Февраль 1994 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 164, № 2*

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Локализованные нетопологические структуры: построение решений и проблемы устойчивости

В.Г. Маханьков, Ю.П. Рыбаков, В.И. Санюк

Обсуждаются возможности описания структур, локализованных в конечной области (солитонов, вихрей, дефектов и т.д.) как в интегрируемых, так и в неинтегрируемых полевых моделях. Для интегрируемых моделей подробно излагается универсальный алгоритм построения солитоноподобных решений, допускающий обобщение на многомерный случай и для ряда задач превосходящий по эффективности стандартный метод обратной задачи. В случае неинтегрируемых моделей, основное внимание в обзоре уделяется методам исследования устойчивости солитоноподобных решений, так как именно проблемы устойчивости оказываются наиболее существенными при описании многомерных солитонов. При этом особо выделяются устойчивые локализованные структуры, не наделенные топологическими инвариантами, поскольку для топологических структур существуют эффективные методы исследования устойчивости, основанные на энергетических оценках. Формулируются основные положения прямого метода Ляпунова в применении к распределенным системам. Выводятся эффективные критерии устойчивости стационарных солитонов, наделенных одним или несколькими зарядами (Q-теорема). На ряде примеров иллюстрируется применимость метода функциональных оценок, а также обсуждается устойчивость плазменных солитонов типа электронных фазовых дыр.

PACS numbers: 11.10.L

Содержание

В.Г. Маханьков. Центр нелинейных исследований, Лос-Аламосская Национальная лаборатория, США (Los Alamos, P.O. Box 1663, Mail Stop B258, New Mexico 87545 USA) и Объединенный институт ядерных исследований, 141980, г. Дубна, Московская обл.
E-mail: mvg@goshawk.lapl.gov
max@lcta.jinrc.dubna.su

Ю.П. Рыбаков, В.И. Санюк. Российский университет дружбы народов, кафедра теоретической физики, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: sanyuk@udn.msk.su

Статья поступила 21 октября 1993 г.

1. Введение

Локализованные структуры, или *солитоноподобные возбуждения*, возникают в динамических системах при достаточно сильном воздействии на них сторонних сил, а также в результате нелинейных эффектов самодействия. Действительно, при слабом воздействии на систему (равно как и при возможности пренебречь эффектами самодействия) эволюция системы хорошо описывается линейными закономерностями. В свою очередь линейные уравнения допускают в качестве решения *задачи Коши*, отвечающей локализованному в малой области пространства регулярному начальному условию, только расплывающиеся волновые пакеты. В основе этого расплывания лежит принцип суперпозиции, характерный для линейных систем. Однако при сильном воздействии на систему или значительных эффектах самодействия этот принцип нарушается ввиду того, что дальнейшая эволюция системы подчинена существенно нелинейным законам. При этом образуются объекты, обладающие рядом необычных для линейной физики свойств, в частности, удивительной устойчивостью. Изучение таких локализованных структур и стало предметом *физики солитонов*.

В связи с бурным развитием солитонной тематики с конца 60-х годов на качественно новом уровне была возрождена проблема описания локализованных структур (вихрей, дефектов, текстур и т.д.), а также частиц как протяженных объектов в физике конденсированных сред, в астрофизике и космологии, в физике элементарных частиц и ядра. По времени это совпало с экспериментальным подтверждением наличия структуры у сильно взаимодействующих частиц: в экспериментах Р. Хофштадтера (1956) по упругому рассеянию электронов на протонах было найдено распределение электрического заряда в протоне; в экспериментах Е. Блума и др. (1969) по глубоконеупругому рассеянию электронов на нуклонах было обнаружено явление *скейлинга* — масштабной инвариантности сечения рассеяния. Последнее наблюдение легло в основу созданной Р. Фейнманом *партонной модели*, позволившей понять, почему в случае упругого рассеяния нуклоны представляют собой протяженные объекты, а для глубоконеупругого процесса это представление не годится, так как неупругий процесс аналогичен рассеянию на точечном (бесструктурном) объекте [1]. В современных теориях — в квантовой хромодинамике, электрослабой и стандартной моделях — в роли партонов выступают кварки, т.е. используются представления о структуре частиц на основе так называемых *составных моделей*, где протяженные частицы конструируются из точечных. С одной стороны, понятно, что трудно представить себе логическое завершение такого процесса; с другой стороны, наличие бесструктурных частиц в модели ведет к появлению расходимостей, которые на каждом последующем уровне требуют все более изобретательной схемы для их устранения.

В связи с этим заслуживают внимания альтернативные подходы к описанию структуры частиц и протяженных объектов, т.е. вне рамок составных моделей. Уместно заметить, что поиск подобной альтернативы является в какой-то мере традиционным в развитии физических идей. Примерно такими же соображениями руководствовался лорд Кельвин (У. Томсон) в конце прошлого века, предложивший вместо точечных атомов рассматривать "вихревые атомы" конечной протяженности. Близкие суждения высказывались О. Хевисайдом, Дж.Дж. Томсоном и Г. Ми. Затем эти идеи в более конкретной форме были сформулированы А. Эйнштейном, предложившим описывать частицы регулярными решениями нелинейных уравнений поля как некоторые "полевые сгустки" (bunched field), занимающие "...ограниченную область пространства, в которой напряженность поля или плотность энергии особенно велики ..." [2, с. 725].

Представления о частице как о локализованном в малой области пространства регулярном физическом поле с конечной энергией и другими характеристиками встречались в литературе под разными именами: частицеподобные решения (particle-like solutions) у Н. Розена, Р. Финкельштейна и Я.П. Терлецкого; "горбы" (le champ á bosse) у Л. де Бройля; "кинки" (kinks) у Д. Финкельштейна; "комки" (lumps) у С. Коулмена и др. Концепцию многомерного солитона с нетривиальной топологической структурой, возникшую в конце 50-х годов в работах Т.Х.Р. Скирма (см. [3] и цитируемые оригинальные работы), можно рассматривать как удачное обобщение всех предшествующих понятий. Отметим также красивую (нетопологическую) концепцию Т.Д. Ли [4], своеобразно объединяющую перечисленные подходы в описании структуры частиц. В основу концепции положен нелинейный механизм удержания кварков, согласно которому взаимодействующие с кварками бозоны за счет сильного самодействия создают для кварков удерживающий потенциал типа солитонного мешка. В последнее время эта концепция развивается в рамках так называемых гибридных моделей мешков, где наружный солитон (как правило, топологический и обеспечивающий правильную спектроскопию) используется для запирания кварков внутри мешка. В предлагаемом обзоре излагается современное состояние вопроса относительно описания локализованных когерентных структур и, в частности, частиц как протяженных объектов на основе как интегрируемых, так и неинтегрируемых моделей теории поля. При этом мы ограничились лишь вопросами построения решений для интегрируемых моделей и изучением проблем устойчивости в неинтегрируемых моделях, допускающих многомерные локализованные структуры. Вопросы существования и устойчивости топологически нетривиальных локализованных структур будут изложены в отдельной публикации.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ (часть I)

Интегрируемым динамическим системам посвящены десятки содержательных монографий и обзоров [5 — 15], поэтому здесь мы вольны ограничиться упоминанием лишь некоторых (наиболее важных для дальнейшего изложения) аспектов этой теории. Поскольку в определении интегрируемых систем (равно как и солитонов) в существующей литературе имеются разночтения, то в дальнейшем считаем:

1. *Интегрируемой системой* — систему, допускающую представление Лакса (или, в более современном смысле, представление нулевой кривизны), у которой имеется счетное число интегралов движения и для исследования динамики которой применимы метод обратной задачи рассеяния, задача Римана, $\bar{\partial}$-проблема, метод конечно-зонного интегрирования, т. е. характерна так называемая *S-интегрируемость*; сюда же относятся и системы, которые могут быть проинтегрированы посредством замены переменных либо посредством анзаца (*С-интегрируемость*);

2. *Вполне интегрируемой системой* — гамильтонову интегрируемую систему, для которой можно найти переменные действие—угол и переписать через них гамильтониан системы.

Приведем без особых подробностей, которые можно восстановить по [9, 14], некоторые свойства интегрируемых систем на примере *нелинейного уравнения Шрёдин-*

гера[1] (НУШ) с двоякой целью — для дефиниции используемой терминологии и для напоминания читателю ряда фактов по НУШ, которые пригодятся в дальнейшем изложении. Динамическая система, связанная с НУШ

$$\mathrm{i}\partial_t\psi + \partial_x^2\psi + 2g|\psi|^2\psi = 0, \tag{2.1}$$

где $\psi(x,t)$ — комплекснозначная функция, относится к *гамильтоновым системам*, поскольку обладает набором канонически сопряженных переменных $\psi, \bar\psi$, где черта означает комплексное сопряжение. Соответственно, для системы (2.1) определены обобщенные на континуальный случай скобки Пуассона

$$\{\psi, \bar\psi\} = \mathrm{i}\delta(x-y), \tag{2.2}$$

и гамильтониан

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\Big[(\partial_x\bar\psi\cdot\partial_x\psi) - g(\bar\psi\psi)^2\Big], \tag{2.3}$$

для которого справедливы уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \partial_t\psi &= \{H,\psi\} = -\mathrm{i}\frac{\delta H}{\delta\bar\psi}, \\ \partial_t\bar\psi &= \{H,\bar\psi\} = \mathrm{i}\frac{\delta H}{\delta\psi}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В совокупности факты (2.2) — (2.4) и подтверждают принадлежность системы (2.1) к классу гамильтоновых. Заметим, что для определения динамической системы, как таковой, следует указать также граничные условия, которые в дальнейшем изложении будут, в основном, относиться к быстроубывающему случаю, т.е.

$$\psi(x,t) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{2.5}$$

Кроме того, $\psi(x,t)$ будем считать бесконечно дифференцируемой функцией, убывающей на пространственной бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Уравнение (2.1) можно представить как *условие совместности* следующей переопределенной системы линейных матричных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t y &= A_0(x,t;\lambda)y, \\ \partial_x y &= A_1(x,t;\lambda)y \end{aligned} \tag{2.6}$$

на вектор-функцию

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

которое получается из (2.6) приравниванием перекрестных производных $\partial_t\partial_x y = \partial_x\partial_t y$. В результате имеем *условие нулевой кривизны*[2]

$$\partial_t A_1 - \partial_x A_0 + [A_1, A_0] = 0 \tag{2.7}$$

— одно из фундаментальных соотношений метода обратной задачи. Заметим, что 2×2-матрицы A_0, A_1 в (2.6) зависят от произвольного комплексного параметра λ — *спектрального параметра* задачи, и условие (2.7) должно выполняться при всех λ. Явный вид матриц A_0, A_1 дается формулами

$$\begin{aligned} &A_1 = -\mathrm{i}\lambda\sigma_3 + P, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &P = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \bar\psi \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, \\ &A_0 = B - 2\lambda P + 2\mathrm{i}\lambda^2\sigma_3, \\ &B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}|\psi|^2 & \partial_x\bar\psi \\ -\partial_x\psi & \mathrm{i}|\psi|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Известно, что система, допускающая *представление нулевой кривизны*, обладает бесконечным (но счетным!) набором аддитивных интегралов движения (законов сохранения), а при наличии внутренних (изотопических) симметрий — серией таких наборов. Формально такие законы можно записывать в виде уравнений непрерывности

$$\dot\rho_n + \partial_x j_n = 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{2.9}$$

где функционалы ρ_n и j_n, представимые в виде полиномов от полей и их пространственных производных, ассоциируются соответственно с "плотностями" и "токами" системы[3]. Интегрируя (2.9) по x, получим интегралы движения

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x,t)\mathrm{d}x, \quad j_n \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{2.10}$$

Если интегралы I_n находятся в инволюции в отношении скобки Пуассона (2.2) и удается каноническим образом ввести угловые переменные, то система будет *вполне интегрируемой*, а сами интегралы из (2.10) будут играть роль переменных действия.

В ряде случаев удается решить обратную задачу рассеяния для оператора $L = \mathrm{i}\sigma_3(\partial_x + \mathrm{i}\lambda\sigma_3 - A_1)$, т.е. по данным рассеяния найти в явном виде потенциал, роль которого играет искомая функция $\psi(x,t)$. Это означает, что для таких ситуаций может быть решена задача Коши, т.е. поведение интегрируемой системы будет полностью детерминированным. Локализованные регулярные решения интегрируемых систем (если такие существуют) соответствуют дискретной части спектра оператора L и называются *солитонами*. Для интегрируемых систем разработан также квантовый метод обратной задачи рассеяния, позволяющий находить спектр как основных, так и возбужденных состояний [17, 18].

---

[1]Отметим, что своим названием уравнение (2.1), не связанное физически с (принципиально линейной!) квантовой механикой, обязано тому и только тому факту, что в линейном пределе $g = 0$ оно совпадает с уравнением Шрёдингера для волновой функции свободной частицы.

[2]Название связано с геометрической интерпретацией системы (2.6) и условия (2.7) в терминах расслоенных пространств (см. [9]).

[3]Такие плотности относятся к локальным. Ряд моделей помимо локальных законов сохранения обладает также и нелокальными, т.е. интегральными по x, плотностями.

Таковы в самых общих чертах нынешние возможности в описании локализованных структур как солитонов в интегрируемых *моделях*. Сразу оговоримся, что несмотря на значительные усилия, предпринятые в развитие этого направления, приведенная схема последовательным образом реализуется лишь в случае вполне интегрируемых $(1+1)$-мерных моделей типа Кортевега—де Фриса (КдФ), НУШ, синус-Гордона и т.д. Данное обстоятельство существенно сужает сферу возможных физических приложений и в то же время инициирует активный поиск иных методов исследования интегрируемых моделей, пригодных для описания многомерных солитонов. Среди них укажем методы задачи Римана [5, 6] и конечно-зонного интегрирования [5, 8, 19], метод преобразований Дарбу [20] и разнообразные методы теоретико-группового и алгебро-геометрического анализа [8, 15, 21]. Ниже мы рассмотрим лишь одну из возможностей распространения методов изучения интегрируемых систем на многомерие, избрав в качестве отправной модели нелинейное уравнение Шрёдингера.

