \Psi^+(y)] &\equiv \Psi(x)\Psi^+(y) - \Psi^+(y)\Psi(x) = \\ &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (156)$$

Наиболее просто действие этих операторов можно понять на примере невзаимодействующих частиц, когда в качестве симметризованной функции ψ_N можно взять произведение одночастичных функций ψ_1 :

$$\psi_N(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \psi_1(x_i). \quad (157)$$

Такое состояние называют бозевским конденсатом. Теперь мы видим, что оператор $\Psi(x)$ превращает функцию $\psi_1(x_l)$ в δ -функцию $\delta(x - x_l)$, и затем по всем $\delta(x - x_l)$ производится суммирование. А оператор Ψ_N^+ добавляет к произведению (157) еще один множитель $\psi_1(x)$. Можно сказать (с точностью до множителя $1/N^{1/2}$ или $N^{1/2}$), что оператор $\Psi(x)$ осуществляет замену одной из функций $\psi_1(x_l)$ на δ -функцию в точке x , так что один из сомножителей типа $\psi_1(x_l)$ исчезает. А оператор $\Psi^+(x)$ просто добавляет еще одну частицу с волновой функцией $\psi_1(x)$, т.е. увеличивает число сомножителей типа $\psi_1(x_l)$ на единицу. С помощью соотношений (154), (155) нетрудно найти выражение для оператора $\Psi^+\Psi$, который называется оператором числа частиц N :

$$\begin{aligned} N\psi_N(x_1, \dots, x_N) &\equiv \Psi^+(x)\Psi(x)\psi_N(x_1, \dots, x_N) = \\ &= \sum_{l=1}^N \delta(x - x_l) \psi_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (158)$$

Оператор числа частиц является диагональным, а интеграл $\int \Psi^+(x)\Psi(x)dx \psi_N = N\psi_N$, т.е. он равен просто числу частиц N для каждой из функций ψ_N . Чтобы лучше представить себе смысл операторов $\Psi(x)$, Ψ^+ , N , удобно усреднить их, т.е. проинтегрировать по x_1, \dots, x_N с весом $|\psi_N|^2$. После интегрирования в простейшем случае (157) получаем

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x) \rangle_N &= N^{1/2}\psi_1^*(x), \quad \langle \Psi^+(x) \rangle_N = (N+1)^{1/2}\psi_1(x), \\ \langle N \rangle_N &= N|\psi_1(x)|^2. \end{aligned} \quad (159)$$

В более общем случае, когда ψ_N не равно произведению (157), вместо $\psi_1(x)$ входит одночастичная функция, усредненная по всем N переменным, кроме одной. С помощью операторов $\Psi(x)$, $\Psi^+(x)$ легко конструируются проекционные операторы. Допустим, например, что в результате измерения начальная функция ψ_1 , коллапсирует в ψ_c . Если у нас имеется только одна частица, то этот коллапс осуществляется оператором коллапсирования (153). А если мы имеем N частиц, то мы должны осуществить коллапс поочередно у каждой из частиц, да еще симметризовать полученную таким образом волновую функцию, чтобы учесть бозе-симметрию. Если мы проинтегрируем (154) по x с весом $\psi_c(x)$, то мы как раз и получим в правой части волновую функцию, у которой один из сомножителей $\psi_1(x_i)$ заменен на $\psi_c(x_i)$, т.е. у этой частицы осуществлен коллапс $\psi_1(x_i) \rightarrow \psi_c(x_i)$. Теперь для получения выражения типа (153) нам осталось лишь добавить матричный элемент $\langle \psi_c | \psi_1 \rangle$. Как нетрудно видеть, его можно получить с помощью интегрирования (155) по x с весом $\psi_c^*(x)$. Таким образом, мы естественно приходим к следующему выражению для проекционного оператора:

$$P_c = \int \psi_c^*(x) \Psi^+(x) dx \int \psi_c(y) \Psi(y) dy. \quad (160)$$

Разумеется, это выражение пишется с точностью до нормировочного множителя (если конечная волновая функция предполагается нормированной). Если воспользоваться соотношениями (154), (155), то действие проекционного оператора (160) на волновую функцию N частиц $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$ запишется как

$$P_c \psi_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \psi_c(x_i) \cdot \int \psi_c^*(x_i) \psi_N(x_1, \dots, x_N) dx_i. \quad (161)$$

Другими словами, у волновой функции ψ_N вычисляется матричный элемент по отношению к функции $\psi_c^*(x_i)$, затем он умножается на $\psi_c(x_i)$, и полученное выражение симметризуется по всем частицам. После коллапса симметрия типа (157) теряется, но все же и новое выражение в применении к функции (157) выглядит достаточно просто.

Введение операторов Ψ , Ψ^+ удобно тем, что с их помощью описание динамики квантовых частиц становится очень похожим на описание динамики полей. Поэтому и оператор $\Psi(x)$ называют обычно квантовым полем. Поясним, о чем тут идет речь.

Оказывается, прежде всего, что некоторые аддитивные физические величины выражаются очень просто через операторы $\Psi(x)$, $\Psi^+(x)$. Например, импульс одной частицы p_x выражается в виде оператора

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

который применяется к волновой функции. А если мы определим оператор

$$P_x = \int \Psi^+(x) p_x \Psi(x) dx, \quad (162)$$

то согласно формулам (154), (155) его действие на $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$ эквивалентно сумме импульсов всех N

частиц. Аналогичным образом, усредненный по x одночастичный гамильтониан $\int \Psi^+(x) H(x) \Psi(x) dx$ в применении к ψ_N равен сумме гамильтонианов N частиц. Более того, даже при наличии парных сил с потенциалом $U^{(2)}(|x-y|)$ полный гамильтониан может быть записан в компактной форме

$$H = \int \Psi_+(x) H^{(1)} \Psi(x) dx + \int \Psi^+(x) \Psi^+(y) U^{(2)}(|x-y|) \Psi(x) \Psi(y) dx dy. \quad (163)$$

Здесь $H^{(1)}$ — одночастичный гамильтониан в поле сил с потенциалом $U^{(1)}(x)$, а $U^{(2)}(|x-y|)$ — потенциал взаимодействия частиц. При описании динамики многих частиц часто оказывается удобным переход к представлению чисел заполнения. Он производится следующим образом. Пусть $\psi_n(x)$ есть полный ортонормированный базис. В качестве такого базиса мы рассматривали, например, стоячие волны типа

$$\psi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Но в общем случае ψ_n являются комплексными. Операторы $\Psi(x)$, $\Psi^+(x)$, как функции переменной x , могут быть разложены в ряды:

$$\Psi(x) = \sum_i a_i^- \psi_i(x), \quad \Psi^+(x) = \sum_i a_i^+ \psi_i^*(x). \quad (164)$$

Поскольку функции ψ_n составляют ортонормированный базис, то получаем отсюда

$$a_i^- = \int \psi_i^*(x) \Psi(x) dx, \quad a_i^+ = \int \psi_i(x) \Psi^+(x) dx. \quad (165)$$

Амплитуды a_n^- и a_n^+ также являются операторами. Волновые функции $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$, как функции своих переменных x_1, \dots, x_N , также можно разложить по базису $\psi_n(x)$. При этом удобно перейти к представлению чисел заполнения. Обозначая волновую функцию с числом n_i как $|n_i\rangle$, можно показать, что действие операторов a_i^- , a_i^+ выглядит достаточно просто:

$$a_i^+ |n_i\rangle = (n_i + 1)^{1/2} |n_i + 1\rangle, \\ a_i^- |n_i\rangle = n_i^{1/2} |n_i - 1\rangle. \quad (166)$$

Оператор $a_i^+ a_i^- = n_i$ оказывается диагональным, а оператор полного числа частиц равен

$$N = \sum_i a_i^+ a_i^- = \sum_i n_i. \quad (167)$$

До сих пор мы не учитывали временной зависимости волновых функций ψ_N . На самом деле они удовлетворяют уравнению Шрёдингера, которое в компактной форме записывается как

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (168)$$

где ψ — столбец из функций $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$, а оператор Гамильтона дается выражением (163). Символическое решение уравнения (168) имеет вид

$$\Psi = \exp\left(-\frac{iH}{\hbar} t\right) \psi(0), \quad (169)$$

где $\psi(0)$ — вектор состояния в начальный момент времени.

Уравнения квантованных полей становятся еще красивее, если условиться проводить все усреднения физических величин с весовой функцией $\psi(0)$. Тем самым производится переход от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга: волновая функция считается не зависящей от времени, зато все операторы приобретают временную зависимость. Для оператора Ψ это означает

$$\Psi(t) = \exp\left(\frac{iH}{\hbar}t\right) \Psi_0 \exp\left(-\frac{iH}{\hbar}t\right), \quad (170)$$

где Ψ_0 есть введенный нами ранее соотношениями (154), (155) оператор, не зависящий от времени. Из соотношения (170) находим

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -[H, \Psi], \quad (171)$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Уравнения (170), (171) описывают эволюцию чистого состояния. Они являются полностью обратимыми и не учитывают никакого взаимодействия с внешним миром. Если это взаимодействие сводится лишь к теплообмену со средой и нарушению когерентности состояний, то для описания соответствующих процессов достаточно введение матрицы плотности смешанных состояний. Однако если эти процессы включают в себя неравновесные коллапсы, то ситуация становится более сложной. Каждый из коллапсов можно описать оператором проектирования типа (159). Его можно представить в виде $P_c = A_c^+ A_c$, где амплитуды A_c , A_c^+ равны соответственно

$$A_c = \int \psi_c(x) \Psi(x) dx, \quad A_c^+ = \int \psi_c(x) \Psi_c^+ dx. \quad (172)$$

Появление случайных операторов проектирования можно учесть в уравнении (168) дополнительным слагаемым типа $M\Psi$. После этого обобщенное уравнение Шрёдингера перестает быть обратимым, и соответственно эволюция квантового поля, описываемая соотношениями (170), (171), имеет место только между коллапсами. В общем же случае эволюция квантовой системы становится гораздо сложнее, а главное, она перестает быть обратимой. Необратимость возникает вследствие информационной связи данной квантовой системы с неравновесным внешним миром.

31. Молекулярный хаос

Главная наша задача заключается в описании неравновесных процессов, будь то квантовых или классических. В этих процессах мы будем различать две линии поведения: приближение к равновесию за счет диссипации с возрастанием соответствующей энтропии, и обратный процесс развития, или самоорганизации, с уменьшением энтропии за счет роста энтропии окружения. Естественно сначала рассмотреть первый из этих необратимых процессов, т.е. приближение к равновесию. Оказывается, что приближение к равновесию имеет характер монотонного разрушения порядка или неуклонного рассасывания начальных флуктуаций только при малом отклонении от равновесия. В сильно неравновесных системах, как

правило, развиваются более сложные нелинейные процессы, в которых по ряду степеней свободы происходит не разрушение, а усложнение структур. Естественно, что начать нужно с самого простого случая малого отклонения от равновесия. Кроме того, естественно стартовать, отправляясь от самой простой физической системы.

В качестве таковой мы выберем разреженный газ классических частиц. Пусть параметр плотности $\varepsilon = na^3$ газа (где n — плотность, a — средний размер молекулы) составляет величину, значительно меньшую единицы. Это означает, что среднее расстояние $l = n^{-1/3}$ между молекулами значительно больше размера молекул. Поэтому молекулы газа свободно пробегают расстояние $\lambda = 1/na^2 \gg a$, сравнительно редко сталкиваясь между собой.

В этих условиях поведение газа описывается уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \text{St}(f). \quad (173)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения частиц по скоростям в точке \mathbf{r} в момент времени t . Квадратичный по f член столкновений $\text{St}(f)$ описывает эволюцию функции распределения при учете парных столкновений молекул между собой. Член столкновений выводится в предположении, что обе налетающие друг на друга частицы имеют одну и ту же функцию распределения f , а столкновения являются случайными. Такое приближение предполагает, что в газе имеет место "молекулярный хаос", т.е. молекулы перед столкновениями никак не коррелированы между собой. Это предположение кажется совершенно естественным с физической точки зрения, однако оно требует определенного обоснования, которое мы и обсудим ниже.

Член столкновений в уравнении (173) явным образом вносит необратимость, что было показано в знаменитой H-теореме Больцмана. Нередко возникает вопрос, каким образом возникает необратимость: ведь при нахождении изменения функции распределения за счет парных столкновений никаких явных допущений о необратимости, казалось бы, не делалось. Более того, сам член столкновений выводится в предположении обратимой динамики сталкивающихся частиц. Стало быть, именно допущение "молекулярного хаоса" ведет к необратимости. Нужно понять, откуда берется "молекулярный хаос" и как он затем воплощается в необратимую эволюцию функции распределения.

Рассмотрим сначала, как происходит процесс приближения к термодинамическому равновесию. Кинетическое уравнение (173) очень грубо можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = -\nu(f - f_0), \quad (174)$$

где f_0 — максвелловское распределение, имеющее плотность n , среднюю скорость \mathbf{u} и среднюю энергию $\langle mv^2/2 \rangle$, в точности равные аналогичным величинам для функции f . В правой части уравнения (174) коэффициент ν представляет собой среднюю частоту парных столкновений: $\nu = v_T/\lambda$, $v_T = (T/m)^{1/2}$. Если функция распределения f однородна по \mathbf{r} , то, как видно из (174), ее любое отклонение от f_0 убывает со временем как $\exp(-\nu t)$. Однако если начальная функция распределения зависит как от \mathbf{v} , так и от \mathbf{r} , то ее эволюция происходит гораздо

сложнее. В частности, для пространственных масштабов, значительно больших длины свободного пробега λ , столкновения достаточно быстро, за время $\tau = 1/\nu$, устанавливают локально равновесную функцию распределения с плотностью n , температурой T и скоростью \mathbf{u} , зависящими от пространственных координат.

В последующие моменты времени эволюция величин n, \mathbf{u}, T описывается уравнениями газодинамики. Эти уравнения при учете малых слагаемых $\sim 1/\nu$ содержат диссипативные члены с вязкостью и теплопроводностью. Но они приводят к гораздо более медленному убыванию флуктуаций со временем. Поскольку коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности имеют порядок величины $\chi \approx \nu_T^2/\nu$, то возмущения масштаба L убывают всего лишь как $\exp(-\chi t/L^2) = \exp(-\nu_T^2 t/\nu L^2)$. Как мы видим, чем больше частота столкновений ν , тем медленнее убывают со временем соответствующие возмущения. Наиболее медленно убывают возмущения максимального масштаба $L = L$, где L — размер сосуда. Но в конечном счете согласно кинетическому уравнению (173) должны исчезнуть все флуктуации, и функция f должна, в конце концов, достигнуть равновесного максвелловского распределения, не зависящего от пространственных координат.

Однако при выводе уравнения Больцмана (173) допущена одна неточность. Хотя член столкновений по своему смыслу описывает случайные соударения молекул, от этого члена сохранена только средняя по времени часть. Более правильно считать член столкновений случайной величиной, так что в уравнение (173) следует добавить флуктуационный член, равный разности между истинным случайным членом столкновений и его усредненной частью $\text{St}(f)$. Оказывается, что эта добавка, играющая роль сторонней случайной силы, не дает возможности для полной релаксации f , а непрерывно возобновляет тепловые флуктуации. Эти флуктуации удобно разбить на два класса: индивидуальные и коллективные. Индивидуальные флуктуации относятся к масштабам, меньшим длины пробега, когда движение частиц можно считать свободным. А для масштабов, больших λ , следует говорить о коллективных флуктуациях.

Коллективные флуктуации можно описывать уравнениями газодинамики. Соответствующие движения газа распадаются на два класса: звуковые колебания и несжимаемые движения типа малых вихрей. На каждую тепловую моду звуковых колебаний приходится энергия T , равная сумме кинетической энергии $T/2$ и потенциальной энергии $T/2$. А на каждый вихрь приходится энергия $T/2$. Число таких мод составляет величину порядка $(L/\lambda)^3$. Отсюда видно, что энергия теплового движения коллективных мод $\sim (3T/2)L^3/\lambda^3$ оказывается существенно меньшей полной тепловой энергии $(3T/2)L^3n$. Их отношение равно величине $1/\lambda^3 n = a^6 n^2 = \varepsilon^2 \ll 1$.

Итак, если в уравнении (173) вместо усредненного члена столкновений подставить его истинное случайное значение, то функция распределения эволюционирует не до максвелловского распределения f_0 , а до величины $f_0 + \tilde{f}$, где \tilde{f} соответствует тепловым флуктуациям. У этих тепловых флуктуаций малая доля $\varepsilon^2 \ll 1$ энергии находится в коллективных степенях движения, а остальная $(3nT/2)(1 - \varepsilon^2)$ часть тепловой энергии находится в индивидуальных степенях движения. Полная энергия теплового движения равна $3nT/2$, как и полагается по законам термодинамики.

Теперь у нас остаются еще два вопроса: почему происходит релаксация надтепловых возмущений функции распределения, и можно ли считать обратимыми тепловые флуктуации? Чтобы понять, что эти вопросы действительно имеют основание, целесообразно учесть еще один возможный подход к описанию динамики газа, а именно, с помощью уравнения Лиувилля. Это уравнение описывает эволюцию функции распределения $W(\mathbf{r}_1, v_1; \mathbf{r}_2, v_2; \dots; \mathbf{r}_N, v_N, t)$ всех N частиц газа в $6N$ -мерном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i \mathbf{v}_i \nabla_i W + \sum_i \mathbf{g}_i \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} = 0. \quad (175)$$

Здесь \mathbf{g}_i — ускорение частицы номера i . В классической механике движение частиц описывается уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad m \mathbf{g}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (176)$$

где

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{ij} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (177)$$

представляет собой гамильтониан, т.е. сумму кинетической и потенциальной энергий частиц, $\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i$ есть импульс частицы номера i , \mathbf{g}_i — ускорение частицы номера i . В силу уравнений Гамильтона (176) вероятность W сохраняется вдоль траектории в фазовом пространстве, так что уравнение (175) можно представить в виде $dW/dt = 0$, где d/dt — полная производная по времени вдоль траектории. Другими словами, поток в фазовом пространстве является несжимаемым.

Уравнение Лиувилля (175) является полностью обратимым: утверждение о постоянстве W вдоль траектории справедливо как в отношении будущего, так и в отношении прошлого. Поэтому совершенно не очевидно, что статистическое описание должно приводить к необратимости — ведь в уравнении Лиувилля этого не видно. Скорее наоборот, вероятность W постоянна вдоль траектории, а для каждой из конфигураций начальных значений координат и скоростей частиц траектория определена однозначно как в будущее, так и в прошлое.

Пусть $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ есть закон движения точки в фазовом пространстве для некоторого набора начальных значений. Легко видеть, что функция

$$W_\mu = \prod_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(t))$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля. В каждый момент времени эта функция соответствует одной единственной точке в фазовом пространстве. Произвольная функция W может рассматриваться как усредненное значение W_μ по начальным данным с некоторым весом $F_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Рассмотрим теперь микроскопическую плотность в 6 -мерном фазовом пространстве

$$F'_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i). \quad (178)$$

Эта функция по отношению к W играет почти такую же роль, как оператор N вторичного квантования по отно-

шению к волновой функции $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$. Различие заключается лишь в добавлении переменных \mathbf{v}_i к конфигурационным переменным \mathbf{r}_i . Усредняя функцию (178) с весом W , можно найти одночастичную функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. А если вместо W использовать W_μ , то мы получим зависящую от времени микроскопическую плотность

$$F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)). \quad (179)$$

Эту функцию можно усреднять по начальным данным, и тогда мы снова получим $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Легко видеть, что функция (179) удовлетворяет микроскопическому уравнению Климонтовича

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F_\mu + \mathbf{g} \frac{\partial F_\mu}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (180)$$

где

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{m} \nabla \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (181)$$

Уравнение (180) также является вполне обратимым. Но если его усреднить по \mathbf{r} и по интервалу времени порядка времени столкновений, то в предположении молекулярного хаоса последнее слагаемое можно преобразовать в член столкновений. При этом ясно видно, что предположение молекулярного хаоса, т.е. отсутствия корреляции в движении перед столкновением, как раз и является тем ключевым элементом, который вносит необратимость в кинетическое уравнение Больцмана.

Чтобы понять, в чем же смысл допущения о молекулярном хаосе, рассмотрим более подробно сценарий движения отдельной молекулы.

На рис. 13 сплошной линией изображена траектория одной из молекул, а шары 1, 2, 3 описывают потенциал рассеяния молекулы M на молекулах 1, 2, 3. Радиус каждого шара считаем приближенно равным a ; средний пробег между соударениями принимаем за $\lambda = 1/na^2$. Допустим, что начальная скорость молекулы M получила некоторое возмущение \tilde{v} , так что ее траектория пошла по пунктирной линии, отклоняющейся на угол $\gamma_0 = \tilde{v}/v_T$ относительно прежней траектории. Легко видеть, что при следующем ударе этот угол возрастет в λ/a раз, а после k -го удара он будет порядка $\gamma_0(\lambda/a)^k$. Обозначая через $s \cong k\lambda$ среднюю длину вдоль траектории и полагая $s = vt$, мы получим соотношение

$$\gamma = \gamma_0 \exp(\kappa t), \quad (182)$$

где величина

$$\kappa = \frac{v}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{a}$$

называется энтропией Колмогорова–Синяя.

Отсюда видно, что даже при очень малом начальном возмущении $\gamma_0 \ll 1$ величина γ достигает значения порядка единицы при

$$k = \frac{s}{\lambda} \cong \ln \frac{1}{\gamma_0} \cdot \left(\ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1}.$$

Далее, пунктирная траектория будет наталкиваться на совсем другие молекулы. Таким образом, движение

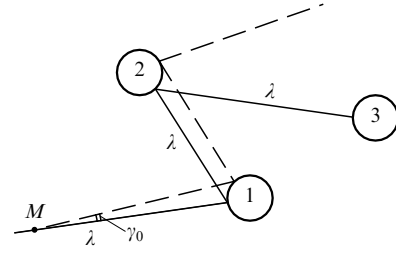


Рис. 13. Молекула M последовательно сталкивается с молекулами 1, 2, 3. Если скорость начального движения немного возмущена (пунктирная линия), то отклонения от начальной траектории быстро нарастают от удара к удару

молекулы в газе оказывается крайне чувствительным к начальным возмущениям.