2. Многосолитонные решения нелинейных уравнений типа Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) является одним из фундаментальных уравнений нелинейной математической физики, описывающим эволюцию любой слабо нелинейной, сильно диспергирующей квазимонохроматической волны. В частности, НУШ управляет эволюцией гидродинамических волн в глубоких водах, оптических волн в нелинейных кристаллах и световолокнах, лэнгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах, слабо нелинейных спиновых волн в магнетиках и т.д. По целому ряду причин, часть из которых перечислена в [9, 11, 14], НУШ можно считать выделенным среди интегрируемых моделей. Формально, уже то, что $\psi(x,t)$ в (2.1) является комплексной, а не вещественной (как в КдФ или синус-Гордоне) функцией, выделяет НУШ среди интегрируемых уравнений. С другой стороны, выделенность НУШ связана с квадратичным видом его дисперсии, совпадающим в вакууме с дисперсией свободной нерелятивистской частицы. В то же время для сильно нелинейных состояний, например конденсата, НУШ дает правильное (впервые полученное Н.Н. Боголюбовым) выражение для линейных возбуждений. Одним из наиболее привлекательных свойств НУШ является возможность на его основе описывать эволюцию огибающей волнового пакета несущих волн в среде с квадратичной дисперсией. Таким образом, НУШ позволяет реабилитировать идею Л. де Бройля о представлении частиц в виде волновых пакетов, которую не удалось реализовать в линейных теориях, где в силу дисперсии такие пакеты расплываются.

2.1. Нелинейные уравнения Шрёдингера и солитоны огибающей

Как правило, НУШ возникают при описании нелинейных явлений в различных физических ситуациях, где допустимыми оказываются решения в виде гармонических волновых пакетов вида

$$\psi(x,t) = A\exp[\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)], \tag{2.1.1}$$

с достаточно малой амплитудой A. Нелинейность среды приводит к обратному воздействию на амплитуду в (2.1.1), в результате огибающая волны медленно (по сравнению с несущей волной) изменяется как в пространстве, так и во времени, т.е. модулирует быструю (высокочастотную) несущую волну. Ключевая идея вывода НУШ состоит в отыскании слабо нелинейных разложений дисперсионных соотношений[4], которые, в отличие от чисто линейного случая, могут учитывать зависимость от амплитуды. Обычно останавливаются на двух различных постановках задачи:

$$\omega = \omega(k;|A|^2), \quad k\in\mathbf{R}, \quad \text{начальная задача}, \tag{2.1.2а}$$

или

$$k = k(\omega;|A|^2), \quad \omega\in\mathbf{R}, \quad \text{краевая задача}. \tag{2.1.2б}$$

Разлагая (2.1.2) в ряд Тейлора в окрестности некоторых ω_0, k_0, имеем

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_0 (k-k_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_0 (k-k_0)^2 + {} \\ + \frac{\partial\omega}{\partial|A|^2}\Big|_0 |A|^2 + \ldots,$$

или

$$k = k_0 + \frac{\partial k}{\partial\omega}\Big|_0 (\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\Big|_0 (\omega-\omega_0)^2 + {} \\ + \frac{\partial k}{\partial|A|^2}\Big|_0 |A|^2 + \ldots$$

В пространстве фурье-образов для волн (2.1.1) разложение представимо в операторном виде в силу соотношений

$$\omega-\omega_0 \to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}, \\ k-k_0 \to -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}, \\ (k-k_0)^2 \to -\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

т.е. в виде оператора НУШ, действующего на амплитуду A:

$$\left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - {} \right. \\ \left. - \frac{\partial\omega}{\partial|A|^2}\Big|_0 |A|^2\right] A = 0 \tag{2.1.3а}$$

или

$$\left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial\omega}\Big|_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\Big|_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + {} \right. \\ \left. + \frac{\partial k}{\partial|A|^2}\Big|_0 |A|^2\right] A = 0. \tag{2.1.3б}$$

Уравнение (2.1.3а) описывает эволюцию во времени огибающей узкого пакета несущих волн с действитель-

[4]Физически это соответствует тому, что, например, показатель преломления среды в нелинейной оптике или диэлектрическая проницаемость плазмы могут быть представлены как полиномиальные функции напряженности электрического поля.

ными k, а приведенный примитивный способ его вывода находит обобщение в *методе многомасштабных* (*двухвременных*) *разложений*, где наряду с "быстрыми" переменными x, t для несущей волны, вводится набор "медленных" переменных $X_n = \epsilon^n x, T_n = \epsilon^n t$ ($\epsilon \ll 1$) для описания движений огибающей (см. подробное изложение метода многомасштабных разложений и ссылки в [11], гл. 8). Уравнение (2.1.3б) описывает распространение в пространстве (к примеру, в волноводе) узкого пакета волн с заданной несущей частотой $\omega = \omega_0 \in \mathbf{R}$.

Уравнения типа (2.1), (2.1.3), называемые также *скалярными нелинейными уравнениями Шрёдингера*, представляют собой простейшие математические модели для описания слабо нелинейных высокочастотных волновых пакетов, в частности модель самовзаимодействующих спиновых волн (магнонов) в ферромагнетике, возбуждений в молекулярных кристаллах, лэнгмюровских волн в плазме, парных взаимодействий точечных частиц бозе-газа при нулевой температуре и т.д. Детальный вывод НУШ и описание перечисленных моделей можно найти в [11, 14].

Естественным обобщением (2.1) является система, описывающая взаимодействие высокочастотных волновых пакетов $\psi(x,t)$ с волнами низкой частоты $U(x,t)$. В таких ситуациях комплексная функция $\psi(x,t)$ подчиняется, как и ранее, скалярному НУШ

$$\mathrm{i}\partial_t\psi + \partial_x^2\psi + U\psi + g|\psi|^2\psi = 0, \tag{2.1.4}$$

содержащему в качестве потенциала волну низкой частоты $U(x,t)$, описываемую одним из следующих уравнений самосогласованности:

$$\Box U = -\partial_x^2(|\psi|^2) \quad \text{(Захаров, 1972)}, \tag{2.1.4а}$$

$$\partial_t U + \partial_x(U - |\psi|^2) = 0$$

$$\text{(Яджима—Ойкава, 1976)}, \tag{2.1.4}$$

$$(\partial_t + \alpha\partial_x^3)U + \partial_x(\beta U^2 - |\psi|^2 + U) = 0$$

$$\text{(Нишикава и др., 1974)}, \tag{2.1.4}$$

$$(\Box + \alpha\partial_x^4)U + \partial_x^2(\beta U^2 + |\psi|^2) = 0$$

$$\text{(Маханьков, 1974)}. \tag{2.1.4}$$

Среди перечисленных систем в двух случаях (2.1.4а,б) уравнения для низкочастотных возбуждений линейны, но лишь второе из них оказывается интегрируемым (при $g = 0$). Оставшиеся два уравнения нелинейны. Интегрируемость (2.1.4г) при подходящем выборе параметров α и β была установлена И.М. Кричевером [22]; в свою очередь, неинтегрируемость системы для (2.1.4в) доказана Е.С. Бениловым и С.П. Бурцевым [23]. Системы (2.1.4а—г) при $g = 0$ встречаются в физике плазмы, где на их основе описывается взаимодействие лэнгмюровских и ионно-звуковых волн. В общем случае при $g \neq 0$ они возникают при описании взаимодействия спиновых волн с фононами в ферромагнетиках [24], взаимодействия экситонов с фононами в молекулярных кристаллах [25] и т.д.

Другое естественное обобщение НУШ (2.1) связано с переходом к его векторному варианту по схеме $\psi \to (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^{\mathrm{tr}}$ с одновременной заменой $|\psi|^2$ в (2.1) на скалярное произведение

$$(\psi, \psi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\overline{\psi}_i\psi_j,$$

где g_{ij} — метрический тензор некоторого пространства внутренней симметрии исследуемой модели [37]. Накладывая условие эрмитовости на гамильтониан системы, приходим к некомпактным группам внутренней симметрии $U(p,q)$. Физические модели такого типа используются для описания динамики газа из бозонов с внутренними квазиспиновыми (или "цветными") степенями свободы или смеси бозе-газов (феноменология сверхпроводимости при $T \neq 0$), а также при описании распространения в плазме плоских волн высокой частоты с круговой поляризацией и спиновых волн в многослойных ферромагнетиках (см. подробности и ссылки в [14], гл.2). Интегрируемость некоторых систем с векторным НУШ была установлена в работах [26, 35]. Наконец, комбинируя приведенные обобщения, получают векторное НУШ

$$\mathrm{i}\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + U\psi + g(\psi\psi)\psi = 0 \tag{2.1.5}$$

с самосопряженным потенциалом (низкочастотной модой), подчиняющимся, например, одному из уравнений (2.1.4 а—г).

Целый ряд приложений связан с так называемым деривативным НУШ (т.е. НУШ с потенциалом, включающим производную)

$$\Big(-\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 + \mathrm{i}U(x,t)\partial_x\Big)\psi(x,t,k) = 0, \tag{2.1.6}$$

вызвавшим повышенный интерес в связи с изучением $(2+1)$-мерных систем типа модифицированного уравнения Кадомцева—Петвиашвили и уравнения Ишимори [27].

Примечательным оказывается тот факт, что для всех вышеперечисленных вариантов НУШ существует универсальный алгебраический метод построения точных солитонных решений, впервые предложенный в [12] (см. также [14], гл. 8).

2.2. Алгебраический метод построения точных солитонных решений для уравнений типа Шрёдингера ($D = 1$)

По сути излагаемый метод является частным случаем общей алгебро-геометрической схемы *конечно-зонного интегрирования*, описанной в [5]. В отличие от стандартного метода обратной задачи, где для каждого исследуемого уравнения, как правило, возникает собственная вспомогательная линейная спектральная задача, в предложенной конструкции универсальную вспомогательную роль играет линейное уравнение Шрёдингера с потенциалом $U(x,t)$, зависящим от времени:

$$\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 + U(x,t)\psi(x,t,k) = 0. \tag{2.2.1}$$

Заметим также, что излагаемый метод эффективно работает и в тех случаях, где метод обратной задачи оказывается неконструктивным. В частности, это имеет место для моделей бозе-газов с некомпактными группами внутренних симметрий, для изотропной модели

Ландау—Лифшица с группой $SU(1,1)$, для нелинейных σ-моделей и в других случаях (см. [14], ч. III). В дальнейшем изложении выделяются два уровня рассмотрения проблемы — линейный и нелинейный.

На *линейном уровне* по заданным спектральным данным (СД) мы находим специальный класс локализованных безотражательных (баргмановских) потенциалов $U(x,t)$ и соответствующих волновых функций $\psi(x,t,k)$. Спектральные данные состоят из набора комплексных чисел κ_i, $i=\overline{1,N}$, и некоторой постоянной комплексной $N\times N$-матрицы c_{ij}, т.е. фактически дают решение некоторой специфической обратной задачи. Далее выводятся условия на κ_i и c_{ij}, обеспечивающие действительность и регулярность как потенциалов $U(x,t)$, так и соответствующих волновых функций $\psi(x,t,k)$. Обсуждается вырожденность решений по отношению к набору СД и приводятся выражения для волновых функций в виде полиномов и рациональных функций. Изучение асимптотического поведения решений позволяет находить явный вид структурных элементов ("кирпичиков"), из которых конструируются искомые потенциалы и волновые функции.

На *нелинейном уровне* находятся условия *самосогласованности*, связывающие потенциалы с волновыми функциями и их вычетами. При этом существенным оказывается выбор граничных условий, накладываемых на нелинейные поля, которые в свою очередь выражаются в виде прямой суммы найденных ранее структурных элементов.

2.2.1. *Линейный уровень*

Потенциал $U(x,t)$ нестационарного уравнения Шрёдингера принято называть *интегрируемым* (связанным с рациональной алгебраической кривой) в том случае, если уравнение (2.2.1) допускает решение в виде *плосковолнового анзаца*:

$$\psi(x,t,k)=P_N(x,t,k)\exp[\mathrm{i}k(x+kt)]\equiv \equiv\big(k^N+a_{N-1}(x,t)k^{N-1}+\ldots \ldots+a_0(x,t)\big)\exp[\mathrm{i}k(x+kt)]. \tag{2.2.2}$$

В качестве свободных параметров конструкции введем комплексные числа $\kappa_1,\ldots,\kappa_M$ с нетривиальной мнимой частью и некоторую матрицу коэффициентов α_{ij}, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$. Для любого набора введенных параметров можно однозначно определить функцию $\psi(x,t,k)$ вида (2.2.2) посредством наложения системы линейных условий

$$\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}\psi(x,t,k)\Big|_{k=\kappa_j}=0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{2.2.3}$$

Условия (2.2.3), представляющие собой систему N линейных однородных алгебраических уравнений, разрешимы, если соответствующая матрица коэффициентов $A(x,t)=[\alpha_{ij}]$ будет невырожденной, т.е. если $\operatorname{rank}[\alpha_{ij}]=N$. Поиск потенциала $U(x,t)$ основывается на доказанной в [12] теореме:

Теорема 2.1. *Если матрица $A(x,t)$ системы* (2.2.3) *несингулярно тождественна (по x,t), то функция $\psi(x,t,k)$ вида* (2.2.2) *при условии* (2.2.3) *удовлетворяет уравнению* (2.2.1) *с потенциалом*

$$U(x,t)=2\mathrm{i}\partial_x a_{N-1}(x,t)=2\partial_x^2\ln\det A(x,t). \tag{2.2.4}$$

В общем случае потенциалы $U(x,t)$, соответствующие произвольным наборам параметров κ_i и $[\alpha_{ij}]$, будут комплексными мероморфными функциями от (x,t). Для получения вещественных и регулярных потенциалов, как функций от действительных переменных x,t, необходимо наложить некоторые ограничения на выбор параметров. Положим $M=2N$ и будем считать возможным разделение множества параметров $\kappa_1,\ldots,\kappa_{2N}$ на комплексно сопряженные пары типа $\kappa_{N+i}=\bar\kappa_i$, $i=\overline{1,N}$. Без потери общности можно считать, что минор матрицы $[b_{ij}]\equiv[\alpha^c_{ij}]$, состоящей из столбцов с номерами $j=N+1,\ldots,2N$, будет несингулярным (в самом общем случае такой минор можно привести к единичной матрице). Тогда условия (2.2.3) приобретают вид

$$\psi(\bar\kappa_i)=-\sum_{j=1}^{N}b_{ij}\psi(\kappa_j),\quad i=\overline{1,N}, \tag{2.2.5}$$

где b_{ij} — постоянная $N\times N$-матрица. Анзац (2.2.2) задает *полиномиальное представление* волновой функции НУШ (2.2.1) и в совокупности с условием (2.2.5) его можно рассматривать как некоторое обобщение функции Бейкера—Ахиезера [5].