Покажем теперь, что кроме начальных возмущений существуют возмущения, вносимые внешним окружением. Для этого учтем те тепловые флуктуации, которые отвечают коллективным степеням свободы. Если нет неупругих взаимодействий молекул со стенками, то эти флуктуации являются составной частью движения системы из N частиц в $6N$ -мерном фазовом пространстве. Другими словами, их следовало бы считать обратимыми. В рамках гидродинамического приближения коллективные флуктуации создаются случайной составляющей члена столкновений, а соответствующая энергия флуктуаций составляет величину порядка ε^2 от тепловой энергии. При наличии неупругих столкновений со стенками появляется новый источник теплового шума, который по мощности как бы эквивалентен шуму от пристеночного слоя газа толщиной λ/L . Следовательно, доля шума от внешнего источника составляет величину

$$\xi = \varepsilon^2 \frac{\lambda}{L} \ll 1.$$

Другими словами, возмущения масштаба

$$\gamma_0 \approx \frac{\tilde{v}}{v_T} \sim \varepsilon \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{1/2}$$

вносятся извне, т.е. они являются абсолютно случайными и не контролируемыми. Отсюда видно, что после

$$k = \ln \frac{1}{\gamma_0} \cdot \left(\ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1} = \ln \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{1/2} \right] \cdot \left(\ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1}$$

ударов начальные условия полностью забываются, так что ни о какой обратимости не может быть и речи.

Оценим величину k для воздуха. При этом (в системе СГС) имеем $n = 3 \cdot 10^{19}$, $a^2 = 10^{-15}$, $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon = na^3 = 10^{-3}$, так что при $L = 1$ получаем приближенно $k \sim 2$. После первых двух–трех ударов корреляция движения молекул полностью теряется! Таким образом, самый простой механизм возбуждения звукового шума стенками достаточен для того, чтобы неустойчивость траекторий частиц привела к молекулярному хаосу в самых обычных условиях воздуха при нормальных температуре и давлении. Малое взаимодействие газа со стенками достаточно для того, чтобы в нем осуществлялся молекулярный хаос и, как следствие этого хаоса, — необратимое приближение к равновесию.

Чтобы учесть количественно (но приближенно) влияние внешнего окружения, в кинетические уравнения следует добавить малые дополнительные слагаемые. Рассмотрим сначала уравнение (180) для микроскопической функции F_μ . Наличие внешних возмущений приводит к тому, что при каждом столкновении молекул возникает дополнительная неточность в параметрах удара масштаба ξ . Другими словами, при каждом столкновении вносится случайное искажение отлетающей траектории масштаба ξ . Можно сказать, что на каждую из молекул действует дополнительная случайная сила, которая со средней частотой ν , равной частоте парных столкновений, вносит дополнительные толчки. Эта ситуация в точности соответствует уравнению Ланжевена (79), и поэтому усредненный результат этих толчков можно учесть в точности так же, как это было сделано при выводе уравнения (84) с учетом соотношения Эйнштейна (83). Следовательно, в правую часть уравнения (180) нужно добавить дополнительный член

$$Kf = D_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\mathbf{v}}{v_T^2} f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right),$$

где $D_v = \xi^2 \nu_T^2 \nu$ — коэффициент диффузии в пространстве скоростей, $\nu_T = T/m$.

Оператор K имеет диффузионный характер в пространстве скоростей. Действуя на функцию F_μ он приведет к уширению δ -функций, так что со временем неопределенность $(\Delta v)^2$ вблизи каждой из δ -функций будет линейно возрастать со временем, т.е. $\Delta v \sim \nu_T (\xi^2 \nu t)^{1/2}$. За время $t \sim \tau = 1/\nu$ эта неопределенность составит малую величину $\Delta v \sim \xi \nu_T$, т.е. мы получаем ту же оценку, что и для \tilde{v} . Последующие столкновения с разбегающимися траекториями приводят к гораздо более быстрому уширению локализованных "комочков" в (179), возникающих от усреднения F_μ по "толчкам" со стороны внешнего окружения. Если локализация отдельных компонент $\langle F_\mu \rangle$ станет масштаба a , то выражением (181) для ускорения частиц пользоваться уже нельзя из-за того, что в процессе столкновения усредненное значение $\langle F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle$ нельзя считать равным произведению усредненных значений функций F_μ . Как обходить эту трудность, хорошо известно: нужно считать, что функции $F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ не коррелированы перед ударом. И тогда усредненное значение от третьего слагаемого в (180) автоматически приводит к уравнению Больцмана. Таким образом, "молекулярный хаос" создается фактически внешним миром, а затем он многократно усиливается движением молекул.

Случайное вмешательство внешнего окружения нетрудно учесть и в уравнении Лиувилля (175), добавляя в него соответствующие дополнительные слагаемые. Нетрудно видеть, как выглядят эти слагаемые. В самом деле, если взять в качестве решения уравнения (175) микроскопическую функцию

$$W_\mu = \prod_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(t)),$$

то согласно приближению Ланжевена мы должны учесть дополнительную диффузию по скоростям у каждой из частиц. Поэтому обобщенное уравнение Лиувилля следует записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i \mathbf{v}_i \nabla_i W + \sum_i \mathbf{g}_i \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} &= K W \equiv \\ &\equiv D_v \sum_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left(\frac{m \mathbf{v}_i}{T} W + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} \right). \end{aligned} \quad (183)$$

Как мы видим, диффузионный оператор K приводит к уширению во времени локализованной функции W_μ . Можно сказать, что K представляет собой оператор рождения энтропии со стороны внешнего мира. Необходимость учета микроскопической необратимости была указана И. Пригожиным [12]. В его подходе также используется оператор рождения энтропии M , имеющий сходный с оператором K смысл (мы используем обозначение K только потому, что символом M мы условились обозначать оператор измерения). В отличие от подхода И. Пригожина, в соотношении (183) представлена явная форма оператора K .

Наличие оператора K качественно меняет структуру уравнения (183). Это уравнение перестает быть обратимым: диффузия по скоростям, сколь бы медленной она ни была, делает уравнение (183) параболическим, с возрастанием энтропии только в одну сторону — от прошлого к будущему. Согласно (183) вероятность W не просто переносится вдоль траекторий, но еще и слабо диффундирует от траектории к траектории. В результате этого и появляется возможность говорить о "молекулярном хаосе".

До сих пор мы предполагали, что внешнее окружение находится вблизи равновесия. Оказывается, что ситуация в корне меняется при неравновесном внешнем окружении. Физическая система, которая может обмениваться с внешним миром энергией и энтропией, называется открытой. Оказывается, что многие открытые физические системы обнаруживают свойство образования сложных нелинейных структур и процессов. Они так и называются — сложные физические системы, или системы с самоорганизацией.

32. Конвекция

В качестве простейшего примера необратимого процесса в открытой системе при неравновесном внешнем окружении мы рассмотрим конвекцию жидкости в поле силы тяжести. Такая конвекция легко возникает в любом слое жидкости при подогревании ее снизу. За счет теплового расширения более теплые участки жидкости становятся более легкими и архимедовой силой они вытесняются вверх, уступая место более холодным массам. Конвективных течений существует великое множество. Мы рассмотрим здесь лишь один из самых простых примеров конвекции в замкнутом тороидальном сосуде (рис. 14) радиуса R .

Будем считать, что жидкость в этом сосуде подогревается снизу и охлаждается сверху. Более точно, допустим, что температура стенок равна

$$T_s = T_0 + \frac{1}{2}(T_m - T_0)(1 + \cos \theta),$$

где угол θ обозначен на рис. 14. Пусть $T = T(\theta, t)$ — температура жидкости, усредненная по поперечному сечению кольцевого сосуда. Если через γ обозначить

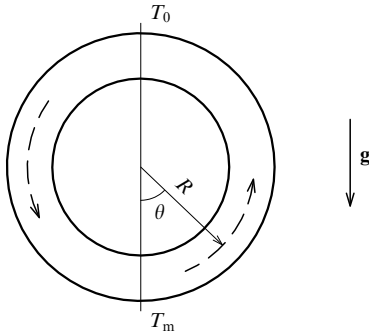


Рис. 14. Жидкость в кольцевом сосуде подогревается снизу нагревателем при температуре T_m , заметно большей температуры T_0 холодильника в верхней части сосуда. При достаточно большой разнице температур в жидкости возникает конвекция

коэффициент теплообмена со стенками сосуда, то для температуры T можно написать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\gamma(T - T_s). \quad (184)$$

Жидкость мы считаем слабо сжимаемой, так что скорость v не зависит от θ и может зависеть только от времени. Пусть α — коэффициент объемного расширения жидкости, так что у ее плотности ρ появляется добавка $\delta\rho = \rho\alpha T$. В поле силы тяжести изменение плотности приведет к появлению силы $g\delta\rho$. Ее проекция на азимутальное направление равна $-g\delta\rho \cdot \sin\theta = -g\rho\alpha T \sin\theta$. Если эту силу усреднить по углу θ , то мы найдем некоторое ее среднее значение. Именно это усредненное значение и действует на все кольцо жидкости, так что имеем

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -g\rho\alpha \langle T \sin\theta \rangle - \eta v. \quad (185)$$

Здесь последний член с коэффициентом η , пропорциональным вязкости жидкости, учитывает торможение жидкости о стенки.

Усредняя (184) по углу θ , найдем, что не зависящая от угла часть температуры T достигает стационарного значения $\langle T \rangle = (T_0 + T_m)/2$. Пусть $T = \langle T \rangle - T_1 \sin\theta + T_2 \cos\theta$. Тогда для T_1 и T_2 получаем уравнения

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{v}{R} T_2 = -T_1, \quad (186)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{v}{R} T_1 = -\gamma \left(T_2 - \frac{T_m - T_0}{2} \right). \quad (187)$$

А уравнение для скорости после усреднения по углу θ произведения $T \sin\theta$ записывается в виде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = + \frac{g\rho\alpha}{2} T_1 - \eta v. \quad (188)$$

Как мы видим, в системе трех уравнений для переменных v, T_1, T_2 два уравнения (186), (187) являются нелинейными и только (188) линейно. Систему уравнений (186), (187) получил Лоренц [13], обративший внимание на ее весьма любопытные особенности. Обычно уравнения Лоренца записывают в безразмерном виде

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \quad \frac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ,$$

$$\frac{dZ}{dt} = -bZ + XY, \quad (189)$$

где σ, r, b — безразмерные параметры, а величины X, Y, Z выбираются таким образом, что они пропорциональны, соответственно,

$$v, T_1, T_2 - \frac{T_m - T_0}{2}.$$

Систему уравнений (189) принято называть моделью Лоренца. Ее самое простое решение имеет вид $X = Y = Z = 0$. Оно описывает распределение температур в покоящейся жидкости. Но у системы (189) имеется еще одно стационарное решение

$$X_0 = Y_0 = \pm [b(r-1)]^{1/2}, \quad Z_0 = r-1. \quad (190)$$

Разумеется, это решение существует только при $r > 1$. Сравнивая второе уравнение системы (189) с уравнением (187), нетрудно заметить, что параметр r пропорционален разности температур $T_m - T_0$. Таким образом, решение с отличной от нуля скоростью $v \sim X$ появляется только после того, как разность $T_m - T_0$ превысит некоторое критическое значение. Стационарная конвекция при этом может идти либо против часовой стрелки ($v \sim X > 0$), либо по часовой стрелке ($v \sim X < 0$). Согласно (190) скорость конвекции пропорциональна корню квадратному из надкритичности $(r-1)$.

Рассмотрим линейное приближение (189), когда переменные X, Y, Z малы. В этом случае квадратичные члены нужно отбросить, и тогда третье уравнение (189) оказывается не связанным с первыми двумя и описывает затухание Z со временем. А первые два линейных уравнения имеют решение в виде экспоненты $X, Y \sim e^{\gamma t}$. Для инкремента нарастания малых возмущений γ получаем дисперсионное уравнение

$$\gamma^2 + (\sigma+1)\gamma + \sigma(1-r) = 0. \quad (191)$$

При $r < 1$ два корня этого уравнения отрицательны, т.е. малые возмущения затухают со временем. А при $r > r_c = 1$ одно собственное значение становится положительным, т.е. возникает неустойчивость. Если $r-1 \ll 1$, т.е. надкритичность мала, то одна из мод является медленно изменяющейся со временем: во многих областях физики такие моды называют мягкими. У мягкой моды $X - Y$ является малой величиной, так что $Y \approx X$. Более того, во втором и третьем уравнениях (189) можно пренебречь производными по времени, после чего для Y и Z получаем их квазиравновесные значения $Y = X$, $Z = b^{-1}XY = b^{-1}X^2$. С учетом этих приближенных соотношений запишем второе из уравнений (189) в виде

$$F \equiv -\frac{dX}{dt} + (r-1)X - \frac{1}{b}X^3 = -\frac{dX}{dt} - \frac{dU}{dX} = 0. \quad (192)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение безынерционного движения материальной точки с нулевой массой и координатой X под действием силы F , равной вязкому трению $-dX/dt$, и силы со стороны потенциала

$$U = -\frac{r-1}{2}X^2 + \frac{1}{4b}X^4 + \text{const.} \quad (193)$$

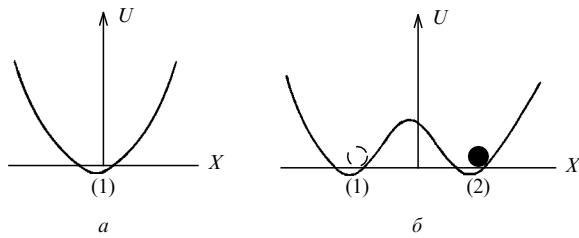


Рис. 15. Зависимость потенциальной энергии U от X в случае $r < 1$ (а) и $r > 1$ (б). При $r > 1$ частица в устойчивом стационарном состоянии может находиться только в одном из минимумов U : (1) или (2)

Согласно (192) "частица" медленно соскальзывает на дно потенциальной ямы U . Потенциал U имеет существенно разный вид при $r < 1$ и $r > 1$ (рис. 15).

При $r < 1$ потенциал U нарастает в обе стороны от $X = 0$, так что $X = 0$ является устойчивым стационарным состоянием. А при переходе параметра r через единицу в сторону $r - 1 > 1$ возникает так называемая бифуркация: у "материальной точки" с координатой X появляется одно неустойчивое и два устойчивых положения, которые соответствуют стационарным состояниям.

Вспоминая, что координата X пропорциональна скорости жидкости v , мы можем сказать, что при малой надкритичности возникает стационарная конвекция либо по часовой, либо против часовой стрелки.

Параметр надкритичности r называют обычно управляющим параметром: он задается извне. Если параметр r возрастает, переходя через единицу, то жидкость откликается на это неустойчивостью в точке $r = 1$ и затем самопроизвольным раскручиванием потока, так что $v \sim (r - 1)^{1/2}$. Можно сказать, что при $r < 1$, жидкость не имела никакой информации, связанной с ее движением: жидкость просто покоилась. А при $r > 1$ у жидкости имеются два равновесных состояния, различающихся знаком скорости вращения. Это значит, что у одной макроскопической степени свободы появилась возможность "запомнить" один бит информации, который при $r > 1$ устойчиво сохраняется конвекционным течением. Нетрудно видеть, что в рамках рассматриваемых нами макроскопических уравнений один бит информации появляется сразу же при $r = 1$, когда скорость течения жидкости еще равна нулю: ведь если уменьшать r от значений $r > 1$ в сторону $r = 1$, имеющийся у жидкости бит информации будет сохраняться вплоть до значений $r = 1$. Можно сказать, что при $r = 1$ у жидкости появляется "тренд", т.е. намек на возникновение макроскопического параметра порядка v , и далее при ничтожно малом превышении r над единицей этот "тренд" превращается в один бит информации. Дальнейшее увеличение r никак не изменяет информационной емкости нашего конвекционного кольца, рассматриваемого как ячейка памяти: меняется лишь величина скорости v , т.е. ячейка становится более устойчивой по отношению к помехам.

Вспомним теперь, что реальные жидкости или газы имеют тепловые флуктуации. В частности, и на степень свободы, связанной с круговым течением, приходится энергия, равная $T/2$. Следовательно, и при $r < 1$ у нас имеется "травя" из тепловых шумов различных мод. При $r \rightarrow 1$ мода кругового движения как бы выделяется из других мод: ее амплитуда становится больше, так как затухание уменьшается, а накачка тепловых шумов

остается прежней. Вот это-то явление и можно назвать "трендом": амплитуда моды выделяется "ростом среди сверстников". Переход параметра r через единицу превращает эту надтепловую моду в макроскопическое течение.

Вернемся опять к полной модели Лоренца (189). У нее имеется три стационарных решения при $r > 1$, и только два из них (190) устойчивы при небольшой надкритичности. Но что произойдет, если увеличивать параметр r , не ограничиваясь небольшими его значениями? Первый вопрос — устойчиво ли равновесие (190)? — можно опять рассмотреть с помощью линейного приближения вблизи равновесия. Соответствующий анализ показывает, что существует второе критическое значение r_{c2} , выше которого происходит вторая бифуркация. Но это еще не все. Оказывается, система уравнений (189) имеет много различных мод движения. Самая удивительная из них была обнаружена самим Лоренцем при значениях параметров $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Это решение получило название "странный аттрактор". Лоренц обнаружил, что система (X, Y, Z) совершает сложное хаотическое движение, похожее на "танец" вокруг двух неустойчивых фокусов. Стартуя с любой точки с небольшими X, Y, Z , система переходит на неустойчивый фокус, вокруг которого она начинает описывать витки с амплитудой, возрастающей со временем, т.е. пробегает траекторию по раскручивающейся спирали. После некоторого количества таких витков система внезапно устремляется ко второму фокусу, вокруг которого она снова описывает витки по раскручивающейся спирали. После нескольких витков, система снова перепрыгивает на первую спираль, чтобы приблизительно повторить то же самое движение. Однако никакой периодичности в таком движении нет: и времена, в течение которых система находится вблизи одного из фокусов, и число витков на каждой из спиралей кажутся совершенно случайными. Хаотическое движение появляется в совершенно детерминированной динамической системе с тремя координатами X, Y, Z .

Хотя запись уравнений движения в формуле (189) и является самой простой, она не дает наглядного представления, отчего возникает хаотичность. Для этих целей одно из уравнений удобно записать в более сложной форме. А именно, переменную

$$Y = X + \frac{1}{\sigma} \frac{dX}{dt}$$

из первого уравнения (189) подставим во второе и третье уравнения, а затем переменную

$$Z = \frac{1}{b} \left(XY - \frac{dZ}{dt} \right)$$

подставим во второе уравнение. Тогда мы получим уравнение для X , которое по-прежнему не является замкнутым, но зато имеет очень удобную для качественного анализа форму:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 X}{dt^2} = F = -\frac{1 + \sigma - X^2}{\sigma} \frac{dX}{dt} - \frac{dU}{dX} + \frac{X}{b} \frac{dZ}{dt}. \quad (194)$$

Здесь U — это тот же самый двугорбый (при $r > 1$) потенциал (193). Как мы видим, без последнего члена уравнение (194) имеет вид уравнения движения материальной точки в потенциальной яме U с силой трения,

пропорциональной dX/dt , с коэффициентом трения, изменяющим знак с положительного на отрицательный при $X^2 \geq 1 + \sigma$. А последний член имеет вид упругой силы с зависящим от времени коэффициентом упругости

$$-\frac{1}{b} \frac{dZ}{dt}.$$

Если производная dZ/dt не мала, то этот член, будучи зависящим от двух других переменных Y и Z со сложным поведением во времени, играет роль переменной вынуждающей силы. Если не учитывать корреляции между dZ/dt и X , то последнее слагаемое в (194) выглядит как случайная сила. Другими словами, материальная точка в двугорбой потенциальной яме движется под действием случайной силы, а коэффициент трения может быть как положительным, так и отрицательным. Этим и объясняется качественный характер движения странного аттрактора, хотя для количественного его анализа предпочтительнее вернуться к исходной системе уравнений (189).

Оказывается, что система Лоренца при больших значениях параметра r имеет в дополнение к странному аттрактору целую серию различных динамических режимов. Мы не будем здесь их обсуждать подробно (см., например, [14]). Отметим только, что все эти решения связаны с конвекцией, а конвекция сама связана с усилением теплового потока от нагревателя к холодильнику. В самом деле, вертикальный тепловой поток q , рассчитанный на 1 см^2 поперечного сечения сосуда, равен $q = cvT \sin \theta$, где c — теплоемкость. Усредняя q по углу θ , найдем $\langle q \rangle = cvT/2$, т.е. $\langle q \rangle \sim XY$. Если усреднить (189) по времени, то найдем, что усредненный по времени тепловой поток пропорционален величине $b\bar{Z}$, где черточка над Z означает усреднение по времени. В устойчивом состоянии $Z = 0$, а в режиме с конвекцией приближенно имеем $\langle \bar{q} \rangle \sim b(r - 1)$. Другими словами, конвекционное движение прямо связано с усилением теплопереноса, т.е. с увеличением темпа роста \dot{S}_e энтропии окружения.

Оказывается, что конвекция в модели Лоренца выражает основные общие черты диссипативных нелинейных процессов в приближении небольшого числа параметров порядка. А именно, с ростом неравновесности (т.е. разности $T_m - T_0$) сначала, при некотором критическом значении этого управляющего параметра, появляются сами собой новые ненулевые параметры порядка (в данном случае T_1 и v). По мере дальнейшего роста надкритичности эти параметры возрастают, т.е. развивается стационарная бифуркация (190) с соответствующим возрастанием скорости диссипации, т.е. \dot{S}_e . Затем, при дальнейшем возрастании надкритичности $T_m - T_0$ наступает вторая бифуркация, так что параметры порядка X, Y, Z становятся динамическими переменными сложной нелинейной системы (189). При дальнейшем возрастании $T_m - T_0 \sim r - 1$ в рамках системы (189) различные моды могут сменять друг друга. А в реальной физической системе могут появляться новые параметры порядка, описывающие более высокие гармоники движения жидкости. По мере роста числа гармоник движение становится все более и более сложным: для простоты его называют просто турбулентным. Такое турбулентное движение вместе с теплопереносом от нагревателя к холодильнику представляет собой сложный сценарий приближения к равновесию в сильно неравновесной системе.

33. Самоорганизация

Рассмотренная нами картина конвекции является типичным примером самоорганизации: по мере увеличения параметра неравновесности r жидкость становится устойчивой при $r = 1$, затем в ней устанавливается стационарная конвекция, а при больших r возникают различные моды стохастического движения типа странного аттрактора. Существует огромное количество других типов нелинейной самоорганизации, с которыми можно познакомиться по книгам [14 – 19] и цитированной там литературе.

Многие из нелинейных систем настолько красивы, что вполне подходят для украшения интерьеров современных квартир или домов. Вот, например, устройство (рис. 16), которое называется "плазменный шар", его довольно часто можно увидеть в магазинах современных западных городов.

Это, действительно, шар из темного стекла диаметром около полуметра, наполненный светящимися движущимися "змейками". Каждая "змейка" — это плазменное образование типа слабо светящегося шнурового разряда. Этот разряд очень похож на светящиеся образования в обычных неоновых трубках, используемых для ночной иллюминации больших городов. Такой разряд называется тлеющим: он развивается при не очень большом электрическом токе в газе низкого давления. В "плазменном шаре" тлеющий шнуровой разряд развивается между металлическим шаровым электродом, расположенным в центре всего устройства и слабопроводящей металлизированной поверхностью стеклянного шара.

Каждая "змейка" разряда, а их может быть одновременно до двух десятков, в среднем вытянута в радиальном направлении. Но она, как живая, все время немного изгибается и колеблется, имея несколько периодов изгиба вдоль своей длины. На каждом из своих концов "змейка" имеет своеобразный трезубец, который как маленькая "кошачья лапка", непрерывно шевелится, собирая заряды с соответствующего электрода. "Змейки-разряды" находятся в непрерывном движении. Кроме не прекращающегося извивания, каждая из "змеек" медленно поднимается вверх, очевидно, в результате конвекции. Собираясь в верхнем положении, "змейки" попарно

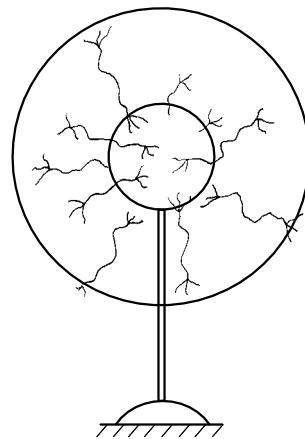


Рис. 16. "Плазменный шар", в котором возникают, поднимаются вверх и там попарно сливаются и исчезают "плазменные змейки" тлеющего разряда

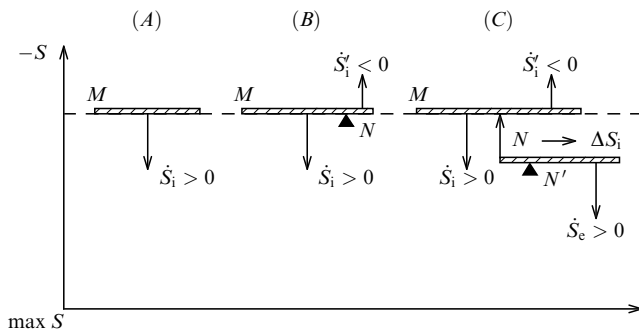


Рис. 17. Схематическое изображение потоков энтропии в неравновесной системе M ; A — монотонное возрастание внутренней энтропии S_i , B — при наличии связей N часть энтропии S_i' убывает на общем фоне возрастания энтропии S_i , C — если есть отток энтропии во внешнюю систему, то убывание части энтропии системы S_i' может обеспечиваться за счет неэнтропии (информации) внешней среды

сливаются между собой, и, таким образом, часть из них постоянно исчезает. Напротив, в нижней части устройства непрерывно рождаются новые "змейки", они множатся, расщепляясь надвое, и поднимаются вверх, чтобы там исчезнуть.

Вся эта картина, несмотря на свою сложность, качественно легко может быть понята с физической точки зрения. Разумеется, теоретически гораздо проще представить себе абсолютно симметричный тлеющий разряд между внутренним и внешним электродами. Однако такой разряд неустойчив: из-за разогрева газа и понижения его локальной плотности с соответствующим понижением электросопротивления электрическому току выгоднее протекать по сравнительно узким каналам-трубкам. Разряд распадается на плазменные шнуры. Будучи более легкими, эти шнуры всплывают вверх под действием силы Архимеда. А взаимодействие шнуров с потоками газа и между собой приводит к образованию сложно организованной картины "змеек", напоминающей мифологическую голову медузы Горгоны. Можно понять, почему на концах каждой "змейки" образуются "кошачьи лапки". Если проводимость электродов невелика, то прямо напротив разряда плотность поверхностного заряда становится меньше и концу "змейки" с противоположным по знаку зарядом удобно расщепиться и перебегать от точки к точке, собирая поверхностный заряд. Таким образом, качественная картина абсолютно понятна и даже немного скучна, а тем не менее плазменный шар завораживает и притягивает к себе кажущейся таинственностью: он похож на живое существо, осуществляющее сознательное движение.

На примере плазменного шара еще раз можно проследить за всеми основными характеристиками и составными элементами самоорганизации. Для того чтобы в системе началась самоорганизация, она должна быть подведена к границе устойчивости. Неустойчивость в данном случае — разбиение разряда на шнуры — начинается лишь с намека (хинта) на появление будущего шнура. На каждый такой хинт достаточно лишь одного бита информации. По мере увеличения внешнего параметра неравновесности, в данном случае силы тока, происходит реальное образование шнуров. Исходная сферическая симметрия нарушается: можно сказать, что происходит самопроизвольное, или спонтанное, нарушение симметрии. Далее, по мере разогрева газа в шнурах в игру вступает конвекция, т.е. следующая бифуркация с

появлением нового параметра порядка — газодинамической скорости. Появление "кошачьих лапок" на торцах каждой "змейки" — это еще одна бифуркация со своим механизмом неустойчивости. А в целом образуется сложная нелинейная физическая система с хаотическим типом движения. Для того чтобы это движение поддерживалось длительное время, система должна быть открытой: через плазменный шар нужно непрерывно пропускать электрический ток от внешнего источника. Более того, этот источник энергии должен поставлять энергию в достаточно упорядоченном виде: по терминологии Бриллюэна в систему должна "выпрыскиваться" неэнтропия, т.е. энтропия с обратным знаком.

Поясним, что это означает, на примере плазменного шара. Как мы видим, "змейки" существуют только вследствие локального разогрева газа внутри шнурового разряда. Другими словами, внутри шнура газ должен подогреваться, а в целом все устройство находится при комнатной температуре, т.е. избыточное тепло передается в воздух через стеклянную оболочку. Если есть поток тепла, то это означает рождение энтропии. Плазменный шар превращает часть хорошо организованной электрической энергии в тепло, которое рассеивается затем в окружающем пространстве. Внутри шара все время рождается энтропия, которая вытекает затем вместе с теплом в окружающее пространство. Если "запереть" поток энтропии, то и плазменный шар "умрет". Из плазменного шара все время нужно удалять "шлак" из вновь рождаемой энтропии: образно говоря, в него нужно вводить энтропию с обратным знаком. Если энтропия — это мера беспорядка, то энтропия с обратным знаком — неэнтропия — это мера упорядочения.

Итак, для самоорганизации необходимы два элемента "питания" — энергия и неэнтропия. Только их сумма и может обеспечить стационарное поддержание структуры нелинейной диссипативной системы. Такие системы принято называть сложными открытыми физическими системами.

Чтобы еще более наглядно представить себе картину потоков энтропии (или информации), рассмотрим упрощенную схему на рис. 17. На этом рисунке горизонтальная ось отмечает абсолютный максимум энтропии системы M при ее изоляции от внешнего мира, а по оси ординат отложена внутренняя энтропия S_i с обратным знаком, т.е. неэнтропия. Если система выведена из положения устойчивого равновесия, то неэнтропия поднимается на уровень S_0 . При монотонно протекающих процессах релаксации (рис. 17, A) неэнтропия системы плавно соскальзывает вниз, как бы "падая" в сторону "силы тяжести". Однако протекающий таким образом процесс релаксации — это довольно редкое явление. Например, если в совершенно однородном газе функция распределения частиц по скоростям возмущена одинаково во всех точках, то мы получим быстрое "соскальзывание" типа рис. 17, A . Однако если такого типа возмущение не однородно по пространству, то картина резко меняется. Столкновения максвеллизуют функцию распределения только локально: локально равновесные параметры порядка — плотность, скорость и температура — эволюционируют далее по законам газодинамики. Столкновения в этом случае даже препятствуют быстрой релаксации к равновесию: чем чаще столкновения, тем меньше кинетические коэффициенты диссипации. На рис. 17, B этот вариант

отмечен как диссипация со связью N , которая не дает равномерно опускаться уровню энтропии. Мы получаем как бы "рычаг", большое плечо которого опускается вниз, а малое может подниматься вверх. Другими словами, опускание вниз "центра тяжести" сопровождается подъемом вверх малой части системы: по ряду степеней свободы происходит рост упорядочения, т.е. имеет место самоорганизация.

Вариант рис. 17, C показывает более сложный сценарий самоорганизации, когда второй рычаг со связью N' не дает опускаться неэнтропии нашей системы за счет потока энтропии во внешний мир. Мы получаем открытую систему, упорядочение которой обеспечивается ростом энтропии S_e внешнего мира.

Вытекающая из системы M энтропия ΔS_i — это либо частично, либо в основном тепло. Это значит, что поток энтропии сопровождается потоком энергии. А следовательно, для поддержания стационарного состояния самоорганизованной системы M недостаточно просто отводить избыточную энтропию: на вход этой системы следует подавать энергию. Подводимая к системе энергия должна быть более организованной по сравнению с теплом: энтропия на единицу этой энергии должна быть меньше, чем T_e^{-1} , где T_e — температура окружающей среды. Другими словами, нужна совместная подпитка системы как энергией, так и неэнтропией.

На Земле самым мощным источником как энергии, так и неэнтропии является солнечная энергия. Именно она и приводит в действие механизмы самоорганизации в атмосфере, океане и биосфере Земли.

34. Приближение к равновесию и коллапсы

Многие из тех процессов, с которыми мы познакомились выше, представляют собой процессы релаксации, т.е. приближения к термодинамическому равновесию либо в системах, исходно находившихся очень далеко от равновесия, либо в системах, выведенных из равновесия другими процессами релаксации. Попытаемся обсудить их с некоторой общей точки зрения. Начнем с самого простого примера одной частицы в потенциальной яме (рис. 18).

Если поместить классическую частицу M в потенциальную яму на рис. 18, a , то эта частица будет совершать периодические колебания с монотонно уменьшающейся амплитудой из-за силы трения. Энергия колебаний ε постепенно передается среде, пока эта энергия не достигнет уровня тепловых колебаний, равного температуре среды T .

Совершенно очевидно, почему так происходит. Ведь отклоняя частицу M от положения равновесия, мы сообщаем ей большую энергию, т.е. "загоняем" в одну степень свободу энергии ε , гораздо большую, чем температура. Если бы эту же самую энергию мы просто перевели в тепловую энергию среды, то мы увеличили бы энтропию среды на величину $\Delta S = \varepsilon/T$. Следовательно, наше исходное состояние является сильно неравновесным и имеет неэнтропию ε/T . Самый простой сценарий исчезновения этой неэнтропии — это диссипация энергии упорядоченных колебаний точки M просто в тепло, что и происходит за счет сил трения.

Разумеется, возможны и более сложные сценарии такого перехода. Например, точку M можно было бы использовать как гирию для приведения в движение

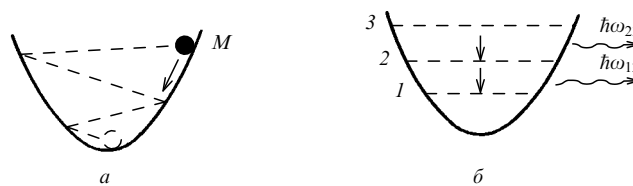


Рис. 18. Классическая материальная точка M в потенциальной яме (а) совершает слабо затухающие колебания и передает свою энергию внешней среде. Квантовая частица (б) может передавать энергию среде путем испускания квантов излучения

маятниковых часов, и тогда процесс диссипации энергии в тепло, т.е. исчезновения неэнтропии, сопровождался бы вращением стрелок и шестеренок часового механизма.

Вблизи доннышка потенциальной ямы рис. 18, a точка M совершает тепловые колебания. Эти колебания можно описывать по Ланжевону, т.е. к силе трения можно добавить случайные толчки от внешней среды. Тогда в среднем частица будет иметь полную энергию, равную T .

Рассмотрим теперь квантовую частицу рис. 18, b . Энергия такой частицы квантуется. Например, в гармоническом потенциале энергия уровня с номером n равна $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(1/2 + n)$, где ω_0 — частота осциллятора. Начальное состояние частицы не обязательно должно соответствовать только одному уровню. Например, в случае гармонического осциллятора можно строить так называемые когерентные состояния из суперпозиции волновых функций разных уровней. Но и в более сложном случае ангармонического осциллятора можно выбрать в качестве начальной волновой функции любую суперпозицию собственных функций. Однако специфика выбора довольно быстро проявится в дальнейшей эволюции.

Дело в том, что каждому уровню номера n отвечает своя собственная частота $\omega_n = \varepsilon_n/\hbar$, где ε_n — соответствующая собственная энергия. Поэтому частица m , чтобы передать энергию среде, должна "сама поискать" вовне резонансы на частотах $\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$. Если такие резонансы найдены, то даже при очень слабом взаимодействии со средой, частица M может передать энергию среде. Однако процесс релаксации начинается не с этого. Если осциллятор ангармонический, то частоты $\omega_{12}, \omega_{23}, \dots$ не совпадают между собой и поэтому во внешней среде они находят различные резонансы. Поэтому первое, что происходит — это сбой разности фаз между различными уровнями. Волновые функции разных уровней теряют взаимную когерентность, а это значит, что у частицы происходит коллапс волновой функции на один из уровней. Вероятность соответствующего коллапса равна квадрату амплитуды. В силу сохранения энергии аналогичный коллапс должен произойти и в той системе, которая приготовила частицу в состоянии суперпозиции нескольких уровней. Другими словами, коллапс функции наблюдаемой частицы как бы переносится на систему, подготовившую частицу для последующего наблюдения.

После того, как частица "сядет" на определенный уровень, наступают процессы излучения квантов $\hbar\omega_{12}, \hbar\omega_{23}$ и т.д., т.е. частица "спускается" вниз по уровням. Наконец, на нижних уровнях происходит установление теплового равновесия: частица то излучает, то поглощает кванты, приходя в равновесие

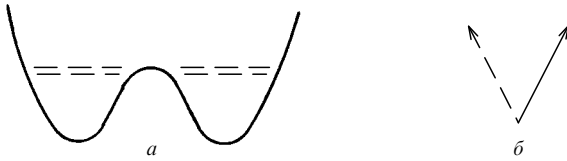


Рис. 19. Нижние энергетические уровни в двугорбой яме (а) составляют слабо расщепленный дуплет. Если слабое внешнее взаимодействие разрушает когерентность правой и левой частей, то волновая функция коллапсирует в одну из потенциальных ям. Соответствующие нарушения симметрии можно продетектировать извне, что эквивалентно измерению: из двух возможных состояний (б) только одно окажется реальным

с тепловым излучением. Этот последний процесс также сопровождается квантовыми переходами, т.е. соответствующими коллапсами то на один, то на второй и т.д. уровни. В каждый данный момент одна квантовая частица может находиться только на одном уровне, если только во внешней среде не созданы специально когерентные связи у одних квантовых состояний излучения с другими. Переходы с излучением или с испусканием квантов поля — это и есть коллапсы волновой функции. Можно сказать, что понятие коллапсов неявно возникло вместе с понятием квантов: вместо термина квантовых переходов можно с тем же основанием пользоваться рассуждениями о коллапсах волновых функций.

Рассмотрим теперь несколько более сложный мысленный эксперимент. Допустим, что мы адиабатически медленно деформируем потенциал (рис. 19, а) таким образом, что вместо одного минимума создаются два минимума потенциальной энергии (рис. 19, а). Предположим, кроме того, что частица находится на самом нижнем энергетическом уровне.

Если говорить более точно, то в потенциале с двумя ямами и большим горбом между ними следует учитывать два нижних уровня. Один из них, более низкий, соответствует симметричной волновой функции, а второй — антисимметричной. Если мы создавали начальное состояние очень аккуратно, т.е. путем адиабатической деформации нижнего состояния в исходной одиночной яме, то наша частица будет находиться в симметричном состоянии.

Попробуем теперь произвести с нашей частицей различные мысленные эксперименты. Прежде всего разнесем две ямы (рис. 19, а) достаточно далеко друг от друга, как бы "запирая" волновую функцию в двух "ящичках". При этом энергии симметричной и антисимметричной функций окажутся практически одинаковыми. Соответственно, одинаковыми будут энергетические уровни в левой и правой ямах, причем волновые функции частицы в каждой из ям равны, соответственно, полусумме и полуразности симметричной и антисимметричной функций.

Начнем теперь "нагревать" частицу, приводя ее в контакт с внешним термостатом. При этом наряду с нижними уровнями в игру вступают более высокие уровни, и частица может переходить на них с вероятностью, определяемой распределением Больцмана. Но для нас более важен другой эффект. Тепловые шумы разрушают когерентную связь между правой и левой ямами. Частица при этом может существовать только в одном

из "ящичков". Соответственно, в одном из ящичков волновая функция есть, а в другом ее нет. Происходит коллапс волновой функции, но пока что без коллапса вероятностей: вероятность находиться частице в одном из ящичков по-прежнему равна 1/2. Ситуация здесь в точности подобна той, что мы рассматривали в самых начальных разделах статьи. Мы имеем частицу в термостате, разделенном перегородкой. Можно попытаться узнать, в каком из "ящичков" находится частица. Для этого требуется провести соответствующее измерение, которое сопровождается необратимым процессом во внешнем мире. После измерения распределение вероятностей для частицы коллапсирует в состояние 0,1. При этом энтропия частицы убывает на один бит, а во внешнем мире должен протечь необратимый процесс с возрастанием энтропии не менее чем на один бит. Другими словами, мы имеем дело с типичным информационным процессом.

Но допустим, что мы такого измерения не проводим, а начнем снова понижать температуру до нуля. В конечном состоянии частица опять сядет на нижний уровень в одной из ям, но теперь можно точно утверждать, что один из ящичков опустошен, а частица находится только в одном из ящичков. Другими словами, одно лишь слабое соприкосновение системы с внешним миром и соответствующее разрушение когерентности привело как бы к "спонтанному нарушению симметрии" — волновая функция частицы коллапсирует в один из ящичков. Мы снова можем попытаться измерить, в какой из ям находится частица, но соответствующее измерение уже не затрагивает волновой функции, а всего лишь коллапсирует распределение вероятностей.

Допустим теперь, что мы этого измерения не проводили. Тогда мы можем представить себе смешанный ансамбль из многих состояний, половина из которых имеет полусумму, а вторая половина — полуразность симметричной и антисимметричной волновых функций. Другими словами, в половине состояний частица находится в левой яме, а в другой половине состояний — в правой яме. Начнем сближать ямы и уменьшать барьер между ними. Тогда каждое из состояний начнет совершать колебания, так что соответствующая волновая функция будет периодически переходить из одной ямы в другую. Частота соответствующих колебаний равна $\Delta\epsilon/\hbar$, где $\Delta\epsilon$ — разность энергий симметричного и антисимметричного состояний. Если частота этих колебаний известна, то можно предсказать такой момент, когда волновая функция из ранее изолированных ящичков снова соберется в одну из ям. Если теперь произвести измерение наличия частицы в одной из ям, то мы автоматически совершим коллапс предыдущих вероятностей, т.е. узнаем, к какому подансамблю принадлежит данная частица.

А теперь вместо этого очень длинного сценария рассмотрим более простой. А именно, представим себе, что мы хотим измерить, т.е. узнать, в какой из ям (рис. 19, а) находится частица вскоре после того, как такая яма была получена путем медленной деформации одиночной ямы (рис. 18, а). Пусть прибор устроен таким образом, что после измерения волновая функция коллапсирует только в одну яму, т.е. из двух возможных состояний только одно остается реальным (рис. 19, б). Такой прибор должен разрушить когерентность исходного состояния и породить смесь симметричной и антисим-

метричной функций. Это значит, что он должен передать энергию частице не менее $\Delta\epsilon/2$. Но кроме того, вместе с коллапсом волновой функции (в одну из ям) прибор осуществляет коллапс вероятностей в данную конкретную яму. Это значит, что в приборе (или внешнем мире) должно произойти возрастание энтропии на величину, не меньшую одного бита, т.е. $\ln 2$.

Таким образом, с помощью нашего простого примера нам удалось разобраться в целом ряде вопросов. Прежде всего мы смогли отделить коллапсы волновых функций от коллапсов вероятностей. Как мы установили, одного лишь теплового движения достаточно для разрушения когерентности и коллапса волновой функции в одно из возможных состояний. Пока этот коллапс не наблюдается извне, лучше говорить о превращении чистого ансамбля в смешанный: мы имеем необратимый процесс с набором вероятностей в конечном состоянии, и наша частица является представителем этого ансамбля. Можно сказать, что коллапс — это флуктуация, и если мы не имеем специального интереса к флуктуации, то можно использовать усредненное статистическое описание с соответствующими вероятностями, т.е. матрицу плотности смешанного состояния.

Однако и сам коллапс — это интересный физический процесс, и его можно изучать при квантовом измерении. Квантовое измерение — это так организованный процесс, в котором и коллапс волновой функции, и коллапс вероятностей протекают одновременно. Мы имеем как бы единый информационный процесс. Согласно рис. 2 при измерении действительно происходит как коллапс волновой функции, так и коллапс вероятностей. Информация о квантовом объекте воспринимается, т.е. "записывается" в "персепторе" P с одновременным "выделением" значения U_i физической системы U . Все это оказывается возможным благодаря "питателю" F , который передает часть негэнтропии (информации) в "персептор", а часть энтропии $W = I_* - I$ выбрасывает в виде "шлака" в окружающую среду. В самом же физическом объекте когерентность разрушается, и волновая функция коллапсирует только в одно из состояний. Таким образом, квантовое измерение — это сильно неравновесный процесс, который можно рассматривать как один из сценариев приближения к равновесию.