Допустимо и другое *рациональное, или полюсное, представление* волновой функции уравнения (2.2.1) в виде

$$\Psi(x,t,k)=\frac{\psi(x,t,k)}{\prod_{i=1}^{N}(k-\kappa_i)}\equiv \equiv\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{r_j(x,t)}{k-\kappa_j}\right)\exp[\mathrm{i}k(x+kt)]. \tag{2.2.6}$$

В этом случае условие (2.2.5) переписывается как

$$\Psi(x,t,\bar\kappa_i)=-\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\Psi_j(x,t), \tag{2.2.7}$$

где обозначено

$$\Psi_j(x,t)=\operatorname{res}_{k=\kappa_j}\Psi(x,t,k)=\lim_{k\to\kappa_j}[(k-\kappa_j)\Psi(x,t,k)] \tag{2.2.8}$$

и введена матрица

$$c_{ij}=b_{ij}\frac{R'(\kappa_j)}{R(\bar\kappa_j)},\quad R'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}R(k), \tag{2.2.9}$$

посредством функции

$$R(k)=\prod_{j=1}^{N}(k-\kappa_j).$$

Теорема 2.2. *Для того чтобы потенциал $U(x,t)$ НУШ* (2.2.1) *выражался вещественной несингулярной функцией действительных переменных x,t, достаточно выполнения следующих условий*: 1) *матрица c_{ij} в* (2.2.9) *должна быть антиэрмитовой*: $[c_{ij}]=-[c_{ij}]^\dagger$; 2) *в предположении, что для параметров κ_i выполнены условия:* $\operatorname{Im}\kappa_i>0$ *при $i=\overline{1,p}$ и* $\operatorname{Im}\kappa_j<0$ *при $j=\overline{p+1,N}$, эрмитова матрица $\mathrm{i}^{-1}[c_{ij}]$ для $i,j=\overline{1,p}$ должна быть положительно определенной, в то время как $\mathrm{i}^{-1}[c_{ij}]$ для $i,j=\overline{p+1,N}$ должна быть отрицательно определенной матрицей.*

Доказательство этого утверждения дано в работе [12]. Практически в условиях теоремы 2.2 содержатся первые существенные ограничения на расположение полюсов κ_i искомой функции, связанные с видом матрицы c_{ij} из (2.2.9).

Перечислим теперь некоторые свойства полученных решений.

1. В ы р о ж д е н н о с т ь. В полиномиальном представлении (2.2.2) как волновая функция $\psi(x,t,k)$, так и потенциал $U(x,t)$ являются 2^N-кратно вырожденными в отношении наборов СД. В то же время в полюсном представлении (2.2.6) лишь потенциал $U(x,t)$ оказывается 2^N-кратно вырожденным, т.е. для 2^N различных наборов СД получаем один и тот же потенциал $U(x,t)$.

Укажем явный вид преобразований между различными наборами СД. Представим для этого матрицу b_{ij} в блочной форме:

$$[b_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha_+ & \beta \\ \gamma & \alpha_- \end{pmatrix}, \qquad (2.2.10)$$

где квадратные матрицы α_+ и α_- будут, соответственно, $p\times p$- и $(N-p)\times(N-p)$-матрицами (напомним, что $\operatorname{Im}\kappa_i > 0$ при $i=\overline{1,p}$ и $\operatorname{Im}\kappa_j<0$ при $j=\overline{p+1,N}$) и $\det\alpha_-\neq 0$. Тогда преобразования перехода от одного набора СД к другому $\{\kappa_i, b_{ij}\}\Longrightarrow\{\kappa'_i, b'_{ij}\}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \kappa'_i &= \kappa_i \quad \text{при} \quad i=\overline{1,p}, \\ &= \bar\kappa_i \quad \text{при} \quad i=\overline{p+1,N}, \end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

и

$$[b'_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha_+ - \beta\alpha_-^{-1}\gamma & -\beta\alpha_-^{-1} \\ \alpha_-^{-1}\gamma & \alpha_-^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.12)$$

2. А с и м п т о т и ч е с к о е п о в е д е н и е. Будем рассматривать асимптотическое поведение решений по x и t при различных N.

а) В простейшем случае при $N=1$, $\kappa=\alpha+\mathrm{i}\beta$ потенциал $U(x,t)$ принимает солитоноподобное выражение (см. подробнее [14], гл. 8):

$$U(x,t) = -2\beta^2\cosh^{-2}[\beta(x-x_0+2\alpha t)], \qquad (2.2.13)$$

в то время как волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi = &\left[1+\frac{\mathrm{i}\beta}{k-\kappa}\left\{1+\tanh[\beta(x-x_0+2\alpha t)]\right\}\right]\times \\ &\times \exp[\mathrm{i}k(x+kt)], \end{aligned} \qquad (2.2.14)$$

где принято, что

$$2\mathrm{i}\beta c = -\mathrm{e}^{2\beta x_0}.$$

При $N>1$ для всех κ_i, для которых $\operatorname{Im}\kappa_i>0$ и $\operatorname{Re}\kappa_i\neq\operatorname{Re}\kappa_j$ при $i\neq j$, соответствующий потенциал асимптотически распадается на прямую сумму потенциалов (2.2.13). Следовательно, потенциалы при $N=1$ можно рассматривать как простейшие конструктивные элементы более сложных потенциалов для $N>1$. В дальнейшем такие элементы будем называть *кирпичиками*[5].

б) Другим типом фундаментальных конструктивных элементов, из которых строятся потенциалы НУШ для более сложных систем, являются *бризеры*, или струнные решения, возникающие при $N>1$, $\operatorname{Re}\kappa_i = \operatorname{Re}\kappa_j$, как периодические или квазипериодические по времени решения [29].

в) Рассмотрим еще один тип конструктивных элементов для потенциалов НУШ, называемый *бионами*. Этот тип решений определяется матрицами $[c_{ij}]$ антидиагонального вида; например, для $N=2$ имеем

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -\bar c & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.2.15)$$

Волновая функция для рассматриваемого случая приведена в [33, 36]:

$$\begin{aligned} \Psi = &\left[1+\frac{c_3\cos(q\xi+\Omega t+\theta_3)+c_4\mathrm{e}^{\beta\xi}}{c_2\cosh(\beta\xi+\theta_2)+c_1\cos(q\xi+\Omega t+\theta_1)}\right]\times \\ &\times\exp[\mathrm{i}k(\xi+k't)], \end{aligned} \qquad (2.2.16)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} &c_1 = -\left|\frac{c}{\tilde\kappa_{12}}\right|, \quad \mathrm{e}^{\theta_2} = \left|\frac{\tilde\kappa_{12}}{c\kappa_{12}}\right|\left(\frac{1}{\tilde\kappa_{11}\tilde\kappa_{22}}\right)^{1/2}, \\ &c_2 = \left|\frac{c\kappa_{12}}{\tilde\kappa_{12}}\right|\left(\frac{1}{\tilde\kappa_{11}\tilde\kappa_{22}}\right)^{1/2}, \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_1} = \frac{c\tilde\kappa_{12}}{\bar c\bar{\tilde\kappa}_{12}}, \\ &c_3 = -|c|\left[-\frac{1}{(k-\kappa_1)(k-\kappa_2)}\right]^{1/2}, \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_3} = -\frac{c(k-\kappa_2)}{\bar c(k-\kappa_1)}, \\ &c_4 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\bar\kappa_{21}}{(k-\kappa_1)\tilde\kappa_{12}\tilde\kappa_{22}}+\frac{\bar\kappa_{12}}{(k-\kappa_2)\tilde\kappa_{21}\tilde\kappa_{11}}\right]. \end{aligned}$$

Решение (2.2.16) задается следующими параметрами:

$$\begin{aligned} &\kappa_j = \alpha_j+\mathrm{i}\beta_j, \quad q=\alpha_2-\alpha_1, \quad \Omega=\omega-qv, \\ &k' = k-v, \quad \beta=\beta_1+\beta_2, \quad \xi = x+vt, \\ &\omega = \alpha_2^2-\alpha_1^2+\beta_1^2-\beta_2^2, \quad v = 2\,\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\beta_1+\beta_2}, \\ &\tilde\kappa_{ij} = \bar\kappa_i-\kappa_j, \quad \kappa_{ij}=\kappa_i-\kappa_j. \end{aligned}$$

Здесь α_i можно интерпретировать как скорости составных элементов биона, а β_i — как их "массы".

Заметим, что бионные решения (2.2.16), так же как и бризеры, составлены из двух элементарных "кирпичиков", и оба типа решения являются периодическими (или квазипериодическими) во времени функциями. Вместе с тем эти решения имеют существенно разную природу с точки зрения их физической интерпретации, что и будет явно показано на нелинейном уровне рассмотрения. Здесь лишь отметим, что бризеры можно легко разбить на составные части, тогда как для бионов такой процесс невозможен. Составные компоненты бионов ведут себя, в этом смысле, подобно кваркам в мезоне. На этом основании можно говорить о наличии трех различных типов структурных элементов: "кирпичиков", бризеров и бионов[6], и асимптотически потенциалы НУШ представлять в следующей символической форме:

$$\begin{aligned} U(x,t)_{t\to\infty} = &\sum \text{"кирпичики"} + \sum \text{бризеры} + \\ &+\sum \text{бионы} + \ldots \end{aligned}$$

[5] В англоязычной литературе эти элементы называют иногда "soli-bricks".

[6] При этом не отрицается возможность существования и иных структурных единиц.

Приведенную схему можно использовать для построения солитоноподобных решений (2 + 1)-мерных уравнений Кадомцева—Петвиашвили (КП) и уравнения Дейви—Стюартсона (ДС-I). Как известно, в [31, 32] попытки отыскания таких решений привели к обнаружению *дромионов*. Изложенная выше схема была применена к уравнению ДС-I в работе [33]. В этом смысле приведенную схему можно рассматривать как конструктивный элемент для построения солитонных решений $(2+1)$-мерных моделей КП и ДС-I. Она также легко обобщается на случай релятивистских моделей дираковского типа, в частности Вакса—Ларкина и Тирринга [41]. Рассмотрим теперь модификацию предложенной схемы для исследования деривативного НУШ (ДНУШ) (2.1.6).

а) *Решения деривативного НУШ*. Ниже мы, в основном, следуем работам [33, 39]. Будем рассматривать уравнение (2.1.6) с произвольным знаком перед потенциалом, т.е.

$$\big(-\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 \pm \mathrm{i}U(x,t)\partial_x\big)\psi(x,t,k) = 0. \tag{2.2.17}$$

Соответственно, плосковолновой анзац выбираем в несколько отличном от (2.2.2) виде

$$\psi(x,t,k) = Q_N(x,t,k)\exp\left[\mathrm{i}k(x+kt)\right], \tag{2.2.18}$$

где

$$\begin{aligned} Q_N = a_N(x,t)k^N + a_{N-1}(x,t)k^{N-1} + \ldots \\ \ldots + a_1(x,t)k + 1. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Доопределяя, как и ранее, положение N полюсов κ_i на комплексной плоскости, а также комплексную $N\times N$-матрицу b_{ij}, нетрудно убедиться в справедливости теоремы 2.1 с той лишь разницей, что теперь

$$U(x,t) = 2\mathrm{i}\partial_x \ln a_N(x,t). \tag{2.2.20}$$

Полюсное представление волновой функции запишем в виде

$$\hat{\Psi}(x,t,k) = \left(a_N + \sum_{j=1}^{N}\frac{\hat{r}_j(x,t)}{k-\kappa_j}\right)\exp[\mathrm{i}k(x+kt)] \equiv$$

$$\equiv \frac{\psi(x,t;k)}{\prod_{j=1}^{N}(k-\kappa_j)}, \tag{2.2.21}$$

так что мы имеем $N+1$ неизвестную функцию $a_0, a_1, \ldots, a_N$ (или a_N и N функций $\hat{r}_j$) и N дополнительных уравнений (2.2.5) (или (2.2.7)).

Т е о р е м а 2.3. *Потенциал* $U(x,t)$ *уравнения* (2.2.17) *является вещественной несингулярной функцией произвольных действительных переменных* x *и* t *при условии* (2.2.26).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим дополнительное условие при $k=0$ как

$$\frac{Q_N(x,t;k=0)}{\prod_{j=1}^{N}\kappa_j} \equiv a_N - \sum_{j=1}^{N}\frac{\hat{r}_j}{\kappa_j} = 1. \tag{2.2.22}$$

Теперь мы имеем полную систему уравнений для $a_N, \hat{r}_j$

$$a_N = 1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\hat{r}_j}{\kappa_j}\,, \tag{2.2.23}$$

$$\Psi(x,t,\bar{\kappa}_i) = -\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Psi_j(x,t). \tag{2.2.24}$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\Omega = \overline{\Psi(\bar{x},t,\bar{k})}\,\Psi(x,t,k)/k \tag{2.2.25}$$

и, применяя к ней *теорему о вычетах*, получим

$$1 - |a_N|^2 - \sum_{i,j}\left(\frac{\bar{c}_{ij}}{\kappa_j} + \frac{c_{ij}}{\bar{\kappa}_j}\right) = 0,$$

откуда при условии

$$c_{ij} + \frac{\bar{\kappa}_j}{\kappa_j}\bar{c}_{ij} = 0, \tag{2.2.26}$$

имеем

$$|a_N|^2 = 1, \tag{2.2.27}$$

что обеспечивает вещественность и несингулярность потенциала $U(x,t)$ для произвольных вещественных x и t. □

Для случая $N=1$ из формулы (2.2.5) находим

$$a = \left(-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1 + b\exp[\mathrm{i}(\theta-\bar{\theta})]}{1 + b(\kappa/\bar{\kappa})\exp[\mathrm{i}(\theta-\bar{\theta})]}. \tag{2.2.28}$$

Потенциал U будет вещественной функцией при условии, что $|a| = \mathrm{const}$, или, вспоминая, что $\kappa = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$, перепишем это условие в эквивалентном виде

$$b\kappa = \overline{b\kappa}, \quad \text{или} \quad b_1\beta + b_2\alpha = 0. \tag{2.2.29}$$

Дифференцируя (2.2.28) с учетом (2.2.29), находим

$$U = \frac{8\beta^2\,\mathrm{sgn}\,b_2}{2\beta\cosh\eta - \alpha[2-(\alpha/\beta)\mathrm{e}^{-2\eta}]}, \quad |b_2| = \mathrm{e}^{-2\beta x_0} \tag{2.2.30}$$

или для $b_1, \alpha \neq 0$

$$U = \frac{8|\alpha|\beta^2\,\mathrm{sgn}\,\alpha}{4\alpha^2\cosh^2\eta + \beta^2\mathrm{e}^{-2\eta}}, \quad b_1 = \mathrm{e}^{-2\beta x_0} > 0, \tag{2.2.31а}$$

$$U = -\frac{8|\alpha|\beta^2\mathrm{sgn}\beta}{4\alpha^2\sinh^2\eta + \beta^2\mathrm{e}^{-2\eta}}, \quad b_1 = -\mathrm{e}^{-2\beta x_0} < 0, \tag{2.2.31б}$$

тогда как для $\alpha = b_1 = 0$

$$U = \frac{4\beta\,\mathrm{sgn}\,b_2}{\cosh 2\beta(x+x_0)}, \quad |b_2| = \mathrm{e}^{-2\beta x_0}, \tag{2.2.31в}$$

где обозначено

$$\eta = \beta(x + 2\alpha t + x_0). \tag{2.2.32}$$

В свою очередь, волновая функция

$$\Psi = \left[1 - \frac{k\{1 + b\exp[-2(\eta - \beta x_0)]\}}{\bar{\kappa}\{1 + \bar{b}\exp[-2(\eta - \beta x_0)]\}}\right]\exp[\mathrm{i}k(x + kt)] \tag{2.2.33}$$

для случая $k = \bar{\kappa}$ принимает вид

$$\Psi = 2\mathrm{i}\frac{{b_1}^{1/2}\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\alpha\cosh\eta + \mathrm{i}\beta\mathrm{e}^{-\eta}}, \quad \theta = \mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}(\alpha^2 - \beta^2)t. \tag{2.2.34}$$

Аналогичное выражение (с точностью до постоянного множителя) получается и для случая $k = \kappa$. Заметим, что выражение (2.2.33), зависящее от пяти действительных параметров $(\alpha, \beta, b_1, k_1, k_2)$, представляет собой общую формулу для волновой функции деривативного НУШ при произвольном комплексном числе k.

б) *Решения уравнения Ишимори*-II. Полученные решения ДНУШ позволяют, в частности, находить солитоны в (2 + 1)-мерной модели Ишимори-II, описанной в [27], с уравнениями вида

$$\partial_t\mathbf{S}(x, y, t) + \mathbf{S}\wedge(\partial_x^2\mathbf{S} + \partial_y^2\mathbf{S}) + \partial_x\phi\cdot\partial_y\mathbf{S} + \\ + \partial_y\phi\cdot\partial_x\mathbf{S} = 0, \tag{2.2.35а}$$

$$\partial_x^2\phi - \partial_y^2\phi + 2\mathbf{S}(\partial_x\mathbf{S}\wedge\partial_y^2\mathbf{S}) = 0, \tag{2.2.35б}$$

где $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ — вектор единичной длины $\mathbf{S}^2 = 1$ и $\phi(x, t)$ — действительная функция. Переходя к конусным переменным $\xi = (1/2)(x + y)$, $\eta = (1/2)(x - y)$, решение системы (2.2.35) можно свести, следуя работам [34], к решению линейной системы уравнений

$$\mathrm{i}\partial_t X(\xi, t) + \frac{1}{2}\partial_\xi^2 X + \mathrm{i}U_2(\xi, t)\partial_\xi X = 0, \tag{2.2.36а}$$

$$\mathrm{i}\partial_t Y(\eta, t) + \frac{1}{2}\partial_\eta^2 Y - \mathrm{i}U_1(\eta, t)\partial_\eta Y = 0 \tag{2.2.36б}$$

с действительными потенциалами $U_i = \bar{U}_i$. Решения типа (2.2.33), относящиеся к вырожденным (факторизованным) СД, в соответствии с результатами [34] выписываются следующим образом:

$$S_x + \mathrm{i}S_y \equiv S_+ = \frac{2XY}{|1 - AB|^2}(1 + \bar{A}B), \tag{2.2.37а}$$

$$S_- = \bar{S}_+,$$

$$S_3 = -\left[1 + 2\frac{(A + \bar{A})(B + \bar{B})}{|1 - AB|^2}\right], \tag{2.2.37б}$$

$$\phi(\xi, \eta, t) = 2\Big(\mathrm{i}\ln\det\triangle + \partial_\xi^{-1}U_2(\xi, t) + \partial_\eta^{-1}U_1(\eta, t)\Big), \tag{2.2.37в}$$

где использованы обозначения

$$A = \int_{-\infty}^{\eta}\mathrm{d}y\,\bar{Y}(y, t)\partial_y Y(y, t), \tag{2.2.38а}$$

$$B = -\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{d}x\,X(x, t)\partial_x\bar{X}(x, t), \tag{2.2.38б}$$

$$\triangle = \frac{1 - \bar{A}B}{1 + AB}. \tag{2.2.38в}$$

Из системы (2.2.36) легко находим, что

$$Y(y, t) = \bar{X}(y, -t).$$

Рассматривая далее случай $b_1 > 0$, $k = \kappa$, приходим к решениям

$$X(x, t) = \frac{\exp\{\mathrm{i}[\alpha_1 x + (\beta_1^2 - \alpha_1^2)]\}}{2\alpha_1\cosh z_1 + \mathrm{i}\beta_1\mathrm{e}^{-z_1}}, \tag{2.2.39а}$$

$$z_1 = \beta_1(x - 2\alpha_1 t + x_0),$$

$$Y(y, t) = \bar{X}(y, -t) = \frac{\exp\{-\mathrm{i}[\alpha_2 y - (\beta_2^2 - \alpha_2^2)]\}}{2\alpha_2\cosh z_2 - \mathrm{i}\beta_2\mathrm{e}^{-z_2}}, \tag{2.2.39б}$$

$$z_2 = \beta_2(y + 2\alpha_2 t + y_0)$$

и соответственно к выражениям

$$A = \frac{1}{2}\frac{1 - \mathrm{i}(\alpha_2/\beta_2)(1 + \mathrm{e}^{2z_2})}{4\alpha_2^2\cosh^2 z_2 + \beta_2^2\mathrm{e}^{-2z_2}}, \tag{2.2.40а}$$

$$B = -\frac{1}{2}\frac{1 - \mathrm{i}(\alpha_1/\beta_1)(1 + \mathrm{e}^{2z_1})}{4\alpha_1^2\cosh^2 z_1 + \beta_1^2\mathrm{e}^{-2z_1}}. \tag{2.2.40б}$$

Решения (2.2.37) — (2.2.40) описывают солитон, движущийся со скоростью $\upsilon = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$. Понятно, что для получения решений, соответствующих покоящемуся солитону, достаточно перейти в движущуюся систему отсчета. Заметим, что получение двухсолитонных решений на основе (2.2.26) и (2.2.27) не представляет особого труда. В частности, выражение для Ψ будет лишь слегка модифицированным выражением (2.2.16).

2.2.2. *Нелинейный уровень*

Рассмотрим теперь полученные результаты в свете работы [12], где подчеркивалась основная проблема предложенного алгебраического метода построения солитонных решений. Эта проблема заключается в отыскании связи между потенциалом $U(x, t)$ и волновой функцией $\psi(x, t, k)$ (либо ее вычетами $\Psi_i(x, t)$). Поскольку при построении решений мы имеем дело с мероморфными функциями, то представляется естественным использование для решения указанной проблемы теоремы о вычетах. Из этих соображений удается указать вид рациональной функции $E(k)$, использование которой позволяет находить условия самосогласованности путем вычисления вычетов некоторой вспомогательной функции

$$\Omega = E(k)\overline{\psi(x, t, \bar{k})}\psi(x, t, k). \tag{2.2.41}$$

В частности, выбирая $E(k)$ в виде полиномов

$$1)\ E_1 = k,$$
$$2)\ E_2 = k^2 + ak,$$
$$3)\ E_3 = k^3 + 2bk^2 + 2dk, \tag{2.2.42}$$

приходим к соотношениям между потенциалом $U(x, t)$ и волновой функцией $\psi(x, t, k)$:

$$1)\ U = -2F(x, t),$$
$$2)\ \partial_t U + a\partial_x U = 2\partial_x F(x, t),$$
$$3)\ \left(\partial_t^2 - \frac{1}{3}\partial_x^4\right)U + 2\partial_x^2 U^2 + \frac{8}{3}(b\partial_{xt}^2 + d\partial_x^2)U = -\frac{8}{3}\partial_x^2 F(x, t), \tag{2.2.43}$$

где через $F(x, t)$ обозначена квадратичная форма

$$F(x, t) = \sum_{i,j=1}^{N} \bar{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j \tag{2.2.44}$$

с эрмитовой матрицей

$$E_{ij} = \big(E(\bar{\kappa}_j) - E(\kappa_j)\big)c_{ij}. \tag{2.2.45}$$

Матрица (2.2.45) и набор полюсов κ_i полностью определяют решения линейного уравнения

$$\big(\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 + U(x, t)\big)\Psi_i(x, t) = 0 \tag{2.2.46}$$

с соответствующим условием самосогласованности из (2.2.43). Нелинейными полевыми переменными в уравнении (2.2.46) являются вычеты Ψ_i волновых функций $\psi(x, t, k)$ с "правильным" асимптотическим поведением на пространственной бесконечности $x \to \pm\infty$ для некоторых наборов СД (см. теорему 2.2). В таких случаях

$$\Psi_i(x \to \pm\infty) \to 0, \tag{2.2.47}$$

и мы приходим к нелинейным задачам с *тривиальными граничными условиями* (ТГУ). Для других наборов СД вычеты Ψ_i выражаются функциями неограниченного (бесконечного) роста и не представляют интереса в приложении к физическим задачам (во всяком случае, для однородных систем).

Для того чтобы в предложенном подходе можно было рассматривать и задачи с нетривиальными, или, как их еще называют, *конденсатными граничными условиями* (КГУ),

$$|\Phi_i(t, x \to \pm\infty)| \to \mathrm{const}, \tag{2.2.48}$$

следует вместо функций (2.2.42) рассматривать функции $E = \tilde{E}$ вида

$$\tilde{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i b_i^2}{k - k_i} + E_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.2.49}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, b_i и k_i — произвольные действительные константы. Вычисляя вычеты функции Ω, определенной в (2.2.41), получаем вновь условия (2.2.43), где теперь вместо $F(x, t)$ будем иметь

$$\tilde{F}(x, t) = \sum_{i,j=1}^{N} \bar{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j + \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m(|\Phi_m|^2 - b_m^2) \tag{2.2.50}$$

с нелинейными полями

$$\Phi_i(x, t) = b_i \psi(x, t, k = k_i), \tag{2.2.51}$$

представляющими собой волновые функции в фиксированных точках $k = k_i$. Исследование асимптотического поведения при $x \to \pm\infty$ показывает, что $\psi(t, k_i x \to \pm\infty) = 1$, следствием чего являются КГУ (2.2.48) для нелинейных полей $\Phi_i(x, t)$.

В общем случае можно рассмотреть $(n + m)$-компонентное векторное поле

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \ldots \\ \Psi_n \\ \Phi_1 \\ \ldots \\ \Phi_m \end{pmatrix}, \tag{2.2.52}$$

удовлетворяющее уравнению

$$\big(\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 + U(x, t)\big)\varphi(x, t) = 0 \tag{2.2.53}$$

с условиями самосогласованности вида (2.2.43) и (2.2.50). Понятно, что в случае чисто конденсатных полей квадратичная форма $F(x, t) = \sum_{i,j}^{N} \bar{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j$ должна быть равна нулю для любого нетривиального "кирпичика" Ψ_i. Данное обстоятельство накладывает *дополнительные* (*нелинейные*) *ограничения* на выбор СД, а точнее, на расположение полюсов. Проиллюстрируем это на примере скалярного НУШ [40]

$$\big[\mathrm{i}\partial_t + \partial_x^2 + \varepsilon(|\Phi|^2 - b^2)\big]\Phi(x, t) = 0, \tag{2.2.54}$$

при $N = 1$ и конденсатных граничных условиях (2.2.48). Из формулы (2.2.45) для этого случая находим

$$\tilde{E}(\bar{\kappa}_1) - \tilde{E}(\kappa_1) = 0, \tag{2.2.55}$$

или в более конкретном виде

$$(\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)\left(\varepsilon\frac{b^2}{|\kappa_1 - k_1|^2} - 1\right) = 0. \tag{2.2.56}$$

Из последнего соотношения легко видеть, что уравнение

$$\varepsilon\frac{b^2}{|\kappa_1 - k_1|^2} = 1 \tag{2.2.57}$$

обладает решением для $\varepsilon = 1$, т.е. только для случая НУШ с отталкивающим потенциалом, при этом допустимые полюса будут расположены на окружности $|\kappa_1 - k_1|^2 = b^2$. Для НУШ с притягивающим потенциалом $\varepsilon = -1$ отсутствуют однополюсные конденсатные решения.