Рассмотрим еще один аспект модели на рис. 19, а. Если разнести потенциальные ямы рис. 19, а достаточно далеко друг от друга, то полученную систему можно рассматривать как ячейку памяти. Частица, помещенная в один из "ящиков", будет находиться там сколь угодно долго, сохраняя один бит информации. Этот бит информации можно заложить изначально, деформируя яму рис. 18, а в потенциал рис. 19, а с некоторой несимметричной добавкой так, чтобы частица спустилась на нижний уровень только в одну из ям. Эта несимметричная добавка и служит тем управляющим параметром, который изначально сохраняет один бит информации и затем вкладывает его в ячейку. Другой вариант создания несимметрии более "громоздок" — вторую яму рис. 19, а можно было бы "сформировать" вдали от первой ямы (где находится частица), а затем приблизить ее пустой и создать симметричную ячейку на рис. 19, а. Еще один вариант состоит в том, что можно наделать много ячеек типа рис. 19, а, затем сколлапсировать в них волновые функции путем их "подогревания", а затем рассортировать их на "правые" и "левые" с

помощью измерений. Далее, из таких ячеек можно конструировать текст. Но еще более завлекательной кажется возможность (если она сможет быть осуществлена) записывать текст непосредственно коллапсами волновых функций внутри ячеек.

Набор многих ячеек типа рис. 19, а со сколлапсированными внутри них ячейками можно рассматривать как своего рода "квантовую память". Для считывания текста в такой памяти достаточно только узнать, в какой из ям находится волновая функция, и для этого совершенно не обязательно разрушать имеющееся квантовое состояние — нужно лишь иметь внешний "питатель" с необходимым запасом классической негэнтропии и детектор, который "узнает", какая из ям заполнена.

Обсудим теперь вопрос о приближении к равновесию в системе многих частиц, а точнее, в газе — одной из простейших таких систем. Как мы видели выше, классическое рассмотрение движения атомов или молекул газа, естественно, приводит к молекулярному хаосу и к уравнению Больцмана. А процесс приближения к равновесию плотного газа в рамках уравнения Больцмана, естественно, переходит в описание на базе уравнений газодинамики с диссипацией.

Но атомы газа — это не классические, а квантовые микрочастицы. Как же построить более логичную картину процесса? Для этого представим себе отдельный квантовый пакет некоторой наугад взятой частицы. В силу неразличимости частиц лучше говорить не о выделенной частице, а о волновом пакете, отвечающем одной частице. Такой волновой пакет при своем движении будет рассеиваться на других пакетах, и его форма будет становиться похожей на сложно изрезанное расширяющееся облако. Отдельные части такого облака быстро потеряют взаимную когерентность, так что частица неизбежно должна попасть в одну из его частей. Можно сказать, что волновой пакет такой частицы коллапсирует в более компактный волновой пакет. Но этот коллапс не наблюдаем. Коллапсы волновых функций внутри газа не отличаются от тепловых флуктуаций — они не измеримы извне и не сопровождаются коллапсами наблюдаемых вероятностей. Поэтому внутри небольшого макроскопического объема процесс релаксации происходит так же, как у классических частиц. Следовательно, локально функция распределения максвеллизуется, и у газа появляются макроскопические параметры порядка — температура, плотность, скорость. Макроскопические частицы газа из многих молекул имеют очень малую длину де Бройля, так что их волновые функции можно считать сколлапсированными в квазиклассические функции. Поэтому для газа в целом могут быть использованы уравнения классической газодинамики со всеми вытекающими последствиями.

35. Эффект Соколова

Коллапсы волновых функций атомов газа обычно не наблюдаемы. Но это не значит, что они вообще всегда скрыты, и мы опишем далее эффект, где их роль оказывается определяющей. Мы имеем в виду явление, которое было обнаружено экспериментально Ю.Л. Соколовым (см. [35]) и которое мы будем называть эффектом Соколова. Этот эффект был обнаружен в экспериментах по атомной интерферометрии [36], схема которых изображена на рис. 20.

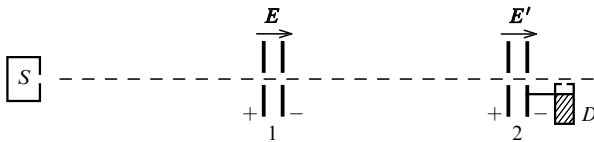


Рис. 20. Схема экспериментов по атомной интерферометрии. S — источник атомов водорода в метастабильном состоянии $2S$, $1, 2$ — двойные диафрагмы с продольным электрическим полем в промежутках, D — детектор излучения при $2P \rightarrow 1S$ -переходах

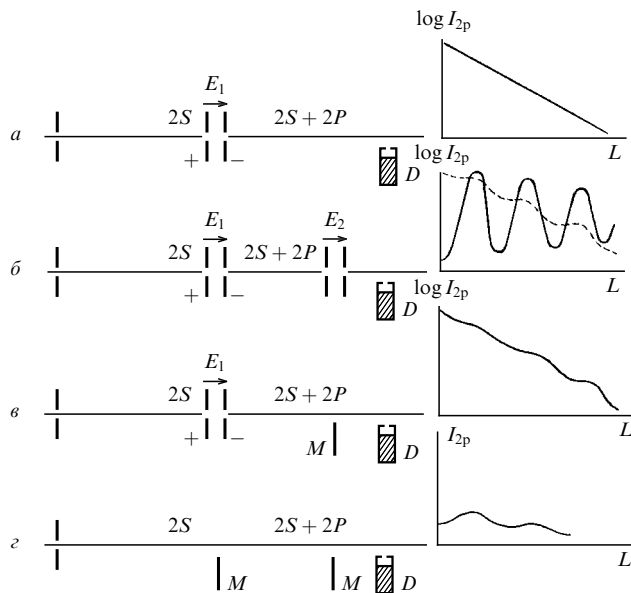


Рис. 21. Схема экспериментов по атомной интерферометрии. a — После прохождения конденсатора с полем E_1 образуется смесь $2S$ - и $2P$ -амплитуд, и атомы в состоянии $2P$ распадаются, а соответствующая интенсивность I_{2P} монотонно убывает с расстоянием L от щели. b — Вторая щель с полем E_2 приводит к картине интерференции I — при слабом поле E_2 и 2 — при сильном поле E_2 . c — Слабая интерференция появляется даже тогда, когда вместо второго конденсатора располагается металлическая пластина M . z — Еще более слабая интерференция заметна, когда оба конденсатора заменены на металлические пластины M

В специальном устройстве Q создавался пучок возбужденных атомов водорода в метастабильном состоянии $2S$: из небольшого плазменного источника вытягивались и ускорялись до энергии около 20 кэВ ионы водорода, которые затем перезаряжались на газовой мишени. После мишени образовывалось много возбужденных атомов, но на расстоянии в несколько метров оставались только метастабильные $2S$ -атомы. Эти атомы пропускались сначала через пару миниатюрных диафрагм (I) с продольным электрическим полем, т.е. как бы сквозь небольшой конденсатор. В продольном электрическом поле каждый атом поляризовался, т.е. образовывалось состояние, представляющее из себя суперпозицию $2S$ - и $2P$ -состояний. Состояние $2P$ не является метастабильным: дипольным переходом оно распадается в основное состояние с излучением кванта лайман-альфа, который можно регистрировать детектором D . Кроме конденсатора 1 имелся еще конденсатор 2 , жестко связанный с детектором D .

После пролета конденсатора 1 состояние $2P$ монотонно распадается, так что детектор D лайман-альфа-излучения показывает монотонно убывающую зависи-

мость при удалении детектора от диафрагм 1 на расстояние L (рис. 21, a). Но если перед детектором поместить второй конденсатор 2 с электрическим полем E_2 , то на зависимости интенсивности лайман-альфа-излучения $I_{2P}(L)$ появляется прекрасная картина интерференции (рис. 21, b). Она возникает из-за того, что энергетические уровни $2S$ - и $2P$ -состояний находятся друг от друга на расстоянии лэмбовского сдвига с частотой около 10^9 Гц. Скорость атома водорода с энергией 20 кэВ составляет величину около $2 \cdot 10^8$ см s^{-1} . Следовательно, фаза $2P$ -амплитуды испытывает колебания по отношению к фазе $2S$ -амплитуды, изменяясь на величину 2π на длине около 0,2 см. Конденсатор 2 , рождая новую добавку $2P$ -амплитуды из $2S$ -состояния, прибавляет ее к той компоненте, которая была до этого рождена в конденсаторе 1 . Так как фазы этих двух компонент разные, то и появляется возможность атомной интерференции двух $2P$ -амплитуд (рис. 21, b).

Подчеркнем еще раз, что речь идет не об интерференции двух "лучей", а об интерференции двух $2P$ -амплитуд внутри одного и того же атома. Поскольку суперпозиция $2S + 2P$ выглядит как сдвинутое относительно протона электронное облако, то происходит как бы интерференция двух дипольных сдвигов электрона.

Лэмбовский сдвиг сам по себе мал, но реальная разность энергетических уровней $2S$ - и $2P$ -состояний в данном эксперименте еще меньше и оказывается практически равной нулю. Дело в том, что сдвиг уровней производится статическими электрическими полями, не меняющими суммарной собственной частоты энергетического уровня. Поэтому небольшое изменение энергии электронного уровня в точности компенсируется соответствующим изменением кинетической энергии атома. Можно сказать, что с учетом кинетической энергии протона уровни $2S$ и $2P$ совпадают по энергии, так что переходы $2S \rightarrow 2P$ и обратно $2P \rightarrow 2S$ как бы эквивалентны изменению поляризации частицы без изменения энергии.

Эксперименты по атомной интерферометрии хорошо согласуются со стандартной квантовой теорией. Они позволили измерить лэмбовский сдвиг с очень большой точностью. Но не это нас интересует в первую очередь. Самое интересное состоит в том, что в экспериментах Соколова малая добавка $2P$ -амплитуды появлялась при пролете через вторую диафрагму 2 даже в отсутствие в ней какого-либо электрического поля. Более того, эта добавка появлялась просто при пролете $2S$ -атома вблизи металлической пластины (рис. 21, c). Именно этот эффект мы и будем называть эффектом Соколова.

Эффект Соколова оказывается достаточно сильным. Результативно он выглядит так, как если бы вблизи диафрагмы или металлической пластины имелось продольное электрическое поле масштаба нескольких В см $^{-1}$, но в условиях эксперимента появление поля такой величины полностью исключено. Поскольку эффект сильный, то интерференцию удастся наблюдать даже в условиях, когда оба конденсатора заменены на металлические пластины (рис. 21, z). Специально проведенными экспериментами было показано, что "поле Демона" (так называет его Ю.Л. Соколов) поляризует $2S$ -атом таким образом, что электронная оболочка немного отстает от протона.

Любые попытки объяснить эффект Соколова силовым взаимодействием атома с флуктуационными элект-

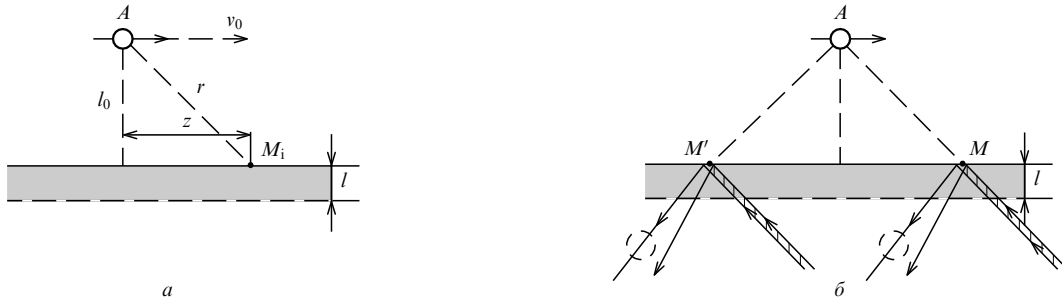


Рис. 22. *а* — Атом с дипольным моментом \mathbf{d} пролетает над металлической поверхностью на расстоянии l_0 со скоростью v_0 . Слой взаимодействий электронов проводимости имеет толщину l . *б* — В системе координат, где атом неподвижен, электроны e' , e подлетают под углом к поверхности металла и затем, отражаясь от нее, уходят в толщу металла

рическими полями или с полем изображения в металле не приводят к успеху, давая вклад на порядки величины меньше нужного значения. Но оказывается [38], что эффект можно объяснить на основе представлений о коллапсах волновых функций электронов металла.

Для этого рассмотрим более подробно, как происходит взаимодействие возбужденного 2S-атома с электронами металла. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда атом летит вдоль поверхности металла, находясь все время на постоянном расстоянии l_0 от поверхности (рис. 22). Скорость атома обозначим через v_0 . В экспериментах Соколова атомы водорода имели энергию около 20 кэВ, так что $v_0 \cong 2 \cdot 10^8 \text{ см с}^{-1}$. Эта величина несколько больше скорости v_F электронов металла на верхних уровнях распределения Ферми, составляющей около 10^8 см с^{-1} .

Пусть ось z направлена вдоль движения атома. Дипольному переходу $2S \rightarrow 2P$ вдоль этой оси отвечает дипольный момент $d \cong 3a_0e$, где a_0 — боровский радиус, e — заряд электрона. Можно сказать, что такой атом взаимодействует с электроном проводимости номера i в точке M_i (рис. 22, *а*) по закону Кулона с потенциалом $U_i = edz/r^3$. Это взаимодействие очень мало. Оно никак не может нарушить когерентность волновой функции электрона атома, но может несколько сдвинуть фазы S- и P-амплитуд. Этому процессу соответствует рождение небольшой добавки P-состояния из исходного S-состояния недиагональным матричным элементом взаимодействия. Наша задача состоит в оценке этой добавки, рождаемой всеми электронами проводимости.

Пусть n — плотность электронов проводимости. По порядку величины она равна $n \cong a_0^{-3} T/E_F$, где T — температура (в энергетических единицах), E_F — энергия Ферми. Введем, далее, обозначение $l = n^{-1/3} = a_0(E_F/T)^{1/3}$ для среднего расстояния между электронами проводимости на верхних уровнях Ферми.

Взаимодействие атома с каждым электроном проводимости формально дается величиной U_i , но суммарное взаимодействие всех электронов с атомом не равно сумме U_i : оно сильно подавлено из-за наличия ионного остова и корреляции электронов между собой. Основная корреляция, которую можно назвать локальной квазинейтральностью, возникает в толще металла. А именно, каждый заряд, в том числе заряд каждого электрона, оказывается окруженным оболочкой противоположного заряда. В плазме, т.е. в системе заряженных классических частиц, характерная длина экранирования заряда равна дебаевскому радиусу. А в металлах эта длина прибли-

женно равна среднему расстоянию l между электронами проводимости. Поэтому можно считать, что с атомом реально взаимодействуют лишь те электроны, которые находятся в поверхностном слое толщиной l .

Каждый электрон, выходящий из металла к его границе и затем после отражения уходящий внутрь, проводит в таком слое долю времени $\Delta t = l/v_F$. Таким образом, через интервал Δt происходит как бы замена всех поверхностных электронов на новые, приходящие из толщи металла.

Рассмотрим теперь один из электронов из поверхностного слоя толщиной l . Если бы этот электрон был один, то за время Δt он привел бы к набегу Δa_P амплитуды 2P-состояния (в предположении, что амплитуда 2S-состояния близка к единице), равному по порядку величины $\Delta a_P \cong U_i \Delta t / \hbar$. Однако суммарный набег амплитуды Δa_P вовсе не равен сумме случайных величин Δa_{P_i} . Дело в том, что вклады Δa_{P_i} скоррелированы между собой таким образом, что сумма амплитуд практически равна нулю. Это условие можно назвать внешней квазинейтральностью: движение электронов в поверхностном слое слабо возмущается таким образом, чтобы суммарное электрическое поле вне металла было мало, т.е. не превосходило бы теплового шума величиной $E \sim T^{1/2} l_0^{-3/2}$. Таким образом, эффект суммарного набег амплитуды Δa_P , казалось бы, навсегда исключен. Однако это не совсем так.

Дело в том, что взаимодействие электронов проводимости с атомом должно рассматриваться как единый квантовый процесс, так что набег фазы Δa_{P_i} относится не только к атому, но и к электрону проводимости с номером i . После взаимодействия этот электрон улетает в глубь металла, а там из-за разрушения когерентности происходит коллапс его волновой функции, так что из широкого волнового пакета отраженной от поверхности волны после коллапса ψ -функции выделяется только небольшая доля волнового пакета. Можно сказать, что каждое чистое состояние волнового пакета превращается в смешанное, но тогда и в фазе Δa_P может появиться несилловая добавка. Этот эффект похож на корреляционную пару частиц в парадоксе Эйнштейна–Подольского–Розена: коллапс волновой функции одной из частиц, уже переставших взаимодействовать между собой, приводит к изменению волновой функции скоррелированной с ней частицы. Эффект ЭПР является не силовым, а корреляционным, типа, например, принципа Паули. Поэтому корреляционные сдвиги фазы не подчиняются правилу квазинейтральности и равенству нулю суммы набег фаз:

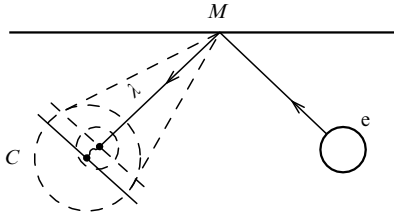


Рис. 23. Волновой пакет электрона e отражается от границы металла и, расплываясь, уходит в толщу металла. Где-то в области C происходит коллапс волновой функции из-за рассеяния на примесях, неоднородностях или на других электронах. Корреляция от этого коллапса передается в точку M и на атом A

они обусловлены не только средним электрическим полем на атоме, но и процессами в толще металла.

Постараемся теперь оценить этот эффект по порядку величины. Для этого перейдем в систему координат, движущуюся вместе с атомом (рис. 22, б). В этой системе координат электроны металла движутся по отношению к атому так, что они подлетают к границе и отражаются от нее под косым углом к поверхности (рис. 22, б).

Рассмотрим два электрона e' , e , которые отражаются от границы металла в точно симметричных точках M' , M в одно и то же время. Макроскопическое электрическое поле от таких электронов в точности равно нулю просто в силу симметрии. Нетрудно видеть, что в среднем все взаимодействующие с атомом электроны можно разбить на такие симметричные пары, так что в пренебрежении тепловыми флуктуациями макроскопическое взаимодействие электронов проводимости с атомом в среднем отсутствует. Но рассмотрим более подробно, что происходит с каждым отдельным электроном после отражения от границы металла (рис. 23).

Пусть волновая функция электрона e выглядит как небольшой волновой пакет, который падает на границу металла, отражается от нее и уходит затем в глубь металла. Пусть размер пакета имеет порядок величины b . Тогда волновую функцию электрона сразу после отражения можно аппроксимировать выражением (139), где ось x направлена вдоль движения пакета, а волновое число $k = u/\hbar m$, где u — компонента скорости электрона вдоль оси x . По порядку величины $u \cong v_F$. По мере удаления от точки M волновая функция свободного электрона эволюционирует в соответствии с соотношениями (140)–(142), т.е. волновой пакет расплывается. Однако на длине свободного пробега λ , т.е. в точке C на рис. 23, волновой пакет из-за рассеяния на примесях, неоднородностях или на других электронах настолько "растрепывается", что его отдельные части перестают быть когерентными между собой. В этих условиях исходный пакет распадается на несколько частей, а электрон остается только в одной из таких частей. Другими словами, происходит коллапс волновой функции до размеров порядка b , а остальные части пакета уничтожаются.

Коллапсы волновых функций в среднем не должны менять энергии электронов. Но если широкий волновой пакет коллапсирует в компактный пакет размером " b ", то просто в силу соотношения неопределенностей его энергия должна возрасти на величину

$$\frac{3}{2m} \left(\frac{\hbar}{b} \right)^2.$$

Чтобы энергия частицы в среднем не изменилась, его скорость должна уменьшиться на величину Δu , так что

$$m u \Delta u = \frac{3}{2m} \left(\frac{\hbar}{b} \right)^2.$$

Величина

$$\alpha = \frac{\Delta u}{u} \cong \frac{3}{2m^2 v_F^2} \left(\frac{\hbar}{b} \right)^2$$

представляет собой асимметрию коллапса: скорость "центра масс" волнового пакета несколько замедляется. Можно сказать, что коллапс "вырезает" из волнового пакета электрона более медленную часть. Соответственно, и у волновой функции атома произойдет такое изменение, которое отвечает более длительному взаимодействию атом — электрон.

Вернемся к рис. 22, б. Мы видим, что асимметрия соответствует как бы эффективной задержке отраженного пакета на долю времени $\alpha \Delta t = \alpha l / v_F$. Из рис. 22, б видно, что при отражении в точках M' , M волновые пакеты становятся не вполне симметричными относительно атома. А именно, сдвигаясь на величину $\Delta z = v_0 \Delta t$ за время пролета $\Delta t = l / v_F$ слоя взаимодействия, пакет M' оказывается несколько дальше от атома, чем пакет M . Другими словами, в точке M' как бы появляется некоторый эффективный заряд, а в точке M — равный ему по абсолютной величине заряд противоположного знака. Если учесть теперь, что в слое взаимодействия толщиной $l = n^{1/3}$ на один квадратный сантиметр приходится $nl = n^{2/3}$ электронов, то мы получим оценку для эффективной плотности поверхностного заряда

$$\sigma_* \sim \alpha n e^{1/3} v_0 v_F^{-1} l_0^{-1}. \quad (195)$$

Здесь можно положить приблизительно $n^{1/3} = a_0^{-1} (T/E_F)^{1/3}$. Зная поверхностную плотность заряда, можно оценить [15] величину набега фазы Δa_p для диафрагмы конечного размера:

$$\Delta a_p \sim 3\alpha \frac{e^2}{\hbar v_F} \left(\frac{T}{E_F} \right)^{1/3}. \quad (196)$$

Сравнение формулы (196) с экспериментом показывает, что величина $\alpha \sim 10^{-2}$. В соответствии с нашими представлениями $\alpha \sim a_0^2/b^2$, и, следовательно, размер электронного пакета " b " составляет величину $\sim 10a_0$, т.е. немного превышает " l ".

Можно сказать, что результативно на атом действует некоторое эффективное поле E_* . Однако поле E_* — это не настоящее энергетическое поле: его нельзя измерить макроскопическим прибором. "Поле Демона" — это, вероятно, наиболее подходящее название для E_* . Эффективное поле E_* "действует" только на пролетающий возбужденный атом. Более всего E_* похоже на действующее поле в диэлектриках, когда эффективное поле, действующее на каждый конкретный микродиполь, отличается от среднего поля E в среде вследствие взаимной корреляции взаимодействующих диполей.