В качестве другого примера рассмотрим двухполюсное решение, относящееся к типу бионных (2.2.16). В этом случае вместо (2.2.56) имеем

$$\tilde{E}(\bar{\kappa}_1) - \tilde{E}(\kappa_2) = 0,$$

или

$$(\bar{\kappa}_1 - \kappa_2)\left[\varepsilon\frac{b^2}{(\bar{\kappa}_1 - k_1)(\kappa_2 - k_1)} - 1\right] = 0. \tag{2.2.58}$$

Первое решение $\bar{\kappa}_1 = \kappa_2$ совпадает с хорошо известным бризерным (струнным) решением Захарова—Шабата [29], поэтому сразу переходим ко второму решению

$$\kappa_2 = k_1 + \varepsilon \frac{b^2}{|\kappa_1 - k_1|^2}(\kappa_1 - k_1). \tag{2.2.59}$$

Из формулы (2.2.59) следует, что условие $\operatorname{Im}\kappa_2 \cdot \operatorname{Im}\kappa_1 < 0$, требуемое для несингулярности решения в соответствии с теоремой 2.2, выполняется для $\varepsilon < 0$, т.е. допускается только в рамках НУШ с притягивающим потенциалом.

В итоге приходим к следующему результату:

У т в е р ж д е н и е 2.1. Для системы с конденсатными граничными условиями на плосковолновом анзаце однополюсные (кинковые) решения существуют для взаимодействий отталкивающего типа и отсутствуют в иных случаях. В то же время двухполюсные (бионные) решения возникают в случае НУШ с притягивающим потенциалом как элементарные нелинейные возбуждения, составленные из *ненаблюдаемых* (типа кварков) "кирпичиков". □

Отметим, что рассмотренный выше метод применим также к различным версиям векторного нелинейного уравнения Шрёдингера [12, 26], в том числе с недиагональными потенциалами [37]. Например, следующая простая система:

$$\mathrm{i}\partial_t \phi_i + \partial_x^2 \phi_i + U(x,t)\phi_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.2.60}$$

$$U = \bar{\phi}_1 \phi_2 + \phi_1 \bar{\phi}_2, \tag{2.2.61}$$

обладает решением [40]

$$\phi_i = \frac{A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1} \cosh\Theta_1 + B_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_2} \cosh\Theta_2}{C_1 \cosh\eta^+ + C_2 \cosh\eta^- + C_3 \cos(\vartheta + \omega_0)}, \tag{2.2.62}$$

где введены обозначения

$$\Theta_i = \beta_i(x + \upsilon_i t) + b_i, \qquad \vartheta_i = q_i x + \omega_i t,$$
$$\eta^\pm = \beta^\pm(x + \upsilon^\pm t) + h_i, \qquad i = 1, 2,$$

и наложены ТГУ вида

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}_{x \to \pm\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.63}$$

при этом коэффициенты в (2.2.62) аналогичны тем, что были в (2.2.16). Уравнения типа (2.2.60) с потенциалом (2.2.61) или

$$U_\pm = |\phi_1|^2 \pm |\phi_2|^2$$

встречаются в нелинейной оптике (лазерные пучки в световодах), а также (для $U_-(x,t)$) при феноменологическом описании сверхтекучести при $T \neq 0$. В последнем случае мы имеем систему из двух взаимодействующих компонент — простой и сверхтекучей, причем соотношение их плотностей определяется температурой [38]. Найденные двухполюсные решения соответствуют новому типу локализованных возбуждений в такой системе — двойным вихрям (с топологическим зарядом $Q = 2$ или $Q = 0$).

2.3. Многомерные интегрируемые системы и их связь с нестационарным уравнением типа Шрёдингера

Еще одним качеством нестационарного уравнения Шрёдингера, как было продемонстрировано в работах [42], является возможность построения его многомерных обобщений, допускающих локализованные солитонные решения. Суть предложенного алгоритма построения состоит в рассмотрении линейного уравнения Шрёдингера типа (2.2.1) в $N+1$ измерениях

$$\big(\mathrm{i}\partial_t + \triangle + U(\mathbf{x},t)\big)\psi(\mathbf{x},t) = 0; \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N, \tag{2.3.1}$$

где $\triangle$ — N-мерный оператор Лапласа. Решения ищутся в стандартном виде

$$\psi(\mathbf{x},t) = A(\mathbf{x},t)\exp\big(\mathrm{i}\varphi(\mathbf{x},t)\big), \tag{2.3.2}$$

что приводит к системе уравнений

$$\partial_t A + 2\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}A + A \triangle \varphi = 0, \tag{2.3.3а}$$

$$\triangle A + \Big(U - \partial_t \varphi - \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\Big)A = 0 \tag{2.3.3б}$$

в предположении о вещественности потенциала $U(\mathbf{x},t)$. Замечая, что потенциал $U(\mathbf{x},t)$ не входит в уравнение (2.3.3а), легко обнаружить, что в новых переменных

$$\Phi = \varphi, \qquad R = A/F(w) \tag{2.3.4}$$

произвольная положительно определенная функция $F(w) > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t R + 2\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}R + R \triangle \varphi = 0, \tag{2.3.5а}$$

аналогичному (2.3.3а), если вспомогательная функция $w = w(\mathbf{x},t)$ является решением однородного уравнения 1-го порядка

$$\partial_t w + 2\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}w = 0. \tag{2.3.6}$$

По любому из решений $w = w(\mathbf{x},t)$ уравнения (2.3.6) функция $R(\mathbf{x},t)$ находится из (2.3.4) и уравнения

$$\triangle R + \Big(V - \partial_t \Phi - \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi\Big)R = 0, \tag{2.3.5б}$$

где новый потенциал $V(\mathbf{x},t)$ определен соотношением

$$V = U + \triangle \ln F(w) + \vec{\nabla}\ln F(w) \cdot \vec{\nabla}\ln\big(A^2/F(w)\big). \tag{2.3.7}$$

Из уравнений (2.3.5) следует, что новая комплексная волновая функция

$$\Psi(\mathbf{x},t) = R(\mathbf{x},t)\exp(\mathrm{i}\Phi(\mathbf{x},t))$$

будет удовлетворять уравнению

$$\mathrm{i}\partial_t \Psi(\mathbf{x},t) + \triangle\Psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t) = 0 \tag{2.3.8}$$

с потенциалом (2.3.7).

На следующем шаге алгоритма строится решение уравнения (2.3.6) для вспомогательной функции $w = w(\mathbf{x},t)$. С этой целью вводятся *условия разделения решений* $\psi(\mathbf{x},t)$ уравнения (2.3.1) вида

$$U(\mathbf{x},t) = U_1(x_1,t) + \ldots + U_N(x_N,t), \tag{2.3.9а}$$

$$\psi(\mathbf{x},t) = \psi_1(x_1,t) + \ldots + \psi_N(x_N,t), \tag{2.3.9б}$$

откуда из (2.3.2) следует разделение для фазы и амплитуды волновой функции

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \varphi_1(x_1,t) + \ldots + \varphi_N(x_N,t), \tag{2.3.10а}$$

$$A(\mathbf{x},t) = A_1(x_1,t) \ldots A_N(x_N,t), \tag{2.3.10б}$$

где компоненты связаны соотношениями

$$\psi_n(x_n,t) = A_n(x_n,t)\exp(\mathrm{i}\varphi_n(x_n,t)), \qquad n = \overline{1,N}. \tag{2.3.11}$$

При выполнении указанных условий существует решение уравнения (2.3.6) в факторизованном виде

$$w(\mathbf{x},t) = w_1(x_1,t) \ldots w_N(x_N,t), \tag{2.3.12}$$

каждый сомножитель которого должен удовлетворять $(1+1)$-мерному уравнению

$$\partial_t w_n + 2\partial_{x_n}\varphi_n \partial_{x_n} w_n = 0, \qquad n = \overline{1,N}. \tag{2.3.13}$$

Воспользовавшись выражениями для законов сохранения вида

$$\partial_t A_n^2 + 2\partial_{x_n}(\partial_{x_n}\varphi_n A_n^2) = 0; \qquad n = \overline{1,N}, \tag{2.3.14}$$

легко выписать решения уравнений (2.3.13)

$$w_n(x_n,t) = c_n + \int\limits_{\bar{x}_n}^{x_n} \mathrm{d}\xi A_n^2(\xi,t) - \\ - 2\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, \partial_{x_n}\varphi_n^2(\bar{x}_n,\tau)A_n^2(\bar{x}_n,\tau), \tag{2.3.15}$$

где c_n, $\bar{x}_n$, t_0 — некоторые вещественные константы. Следующее наблюдение состоит в том, что $\partial_{x_n} w_n = A_n^2$, на основании которого из (2.3.12), (2.3.10б) и (2.3.4) выводится уравнение

$$\partial_{x_1 \ldots x_n} w = F^2(w)|\Psi|^2. \tag{2.3.16}$$

Далее, следуя работе [43], можно ввести понятие *АС-интегрируемости* (Almost C-integrability).

Определение 2.1. Нелинейные эволюционные уравнения (или динамические системы) называются *АС-интегрируемыми*, если они обладают бесконечным набором многосолитонных решений, которые могут быть получены путем замены переменных из решений некоторого интегрируемого уравнения.

В частности, к АС-интегрируемым относится известное уравнение Дейви—Стюартсона (ДС-I) [28], описывающее квазимонохроматические волновые пакеты на поверхности жидкости небольшой глубины:

$$\mathrm{i}\partial_t\Psi(\mathbf{x},t) + \triangle\Psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \tag{2.3.17а}$$

$$\partial_{x_1 x_2} V(\mathbf{x},t) = 2\epsilon \triangle |\Psi|^2, \tag{2.3.17б}$$

которое в излагаемой здесь схеме отвечает случаю $N = 2$. Действительно, простой выбор $F(w) = 1 + \epsilon w$ в (2.3.16), с учетом условий разделения (2.3.12) и вида решений (2.3.15) соответствующего уравнения (2.3.16), приводит к выражению для потенциала

$$V = U_1(x_1,t) + U_2(x_2,t) + 2\triangle\ln(1+\epsilon w), \tag{2.3.18}$$

совпадающему с результатом интегрирования уравнения (2.3.17б). Известный результат [30, 31] состоит в том, что солитонные решения для уравнения ДС-I возникают при выборе в качестве $U_1(x_1,t)$ и $U_2(x_2,t)$ в (2.3.18) подходящих потенциалов линейного нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\mathrm{i}\partial_t\psi + \triangle\psi + (U_1(x_1,t) + U_2(x_2,t))\psi = 0, \\ \psi = \psi(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \tag{2.3.19}$$

которое является линейным пределом ДС-I при $\epsilon \to 0$. Отсюда, в частности, следует, что в отличие от $(1+1)$-мерного случая солитоны ДС-I даже в линейном пределе при $\epsilon \to 0$ остаются локализованными объектами, правда, ведущими себя как свободные частицы, а присутствие в уравнении нелинейности при $\epsilon \neq 0$ ведет к включению нетривиального взаимодействия между ними. Детальное описание взаимодействия солитонов ДС-I на основе проведенных численных экспериментов содержится в работе [44].

Завершая изложение схемы Дегаспериса для общего $(N+1)$-мерного случая, выпишем общее выражение для нового потенциала

$$V = U_1 + \ldots + U_N + \triangle\ln F(w) + \\ + \vec{\nabla}\ln F(w)\cdot\vec{\nabla}\ln\big(F(w)|\Psi|^2\big), \tag{2.3.20}$$

при котором система уравнений (2.3.8) и (2.3.16) относительно функций $\Psi(\mathbf{x},t)$ и w будет АС-интегрируемой, поскольку заменой переменных вида

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \frac{\psi(\mathbf{x},t)}{F(w)} \tag{2.3.21}$$

ее решения могут быть получены из решений (2.3.9б) линейного уравнения (2.3.1) с потенциалом (2.3.9а).

Нетрудно видеть, что приведенная схема существенно расширяет возможности построения интегрируемых многомерных моделей, которые могут быть использованы для описания реальных локализованных объектов. Тем не менее на практике чаще приходится сталкиваться с необходимостью изучения моделей, которые возникают из различных физических соображений и которые в основном принадлежат к классу неинтегрируемых.

УСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ В НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ (часть II)

Широкое применение нелинейных уравнений в современной физике выявило важную отличительную черту нелинейных волновых процессов: при сильном возбуждении нелинейной динамической системы в ней могут возникать *устойчивые локализованные структуры — солитоны*. В процессе эволюции системы именно эти структуры, как правило, выживают и определяют главные особенности динамики (см. [13 — 45]).

3. Прямой метод А.М. Ляпунова в теории устойчивости солитонов

Одной из важнейших задач теории солитонов является изучение их устойчивости. Обычно на практике ограничиваются рассмотрением малых возмущений солитонов, т.е. линеаризуют уравнения движения. Однако такой подход не всегда приводит к правильному ответу, как было показано А.М. Ляпуновым [46], разработавшим строгий метод исследования устойчивости — так называемый *прямой метод*. Суть этого метода состоит в подборе некоторых функций, по свойствам которых можно судить о характере эволюции системы. В применении к распределенным (в частности, полевым) системам этот метод развивался в работах [47 — 49]. Известно несколько вариантов применения метода Ляпунова в теории солитонов: *метод функциональных оценок Захарова—Кузнецова* [50], *энергетический метод Арнольда* [51, 52], *метод Шатаха—Штрауса* [53], *метод Бенджамина* [54] и др.

Наша цель состоит в применении метода Ляпунова к исследованию устойчивости солитонов в ряде физических полевых моделей. Мы начнем с анализа понятия устойчивости в общей теории динамических систем, а затем опишем особенности его применения в физике солитонов.

3.1. Определение устойчивости и основные теоремы прямого метода

Устойчивость является одним из практически важных понятий, возникающих при изучении реальных динамических систем. Качественно она связана с требованием непрерывности изучаемого движения системы по отношению к каким-либо ее возмущениям, природа которых может быть неизвестной. В зависимости от типа этих возмущений различают несколько видов устойчивости. Мы будем рассматривать устойчивость в основном многомерных солитонов, т.е. регулярных локализованных в пространстве размерности $D \geq 2$ решений нелинейных уравнений. Пусть $\phi(t, \mathbf{x})$ — многокомпонентная полевая функция со значениями в $\mathbf{R}^n$, рассматриваемая как элемент некоторого банахова пространства B и подчиняющаяся эволюционному уравнению типа

$$\partial_t \phi = \hat{F}(\phi), \tag{3.1.1}$$

где под $\hat{F}$ понимается некоторый нелинейный оператор. Будем предполагать, что при заданных начальных условиях типа $\phi_{t=0} = \phi_0(\mathbf{x})$ уравнение (3.1.1) допускает единственное решение солитонного типа

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \hat{S}_t[\phi_0], \tag{3.1.2}$$

где $\hat{S}_t$ — эволюционный оператор с полугрупповыми свойствами, т.е.

$$\hat{S}_{t_1}\big[\hat{S}_{t_2}[\phi_0]\big] = \hat{S}_{t_1+t_2}[\phi_0], \quad t_i \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Понятие устойчивости заданного невозмущенного движения $\phi \equiv u = u(t, \mathbf{x})$ тесно связано с *корректностью задачи Коши по Адамару*. Чтобы определить данное понятие, введем две метрики (меры) в пространстве функций, описывающих возмущения поля

$$\xi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x}). \tag{3.1.4}$$

Именно, пусть метрика $\rho_0(\xi_0)$ задает расстояние в пространстве начальных возмущений ξ_0, а метрика $\rho(\xi)$ — в пространстве текущих возмущений[7] ξ. В обычных предположениях

$$\rho_0(\xi_0) \geq \rho(\xi), \tag{3.1.5}$$

т.е. метрика $\rho_0(\xi_0)$ жестче (сильнее), чем метрика $\rho(\xi)$.

Определение 3.1. Задача Коши для уравнения (3.1.1) называется *корректной по Адамару*, если $\forall t \in [0, T]$, $T < \infty$, из $\rho_0(\xi_0) \to 0$ следует $\rho(\xi) \to 0$.

Данное определение проиллюстрируем хорошо известным примером Адамара.

Пример 3.1. *Некорректная задача Коши* для уравнения

$$\partial_t^2 \phi(t, x) + \partial_x^2 \phi(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]. \tag{3.1.6}$$

Зададим начальное и граничное условия:

$$\phi(t, x = \pm\pi/2) = \phi(t = 0, x) = 0,$$
$$\partial_t \phi\big|_{t=0} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \cos nx, \quad n = 2k + 1.$$

Тогда решение задачи Коши для (3.1.6) имеет вид

$$\phi(t, x) = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \sinh nt. \tag{3.1.7}$$

Выбор двух совпадающих метрик $\rho = \rho_0 = \sup_x(|\xi| + |\partial_t \xi|)$ ведет при $n \to \infty$ к тому, что метрика начальных возмущений

$$\rho_0(\phi_0) = \sup_x \Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} |\cos nx|\Big) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \to 0$$

и в то же время, согласно (3.1.7), $\forall t > 0$, $n \to \infty$, имеем

$$\rho(\phi) = \sup_x \left[\frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} |\cos nx| (\sinh nt + n \cosh nt)\right] \to \infty.$$

Определение 3.2. Солитонное решение $u(t, \mathbf{x})$ называется *устойчивым в смысле Ляпунова* по метрикам ρ_0, ρ, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta(\epsilon) > 0$ такое, что из $\rho_0(\xi_0) < \delta$ вытекает неравенство $\rho(\xi) < \epsilon$, $\forall t > 0$.

Таким образом, *корректность задачи Коши по Адамару* — это устойчивость на конечном *интервале времени* T.

Наконец, во многих случаях возмущение вводится в правую часть уравнения (3.1.1), т.е. полагают

$$\partial_t \phi - \hat{F}(\phi) = \hat{f}(\phi). \tag{3.1.8}$$

Если задать метрику ρ_f для возмущения $\hat{f}(\phi)$, т.е. $\rho_f = \rho_f\big[\hat{f}(\phi)\big]$, то разумно следующее

Определение 3.3. Решение $u(t, \mathbf{x})$ уравнения (3.1.8) устойчиво по метрикам ρ_0, ρ, ρ_f при постоянно действующих возмущениях $\hat{f}(\phi)$, если $\forall \epsilon > 0$, $\exists \; \delta_1(\epsilon) > 0$, $\delta_2(\epsilon) > 0$ такие, что из $\rho_0(\xi_0) < \delta_1$ и $\rho_f\big[\hat{f}(\phi)\big] < \delta_2$ вытекает неравенство $\rho(\xi) < \epsilon$, $\forall t > 0$.

Существует и более грубое определение устойчивости — по Лагранжу.

[7] Потребность в двух метриках для корректной постановки задачи об устойчивости для распределенных систем будет пояснена на примере 3.3.

Определение 3.4. Решение $u(t, \mathbf{x})$ уравнения (3.1.1) *устойчиво по Лагранжу*, если $\exists\delta > 0$ такое, что $\rho(\xi) < \infty, \forall t > 0$ при $\rho_0(\xi_0) < \delta$.

Таким образом, по Лагранжу, достаточно ограниченности возмущений в любой момент времени. Применяется и более тонкое понятие — асимптотическая устойчивость.

Определение 3.5. Решение $u(t, \mathbf{x})$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову*, если оно устойчиво (определение 3.2) и $\rho(\xi) \to 0$ при $t \to \infty$.

Однако в физике солитонов приходится, как правило, иметь дело не с одним солитонным решением $u(t, \mathbf{x})$, а с некоторым их множеством $U = \{u\}$, задаваемым обычно некоторыми групповыми параметрами α, т.е.

$$U = \left\{ \hat{T}_g(\alpha) u \middle| g \in G \right\}, \tag{3.1.9}$$

где G — группа симметрии динамической системы. В таком случае устойчивость называется *орбитальной*, а текущая метрика понимается уже как $\inf_{u\in U} \rho(\phi - u)$, т.е. как расстояние от поля ϕ до множества U — орбиты группы G. При этом следует различать *устойчивые множества* и *аттракторы* (притягивающие множества), для которых $\rho(\xi) \to 0$ при $t \to \infty$. Ясно, что асимптотически устойчивое множество — это притягивающее и устойчивое множество одновременно. Отметим, что множество может быть притягивающим и неустойчивым, так как на конечных промежутках времени $\rho(\xi)$ может возрастать, хотя при $t \to \infty$ $\rho(\xi) \to 0$.

Ввиду сложности задач, возникающих в строгом подходе, на практике часто приходится ограничиваться линеаризованными уравнениями

$$\partial_t \xi = \hat{A}(\xi) \equiv \hat{F}'(u)\xi. \tag{3.1.10}$$

Устойчивость для линейной задачи (3.1.10) называется *линеаризованной устойчивостью*, или устойчивостью в первом приближении, а для полного уравнения (3.1.1) — *нелинейной устойчивостью*. Ясно, что из нелинейной устойчивости вытекает устойчивость в первом приближении, но, вообще говоря, в более слабой метрике. Обратное же утверждение верно, если только $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\forall\lambda \in \sigma(\hat{A})$, где $\sigma(\hat{A})$ — спектр оператора $\hat{A}$ (такой оператор называется *диссипативным*). При этом говорят о *спектральной устойчивости*, если $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$, и о *нейтральной устойчивости*, если $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ (пример — гамильтоновы динамические системы). Заметим, что из линеаризованной устойчивости вытекает спектральная, так как если бы было $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, то существовали бы растущие моды. Обратное неверно, что подтверждается следующим примером из механики.

Пример 3.2. Рассмотрим механическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^4}{4}$$

и уравнением движения

$$\ddot{q} = -q^3.$$

Соответственно, линеаризованное уравнение

$$\ddot{\xi} = 0$$

имеет спектр $\lambda = 0$, что свидетельствует о нейтральной устойчивости. Однако решение линеаризованного уравнения $\xi = at + b$ линейно растет, т.е. наблюдается линеаризованная неустойчивость, хотя исходная система нелинейно устойчива. Заметим, что в более слабой метрике (только по скоростям) линеаризованная система оказывается устойчивой. □

Хорошо известно также, что из спектральной неустойчивости для широкого класса динамических систем вытекает нелинейная неустойчивость [55]. Действительно, перепишем уравнение (3.1.1) в виде

$$\partial_t \xi = \hat{A}\xi + \delta\hat{F}(\xi), \quad \delta\hat{F} \equiv \hat{F} - \hat{A}, \tag{3.1.11}$$

и примем, что $\| \delta\hat{F}(\xi) \| \le C \| \xi \|^2$, где $\| \cdot \|$ — норма в пространстве B. Пусть, скажем, оператор $\hat{A}$ имеет собственный вектор y с собственным значением λ, для которого действительная часть максимальна и равна $\mathrm{Re}\,\lambda = 1$, $\| y \| = 1$. Выберем начальное возмущение $\xi_0 = y\delta$, $\| \xi_0 \| = \delta$. Чтобы доказать неустойчивость, допустим противное, т.е. что движение устойчиво, иными словами, что $\| \xi(t) \| < \epsilon\ \forall t > 0$. Перепишем уравнение (3.1.11) в интегральной форме

$$\xi(t) = \mathrm{e}^{\hat{A}t}\xi_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\hat{A}(t-s)}\delta\hat{F}[\xi(s)]\,\mathrm{d}s, \tag{3.1.12}$$

из которой вытекает следующая оценка для нормы возмущения:

$$\begin{aligned} \| \xi(t) \| &\le \| \mathrm{e}^{\hat{A}t}\xi_0 \| + \left\| \int_0^t \mathrm{e}^{\hat{A}(t-s)}\delta\hat{F}[\xi(s)]\,\mathrm{d}s \right\| \le \\ &\le \delta\mathrm{e}^t + \int_0^t \left|\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\right| \| \delta\hat{F}[\xi(s)] \| \,\mathrm{d}s \le \\ &\le \delta\mathrm{e}^t + C\int_0^t \mathrm{e}^{t-s} \| \xi(s) \|^2 \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что найдется такое $T_1 > 0$, что $\forall t \in [0, T_1]$ будет справедливо неравенство $\| \xi(t) \| \le 2\delta\mathrm{e}^t$. В самом деле, последнее верно, если

$$\delta\mathrm{e}^t + 4C\mathrm{e}^t\delta^2 \int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s \le 2\delta\mathrm{e}^t,$$

откуда находим

$$\exp T_1 - 1 = \frac{1}{4C\delta}. \tag{3.1.13}$$

Однако из (3.1.12) в то же время следует и другое неравенство

$$\begin{aligned} \| \xi(t) \| &\ge \| \mathrm{e}^{\hat{A}t}\xi_0 \| - \left\| \int_0^t \mathrm{e}^{\hat{A}(t-s)}\delta\hat{F}[\xi(s)]\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\ge \delta\mathrm{e}^t\left[1 - 4C\delta(\mathrm{e}^t - 1)\right], \end{aligned}$$

и если выбрать T_2 такое, чтобы

$$\exp T_2 - 1 = \frac{1}{8C\delta}, \tag{3.1.14}$$

то из сравнения (3.1.13) и (3.1.14) видно, что $T_2 < T_1$, а

$\| \xi(t) \| \geq \mathrm{e}^t\delta/2 \; \forall t \leq T_2$, или

$$\| \xi(T_2) \| \geq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{T_2}\delta = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{16C}.$$

Поэтому, выбрав $\epsilon \leq 1/16C, \| \xi_0 \| = \delta$, имеем $\| \xi(T_2) \| > 1/16C \geq \epsilon \; \forall \delta > 0$, т.е. неустойчивость.

Сформулируем основную теорему прямого метода.

Теорема 3.1 (теорема Ляпунова—Мовчана об устойчивости). *Для устойчивости решения $u \in U$ по метрикам ρ_0, ρ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой его окрестности $\rho_0 < \alpha$ существовал функционал Ляпунова $V[\phi]$ со свойствами*:

1) *V положительно определен по $\rho(\xi)$,*

2) *V непрерывен по ρ_0,*

3) *V не растет со временем вдоль движения.*

Условия теоремы означают, что существуют две непрерывные монотонные функции $m(\rho) > 0$ и $M(\rho_0) > 0$, $m(0) = M(0) = 0$, называемые соответственно нижней и верхней *функциями сравнения*, такие, что

$$m(\rho) \leq V[\phi] - V[u] \leq M(\rho_0). \tag{3.1.15}$$

Пусть $\rho_0 < \delta$, тогда из (3.1.15) вытекает, что $M(\delta) > M(\rho_0) \geq m(\rho)$, откуда $\rho < \epsilon$, т.е. движение устойчиво.