В нашем случае поле $E_* \neq E \approx 0$ появляется из-за корреляции в эволюции волновой функции атома и коллапсирующих волновых функций электронов проводимости. Мы встречаемся здесь с эффектом типа ЭПР-корреляции, но не в варианте одиночных ЭПР-пар,

а в условиях, когда атом является одним единственным первичным партнером при взаимодействии с огромным числом вторичных партнеров — электронов проводимости. После взаимодействия с атомом в слое проводимости электроны улетают в глубь металла, чтобы там в процессе коллапсов породить корреляционные отклики. Из-за небольшой асимметрии коллапсов корреляционные отклики накапливаются у атома в виде сдвига амплитуды Δa_p . В конечном счете именно коллапсы приводят к дипольной деформации атома и к постепенному появлению 2Р-амплитуды из исходной 2S-амплитуды. Эффект Соколова — это совершенно новый тип необратимого взаимодействия в микромире. Он основан на понятных в принципе микропроцессах, но в варианте тонких корреляций ЭПР-пар он наблюдался первый раз.

36. Квантовый телеграф

Чтобы окончательно убедиться в том, что приведенные выше рассуждения действительно являются правильным объяснением эффекта Соколова, было бы желательно провести дополнительные проверочные эксперименты. Но если допустить, что все это правильно, то можно попытаться представить себе, какие еще следствия вытекают из возможности скрытых массовых коллапсов. Если поляризация атома производится в конечном счете коллапсами, то можно попытаться понять, с какой же скоростью распространяется действие коллапса. Более практичная постановка вопроса состоит в том, нельзя ли использовать коллапсы для создания принципиально новых средств передачи информации. Рассмотрим, например, устройство, изображенное на рис. 24, которое можно назвать "квантовым телеграфом".

Фактически мы имеем несколько более сложную модификацию эксперимента Соколова. Пусть опять метастабильные 2S-атомы водорода пролетают над поверхностью образца M . Если этот образец сделан из очень чистого полуметалла или полупроводника, то при температуре жидкого гелия можно добиться условий, когда длина свободного пробега электрона до рассеяния может составлять величину $\lambda \sim 1$ см. Пусть этот образец имеет исключительно гладкие, т.е. зеркальные, боковые стенки. Тогда провзаимодействовавший с атомом электрон e может свободно "пробегать" расстояние λ до попадания в "мутную среду" R , где он начинает интенсивно рассеиваться и коллапсировать. Можно думать, что до наступления коллапсов электронов 2Р-амплитуда у 2S-атома не возбуждается. Поэтому за то время, пока электроны пролетают путь λ , атом успевает отлететь от образца M на расстояние L .

Пусть v_e обозначает среднюю скорость электронов внутри образца. У металла $v_e = v_F \approx 10^8$ см с^{-1} , а в полуметалле и полупроводнике при температуре жидкого гелия величину v_e можно снизить до значения $v_e \cong 10^7$ см с^{-1} . Допустим, кроме того, что атомы A имеют очень большую энергию, так что их скорость v_0 имеет порядок величины 10^{10} см с^{-1} . За время пролета электрона на длине пробега $\tau = \lambda/v_e$ атом успевает отлететь от образца на расстояние $L = v_0\tau = \lambda v_0/v_e$.

Допустим, что область рассеяния электронов R гораздо меньше λ , скажем, составляет величину $\Delta\lambda = 0,1\lambda$. Тогда продолжительность коллапсов $\Delta\tau$ будет также в десять раз короче τ , т.е. из точки R в точку A будет передана информация появления 2Р-амплитуды

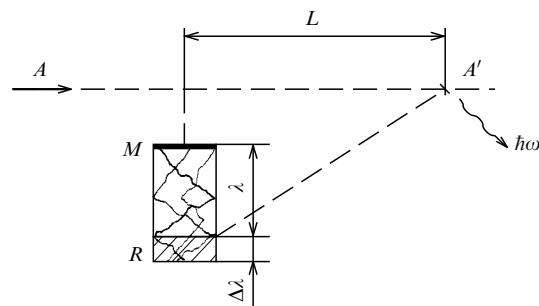


Рис. 24. Схема квантового телеграфа, основанного на использовании эффекта Соколова. Электроны проводимости образца M из чистого полуметалла или полупроводника после взаимодействия с возбужденным атомом A пролетают от поверхности взаимодействия до области рассеяния R . Там их волновые функции коллапсируют, и одновременно у атома A' на расстоянии L от образца появляется 2Р-амплитуда

как бы со скоростью в десять раз больше, чем v_0 , т.е. $V \approx 10^{11}$ см с^{-1} . Как мы видим, эта скорость оказывается больше скорости света.

Самый интересный вопрос состоит в том, а нельзя ли массовыми коллапсами электронов управлять? В самом деле, нетрудно представить себе структуру, когда неоднородности в области R могут намеренно изменяться либо под действием деформаций, либо с помощью влияния внешнего магнитного поля на магнитные центры рассеяния. В принципе, можно использовать любые методы упорядочения или разупорядочения среды. Периодическое или аperiodическое изменение темпа коллапсов электронов, казалось бы, должно передаваться атому A со скоростью

$$\frac{L}{\Delta\tau} = v_0 \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Можно сказать, что "поле Демона" E_* действует на пролетающий над образцом атом не сразу, а со сдвигом во времени, равным $\tau = \lambda/v_e$. Только на расстоянии $L = v_0\tau = \lambda v_0/v_e$ оно начинает проявляться, порождая распадающиеся 2Р-атомы. Кванты лайман-альфа от этих распадов можно детектировать, а временная зависимость темпа распада должна повторять модуляцию коллапсов в зоне рассеяния R . Мы встречаемся здесь с совершенно новым принципом передачи информации, основанном на управлении коллапсами. Одиночными коллапсами ЭПР-пар управлять, по-видимому, нельзя, но темп массовых коллапсов при рассеянии электронов на неоднородностях или примесях, как кажется, может подаваться управлению.

Как видно из описания устройства на рис. 24, сделать практически действующий квантовый телеграф не так-то просто, поскольку требуется удовлетворить сразу нескольким противоречивым требованиям. Нужно, чтобы образец M был очень чистым, с зеркальными стенками. Нужно, чтобы плотность электронов проводимости была достаточно велика (согласно соотношению (195) эффект Соколова пропорционален $n^{1/3}$), зона рассеяния R должна быть достаточно узкой и, главное, управляемой. Кроме того, пучок атомов должен быть достаточно интенсивным, чтобы флуктуации лайман-альфа-квантов не подавили полезный сигнал.

Но для нас сейчас гораздо более интересным является не само устройство, а принцип передачи информации.

Поскольку он основан на коллапсах волновых функций без перемещения вещества или распространения волн, то скорость передачи информации, вроде бы, не должна лимитироваться скоростью света. Однако сверхсветовая передача информации настолько непривычна, настолько она затрагивает основные принципы современной физики, что нам потребуется более подробное обсуждение возможности (или невозможности) передачи сигналов (не волн!) со скоростью больше скорости света.

37. Сверхсветовая коммуникация

Условимся обозначать скорость передачи сигналов символом V , а скорость света символом c . Согласно теории относительности никакое материальное тело и никакая волна не могут двигаться со скоростью больше скорости света c . Поэтому сверхсветовая связь, $V > c$, не может быть связана с переносом энергии на расстояние, т.е. она должна иметь совершенно иную природу. Допустим, тем не менее, что передача сигналов со сверхсветовой скоростью возможна, и рассмотрим, к каким последствиям приводит это допущение. Для простоты ограничимся случаем одномерного распространения сигналов, и тогда мы можем ввести в рассмотрение время t и координату x , вдоль которой этот сигнал распространяется. Пусть сигнал испущен из точки $x = 0$ в момент $t = 0$. Тогда в последующие моменты времени координата x будет равна $x = Vt$. При $V > 0$ сигнал распространяется вправо, а при $V < 0$ — влево.

Зададимся вопросом, что увидит наблюдатель, движущийся со скоростью v ? Для этого перейдем в систему координат этого наблюдателя и вместе с ним посмотрим на внешний мир.

Пусть x' , t' — пространственно-временные координаты движущегося наблюдателя. Как хорошо известно, они связаны с x , t преобразованием Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad t' = \frac{t - (xv/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (197)$$

Точка отправления сигнала в неподвижной системе координат, т.е. $x = 0$, $t = 0$, видна из движущейся системы координат как точка $x' = 0$, $t' = 0$. Рассмотрим теперь, как сигнал распространяется. Если положить в (197) $x = Vt$, то получим

$$x' = \frac{V - v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} t, \quad t' = \frac{1 - (vV/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} t. \quad (198)$$

Деля одно соотношение на другое, мы найдем скорость сигнала $V' = x'/t'$ в движущейся системе координат:

$$V' = \frac{V - v}{1 - (vV/c^2)}. \quad (199)$$

Если $V < c$, то это соотношение показывает, что при $v \geq V$ происходит смена знака V' , что вполне естественно: если наблюдатель обгоняет сигнал, то он увидит его отстающим, т.е. распространяющимся в противоположную сторону. Если мы имеем дело с электромагнитной волной, то $V = c$ и согласно (199) просто $V' = c$. Это хорошо известный результат: свет распространяется со скоростью света в любой системе

координат. Именно этот постулат и положен в основу теории относительности.

Но пусть теперь $V > c$. С помощью соотношения (199) мы немедленно находим систему координат, в которой скорость сигнала V' бесконечна. Эта система координат движется со скоростью $v = c^2/V < c$. Ясно, что система координат с бесконечной скоростью V' чем-то выделена. Раз так, то мы и примем ее за неподвижную систему координат и, переходя к пределу $V \rightarrow \infty$, получим с помощью (199)

$$V' = -\frac{c^2}{v}. \quad (200)$$

Как мы видим, в системе координат движущейся вправо, сигнал распространяется влево, а при $v < 0$ сигнал распространяется вправо, т.е. $V' > 0$. При $v \rightarrow 0$ имеем $V' \rightarrow \pm\infty$, т.е. сигнал распространяется с бесконечной скоростью сразу в обе стороны. Разумеется, эти соотношения несколько упрощены и идеализированы, поскольку время испускания сигнала считается равным нулю.

На первый взгляд соотношение (200) кажется явно противоречащим принципу причинности. В самом деле, допустим, что мы наблюдаем распространение сигнала с $V' > 0$ из системы координат с $v < 0$. Например, отправитель сигнала может быть в точке $x' = 0$, $t' = 0$, и тогда получатель примет сигнал в точке $x' = L$ несколько позднее, т.е. при $t' = L/V' > 0$. Здесь ясно видно, где причина, а где следствие. Однако наблюдатель с $v > 0$ увидит сигнал со скоростью $V' < 0$, т.е. причина и следствие поменяются местами. Казалось бы, в силу этой несурзаицы сверхсветовая передача информации невозможна. Однако не будем спешить! Само пассивное наблюдение еще мало что означает. Реальное противоречие с принципом причинности наступит только в том случае, если получатель информации сможет послать сигнал обратно в приемник до испускания первого сигнала и, таким образом, следствие сможет изменить свою причину. Давайте посмотрим, может ли это быть, а если может, то какими дополнительными ограничениями принцип причинности можно сохранить.

Пусть имеется два события A и B , связанные между собой причинно-следственной связью. Будем считать, что A есть причина, а B — следствие. Например, в квантовом телеграфе (см. рис. 24) событие A — это коллапсы волновых функций электронов проводимости, а B — появление 2Р-амплитуды у 2S-атома и излучение квантов лайман-альфа. Выберем систему координат, в которой скорость передачи сигнала равна бесконечности. Тогда оба события A и B произойдут в одно и то же время $t = 0$. Это значит, что они располагаются на одном и том же пространственном отрезке AB (рис. 25). Выбранная нами система координат с $V = \pm\infty$ является явно выделенной. Поэтому время t в этой системе получает некоторое право абсолютного времени, но мы рассмотрим этот факт несколько позже.

Пусть эти события наблюдаются из системы координат x' , t' , движущейся со скоростью $v > 0$. Тогда согласно (197) при $t = 0$, $x = L$ получим

$$t' = t'_B = -\frac{Lv}{c\sqrt{c^2 - v^2}} < 0.$$

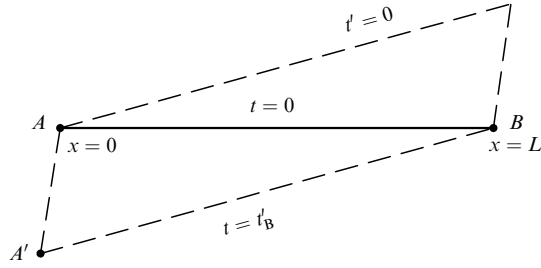


Рис. 25. Два события A, B происходят в одно и то же время $t = 0$, будучи разделенными пространственным отрезком длиной L . Наблюдатель, движущийся со скоростью $v > 0$, увидит событие B раньше события A . Пунктирные линии — линии $t' = \text{const}$

Другими словами, этот наблюдатель увидит сигнал B раньше, чем A , и наверно сильно удивится. Еще более удивительно, что в точке $x = 0$ времени t'_B соответствует время события A' , равное

$$t_{A'} = -\frac{v}{c} \frac{L}{c}.$$

Учитывая это, наблюдатель B может захотеть повлиять на событие A , например попытавшись убрать образец M в эксперименте на рис. 24. Можно представить себе, например, что около образца M находится автомат, который немедленно удалит этот образец по приказу извне. В частности, такой сигнал может быть послан наблюдателем в штрихованной системе координат. Разумеется, если не накладывать никаких дополнительных ограничений на сигналы, принцип причинности немедленно исчезнет.

Поэтому сформулируем три дополнительных принципа:

А) Каждая вновь вводимая система координат x', t' отвечает реально существующему макроскопическому телу.

В) Сверхсветовой телеграф, связанный с таким телом, передает в нем сигнал со скоростью $V' = \pm\infty$.

С) Сверхсветовой сигнал управления не может распространяться в обратную сторону по времени t основной системы координат, если обе системы координат информационно связаны друг с другом.

Вернемся теперь к рис. 25. Ясно, что любой сигнал на материальном носителе не может быть передан из точки B в точку A быстрее, чем за $\Delta t = L/c$, поскольку скорость таких сигналов меньше скорости света в любой системе координат. Поэтому $\Delta t > -t_{A'}$, т.е. сочетание одного лишь сверхсветового сигнала из A в B вместе с обычным световым сигналом из B в A принцип причинности не нарушает. Значит, достаточно рассмотреть лишь сверхсветовые телеграфы, удовлетворяющие условиям А — С.

Допустим, что у нас есть телеграф, посылающий сигналы со скоростью $V' = x'/t'$ в штрихованной системе координат. Нетрудно найти с помощью (197), что в лабораторной системе координат скорость сигнала V равна

$$V = \frac{V' + v}{1 + (vV'/c^2)}. \quad (201)$$

При $V' \rightarrow \infty$ она равна

$$V = \frac{c^2}{v}. \quad (202)$$

Как мы видим, при $v > 0$ скорость V положительна. Если принять принцип С, то этот сигнал может распространяться только направо. Это значит, что сам штрихованный телеграф не может послать сигнал обратно из точки B в точку A , т.е. не может повлиять на причину, хотя и видит ее происходящей позже B . Чтобы послать сигнал влево, т.е. из B в A , нужно иметь "дважды штрихованный" сверхсветовой телеграф, который движется со скоростью $v'' = -|v''|$ справа налево. Согласно (202) скорость сигнала V'' такого телеграфа равна $V'' = -c^2/|v''|$. Но событие B такой телеграф видит в момент времени

$$t'' = \frac{L/v''}{c\sqrt{c^2 - v^2}} > 0$$

(мы пользуемся опять (197) с заменой $v \rightarrow -|v''|$). Другими словами, для него B действительно является следствием причины A , и даже сигналом с бесконечной скоростью он не может повлиять на причину A .

Решающую роль в наших рассуждениях играет принцип С. Именно он придает t черты абсолютного времени, что, строго говоря, противоречит принципу относительности. Поэтому мы должны подробнее рассмотреть, в чем физический смысл этого ограничения, кажущегося вполне естественным для неподвижного наблюдателя.

Для этого мы подойдем к этому вопросу с несколько иной точки зрения. А именно, неявно предполагая, что у нас нет никакой возможности для создания сверхсветовых сигналов, кроме как основанных на волновых коллапсах, рассмотрим некоторую волновую функцию $\psi = \exp(-i\omega t + ikx)$. Пусть эта волновая функция относится к частице с массой m и импульсом $\hbar k$. Величина $\hbar\omega$ соответствует энергии этой частицы. Учтем как кинетическую энергию этой частицы, так и энергию покоя, так что в нерелятивистском пределе $\varepsilon = \hbar\omega = mc^2 + (mv^2/2)$, $p_k = \hbar k = mv$; v — скорость частицы. Пусть $V = \omega/k$ обозначает фазовую скорость. Фазовая скорость, как известно, соответствует скорости перемещения точки с постоянной фазой $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$. Рассмотрим, как эта точка движется в "штрихованной" системе координат, движущейся с относительной скоростью v по отношению к неподвижной системе координат. Для этого следует с помощью соотношений (197) выразить x, t через x', t' и подставить эти выражения в соотношение $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$. Мы получим после этого выражения для новой частоты ω' , нового волнового вектора k' и новой фазовой скорости V' :

$$\omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad k' = \frac{k - (\omega v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad V' = \frac{V - v}{1 - (Vv/c^2)}. \quad (203)$$

Нетрудно видеть, что выражение для V' в точности совпадает с соотношением (199). Соответственно, мы сразу делаем заключение, что существует выделенная система координат, движущаяся со скоростью $v = p_k/\varepsilon = c^2/V = c^2 k/\omega$. В этой системе координат фазовая скорость V' обращается в бесконечность, а волновая

число k' в нуль, так что волна превращается просто в однородные по x' колебания с частотой ω' . Для выбранной нами частоты, $\hbar\omega' = mc^2 + (mv^2/2)$, в нерелятивистском пределе получаем $\hbar\omega' = mc^2$. Значит, мы имеем дело просто с покоящейся частицей с волновым числом, равным нулю. Обычно считают, что фазовая скорость большого физического смысла не имеет: энергия и, соответственно, волновая информация распространяются с групповой скоростью, а не с фазовой. Оказывается, однако, что фазовая скорость играет большую роль при коллапсах.

В самом деле, рассмотрим, типичный пример ЭПР-пары в варианте Боба: две частицы со спином $1/2$, разлетающиеся в разные стороны с суммарным импульсом, равным нулю. Два партнера такой пары имеют равные и противоположно направленные импульсы и в точности равные фазы на равном расстоянии от точки разлета. Измерение, проведенное над одной частицей, сразу же коллапсирует волновую функцию второй частицы к значению спина, соответствующего противоположному направлению. Естественно считать, что этот процесс происходит мгновенно в системе координат, где центр масс покоится. Другими словами, скорость сигнала о коллапсе $V = \infty$. Но в движущейся системе координат согласно (200) имеем $V' = -c^2/v$. В зависимости от знака v эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. Это значит, что для одних наблюдателей сигнал коллапса на вторую частицу переносится с запаздыванием, что вполне естественно. А для других наблюдателей он переносится с опережением, т.е. вспять по времени — из будущего в настоящее. Выглядит это фантастически, но никакого нарушения принципа причинности здесь нет: коллапсы скоррелированных функций являются чисто случайными, т.е. неуправляемыми. Поэтому при коллапсах одиночных ЭПР-пар фактически никакой информации не переносится: это просто единый процесс, без причины и следствия. В этом плане сигнал об одиночном коллапсе похож на фазовую скорость — он есть, но информации не переносит.

На самом деле эта аналогия имеет более глубокий смысл. Ведь коллапсы возникают при разрушении когерентности. А разрушить когерентность между двумя точками волны посредством очень малого внешнего возмущения легче всего, если эти точки длительное время имеют одну и ту же разность фаз. Другими словами, они должны двигаться вместе с фазовой скоростью волны. Фазовая скорость сама по себе информации не переносит, но она позволяет нанести "метки" на тех участках волны, которые затем могут сколлапсировать.

Представим теперь себе ЭПР-пару, движущуюся со скоростью v . В ее собственной системе координат коллапс отвечает переносу сигнала с бесконечной скоростью $V' = \infty$. А в лабораторной системе координат скорость $V = c^2/v$, как это видно из соотношений (201), (202). И опять, в зависимости от того, над каким из партнеров проводится первое измерение, сигнал коллапса второму партнеру может посылаться либо в будущее, либо в прошлое. Нарушения принципа причинности опять никакого нет, поскольку результат измерения является чисто случайным: с помощью рецептов квантовой теории можно вычислить вероятность результатов измерений, но нельзя заранее предсказать сам результат.

Таким образом, хотя коллапсы и представляют собой необратимые процессы, эти процессы весьма своеобразны: они протекают абсолютно спонтанно и не поддаются управлению извне, если иметь в виду только отдельные элементарные акты. Возникает вопрос: можно ли в принципе рассуждать о каких-либо формах управления квантовыми коллапсами? Определенную надежду на положительный ответ дает пример цепной реакции в атомном реакторе. Ведь эта реакция тоже построена на элементарных квантовых переходах, каждым из которых управлять нельзя. Но если управлять вероятностями переходов, то они, будучи умноженными на большое число участников процесса, автоматически становятся соответствующими макроскопическими переменными ядерной кинетики. После этого управление становится возможным. Итак, для управления нужно иметь много участников процесса.

Вернемся теперь к квантовому телеграфу на рис. 24. Рассмотрим сначала элементарный акт: возбужденный атом A пролетает над образцом с электронами проводимости, затем электроны улетают в глубь металла и там участвуют в коллапсах, а у атома A появляется 2Р-амплитуда, которая может породить квант. Если этот квант детектируется, то мы осуществляем "измерение", в котором осуществляется коллапс атома в 1S-состояние с последующим переходом в 1S-состояние и одновременно в области R образца M подтверждается факт многочисленных коллапсов волновых функций электронов проводимости. На первый взгляд — это единый случайный процесс коллапса: в детекторе лайман-альфа-излучения регистрируется фотон, а внутри металла коллапсируют многочисленные волновые функции электронов, и эти коллапсы, казалось бы, могли быть наблюдаемы извне. У такого процесса нет причины и следствия. Поэтому сигналы коллапсов между электронами и атомом могут передаваться с бесконечной скоростью, а движущиеся внешние наблюдатели будут наблюдать эти коллапсы в разной последовательности во времени.

Но допустим, что у нас имеется целый пучок возбужденных атомов и, соответственно, большая серия идентичных измерений. Изменяя структуру области R , можно управлять вероятностями коллапсов электронов в этой области, т.е. изменять коэффициент α в выражении (196) для "поля Демона" E_* . Тем самым мы как бы управляем темпом распада возбужденных атомов водорода на большом расстоянии от образца M . Сигнал управления переносится вместе с сигналом коллапса, и поэтому он является сверхсветовым. На самом деле это есть управление вероятностями реально протекающих квантовых процессов "измерения", т.е. необратимых информационных процессов в их связи с внешними классическими приборами и объектами (в том числе наблюдателями). Этот процесс явно необратим, именно он и определяет направление "стрелы времени". Время t внутри образца M приобретает характер "абсолютного времени": его уже нельзя обратить вспять — принцип причинности не совместим с обратимостью во времени.

Очевидно, что сверхсветовой сигнал управления не может распространяться в обратную сторону по времени t той системы координат, где телеграф находится в покое. По той же причине необратимости процессов измерения и управления вероятностями у телеграфа на рис. 24 совершенно четко определено, что причиной изменения темпов распадов атомов A может быть только управляемое

изменение вероятностей коллапсов в R . Причиной является R , следствием A' , так что сигнал управления может идти от R к A' (возможно с запозданием Δt на малое время, требуемое для изменения вероятностей в R).

Более сложным является вопрос о том, как будет действовать телеграф типа рис. 24, если его привести в движение и наблюдать за ним из неподвижной системы координат. В собственном времени он имеет сигнал управления со скоростью $V' = \infty$. Формально такой сигнал в неподвижной системе координат может распространяться как по t , так и против t . Но с другой стороны, он необратим. Спрашивается, как разрешить этот парадокс?

Выше мы условились наложить дополнительное ограничение C , смысл которого состоит в том, что в обычном (привычном) времени t неподвижных тел необратимые процессы должны протекать только из прошлого в будущее, т.е. должна существовать "стрела времени". Но чтобы более полно раскрыть содержание этого принципа, нам понадобятся дополнительные рассуждения.

Мы вернемся к этому вопросу позже. А сейчас заметим, что коррелированные в пространстве коллапсы просто обязаны лежать на пространственно подобных мировых линиях. В противном случае мы имели бы последовательные во времени коллапсы (в одной из подвижных систем координат), а это привело бы к еще большим противоречиям с принципом причинности, если скрытых параметров действительно не существует. Итак, самое естественное допущение состоит в том, что коррелированные коллапсы происходят "мгновенно", например располагаясь на линиях фазовой скорости $v_\phi = \varepsilon/p = \text{const}$ центра тяжести скоррелированной системы. Скорости ε/p всегда являются сверхсветовыми, и именно вдоль них действуют случайные измерения K . Но чтобы понять, как это может происходить, нам придется рассмотреть вопрос о том, как коллапсы согласуются с принципом относительности.

38. Настоящее, прошлое, будущее

Что такое настоящее? Каждый из нас имеет готовый ответ: это — данный миг, поскольку все более раннее — это уже несколько в прошлом. До появления теории относительности такой ответ вполне был согласован и с более строгой математической, т.е. количественной трактовкой (рис. 26, а).

В простейшем случае одного измерения x мы имеем пространство, которое равномерно смещается вдоль оси времени t . Время в этом подходе является абсолютным; во всех точках x оно течет с одним и тем же темпом и совершенно одинаково для неподвижных и движущихся тел.

В теории относительности все обстоит сложнее. Главный ее принцип — не существует сигналов, распространяющихся быстрее скорости света, а скорость света одинакова как в неподвижной, так и в движущихся системах координат. Для жителей Земли это означает, что одновременность на земной поверхности определена с точностью до $2R_0/c \cong 40$ мс, где R_0 — радиус Земли. А если смотреть на звездное небо, то мы увидим звезды на линии $t = -L/c$, где L — расстояние до звезды, а t — время в прошлом, отсчитываемое от момента наблюдения. Вряд ли кто-нибудь из смотрящих на звезды

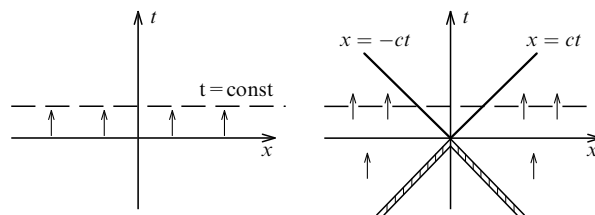


Рис. 26. а — До появления теории относительности структура пространства времени рассматривалась как равномерное движение всего пространства вдоль координаты мирового времени t . б — Поскольку свет имеет постоянную скорость, то реально "видимое" настоящее располагается в заштрихованном слое, а линия $t = \text{const}$ имеет смысл условного времени

согласится с тем, что он их видит не "сейчас". На рис. 26, б этому "настоящему видимому" соответствуют линии $x = \pm ct$, уходящие в отрицательное время. Для всех жителей Земли это настоящее определено с точностью до $2R_0/c$.

А что же означает линия $t = \text{const}$? Строго говоря, эта изохронная линия, т.е. линия одного и того же времени, является чисто условной. Она может быть получена таким образом. Сначала вдоль оси x располагается множество часов, т.е. одинаковых физических тел или механизмов, совершающих периодическое движение с одним и тем же периодом. Затем эти часы синхронизируются, например, с помощью светового сигнала, бегущего от данных часов к соседним и обратно. Все эти действия совершаются в прошлом, и таким образом создается протяженный периодический объект с одной и той же мгновенной фазой: при $t = \text{const}$ все стрелки часов указывают одно и то же время.

Рассматривая каждые из часов как осциллятор с периодом $T = 12$ часов, мы получаем волну с волновым вектором $k = 0$ и частотой $\omega = 2\pi/T$. Ясно, что такой классический объект с бесконечной фазовой скоростью может быть создан только с помощью эволюции из прошлого, и в любой данный момент t никакой физической связи между часами не существует.

Условность создаваемой таким образом "одновременности" хорошо видна на примере обычных бытовых часов на Земле. Их можно установить так, чтобы они показывали 12 часов ровно в полдень. Тогда при взгляде из космоса мы увидим волну, построенную из фаз часов. При этом длина волны равна $2\pi R_0$, а фазовая скорость волны в точности совпадает со скоростью вращения Земли и направлена в противоположную сторону. Постоянная фаза, равная 12 часам, будет все время "смотреть" на Солнце. Внутренней, физической связи между такими часами нет: они установлены на основе внешней информации, т.е. "по Солнцу".

Рассмотрим теперь одинокого покоящегося наблюдателя в точке $x = 0$ в момент времени t (рис. 27).

Мировая линия покоящегося наблюдателя соответствует полуоси ординат, приходящей из $t = -\infty$ в точку $t = 0$. В точку O с координатами $x = 0$, $t = 0$ могут попасть также движущиеся тела, например A — с положительной скоростью и B — с отрицательной скоростью. Согласно теории относительности максимальная скорость, с которой могут перемещаться любые материальные объекты, в том числе волны, равна

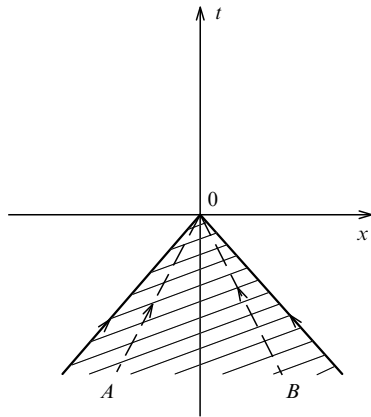


Рис. 27. У наблюдателя O в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$ реальное "прошлое" находится в заштрихованной области, ограниченной линиями $x = \pm ct$. Линии A и B соответствуют движущимся телам

скорости света. Поэтому в точку O может собраться только та информация, которая существовала ранее внутри заштрихованной области на рис. 27. Это и есть то прошлое, которое можно либо непосредственно видеть, слышать, осязать, либо восстановить по памятникам старины и "окаменелостям", находящимся в точке O .

Таким образом, мы приходим к несколько парадоксальному выводу, что будущее наблюдателя O находится не при $t > 0$, а во всей не заштрихованной области на рис. 27. Во всяком случае, так это должно представляться с точки зрения одиночного наблюдателя. Что же касается прошлого, то оно должно представлять собой область, доступную для пассивного сбора информации, приходящей с электромагнитными волнами или записанной на любых движущихся материальных носителях (т.е. звук, почта и т.д.).

Рассмотрим теперь, как может выглядеть область двусторонней информационной связи наблюдателя O с любым другим наблюдателем в прошлом (или "настоящем").

Пусть наблюдатели A, O, B неподвижны (рис. 28, а). В состоянии O' , т.е. в момент времени $(-t)$ наблюдатель может послать сигналы с максимальной скоростью c . Эти сигналы достигают мировых линий $A'A$ и $B'B$ двух других наблюдателей в точках A'', B'' , которые в свою очередь посылают свои "ответы" в точку O . Как видно из рисунка, наблюдатели A и B находятся на расстоянии $L = \pm ct/2$. Внутри этих мировых линий находится область (заштрихованная) двусторонней связи неподвижного наблюдателя O с другими неподвижными наблюдателями. В частности, в точках A, O, B могут находиться

часы, и тогда двусторонняя связь может быть использована для синхронизации неподвижных часов, т.е. для построения линий $t = \text{const}$.

В точку $x = 0$ в момент времени $t = 0$ могут собраться и подвижные наблюдатели. Если они имели до этого двустороннюю связь с другими объектами, то в точку O будет собрана вся информация двусторонней связи. Например, на рис. 28, б подвижный наблюдатель в положении O' в момент времени $-t$ посылает информацию со скоростью света в точку A'' мировой линии $A'A$ неподвижного наблюдателя, а затем в точке O получает ответ от второго наблюдателя.

Как мы видим, если в точку O собираются все подвижные наблюдатели, то в этой точке оказывается собранной вся информация двусторонней связи из области внутри линий $x = \pm ct$. Другими словами, наряду с данными пассивных наблюдений в эту точку можно собрать информацию двусторонней связи.

Рассмотрим теперь двух неподвижных наблюдателей A и B , находящихся на расстоянии L друг от друга (рис. 29).

Каждый из наблюдателей ничем не выделен по отношению к другому. Но один из них, скажем A , видит B несколько в более раннее время в точке B' , а B , напротив, видит A несколько в более раннее время в точке A' . Естественно, что оба они согласятся считать, что в каждый данный момент они находятся при $t = \text{const}$, и лишь в силу запаздывания сигналов они не имеют мгновенной информации друг о друге. Покрытая точками область на рис. 29 — это общее прошлое как наблюдателя A , так и наблюдателя B .

Разумеется, с точностью до интервала времени $\Delta t = L/c$ наблюдателей A и B можно считать находящимися в одном времени даже с точки зрения их взаимной информационной связи. Это их общее время они, естественно, будут считать настоящим. При более коротких характерных временах физических процессов наблюдатели скорее согласятся с запаздывающими сигналами, чем со своим разновременным существованием.

В теории относительности понятие одновременности становится еще более сложным. А именно, преобразование Лоренца в систему координат x', t' , движущуюся со скоростью v , осуществляется с помощью формул (197). Линии одного времени $t' = \text{const}$ оказываются не совпадающими с линиями $t = \text{const}$ (рис. 30). Но граница прошлого, $x = \pm ct$, остается на своем месте и в новой системе, т.е. $x' = \pm ct'$.

При увеличении скорости v наклон линии $t' = \text{const}$ к оси x увеличивается, но он никогда не достигает положения $x = ct$, стремясь к нему лишь в пределе $v \rightarrow c$.

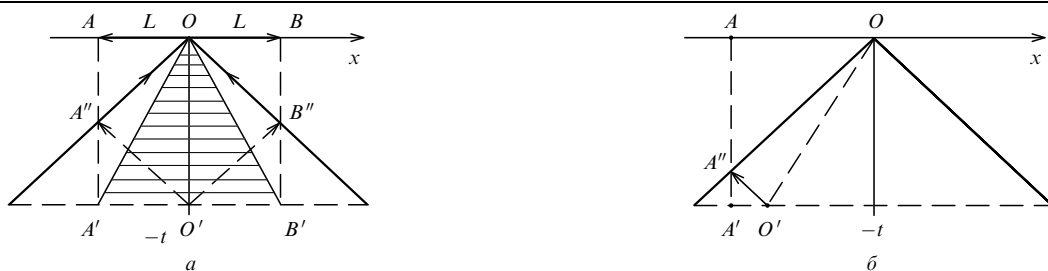


Рис. 28. Пространственно-временная область двусторонней связи наблюдателя O с другими наблюдателями. а — Наблюдатель O' неподвижен. б — Наблюдатель O' перемещается вдоль линии $O'O$

Теперь мы можем обсудить, что такое будущее. В рамках галилеевой инвариантности с абсолютным временем t будущее по отношению к $t = 0$ определяется простым соотношением $t > 0$. А именно, при небольшом приращении времени Δt реализация будущего происходит сразу по всем значениям координаты x . Если учесть, что не существует тел и волновых сигналов со скоростью, большей c , то "активное" будущее для точки $x = 0$, $t = 0$ лежит в области $t \geq |x|/c$, куда из точки $x = 0$, $t = 0$ могут попасть световые сигналы или движущиеся тела. Только в этой области материальная точка $x = 0$, $t = 0$ может действием повлиять на эволюцию своего окружения. Теми же свойствами эта область выделена и в случае движущихся тел с мировыми линиями, проходящими через точку $x' = 0$, $t' = 0$.

Все наши рассуждения данного раздела основывались на представлениях теории относительности и классической теории поля. Рассмотрим теперь, что нового вносят коллапсы волновых функций. Как мы установили выше, коллапсы функций коррелированных частиц происходят на мировых линиях фазовой скорости их центра тяжести. Для неподвижного центра тяжести эта линия соответствует $t = \text{const}$, а для перемещающегося со скоростью v — линия $t' = \text{const}$. С точки зрения рис. 28, 29 коллапсы происходят как бы в будущем. Именно поэтому они случайны и беспричинны. Но коллапсы — это необратимый процесс. Особенно ясно это становится видно, когда коллапс волновой функции сопровождается коллапсом вероятностей, как это происходит при измерениях. При таком процессе информация у квантовой системы возрастет, а во внешнем мире должна возрасти энтропия. Но даже в отсутствие коллапса вероятностей коллапс волновой функции необратим: у ансамбля многих частиц он превращает чистый ансамбль в смешанный. А у одного единственного партнера происходит "схлопывание" чистого состояния в случайного "представителя" смешанного ансамбля. Необратимый процесс коллапса связан с информационным взаимодействием данной системы с внешним миром. А если так, то время t в системе координат, связанной с внешним окружением, становится абсолютным временем. На Земле, а точнее в Солнечной системе, это время связывается с системой координат, в которой центр масс Солнечной системы находится в покое.

Если мы рассмотрим линию $t' = \text{const}$ на рис. 30, то ее можно интерпретировать как мировую линию постоянной фазовой скорости, на которой могут располагаться коллапсы коррелированных частиц, у которых центр тяжести перемещается со скоростью v . Если бы система частиц и тел s покоящимся центром масс в системе координат x' , t' была бы полностью, в том числе и информационно, изолирована от внешнего мира, то коллапсы в ней могли бы одновременно осуществляться вдоль линии $t' = \text{const}$.

С точки зрения абсолютного времени t все выглядит почти точно так же, с той лишь разницей, что связанные с внешним миром коллапсы, например наблюдаемые извне, должны происходить последовательно в сторону возрастания времени t . Коллапсы в обратную сторону по t вдоль линии $t' = \text{const}$ могут происходить только в отсутствие наблюдения или информационной связи с внешним миром. Только в этом случае оба направления времени замкнутой обратимой квантовой системы вполне эквивалентны. В действительности же даже

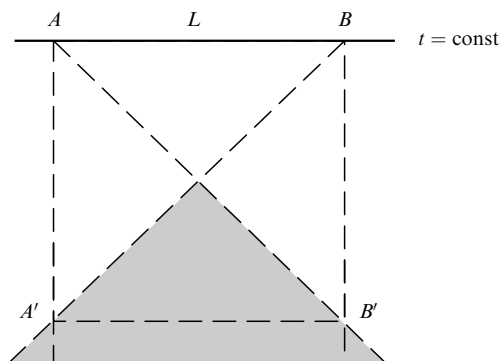


Рис. 29. Наблюдатели A и B расположены на расстоянии L друг от друга. A видит B' , а B видит A' , затемненная область — их общее прошлое

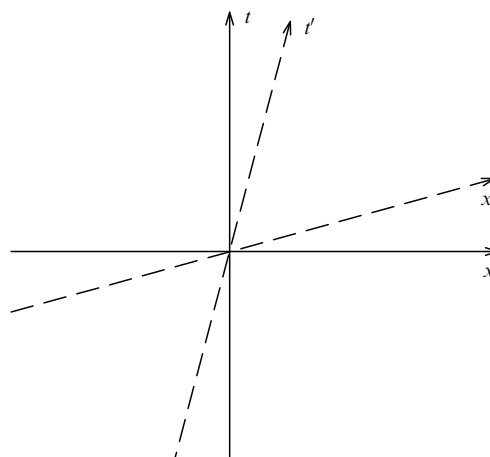


Рис. 30. Координаты x' , t' движущейся системы координат на плоскости x , t

слабая информационная связь с внешним миром оставляет только t как абсолютное время.

Теперь мы можем вернуться к квантовому телеграфу. Квантовый телеграф использует объективно происходящие коллапсы. Меняя извне конфигурацию физической системы и тем самым оказывая воздействие на вероятности случайных естественных коллапсов, можно попытаться осуществить сверхсветовую передачу информации. Но эта передача информации, будучи построенной на необратимых процессах по абсолютному времени t , не может передаваться в обратную сторону по t : мы совершенно четко встречаемся со "стрелой времени". Итак, мы естественным образом приходим к принципу С, т.е. к невозможности распространения информационных сверхсветовых сигналов из будущего в прошлое по "абсолютному" времени t .

Чтобы более ясно представить себе, почему не следует а priori отвергать возможность квантового телеграфа, полезно иметь в виду следующую аналогию. Главными средствами передачи информации в животном мире, в том числе у людей до изобретения радио, являются звук и свет. Звукотом мы пользуемся активно: голосовыми связками создаем устную речь, а затем воспринимаем ее на слух. А в случае света мы пассивно воспринимаем рассеянное предметами излучение Солнца. С изобретением радио электромагнитные

волны стали активно генерироваться передатчиками и восприниматься приемниками, т.е. были освоены, как звук. С этой точки зрения сверхсветовые телеграфы являются как бы аналогом света и цвета при дневном освещении. Волновые функции микромира находятся в условиях не прекращающегося процесса последовательного коллапсирования. Меняя детали такого коллапсирования в одной точке пространства, можно, казалось бы, затем (т.е. с небольшим сдвигом по "абсолютному" времени t) повлиять на изменение вероятностей коллапсов в других точках пространства. Само коллапсирование передать в другую точку пространства невозможно. Но нельзя исключить возможность управляемо менять классическое окружение множества коллапсирующих систем в одной точке пространства и детектировать это влияние на коллапсы в другой, далеко отстоящей пространственной точке. Для этого волновые функции в этих точках должны быть коррелированными, т.е. не факторизуемыми.

39. Свобода воли

Чтобы вернуться к рассмотрению коллапсов, нам придется сделать экскурс в совсем другую область. А именно, постараемся понять, как, оставаясь в рамках физики, можно подступиться к объяснению феномена свободы воли.

Под свободой воли мы будем понимать здесь свободу действий, или свободный выбор между двумя или несколькими альтернативами. Принято считать, что человек безусловно обладает свободой воли, будучи свободным в своих поступках. Разумеется, человеку часто приходится совершать вынужденные поступки под давлением внешних обстоятельств, однако и в этом случае последний выбор остается за ним.

Не факт, что абсолютно все примут данные утверждения за истину. Следуя, например, Шопенгауэру, можно было бы утверждать, что человек анализирует только хотения, а самый последний момент принятия решения может выпасть из-под его контроля. Другими словами, его волевые действия могут быть навязаны извне.

Однако мы будем оставаться на более наивной точке зрения, полагая, что человек свободен в своих поступках и поэтому ответствен за них. Но принимая свободу действий для человека, мы не должны обижать и животный мир. С античных времен до нас дошел парадокс Бурдиганова осла: осел, находящийся в точности между двумя охапками сена, должен умереть с голода, поскольку он не сможет решить, с какой охапки начать трапезу. Все мы знаем, что этого не произойдет, и осел без всяких затруднений выберет одну из охапок сена. Но логический парадокс все же есть. Самое простое его решение основано на малых возмущениях: случайный ветерок может донести более сильный запах от одной из охапок, и этого достаточно, чтобы осел сделал свой выбор. Но, опираясь на наблюдения за животными, можно утверждать, что осел и так свободен сделать свой выбор без всякой связи с внешней мотивацией: ему достаточно только знать о существовании обеих охапок сена.

Более того, любое животное только потому и живо, что ему то и дело приходится принимать решения, как прокормиться самому и не стать пищей для хищника. Чем более высоко развит данный вид, тем более широкий

спектр решений приходится принимать его представителям. Но никак нельзя принять допущение, что свобода действий появляется скачком на некотором уровне развития: даже у самых примитивных представителей животного мира сохраняется свобода действий. Более того, очень трудно представить себе рубеж появления свободы воли на границе между неодушевленным миром и жизнью. Гораздо более естественным является допущение о том, что свобода воли является имманентным, т.е. внутренне присущим свойством всего мира. Только на основе этого исходного положения можно уйти от бессмысленного, полностью детерминированного механистического мира к миру живому и развивающемуся.

Итак, примем, что мир в целом обладает свободой воли, т.е. способностью принимать решения и свободно действовать в рамках тех ограничений, которые накладываются на него законами физики, в том числе классической физики. Эта свобода действий реализуется в виде огромного набора малых свободных актов, и каждый из них должен укладываться в рамки физических законов. Это значит, что свобода действий может реализовываться только в точках бифуркации, когда законы механики и физики допускают неоднозначное развитие процесса.

Рассмотрим сначала классическую физику. Типичным примером соответствующей бифуркации служит рис. 15, б, где показано неустойчивое положение материальной точки на вершине "холма" между двумя потенциальными ямами. Из-за неустойчивости начального состояния материальная точка "скатится" в одну из ям. Произойдет спонтанное нарушение симметрии. Соответствующий процесс можно рассматривать как результат эволюции под действием начального возмущения. Само это возмущение можно рассматривать как совершенно случайное, не связанное ни с какими причинами. Но тогда совершенно эквивалентным образом можно сказать, что мир в целом (включая множество мелких связей, т.е. возмущения) "принял решение" о данном спонтанном нарушении симметрии. Аналогичным образом случайные бифуркации можно рассматривать как произошедшие беспричинно и спонтанно, т.е. если бы они были приняты "волевым образом" извне данной системы.