Выбор метрик ρ и ρ_0 диктуется видом функционала Ляпунова. Пусть, скажем, V — аддитивный функционал, т.е.

$$V[\phi] = \int \mathrm{d}x\, F(\phi, \dot{\phi}, \nabla\phi). \tag{3.1.16}$$

Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным интегральным членом:

$$f(x+\xi) = f(x) + f'(x)\xi + \int\limits_0^1 \mathrm{d}s f''(x+s\xi)(1-s).$$

В нашем случае $\delta V[u] = 0$, и поэтому справедливо представление

$$\begin{aligned} V[u+\xi] &= V[u] + \int \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \mathrm{d}s(1-s)\Big[F_{\phi\phi}\xi^2 + F_{\dot{\phi}\dot{\phi}}\dot{\xi}^2 + \\ &+ F_{(\nabla\phi)^2}(\nabla\xi)^2 + 2F_{\phi\dot{\phi}}\xi\dot{\xi} + \\ &+ 2F_{\phi\nabla\phi}\xi\nabla\xi + 2F_{\dot{\phi}\nabla\phi}\dot{\xi}\nabla\xi\Big] = \\ &= V[u] + \int\limits_0^1 \mathrm{d}s(1-s)\delta^2 V[u+s\xi]. \end{aligned}$$

Если $V[\phi]$ — глобально выпуклый функционал, то $\delta^2 V[u+s\xi] > 0$, так что можно выбрать в качестве метрики

$$\rho^2(\xi) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}s(1-s)\delta^2 V[u+s\xi].$$

В этом и состоит метод В.И. Арнольда [36, 40, 41], в котором полагается $V[\phi] = H + C$, где H — гамильтониан, а C — некоторый интеграл движения (инвариант Казимира), выбираемый так, чтобы $\delta V[u] = 0$.

Часто используется также понятие *формальной*, или *энергетической*, *устойчивости*, когда существует закон сохранения

$$E = \int \mathrm{d}x\, F(\phi, \dot{\phi}, \nabla\phi) = \mathrm{const}$$

либо закон эволюции $\dot{E} \leq 0$ такие, что в окрестности изучаемого решения $\delta E = 0$, $\delta^2 E > 0$. Ясно, что из энергетической устойчивости вытекает линеаризованная устойчивость, так как в силу линейных уравнений эволюции $\delta^2 \dot{E} \leq 0$ и для получения устойчивости достаточно взять $\rho^2 = \rho_0^2 = \delta^2 E$. Обратное утверждение неверно, что подтверждается простым контрпримером из механики, когда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 - q_1^2 q_2^2\right) \equiv E = \mathrm{const}.$$

Поскольку при линеаризации мы имеем здесь систему двух независимых гармонических осцилляторов, то линеаризованная устойчивость в этом примере очевидна. С другой стороны, квадратичная форма

$$\delta^2 E = \delta p_1^2 + \delta q_1^2 - \delta p_2^2 - \delta q_2^2$$

знакопеременна, т.е. система энергетически неустойчива.

Замечание 3.1. Подчеркнем, что в конечномерной теории (механические системы с конечным числом степеней свободы) энергетическая устойчивость при условии аналитичности гамильтониана влечет за собой устойчивость по Ляпунову в малом, как это вытекает из теоремы Ляпунова об устойчивости. При этом из $\delta^2 E > 0$ следует, что $E > E_0$ (здесь E_0 — невозмущенное значение энергии) в некоторой окрестности. Однако для бесконечномерной теории (распределенные системы) это не так, т.е. из $\delta^2 E > 0$ еще не вытекает, что $E > E_0$ в некоторой окрестности. Типичный пример:

$$E = \int \mathrm{d}x \Big[(\nabla\phi)^2 - (\nabla\phi)^4 + \phi^2\Big].$$

□

Наконец, говорят об *устойчивости в целом*, или *глобальной устойчивости*, если система устойчива для любых как угодно больших значений ρ. *Это наиболее сильная устойчивость.*

Чтобы почувствовать особенность анализа устойчивости для распределенных систем, рассмотрим простой

Пример 3.3. *Устойчивость свободной однородной струны с закрепленными концами.* Будем решать уравнение

$$\partial_t^2\phi(t,x) - \partial_x^2\phi(t,x) = 0, \tag{3.1.17}$$

с граничными условиями

$$\phi(t,0) = \phi(t,1) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1],$$

и начальными условиями

$$\partial_t\phi(0,x) = v(x), \quad \phi(0,x) = u(x).$$

Решение этой известной задачи дается формулой Д'Аламбера:

$$2\phi(x,t) = u(x-t) + u(x+t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} \upsilon(s)\mathrm{d}s, \qquad (3.1.18)$$

где u, υ антисимметрично продолжены на всю ось. Будем рассматривать устойчивость равновесного состояния струны $\phi = 0$ и введем следующие меры:

$$\rho_1 = \int\limits_0^1 \phi^2 \mathrm{d}x, \quad \rho_2 = \int\limits_0^1 \left[\phi^2 + (\partial_t\phi)^2\right]\mathrm{d}x,$$

$$\rho_3 = \int\limits_0^1 \left[(\partial_x\phi)^2 + (\partial_t\phi)^2\right]\mathrm{d}x, \quad \rho_4 = \rho_1 + \rho_3.$$

Из (3.1.18) видно, что равновесие $\phi = 0$ устойчиво по мерам ρ_2, ρ_3, ρ_4 в отдельности (ρ_3 здесь интеграл движения), устойчиво по парам мер $(\rho_2, \rho_1), (\rho_3, \rho_2), (\rho_4, \rho_3)$, но неустойчиво по мере ρ_1 (некорректность по Адамару), так как начальная фиксация ρ_1 никак не ограничивает скорости. □

Особенно аккуратно следует подбирать меры при рассмотрении устойчивости многомерных распределенных систем, когда уже не работают простые формулы типа (3.1.18) и гладкость начальных условий приобретает особую важность. Поэтому начальную метрику в общем случае и необходимо выбирать более жесткой.

Приведем теперь *основной критерий неустойчивости*, который дается следующей теоремой:

Теорема 3.2 (теорема Четаева—Мовчана о неустойчивости). *Для неустойчивости решения $u \in U$ по метрикам ρ_0, ρ* ***необходимо и достаточно****, чтобы существовал функционал Четаева $W[\phi]$ со следующими свойствами*: 1) *$W[\phi]$ непрерывен по ρ_0*, 2) *$W[\phi]$ ограничен по ρ*, 3) *$W[\phi]$ растет со временем в области $W > 0$.*

3.2. Энергетическая неустойчивость многомерных стационарных солитонов

Если функционал Ляпунова $V[\phi]$ выбран, то предстоит убедиться в его глобальной выпуклости, т.е. в выполнении условия $\delta^2 V[u+\xi] \geq m(\rho)$. Однако на практике в лучшем случае удается проверить лишь локальное условие $\delta^2 V[u] > 0$. Таким образом, в любом случае необходимо изучить структуру второй вариации функционала Ляпунова.

При этом оказываются полезными вириальные теоремы, установленные Хобартом и Дерриком [56, 57], правда, лишь для случая статических солитонов $u(\mathbf{x})$ (см. изложение и развитие этого подхода в [3], гл. 3; [14], гл. 9). Пусть $V[\phi]$ — функционал с критической точкой $\phi = u(\mathbf{x})$, т.е. $\delta V[u] = 0$. Выберем простейшее возмущение солитона в виде масштабных преобразований $\phi_\lambda = u(\lambda\mathbf{x})$. Тогда найдем

$$\delta\phi = \xi = \delta\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\Big|_{\lambda=1}.$$

Допустим, что функционал $V[\phi]$ представляется в виде суммы

$$V[\phi] = \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} V^{(\nu)}(\lambda), \qquad (3.2.1)$$

где $V^{(\nu)}(\lambda)$ — однородная функция масштабного параметра λ степени ν. Согласно (3.2.1), имеем

$$\frac{\delta V[u]}{\delta\lambda} = \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \frac{\partial V^{(\nu)}}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \nu V^{(\nu)}\Big|_{\lambda=1} = 0. \qquad (3.2.2)$$

Тождество (3.2.2) и составляет содержание *первой вириальной теоремы Хобарта—Деррика*. Вычислим теперь вторую вариацию $\delta^2 V$ с учетом (3.2.2):

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 V[u]}{\delta\lambda^2} &= \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \frac{\partial^2 V^{(\nu)}}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda=1} = \\ &= \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \nu(\nu-1) V^{(\nu)}\Big|_{\lambda=1} = \\ &= \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \nu^2 V^{(\nu)}\Big|_{\lambda=1}. \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Тождество (3.2.3) и есть *вторая вириальная теорема Хобарта—Деррика.*

Пример 3.4. Рассмотрим пример функционала $V[\phi]$ в пространстве D измерений:

$$V[\phi] = \int \mathrm{d}^D x (\nabla\phi)^2 + \int \mathrm{d}^D x F(\phi). \qquad (3.2.4)$$

В данном случае в соответствии с представлением (3.2.1) имеем

$$V[\phi] = V^{(2-D)}(\lambda) + V^{(-D)}(\lambda).$$

Тогда вириальные тождества (3.2.2) и (3.2.3) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{\delta V}{\delta\lambda} &= (2-D)V^{(2-D)} - DV^{(-D)} = 0, \\ \frac{\delta^2 V}{\delta\lambda^2} &= (2-D)^2 V^{(2-D)} + D^2 V^{(-D)} = \\ &= 2(2-D)V^{(2-D)}.\end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что для $D \geq 3$ $V^{(-D)} < 0$, а из второго, что $\delta^2 V < 0$ для масштабных деформаций (растяжений). Таким образом, статические солитоны в моделях с функционалами типа (3.2.4) энергетически неустойчивы для $D \geq 3$.

Замечание 3.2. Ситуация может быть исправлена, как отмечалось еще Хобартом [56], добавлением в функционал (3.2.4) членов, содержащих более высокие степени полевых производных, что реализуется, к примеру, в моделях Скирма и Фаддеева (см. [3], гл. 3) и обычно связывается с понятием *топологической устойчивости.* Кроме того, масштабно-нейтральные солитоны допускаются в моделях с "экзотическими" функционалами типа

$$\Phi[\phi] = \int \mathrm{d}^3 x (\nabla\phi \cdot \nabla\phi)^{3/2} + ...,$$

где степень $3/2$ выбирается с тем, чтобы удовлетворить критерию Хобарта—Деррика [58].

Определение 3.6. Солитонное решение $u(t, \mathbf{x})$ называется *стационарным*, если оно удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\delta V}{\delta\dot\phi} = 0, \quad \frac{\delta V}{\delta\phi} = 0, \qquad (3.2.5)$$

где $V[\phi]$ — аддитивный функционал вида (3.1.16), (3.2.4) (для общности рассмотрен случай уравнений движения второго порядка по времени в отличие от (3.1.1), а случай уравнений первого порядка соответствует выбору в (3.1.16) $F = F(\phi, \nabla\phi)$). □

В последующем изложении будем предполагать, что все рассматриваемые солитонные решения $u(t, \mathbf{x})$ достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности, обладая асимптотиками вида

$$|\nabla u| = \mathcal{O}\Big(\big(r^{-[(D/2)+\alpha]}\Big), \quad \alpha > 0.$$

В таком случае оказывается справедливой следующая

Т е о р е м а 3.3. *Вторая вариация аддитивного функционала Ляпунова в окрестности стационарного солитонного решения знакопеременна для размерности пространства $D \geq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конкретности рассмотрим случай $D = 3$. Запишем уравнения (3.2.5) для поля u с компонентами u^s, $s = \overline{1, n}$,

$$F_s^{\cdot} = 0, \quad F_s - \partial_i F_s^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.2.6}$$

где для удобства использованы обозначения производных

$$F_s^{\cdot} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^s}, \quad F_s^i = \frac{\partial F}{\partial(\partial_i u^s)}, \quad F_s = \frac{\partial F}{\partial u^s}.$$

Вычислим вторую вариацию функционала V в точке u:

$$\delta^2 V = \int \mathrm{d}^3 x \Big(F_{sr}^{\cdot\cdot} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^r + 2F_{sr}^{\cdot} \dot{\xi}^s \xi^r + F_{sr} \xi^s \xi^r + \\ + 2F_{sr}^{\cdot i} \dot{\xi}^s \partial_i \xi^r + F_{rs}^{ik} \partial_i \xi^r \cdot \partial_k \xi^s + 2F_{rs}^i \partial_i \xi^r \xi^s \Big).$$

Рассмотрим теперь частные возмущения $\dot{\xi}^s = f^i(\mathbf{x}) \partial_i \dot{u}^s$, $\xi^s = f^i(\mathbf{x}) \partial_i u^s$ и с учетом уравнений (3.2.6) преобразуем $\delta^2 V$ к виду

$$\delta^2 V[\mathbf{f}] = \int \mathrm{d}^3 x \Big[\partial_i f^l A_{lj}^{ik} \partial_k f^j + \big(\partial_i f^l \cdot f^j - \partial_i f^j \cdot f^l \big) B_{jl}^i \Big], \tag{3.2.7}$$

где обозначено

$$A_{lj}^{ik} = \partial_l u^r F_{rs}^{ik} \partial_j u^s, \; 2B_{jl}^i = -2B_{lj}^i = \partial_{[j} F_r^i \partial_{l]} u^r. \tag{3.2.8}$$

Заметим, что второе слагаемое в (3.2.7) явно знакопеременно, а в силу уравнений (3.2.6) выполняется равенство

$$\partial_i B_{jl}^i = 0, \tag{3.2.9}$$

из которого следует представление

$$2B_{jl}^i = \epsilon^{ikm} \partial_k a_{mjl}, \tag{3.2.10}$$

где введено обозначение

$$a_{mjl} = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{mki} \partial^k \int \mathrm{d}^3 x' \, \frac{B_{jl}^i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{3.2.11}$$

Учитывая (3.2.10) и интегрируя в (3.2.7) по частям, найдем

$$\delta^2 V[\mathbf{f}] = \int \mathrm{d}^3 x \Big[\partial_i f^l \big(A_{lj}^{ik} + \epsilon^{ikm} a_{mjl} \big) \partial_k f^j \Big]. \tag{3.2.12}$$