Перейдем теперь к микромиру. В системах многих частиц тоже могут происходить крупномасштабные бифуркации. Но гораздо больший интерес представляют самые малые бифуркационные переходы, т.е. коллапсы волновых функций. Возникает естественный соблазн рассматривать коллапсы как своего рода микро-неустойчивости. Можно было бы предположить, например, что волновая функция, распавшаяся на некогерентные части, является неустойчивой и частица предпочитает оказаться в одном когерентном субпакете. Такой подход близок к идеологии скрытых параметров, и вряд ли он может служить базой для полного понимания микропроцессов. Более того, нетрудно привести контрпример, который противоречит этому допущению. А именно, если мы опять разделим одну волновую функцию по двум потенциальным ящикам, затем подогреем их, то когерентность между двумя частями волновой функции разрушается. Произойдет коллапс волновой функции в один из ящиков, и именно там окажется частица. А перепрыгнуть из одного ящика в другой частица не может.

Поэтому более логичным представляется предположение, что волновая функция является всего лишь "показателем намерений". Особенно четко это видно в формализме Швингера, когда вводятся символы измерения. Эти символы — всего лишь возможности или намерения у частицы проявить то или иное значение физической величины. Реальная физическая величина появляется лишь при измерении, когда происходит коллапс намерения, т.е. коллапс волновой функции, сопровождаемый коллапсом вероятностей — записью соответствующей величины в измерительном приборе.

Если вернуться к разделу 23, то можно еще раз убедиться в том, что временная эволюция вектора состояния, т.е. волновой функции, естественно вписывается в формализм эволюции во времени символов измерения. Несколько утрируя ситуацию, можно сказать, что вся квантовая теория представляет собой формализм для описания временной эволюции намерений микромира. Даже в квантовой теории поля операторы эволюционируют во времени лишь для того, чтобы иметь возможность действовать на неподвижный вектор состояния — квинтэссенцию намерений микромира.

Теперь мы можем понять на качественном уровне, как эволюционирует наблюдаемая нами земная природа. Наиболее общий подход к описанию атомов, молекул и поля, из которых состоит наблюдаемое нами окружение, основан на использовании волновой функции ψ , т.е. вектора состояния, которая подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + M\psi. \quad (204)$$

Здесь H — оператор Гамильтона, а M — оператор коллапсов. В отсутствие коллапсов уравнение (204) описывает эволюцию чистого состояния для всего вещества Земли, включая биосферу. При этом

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)\psi(0),$$

где $\psi(0)$ — начальный вектор состояния. Вместо $\psi(t)$ можно использовать представление Гейзенберга, т.е. ввести операторы, зависящие от времени. Эти операторы действуют на неподвижный вектор состояния $\psi(0)$. Все соотношения при этом имеют лоренц-инвариантный вид.

Однако $\psi(0)$ имеет загадочный вид, и для описания реально протекающих процессов с учетом теплового движения приходится прибегать к дополнительному статистическому усреднению. Такое усреднение на самом деле неявно предполагает наличие коллапсов, которые из чистого состояния создают смешанный ансамбль. Если не прибегать к статистическому усреднению, но принять факт существования коллапсов, то оператор M следует считать случайным, поскольку он является аналогом набора беспричинных волевых актов. Естественно, что и вектор состояния $\psi(t)$ становится случайной величиной.

Естественно считать, что коллапсы M осуществляют неравновесную эволюцию системы. Особенно ясно это видно в процессах, аналогичных измерениям, когда коллапсы волновых функций сопровождаются коллапсами вероятностей. Как было показано в предыдущих разделах, негэнтропия коллапсирующей системы при этом должна возрастать за счет возрастания энтропии

окружения. Ясно, что это может происходить только в неравновесной системе. На Земле самым мощным источником неравновесности является солнечное излучение, поэтому темп коллапсов (вектора состояния и вероятностей) частично связан с потоком негэнтропии от Солнца.

Но коллапсы волновых функций могут и не сопровождаться коллапсом вероятностей, например при тепловом движении. Тем не менее и в этом случае неравновесное окружение играет не последнюю роль. Ситуация здесь сходна с молекулярным хаосом. Как мы видели, даже слабая связь с внешним миром существенно меняет эволюцию системы многих частиц: в замкнутой системе имеет место обратимое уравнение Лиувилля, а при связи с окружением обратимость во времени исчезает. Сходная ситуация возникает и в квантовом случае: замкнутая система эволюционирует как чистое состояние, а связь с внешним окружением нарушает когерентность и приводит к коллапсам.

Структура уравнения (204) подсказывает, что реальная физическая система включает одновременно причинно-следственную лоренц-инвариантную эволюцию вектора состояния, т.е. эволюцию "намерений", и случайную "волевою" последовательность действий, т.е. коллапсов M . Коллапсы волновых функций на Земле могут происходить как сами по себе, т.е. спонтанно, так и в результате прямой или косвенной связи с коллапсами квантов солнечного излучения в каскадах их превращений в тепловое движение атомов и молекул. Темп коллапсов, т.е. абсолютная величина нелинейного оператора M , определяется неравновесностью, т.е. уровнем потока негэнтропии. Оператор коллапсов может быть лоренц-инвариантен. Он действует, в основном, в системе координат, жестко связанной с Землей. В покоящейся системе коррелированных частиц оператор коллапсов действует одновременно по всему пространству, т.е. "мгновенно" по абсолютному времени t с точностью до постоянной времени процесса Δt . В подвижных коррелированных системах частиц, не изолированных от окружения, оператор коллапса действует последовательно по t на мировой линии фазовой скорости центра масс.

Итак, даже с точки зрения микроскопического строения вещества и поля следует различать причинно-следственный и "волевой", т.е. спонтанно действующий, аспекты эволюции мира. Без коллапсов нарушение когерентности отдельных частей волновой функции привело бы к ветвящемуся сценарию развития мира: согласно Эвретту III [27] можно представить себе много параллельно развивающихся миров. Но на самом деле мы живем в одном единственном мире: спонтанно происходящие "волевые" коллапсы создают одну единую и неповторимую линию эволюции и развития мира. Добавление макроскопических бифуркаций, не меняя качественной картины, существенно расширяет диапазон возможных сценариев, из которых история выбирает один единственный.

Вернемся опять к проблеме прошлого, настоящего и будущего, но уже в предположении о возможности распространения сверхсветовых сигналов вследствие коллапсов волновой функции. Выберем систему координат, связанную с Солнечной системой. Основную массу вещества в такой системе координат можно считать покоящейся, поскольку в ней перемещения всех макротел происходят со скоростями, существенно меньшими

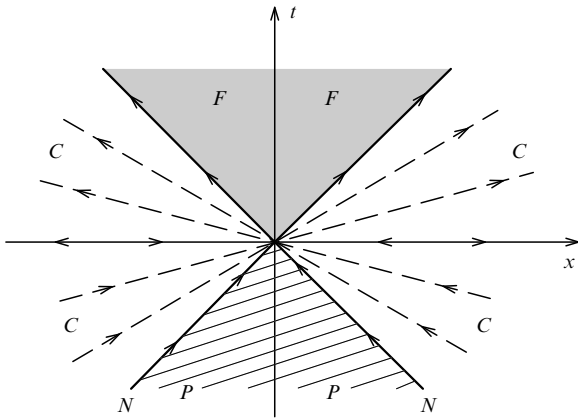


Рис. 31. График прошлого, настоящего и будущего для покоящейся точки $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Заштрихованная область P покрывает собой прошлые события, ее граница N соответствует настоящему. Область F — это динамическое будущее: точка $x = 0$, $t = 0$ может быть причиной для событий в этой области. В областях C возможна информационная связь с другими точками пространственных интервалов: сплошная линия $t = 0$ соответствует коллапсам в "абсолютном времени", а пунктирные линии отвечают коллапсам в движущихся телах, информационно связанных с основным покоящимся телом. Стрелки указывают возможные направления сигналов управления

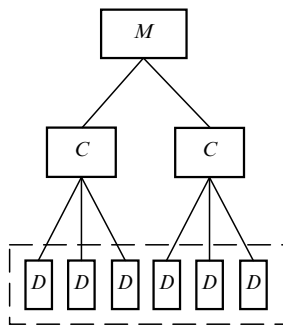


Рис. 32. Иерархия управленческой структуры: M — глава организации, C — руководители департаментов, D — отделы предприятия

скорости света. Время t такой системы условимся считать "абсолютным". Тогда для упрощенной картины одномерного движения упрощенный график прошлого, настоящего и будущего для частицы в точке $x = 0$, $t = 0$ выглядит так, как показано на рис. 31. На этом рисунке заштрихованная область P соответствует прошлому: наблюдатель в точке $x = 0$, $t = 0$ имеет возможность получить сигналы на материальных носителях (волны, частицы) из всей этой области. Граница N этой области соответствует настоящему: это то, что наблюдатель в точке $x = 0$, $t = 0$ видит в свете вокруг себя, включая звезды далеких галактик. Все, что находится вне P , — это будущее: если равномерно двигаться вдоль оси t , то рано или поздно любая точка вне P пройдет через "настоящее", т.е. движущуюся границу N . Однако это будущее естественно разделяется на две области F и C .

Область F — это динамическое, т.е. активное, будущее для точки $x = 0$, $t = 0$: наблюдатель в этой точке имеет возможность активно повлиять на события в F с помощью сигналов на материальных носителях. А область C — это пассивное будущее. Оно рано или поздно пересечет "настоящее" N , но повлиять на него

материальными сигналами наблюдатель в точке $x = 0$, $t = 0$ не может. Верно и обратное утверждение: никакой объект в области будущего C не может послать в точку $x = 0$, $t = 0$ сигнал на материальном носителе. Другими словами, в рамках динамических взаимодействий точки области C не могут находиться в обратной по времени причинно-следственной связи с точкой $x = 0$, $t = 0$.

Допустим теперь, что квантовые коллапсы происходят таким образом, что они за счет квантовых корреляций "повязанных" состояний могут переносить сверхсветовые сигналы, т.е. допустим возможность "квантовых телеграфов". Тогда коллапсы на частицах с дорелятивистскими скоростями будут отвечать "мгновенной", $V = \infty$, передаче сигнала, что отмечено двусторонними стрелками на оси x . Пунктирные линии на рис. 31 соответствуют движущимся телам, у которых скорость сигнала $V' = \infty$ в их собственных системах координат. Если волновые функции частиц этих тел имеют корреляционные связи с внешним окружением, то возможно лишь то направление распространения управляющих (т.е. переносящих информацию) сигналов, которое отвечает возрастанию "абсолютного времени" t . Соответствующие направления отмечены стрелками на пунктирных линиях рис. 31. Разумеется, мы можем представить себе движущееся тело, абсолютно изолированное от внешнего мира, в том числе и информационно изолированное. Если в этом теле протекают неравновесные необратимые процессы, то в нем должны происходить и коллапсы волновых функций. В этом случае нам достаточно лишь связать систему координат рис. 31 с движущимся телом, и все остальные рассуждения будут перенесены в новую систему координат. Другими словами, полная лоренц-инвариантность включает в себя информационную изолированность системы.

40. Иерархические системы

Термин "иерархическая система" напоминает нам нечто из области бюрократии. И в самом деле, именно по принципу иерархической организации построена любая управленческая структура, будь то правление малого предприятия, министерство или государство в целом. Принцип такого построения показан на рис. 32.

Во главе управленческой структуры находится одно лицо M , которое принимает окончательные решения по самым главным вопросам предприятия D . Между M и D находится промежуточный уровень управления (таких уровней может быть несколько). Уровень C отчитывается перед M о принимаемых решениях, воспринимает его указания и управляет подразделениями предприятия D , чтобы обеспечить его оптимальное функционирование.

Рис. 32, казалось бы, очень далек от обсуждаемых нами физических систем. Однако это не так: в сложных открытых физических системах могут появляться тенденции к их расслоению на информационные и динамические подсистемы по некоторой аналогии с рис. 32. Поясним, в чем тут дело. Напомним, что открытая физическая система построена по принципу рис. 33. Открытая система X получает извне некоторую упорядоченную энергию с мощностью P и потоком негэнтропии $(-S_i)$. Если, например, температура системы X равна T , а поступающая энергия имеет энтропию, которую можно охарактеризовать эффективной температурой T_{eff} , то поток негэнтропии равен $-S_i = P(T_{\text{eff}}^{-1} - T^{-1})$.

Необратимые процессы внутри системы X приводят к рождению энтропии, причем небольшая часть поступающей в систему негэнтропии расходуется на поддержание и совершенствование внутренней структуры системы X . Рожденная в системе X энтропия \dot{S}_e вместе с избыточной массой выбрасывается наружу в виде отходов.

Если система X имеет не очень сложную внутреннюю структуру, то она может вести себя как однородная динамическая (механическая) система. Например, горная река получает массу (воды) и упорядоченную потенциальную энергию от таяния ледников. С точки зрения гидродинамики, и у нее нет внутренней структуры, обладающей памятью, если мы не интересуемся временным развитием ущелья или долины реки.

Однако в более сложных системах со сложно организованной внутренней структурой возможно расслоение единой системы на две тесно связанные друг с другом подсистемы. Одну из них мы по-прежнему можем называть динамической или силовой, а вторую можно назвать информационной или управляющей подсистемой. Такая возможность появляется в силу большой сложности "фазового портрета" системы. Если описывать систему некоторыми параметрами порядка, т.е. обобщенными координатами Q_i , то временная эволюция Q_i может оказаться очень сложной в силу нелинейных связей между Q_i . Соответственно, траектория Q_i в фазовом пространстве может оказаться очень чувствительной к малым возмущениям, обладая многими точками бифуркации. В этих условиях фазовая точка может легко перебрасываться с одной траектории на другую малыми внешними возмущениями или малыми изменениями в структурных элементах системы.

Те структурные элементы, которые могут сильно влиять на динамику системы сравнительно малыми возмущениями (сигналами), естественно выделяются в структуру управления. Таким образом, сложные динамические системы сами собой могут расслаиваться на два уровня иерархии, как показано на рис. 34.

Рассмотрим, например, систему X . В ней выделены два иерархических уровня: подсистема управления C_X и динамическая подсистема D_X ; C_X — это тоже динамическая система, но более "деликатная" по сравнению с D_X . Блок C_X может "работать" с гораздо более слабыми процессами обмена энергией, т.е. фактически с "сигналами". Если подсистема C_X организована достаточно сложно, то она может откликаться не на интенсивности приходящих сигналов, а на их форму, т.е. "смысловую часть". Другими словами, C_X становится информационной системой, а ее сложная внутренняя организация позволяет создать "тезаурус", т.е. набор внутренних архивов, который позволяет производить "процессинг" приходящей информации с выработкой управляющих сигналов, адресованных динамической подсистеме D_X . Иерархические системы типа рис. 34 мы условимся называть системами с информационным поведением.

Рассмотрим теперь две системы с информационным поведением X , Y , как показано на рис. 34. Высокочувствительный блок C_X может воспринимать сигналы не только от своей динамической подсистемы D_X , но и от подсистем C_Y , D_Y второй системы Y . Соответствующие сигналы должны переносить информацию, т.е. необходимая негэнтропия также должна быть поставлена откуда-то извне. Блоки C_X , C_Y могут при этом либо пользоваться частью той негэнтропии, которая посту-

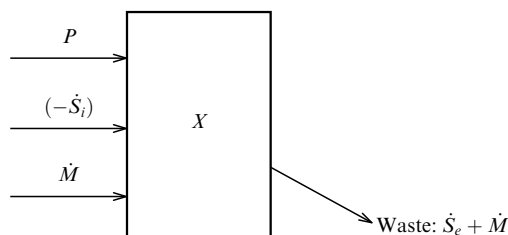


Рис. 33. Открытая система X получает извне энергию с мощностью P и может получать вещество с темпом \dot{M} . Энергия должна поступать в организованной форме, так что вместе с энергией в систему вводится негэнтропия $(-\dot{S}_i)$. Из системы X во внешнее окружение выбрасываются отходы, которые производят "тепловое загрязнение" среды в виде возрастания внешней энтропии с темпом \dot{S}_e ; в отходы включается и протекающая через систему масса с темпом \dot{M}

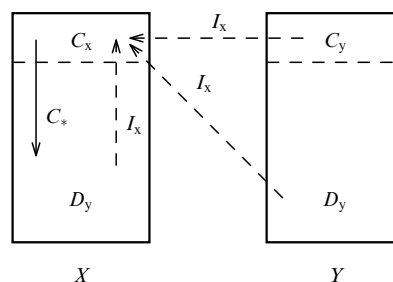


Рис. 34. Иерархические системы X , Y состоят из динамических подсистем D_X , D_Y и подсистем управления C_X , C_Y . Каждый из "блоков управления", например C_X , получает информацию о своей динамической подсистеме и других системах и на основе этой информации формирует сигналы управления C_X для D_X

пает в блоки D_X , D_Y , либо они могут пользоваться другими потоками негэнтропии, которые существуют в неравновесном внешнем мире. Если иметь в виду живые организмы, то источником негэнтропии для подсистем D служит пища, а для получения информации может использоваться свет, воспринимаемый органами зрения.

Для любой системы X в качестве второй системы Y может выступать весь внешний мир. В этом случае речь должна идти о "погружении" данной системы во внешний мир и ее адаптации к энергетическим и информационным потокам неравновесного мира. Именно для систем с информационным поведением важна та взаимосвязь между динамическими и информационными процессами, которая обсуждалась в предыдущих разделах статьи.

Следует отметить, что для информационного поведения сложных физических систем более важной является структурная сложность и структурная иерархия, а не иерархия элементарных уровней (частицы, атомы, молекулы, тела). Элементы информационного поведения появляются даже у микрочастиц в виде коллапсов волновых функций, а по мере укрупнения и усложнения структур к ним добавляются неравновесные коллективные параметры порядка, играющие роль динамических переменных. Коллапсы волновых функций и бифуркации динамических переменных вблизи точек ветвления выглядят как свободные поступки, т.е. как проявление свободы воли. Благодаря этому у Природы в целом появляется возможность свободного развития, которое реализуется в структурном усложнении и развитии ее составных элементов — сложных физических систем.

Заключение

Теперь мы можем подвести краткий итог всему тому, что было сказано выше.

При школьном знакомстве с механикой невольно создается представление об этой области физики, как о точной науке, имеющей дело с набором четко поставленных и точно решенных изящных динамических задач. По крайней мере, именно так механика обычно и преподается. Из такого представления о механике довольно естественно вытекает механистический подход к другим явлениям в физике, и кажется вполне оправданным лапласовский детерминизм: достаточно, казалось бы, найти силы, действующие между отдельными телами, и затем по начальным условиям можно предсказать эволюцию мира. Мы знаем, что Природа устроена и развивается более сложным образом. Но, может быть, еще не очень широко стало известно, что и в самой механике взгляды существенно изменились за последние несколько лет.

Оказалось, что все точно решаемые, так называемые интегрируемые задачи принадлежат к классу специально подобранных сильно упрощенных задач. Большая же часть механических систем не интегрируема. Это не просто неумение найти решение в конечном виде, а факт сложного поведения динамической системы, поведения, похожего на хаотическое, случайное. Такое поведение, получившее название динамического хаоса, показано и проанализировано на большом числе частных примеров и представляется достаточно универсальным. Близкие траектории такого движения разбегаются в фазовом пространстве, т.е. оно локально неустойчиво. Поэтому для его описания, наряду с точным расчетом траекторий с помощью ЭВМ, могут быть использованы и статистические методы, если нас интересует поведение системы в течение достаточно длительного времени.

Но этого мало. При рассмотрении поведения систем со стохастичностью, и в особенности взаимодействия таких систем, могут быть использованы представления, заимствованные из теории управления и кибернетики, какие были развиты для описания искусственно созданных человеком систем с управлением, но которые нашли свои аналоги и в природных явлениях, в частности в биологических процессах.

Хаотическое поведение свойственно большей части динамических систем, как консервативных, с сохранением энергии, так и диссипативных. Для гамильтоновых систем, у которых фазовый объем сохраняется, движение носит характер перемешивания в фазовом пространстве: начальная "капля" фазового пространства, размер которой задан неопределенностью начальных данных, сложным образом деформируется в процессе движения. "Капля" испускает из себя "отростки", которые затем вытягиваются, деформируются и постепенно "прорастают" во все фазовое пространство, сохраняя свой объем, так что все это становится похожим на комок ваты. Близкие траектории при таком движении экспоненциально быстро расходятся друг от друга, средний темп их разбегания характеризуется энтропией Колмогорова–Синяя. В процессе размешивания траектории могут сколь угодно близко подходить к любой заданной точке в пространстве. Такие системы называются эргодическими — среднее значение некоторой функции от

координаты фазового пространства по времени и по пространству совпадают между собой.

В системах с диссипацией в процессе движения фазовый объем сокращается. В простейшем случае такая система эволюционирует к состоянию равновесия — соответствующая траектория в фазовом пространстве имеет вид устойчивого фокуса. При подпитке энергией извне диссипативная система может испытывать устойчивые колебания — это устойчивый цикл в фазовом пространстве (в многомерном случае — тор), а может перейти в режим сложного стохастического движения, которое получило название странного аттрактора. Таким образом, все траектории диссипативной системы в фазовом пространстве соответствуют аттракторам — равновесию, периодическим колебаниям или странному аттрактору. Одним из аттракторов может быть разрушение системы.

Если диссипативная система имеет много степеней свободы, то у нее может быть много зон притяжения в фазовом пространстве. Если они составлены из устойчивых фокусов, то система будет стремиться к одной из точек устойчивого равновесия. В этом случае говорят о мультиравновесной системе — это простейший пример запоминающего устройства для компьютера. Предельное состояние может быть также одним из многих предельных циклов — такие запоминающие устройства также существуют (например, циклическая цепочка бегущих друг за другом цилиндрических магнитных доменов). В более общем случае система может стремиться к одному из многих возможных аттракторов, включая странные аттракторы. При выведении одной системы из заданного аттрактора с помощью внешнего воздействия, она будет эволюционировать к другому аттрактору, зона притяжения которого покрывает точку начального состояния системы. В сложных физических системах с многими аттракторами может развиваться процесс упорядочения, который получил название самоорганизации.

В простейшем случае самоорганизация — это появление порядка в первоначально однородной среде, другими словами, возникновение спонтанного нарушения симметрии в неустойчивом однородном состоянии. Имеется масса примеров самоорганизации этого типа в физике, химии и других естественных науках.

Фазовые переходы второго рода можно, следуя Ландау, описывать введением параметра упорядочения. Аналогичный подход используется для описания возникновения ячеек Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости. На этих примерах видно, что появление порядка и новой симметрии связано с возрастанием некоторого физического параметра упорядочения существенно выше первоначального теплового уровня. При развитии неустойчивости жидкости это макроскопические параметры жидкости: скорость, плотность, температура. Химические автоволны могут описываться в терминах концентраций участвующих в реакции веществ.

Макроскопические величины, такие как скорость, плотность, температура и концентрация химических веществ, являются непрерывными функциями точки, т.е. физическими полями. Поэтому формально такие поля имеют бесконечное число степеней свободы. Однако при появлении порядка или развитии структур возбуждается только конечное число степеней свободы.

Особенно хорошо это видно на примере ячеек Бенара или вихрей Тейлора. Поэтому системы с упорядочением часто можно рассматривать как системы с конечным числом степеней свободы, они допускают моделирование (по крайней мере, численное) простыми динамическими системами. Напомним, что именно на примере описания конвекции жидкости были найдены странные аттракторы.

При переходе к турбулентности число сильно возбужденных степеней свободы может быть очень большим. Однако и в этом случае число эффективно действующих свободных величин может быть не очень велико. Известно, что фрактальная размерность эффективного фазового пространства, как правило, не велика: мелкомасштабные степени свободы просто подстраиваются под крупномасштабные и выполняют роль более интенсивной диссипации.

Резюмируя, можно сказать, что самоорганизация в однородных средах и образование структур выводит некоторые коллективные степени свободы на уровень, очень далекий от теплового. Эти степени свободы могут описываться в терминах макроскопических параметров, играющих роль обобщенных координат в соответствующих динамических моделях. Поэтому описание самоорганизованных систем сходно с описанием динамических систем.

Более сложный тип самоорганизации возникает в том случае, когда в появившихся структурах может дальше развиваться иерархия структур с появлением и взаимодействием новых структурных элементов. Примером может служить добиологическая эволюция макромолекул и биологическая эволюция. Упрощенно говоря, такая самоорганизация вовлекает в игру новые степени свободы, которые с точки зрения динамического моделирования можно рассматривать как элементы памяти на мультистабильных состояниях. Например, барханы пустыни можно рассматривать как медленно эволюционирующую динамическую систему, запоминающую историю взаимодействия поверхности песка с ветрами. Количественное описание соответствующих процессов развития можно моделировать динамическими моделями с диссипацией и памятью с достаточно большим числом степеней свободы.

Сам факт существования стохастических систем с небольшим числом степеней свободы должен заметно изменить наше представление о постановке динамических задач. В самом деле, раньше существовала точка зрения, что стохастичность присуща только системам с очень большим числом степеней свободы, для которых естественно использовать статистическое описание, а системы с небольшим числом степеней свободы должны описываться точно — "точно" в рамках принятой модели, которая, может быть, не всегда достаточно полно соответствует реальности, но последнее обстоятельство можно заменить анализом отклика системы на малые возмущения: в устойчивой системе возмущения остаются малыми.

Если система неустойчива, то все траектории в фазовом пространстве разбегаются, и поэтому очень большое значение приобретают начальные данные. Если мы хотим, чтобы траектория реального движения была близка к выбранной нами траектории, т.е. чтобы она попадала в некоторую область фазового пространства в конце траектории, начальные данные должны

быть выбраны с достаточной степенью точности. Другими словами, нужно указать достаточно много десятичных знаков у каждой из координат q . Число знаков после запятой пропорционально $+\ln(1/\Delta q)$, где Δq — точность задания координаты. При задании всех координат и импульсов с некоторой точностью мы получаем величину, пропорциональную $\ln(V/\Delta V)$, где V — полный объем фазового пространства, а ΔV — доля объема фазового пространства в начальном состоянии. Величина $\ln(V/\Delta V)$ называется количеством информации. Таким образом, в неустойчивых системах наряду с динамической частью задачи, связанной с силовым взаимодействием тел, большую роль приобретает информационная часть, связанная с заданием начальных значений координат.

Но и это еще не все. Рассмотрим, к примеру, гамильтонову систему и предположим, что мы интересуемся задачей о попадании фазовой траектории в некоторую конечную "каплю" в фазовом пространстве. Спроектируем эту "каплю" вдоль фазовых траекторий из будущего на начальное время. Тогда соответствующая капля расплывается в "комочек ваты", с большой скважностью покрывающей заметную часть фазового объема. Случайная точка в объеме, скорее всего, не попадет на "волокно", но при очень малом смещении в фазовом пространстве можно попасть на траекторию внутри "волокна", оканчивающуюся в "капле". Итак, очень малое смещение в фазовом пространстве может привести нас на нужную траекторию, надо только знать, куда смещаться. Знание — это тоже информация. Самым простым способом это знание может быть получено путем прослеживания за траекториями. Именно так и устроены системы управления: они следят за реальной траекторией и малыми сигналами изменяют ее, переводя на нужную.

Итак, в неустойчивых системах малыми сигналами можно сильно изменить траекторию. Для этих сигналов важна не их величина, а точное соответствие возможности перевода исходной траектории на нужную, т.е. следует иметь правильную информацию о структуре фазового портрета.

Рассмотрим теперь системы с диссипацией. Как уже было сказано выше, у открытых систем такого типа фазовое пространство упрощенно можно представлять себе разделенным на области притяжения к различным аттракторам. Для перевода системы с одного аттрактора на другой ее нужно перебросить из одной области притяжения в другую. При этом опять на первый план выступает не величина силового воздействия, а его информационная характеристика: воздействие должно перебросить систему в любую точку притяжения второго аттрактора, т.е. системе следует сообщить определенное количество информации $\ln(V/\Delta V)$, где ΔV — объем притяжения второго аттрактора. Разумеется, чтобы реально осуществить переброс системы с одного аттрактора на другой, требуется затратить определенное количество энергии, и, возможно, существует некоторое минимальное ее значение, ниже которого такой перенос невозможен и соответствующий сигнал не реализует имеющуюся информацию.

Тем не менее не только динамический, но и информационный аспект оказывается важным для рассматриваемого перехода. Соответственно и описывать его нужно в терминах информационных процессов. При этом

оказывается важным не только количество сообщаемой информации, но и ее содержание (иногда говорят, семантическое содержание), т.е. указание, в какой именно аттрактор система переводится.

Рассмотрим некоторую систему, динамически неустойчивую, т.е. с разбегающимися траекториями. Чтобы упростить рассуждения, займемся ее крайне упрощенной дискретной моделью, в которой траектория последовательно проходит через точки бифуркации.

В каждой точке ветвления система совершает "поступок" — она выбирает один из последующих участков траектории. Если в каждой точке выбор случаен и корреляция между выборами отсутствует, то это пример цепи Маркова. Однако не это нас интересует.

Мы предположим, что рассматриваемая система на самом деле сложная и наряду с внешними динамическими переменными у нее есть внутренние степени свободы, например соответствующие мультистабильным состояниям или внутренним аттракторам. Тогда выбор траектории в точках бифуркации будет определяться состоянием внутренних степеней свободы. Если у системы есть источник энергии, то для такого выбора опять важно лишь информационное указание, какая траектория предпочтительна. Такую систему можно рассматривать как систему с управлением, которое определяется состоянием внутренней динамической системы.

На фоне силовой динамики поведение такой системы начинает определяться информационными свойствами системы, и, соответственно, ее можно назвать системой с информационным поведением. Если к тому же имеется обратная связь между динамическими и внутренними степенями свободы, то такая система может очень сложно реагировать на все внешние воздействия.

Изучение поведения сложных систем, безусловно, представляет собой предмет конкретных исследований. Тем не менее можно высказать и некоторые общие соображения.

При сравнении простых и сложных систем, например простых механизмов и биологических систем со сложной иерархической организацией, резко бросается в глаза их принципиальное различие, состоящее в том, что движение простых механических систем полностью предопределено, а в живых организмах, даже простейших, мы видим признаки свободного поведения, не определяемого только внешними причинами. Разумеется, эта свобода действий еще более ярко выражена у сложных организмов.

Спрашивается, нельзя ли проследить за этой тенденцией развития, исходя из представлений о самоорганизации.

Как мы обсуждали выше, у самоорганизующихся систем имеется возможность расслоения на динамическую и информационную, управляющую, части. Если речь идет о биологических или добиологических системах, у которых имеется возможность репликации и многократного повторения цикла развития, то нетрудно себе представить, что системы с информационным поведением могут иметь и фактически имеют преимущества в борьбе за жизнь, т.е. за расширение фазового пространства своего устойчивого существования. Таким образом, в условиях конкуренции динамическое поведение системы и ее развитие в большей мере начинает определяться ее информационными свойствами, включая информационное отношение к внешнему миру.

Такие системы наряду с обычным обменом энергией и негэнтропией с внешним окружением, необходимым для сохранения открытой самоорганизованной структуры, получают возможность информационного развития, т.е. усложнения и совершенствования своего управления. Этот процесс связан с усложнением управляющей части, т.е. появлением в ней новых степеней свободы или параметров порядка за счет все новых бифуркаций. Феноменологически этот процесс можно охарактеризовать как получение дополнительной информации от неравновесного внешнего мира.

При взаимодействии систем с памятью и информационным поведением могут развиваться процессы адаптации одних систем к другим. Это аналог появления "знаний" о реакции других систем на поведение данной. Дальнейшее развитие механизмов адаптации и оптимизации поведения системы приводит к возможности обработки информации, т.е. к появлению элементов сознания. Но кроме свободы у сложных систем появляются зачатки воли.

Свобода — это возможность выбора из нескольких альтернатив, акт воли — сам этот выбор. В неустойчивых системах с разбегающимися траекториями для выбора одной из траекторий достаточно очень мало изменить начальные данные, т.е. использовать для этой цели очень малый сигнал с определенной информацией. В сложной системе с информационным поведением этот выбор может быть сделан сигналом из блока управления. Этот сигнал вырабатывается системой управления в процессе ее динамического движения и с использованием накопленной ранее памяти, т.е. знаний. Эти знания представляют собой продукт длительного развития данной системы в процессе ее взаимодействия с другими информационными системами, они в некоторой мере приобретают невременной характер, т.е. становятся не жестко связанными с событиями только ближайшего прошлого. Благодаря этому волевой акт выглядит как бы свободным — он не предопределен видимыми в настоящий момент причинами. Более того, проинтегрированные за большой промежуток времени и накопленные в памяти сведения содержат информацию о временном поведении системы и ее окружения, поэтому появляется возможность предугадывания событий, а следовательно, принятия решений с определенной целью. Другими словами, в отличие от обычной динамики, где поведение системы определяется ее мгновенной конфигурацией и соответствующими этой конфигурации силами, в информационных процессах выбор делается на основе долговременной памяти и с возможной экстраполяцией на будущее. Отсюда и появляется возможность выбора цели. Таким образом, целесообразность и возможность выбора цели можно считать достаточно естественным продуктом развития сложных систем с информационным поведением.

Чем система сложнее, тем, казалось бы, в большей мере у нее должны проявляться аспекты информационного поведения. В Природе в целом "волевое начало" связано с той структурой и памятью, которые сложились в ней в результате ее длительного развития. Когда в процессе исследований мы изолируем некоторую систему от внешнего окружения, мы, безусловно, создаем более простую и доступную для понимания ситуацию, но вместе с тем и обедняем ее путем информационной изоляции от внешнего мира.

При переходе к изучению все более сложных систем именно структурные, информационные аспекты их поведения и развития выступают на первый план, а динамика создает лишь основу для информационного развития.

С учетом квантовых процессов в микромире картина развития мира становится еще более сложной и более богатой в смысле ее информационного поведения. В игру вступает новый неравновесный и сильно нелинейный процесс — коллапсы волновых функций. Соответственно, усложняется структура информационных связей и их влияние на динамические процессы.

Понятие коллапса волновой функции естественно возникает при измерении квантовой величины: согласно основному принципу квантовой механики такое измерение с некоторой вероятностью "выдает" только одно из дискретных собственных значений соответствующего оператора. Можно сказать, что при "информационном соприкосновении" квантового объекта с классическим неравновесным окружением, например с прибором, у его волновой функции сохраняется только одна проекция, а остальные компоненты уничтожаются. Этот процесс называют также декогерентностью, и в последние годы он, наряду с "историчностью", широко обсуждается в литературе по основаниям квантовой теории (см., например, обзор Омнэ [41]).

Выше нами была принята гораздо более простая точка зрения, согласно которой декогерентность и коллапсы волновых функций нашего окружения происходят в результате огромной его неравновесности, связанной, в частности, с потоком неэнтропии от Солнца. Квантовые переходы в процессе термализации солнечного света порождают, с одной стороны, процесс монотонного возрастания энтропии, а с другой стороны, они разрушают когерентность волновых функций макротел и тем самым диктуют им условия классического поведения. Иначе говоря, эволюция неравновесной природы сама по себе приводит к классическому поведению макротел. Соприкосновение классического макромира с квантовым микромиром порождает коллапсы волновых функций. А при квантовых измерениях эти коллапсы сопровождаются коллапсами вероятностей, которые и порождают информацию о микрообъекте во внешнем мире.

Проблема измерения в квантовой механике всегда привлекала и продолжает привлекать интерес многих физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов. Существует две основные точки зрения в этом отношении. Одна идет от Н. Бора и состоит в том, что результаты измерения являются чисто случайными и квантовая теория предписывает только вероятности, пропорциональные квадратам амплитуд волновой функции. Какие именно амплитуды будут измеряться, зависит от устройства конкретного прибора и макрообстановки. Другая точка зрения восходит к А. Эйнштейну. Она предполагает, что за случайными результатами измерений лежит более сложная физическая картина мира. Эта вторая точка зрения развивалась в различных вариантах теорий "скрытых параметров". Однако в последние годы, в особенности после экспериментальной проверки неравенств Белла, признание получил подход Н. Бора. Но вопрос еще не снят с повестки дня и продолжает обсуждаться в научной литературе.

При этих обсуждениях очень часто используется знаменитый парадокс Эйнштейна, Подольского, Розена

[2]. Он состоит в мысленном эксперименте, когда две квантовые частицы после взаимодействия разнесаются очень далеко друг от друга. Обе частицы коррелированы между собой, и поэтому результаты измерений над одной частицей оказываются скоррелированными с результатами измерений над другой частицей. На первый взгляд это выглядит, как мгновенное дальнее действие. Не удивительно, что разными авторами в разное время обсуждалась возможность передачи сигналов быстрее скорости света с помощью коррелированных ЭПР-пар.

В работах Шимони [5] и Гирарди, Римани, Вебера [42] было показано, что в рамках стандартной квантовой теории, когда все результаты измерения следуют закону $|\psi|^2$, сверхсветовые сигналы невозможны. Оказывается, что измерения, проводимые над одним партнером ЭПР-пары, никак не могут быть использованы для управления результатами измерений над вторым партнером. Казалось бы, этим вопрос исчерпан. Однако, как специально подчеркивает Шимони [5], при доказательстве неявно делается предположение, что в макротелах не могут существовать микрокорреляции.

Чтобы показать, что этот вопрос не столь тривиален, мы посвятили его обсуждению разделы 35–39. В разделе 35 описывается эффект, обнаруженный в экспериментах Соколова и др. [36, 37], когда при пролете сквозь щель в металлической диафрагме возбужденного 2S-атома водорода у него сама собой появляется добавка 2P-амплитуды. Самое простое теоретическое объяснение [38] этого эффекта основано на идее, что атом водорода является первым партнером множества ЭПР-пар, а вторыми партнерами являются электроны проводимости. После взаимодействия в поверхностном слое металла электроны улетают внутрь металла, и там их волновые функции коллапсируют за счет механизма декогерентности. При таком коллапсе нет никакого измерения извне, и поэтому нет следования закону $|\psi|^2$: из соображений сохранения энергии при каждом таком коллапсе с большей вероятностью выделяется более медленная часть волнового пакета. Здесь фактически нет никакого измерения: в процессе эволюции сложной волновой функции многих электронов коллапсы приводят к тому, что медленная часть волнового пакета каждого провзаимодействовавшего с атомом электрона имеет вероятность появления несколько больше, чем соответствующая величина $|\psi|^2$. Индивидуальный эффект чрезвычайно мал, но он имеет один и тот же знак, так что соответствующие добавки к амплитуде 2P накапливаются. Можно сказать, что возбужденный атом создает микрокорреляции внутри макротела, которые постепенно приводят к накоплению 2P-амплитуды атома из 2S-амплитуды.

Поскольку коллапсы одиночных электронных волновых функций не обязаны следовать закону вероятностей $|\psi|^2$, то можно обсуждать возможность управления коллапсами вторичных партнеров ЭПР-пар. Соответствующая схема рассмотрена в разделе 36. В настоящее время трудно сказать, насколько она реальна: это вопрос прежде всего экспериментальный. Но может быть поставлен вопрос чисто теоретический: а не противоречат ли сверхсветовые сигналы стандартной теории относительности? Эти вопросы обсуждаются в разделах 37–39.

В них показано, что сверхсветовые сигналы на коллапсах, а не на материальных носителях могут не

противоречить теории относительности. Более того, можно представить себе схему на рис. 31, когда полностью исключены петли замыкания причины — следствия. В этом случае причинность не нарушается даже в сверхсветовых областях C . Впрочем, для точки ($x = 0, t = 0$) эта область соответствует будущему, и поэтому стандартное требование причинности в области C (следствие после причины) может оказаться слишком жестким.

Все эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

Идеи о самоорганизации и образовании диссипативных структур в открытых системах оказались очень важными для того, чтобы перебросить мостик между физикой и биологией. Но видно, что следует идти дальше и изучать иерархизацию структур, образование структур с памятью и возможностями извлечения информации извне, накопления ее в памяти, использования информации для управления и обработки этой информации с целью оптимального управления. Нетрудно видеть, что существует много общих черт в поведении сложных систем, как органических, так и неорганических, причем неорганические системы со сложной структурой тоже не являются простыми как в структурном плане, так и по характеру их поведения.

Список литературы

1. Швингер Ю. *Квантовая кинематика и динамика* (М.: Наука, 1992).
2. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935); перевод: *УФН* **16** (4), 440 (1936).
3. Bell J.S. *Physics* (Long Island City, N.Y.) **1**, 195 (1965).
4. Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
5. Shimony A. In *Proc. of the International Symposium on Foundations of Quantum Theory* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1984).
6. Ekert A.K. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
7. Bennett C.H., Brassard G., Mermin N.D. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 557 (1992).
8. Bennett C.H., Weisner S.J. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
9. Bennett C.H., Brassard G., Crepeau C., Jorisa R., Peres A., Wootters W.K. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
10. Braunstein S.L., Mann A., Revzen M. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3259 (1992).
11. Vaidman L. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3369 (1993).
12. Пригожин И. *От существующего к возникающему* (М.: Наука, 1985).
13. Lorenz E.N. *Tellus* **16**, 1 (1964).
14. Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах* (М.: Мир, 1979).
15. Эбеллинг В. *Образование структур при необратимых процессах* (М.: Мир, 1979).
16. Хакен Г. *Синергетика* (М.: Мир, 1980).
17. Полак Л.С., Михайлов А.С. *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах* (М.: Наука, 1983).
18. Хакен Г. *Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (М.: Мир, 1985).
19. Николис Дж. *Динамика иерархических систем* (М.: Мир, 1989).
20. Хартли Р. *Передача информации* (М.: ИЛ, 1957).
21. Шеннон К. *Работы по теории информации и кибернетике* (М.: ИЛ, 1963).
22. Szilard L. *Zs. Phys.* **53**, 840 (1929).
23. Бриллюэн Л. *Наука и теория информации* (М.: Сов. радио, 1975).
24. Стратонович Р.Л. *Теория информации* (М.: Сов. радио, 1975).
25. Поплавский Р.П. *Термодинамика информационных процессов* (М.: Наука, 1981).
26. Schrödinger E. *Naturwissenschaften* **23**, 807, 844 (1935).
27. Everett H. III *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454 (1957).
28. Yurke B., Stoler D. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986).
29. Davidovich L., Maalé A., Brune M., Raimond J.M., Haroche S. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2360 (1993).
30. Caldeira A.O., Legett A.J. *Phys. Rev. A* **31**, 1059 (1985).
31. Brune M., Davidovich L., Haroche S., Raimond J.M., Zagury N. *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
32. Bohm D. *Phys. Rev.* **85**, 66, 180 (1952).
33. Von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: Springer, 1932); перевод: фон Нейман Дж. *Математические основания квантовой механики* (М.: Физматгиз, 1963).
34. Mermin D. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803 (1993).
35. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику* (М.: Наука, 1988).
36. Sokolov Yu.L., Yakovlev V.P., Pal'chicov V.G. *Phys. Scripta* **48** (1993).
37. Sokolov Yu.L., Yakovlev V.P., Pal'chicov V.G., Lin D.N. *Nuovo Cimento D* **14**, 183 (1992).
38. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. *Phys. Scripta* **49** (1994) (in press).
39. Aspect A., Dalibard Y., Roger G. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
40. Kiess T.E., Shih V.H., Sergienko A.V., Alley C.O. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3893 (1993).
41. Omnès R. *Rev. Mod. Phys.* **164**, 339 (1992).
42. Ghirardi G.C., Rimini A., Weber T. *Lett. Nuovo Cimento* **27**, 293 (1980).

DYNAMICS AND INFORMATION

B.B. Kadomtsev

*Russian Research Center Kurchatov Institute, Institute of Nuclear Fusion, Moscow
46, Kurchatov Square, 123182, Moscow, Russia
Tel. (095) 196-9814. Fax (095) 190-4244. E-mail: postmaster@ufn.msk.su*

The interplay of the dynamical and information aspects of the behaviour of the complex physical systems is considered. Information coupling appears in classical objects as a result of a very high sensitivity of the nonlinear stochastic systems to very small external perturbations. Such perturbations can easily lead to very large changes of the phase trajectory of system. In quantum objects the features of the information type behaviour appears during measurement when the coherence of the wave function is destroyed and the external environment acquires the corresponding information. Such interactions can be described in terms of the wave function collapses. A lot of different examples of collapses are considered in the paper. Some of them lead to classical behaviour of the macroscopic bodies. The Einstein – Podolsky – Rosen paradox is discussed in details with its possible application to the information transfer problems.

Bibliography — 42 references

Received 28 December 1993