Теперь исследуем знакоопределенность подынтегрального выражения в (3.2.12). Рассмотрим, в частности, асимптотическую область $r \to \infty$, $r = |\mathbf{x}|$, в которой согласно (3.2.8)

$$B_{jl}^i = \mathcal{O}\big(r^{-(3+2\alpha)}\big), \tag{3.2.13}$$

и поэтому можно показать, что $a_{mjl} = \mathcal{O}(r^{-3})$. Чтобы в этом убедиться, сначала из (3.2.9) и (3.2.13) путем интегрирования по частям выводим тождество

$$\int \mathrm{d}^3 x B_{jl}^i = 0,$$

с учетом которого равенство (3.2.11) можно переписать в виде

$$a_{mjl} = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{mki} \partial^k \int \mathrm{d}^3 x' B_{jl}^i(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r} \right). \tag{3.2.14}$$

Из (3.2.13) и (3.2.14) с помощью теоремы о среднем нетрудно получить, что

$$|a_{mjl}| < C_1 \left| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right| = \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{3.2.15}$$

Наконец, сравнение (3.2.15) с оценкой

$$A_{jl}^{ik} = \mathcal{O}\big(r^{-(3+2\alpha)}\big),$$

вытекающей из (3.2.8), убеждает в знакопеременности квадратичной формы в (3.2.12). □

Приведенное доказательство легко распространить на случай солитонов в пространстве размерности $D = N + 2 \geq 2$. При этом вместо (3.2.10) и (3.2.11) будем иметь представления

$$2B_{jl}^i = \epsilon^{ik\alpha_1 \ldots \alpha_N} \partial_k a_{\alpha_1 \ldots \alpha_N jl},$$
$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_N jl} = \frac{2}{N!} \epsilon_{ik\alpha_1 \ldots \alpha_N} \partial^k \int \mathrm{d}^{N+2} x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') B_{jl}^i(\mathbf{x}'),$$

где $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ — функция Грина для D-мерного оператора Лапласа. Таким образом, удается обобщить теорему Хобарта—Деррика и на случай $D \geq 2$, т.е. только одномерные солитоны выпадают из области ее действия. Доказательство теоремы 3.3 было дано в работе [59], а затем приводилось в [3, 60, 61].

У т в е р ж д е н и е 3.1. Нетопологические многомерные ($D \geq 2$) солитоны стационарного типа энергетически неустойчивы. Следовательно, если ограничиться аддитивными функционалами Ляпунова вида (3.1.16), то могут существовать только *условно-устойчивые* многомерные стационарные солитоны, т.е. устойчивые лишь при некоторых дополнительных ограничениях на начальные возмущения ξ_0. □

Известно, что все условия на возмущения можно внести в определение метрики, хотя это и приводит к усложнению анализа. Для описания условной устойчивости множества U стационарных решений удобно выделить какое-то одно решение u (либо некоторое узкое их подмножество, характеризуемое параметрами ω), а все остальные решения рассматривать как порожденные им в результате преобразований из некоторой группы G — группы инвариантности уравнения (3.1.1)[8]. Пусть G_0 — группа инвариантности функционала V в (3.1.16) и (3.2.4) с параметрами α_0, являющаяся подгруппой группы G с параметрами $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}\}$, где $\boldsymbol{\beta}$ — дополнительные параметры. В общем случае стационарное решение зависит как от групповых параметров $\boldsymbol{\alpha}$, так и от некоторых негрупповых параметров (частот) $\boldsymbol{\omega}$, т.е. $u = u(t, \mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}) \in U$. При этом стационарные решения уравнений (3.2.5) отвечают выбору $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$ и образуют подмножество $U_0 \subset U$. Множество стационарных решений, отвечающее фиксированным параметрам $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$, обозначим $U_\omega \subset U_0$. Солитонную конфигурацию будем называть *возмущенной*, если $\varphi \notin U$.

Рассмотрение орбитальной устойчивости, т.е. устойчивости множества решений, связано с определенным выбором текущей метрики (меры) ρ. Например, если $d = \|\varphi - u\|_{\mathrm{B}}$ — банахова норма, то имеется возможность определить следующие меры:

$$\rho = \inf_{U_\omega} d, \qquad \rho_1 = \inf_{U_0} d, \qquad \rho_2 = \inf_{U} d, \tag{3.2.16}$$

$$\rho_3 = \inf_{\boldsymbol{\alpha}_0} d, \qquad \rho_4 = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} d, \qquad \rho_5 = \inf_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}} d. \tag{3.2.17}$$

Здесь следует подчеркнуть различие мер, выписанных под номерами (3.2.16) и (3.2.17). Так, при выборе метрик типа (3.2.16) минимизация осуществляется в классе стационарных решений уравнений движения, что равносильно условию постоянства параметров $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}$. В то же время при выборе метрик типа (3.2.17) в общем случае отмеченные параметры являются функциями времени, а следовательно, предельная функция сравнения u не обязана принадлежать многообразию решений уравнений движения. Указанное обстоятельство делает предпочтительным, во всяком случае с физической точки зрения, выбор метрики вида (3.2.16). При этом минимизация в метриках ρ_1 и ρ_2 осуществляется в некоторый фиксированный момент времени $t = T$ и позволяет, как мы убедимся ниже, избавиться от нежелательных нулевых ($\delta^2 V = 0$) и отрицательных ($\delta^2 V < 0$) мод возмущений.

В силу доказанного утверждения теоремы 3.3 для многомерных солитонов не существует аддитивных функционалов Ляпунова, положительно определенных по метрике $\rho = \inf_{U_\omega} d$, и согласно утверждению 3.1 возможны лишь условно-устойчивые солитоны. Иными словами, наличие устойчивых локализованных структур для многомерных динамических систем возможно лишь при наложении некоторых дополнительных физических условий на начальные возмущения ξ_0. Обычно для такой цели используются *условия фиксации некоторых интегралов движения* (обобщенных зарядов) Q_α. Соответствующая разновидность условной устойчивости получила название *Q-устойчивости* [14, 45, 61]. Заметим, что так как $Q_\alpha = Q_\alpha(\omega)$, то простым использованием вместо вышеприведенной метрики ρ других метрик из (3.2.16), т.е. метрик ρ_1 или ρ_2, всегда можно добиться фиксации зарядов Q_α. Последнее, в свою очередь, эквивалентно рассмотрению неаддитивных функционалов Ляпунова, например, квадратичных по зарядам.

В итоге, мы расширили область применимости теоремы Хобарта—Деррика [56, 57] об энергетической неустойчивости на случай стационарных солитонов, установив также *независимость результата от выбора модели*. Однако для статических солитонов допустимым оказывается дальнейшее усиление результата с заменой энергетической неустойчивости на линеаризованную. В частности [61], справедлива

Т е о р е м а 3.4. *В любой локальной полевой модели с трансляционно-инвариантным лагранжианом, положительно определенным по скоростям $\dot\varphi$, статические топологически-тривиальные*[9] *многомерные солитоны* ***линеаризованно неустойчивы***.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, что уравнения для действительного n-компонентного поля φ допускают статическое солитонное решение $u(\mathbf{x})$. Определим возмущение $\xi = \varphi - u$ и зададим метрики ρ_0, ρ в виде

$$\rho_0(\xi_0) = \|\dot\xi_0\| + \|\xi_0\|', \quad \rho(\xi) = \inf_{u \in U_0}\Big(\|\dot\xi\| + \|\xi\|\Big),$$

где $\|\cdot\|$ — норма в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}^D)$, а $\|\cdot\|'$ — норма в пространстве Соболева $W_2^1(\mathbf{R}^D)$, т.е. $\|\xi\|' = \|\nabla\xi\| + \|\xi\|$. Метрика ρ_0 может отвечать и более узкому пространству, определяемому требованием непрерывности рассматриваемых функционалов относительно ρ_0.

Запишем вторую вариацию функционала энергии, обозначая скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^D)$ через (,):

$$\delta^2 E = (\dot\xi, \hat A \dot\xi) + (\xi, \hat B \xi), \tag{3.2.18}$$

где $\hat A$ — положительная симметричная матрица, а $\hat B$ — некоторый эрмитов оператор, локально зависящие от u. Рассмотрим функционал Четаева

$$W = -\frac{1}{2}(\pi, \xi)(E - E_0), \tag{3.2.19}$$

где $E_0 = E[u]$ — невозмущенная энергия и обозначено $\pi = 2\hat A \dot\xi$. Так как в силу уравнений движения $\dot\pi = -\delta E/\delta\xi$, то в окрестности решения u

$$\dot W = (\xi, \hat B \xi)^2 - (\dot\xi, \hat A \dot\xi)^2. \tag{3.2.20}$$

Зададимся теперь некоторым числом $\delta > 0$. Тогда из (3.2.18) и теоремы 3.3 вытекает, что найдутся такие начальное возмущение ξ_0 и число $\delta_1(\delta) > 0$, что в начальный момент будут выполнены неравенства

$$\rho_0(\xi_0) < \delta, \quad (\pi_0, \xi_0) > 0, \quad (\delta^2 E)_0 < -\delta_1 < 0. \tag{3.2.21}$$

Далее, из положительности матрицы $\hat A$ выводится, что в области $W > 0$, выделенной условиями (3.2.21), выполняется неравенство

$$|(\xi, \hat B \xi)| \ge -(\xi, \hat B \xi) > (\dot\xi, \hat A \dot\xi) + \delta_1.$$

С учетом последнего из (3.2.20) и (3.2.21) вытекает, что в области $W > 0$ будет $\dot W > \delta_1^2 > 0$. Следовательно, для проверки выполнения условий теоремы Четаева—Мовчана остается убедиться в том, что функционал (3.2.19) ограничен по метрике ρ в некоторой окрестности $\rho < \epsilon$. С

[8] Для задания такой группы достаточно конкретизации соотношений типа (3.1.9).

[9] Здесь и далее *топологически-тривиальными* будут называться солитоны с тривиальными *топологическими зарядами* (см. [3], гл.2).

этой целью заметим, что для начальных условий (3.2.21)

$$\sup_{\rho<\epsilon} W \leq |(\delta^2 E)_0| \cdot \|\hat{A}\| \sup_{\rho<\epsilon}\Big(\|\dot{\xi}\| \cdot \|\xi\|\Big). \tag{3.2.22}$$

Далее, так как $\dot{\xi} = \dot{\varphi}$ не зависит от u, то при $\rho < \epsilon$ справедлива оценка

$$\|\dot{\xi}\| = \inf_{u\in U_0} \|\dot{\xi}\| \leq \rho < \epsilon. \tag{3.2.23}$$

Кроме того, из неравенства треугольника имеем

$$\|\varphi\| - \|u\| \leq \|\varphi - u\| \leq \|\varphi\| + \|u\|,$$

откуда

$$\sup_{u\in U_0} \|\varphi - u\| - \inf_{u\in U_0} \|\varphi - u\| \leq 2\|u\|,$$

и поэтому

$$\|\xi\| \leq \sup_{u\in U_0} \|\varphi - u\| \leq 2\|u\| + \inf_{u\in U_0} \|\xi\| \leq 2\|u\| + \epsilon. \tag{3.2.24}$$

Подставляя в (3.2.22) полученные оценки (3.2.23) и (3.2.24), найдем

$$\sup_{\rho<\epsilon} |W| < |(\delta^2 E)_0| \cdot \|\hat{A}\|\epsilon(2\|u\| + \epsilon) \equiv \overline{W}.$$

Отсюда при естественном допущении, что норма $\|u\|$ ограничена вместе с $\|\hat{A}\|$, вытекает ограниченность W, что и доказывает теорему. □

На основании приведенного доказательства легко, в частности, оценить время τ достижения возмущением сферы $\rho = \epsilon$:

$$\tau < \frac{1}{\delta_1^2}(\overline{W} - W).$$

3.3. Устойчивость скалярных заряженных солитонов (Q-теорема)

Рассмотрим простой для анализа случай, когда солитон описывается комплексным скалярным полем ψ в четырехмерном пространстве-времени Минковского[10]. Пусть невозмущенное решение имеет вид

$$\psi_0 = u(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad u^* = u, \tag{3.3.1}$$

где функция $u(\mathbf{x})$ достаточно быстро убывает при $r = |\mathbf{x}| \to \infty$. Рассмотрим класс моделей, удовлетворяющих требованию релятивистской и $U(1)$ инвариантностей и задаваемых лагранжевой плотностью вида

$$L = -F(p, q, s).$$

Здесь введены инварианты

$$p = -\partial_\mu\psi^* \cdot \partial^\mu\psi, \quad q = j_\mu j^\mu, \quad s = \psi^*\psi$$

с использованием стандартного выражения для 4-тока $j_\mu = (i/2)(\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*)$. Построим также инвариантное множество U_0 невозмущенных солитонных решений, представляющее собой совокупность орбит группы $G = \mathrm{T}(3) \otimes_s \mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{U}(1)$, где $\otimes_s$ — полупрямое произведение. Иными словами,

$$U_0 = \big\{u(\hat{O}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}; \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\big\}, \tag{3.3.2}$$

где $\hat{O}$ — матрица 3-поворотов, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^3$, $\beta \in [0, 2\pi)$. Подчеркнем, что частота ω в множестве (3.3.2) не фиксирована. Если возмущенный солитон описывать полем

$$\psi = \varphi(t, \mathbf{x}) \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad \varphi \notin U_0,$$

то возмущение ξ определим как

$$\xi = \varphi - u = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2, \quad \xi_i^* = \xi_i.$$

Метрики ρ_0, ρ выберем в виде

$$\rho_0(\xi_0) = \sum_{i=1}^{2}\Big(\|\dot{\xi}_{0i}\| + \|\xi_{0i}\|'\Big)_C,$$

$$\rho(\xi) = \inf_{u\in U_0} \sum_{i=1}^{2}\Big(\|\dot{\xi}_i\| + \|\xi_i\|\Big), \tag{3.3.3}$$

где индекс C означает совместную норму в $L_2 \cap C$.

Как выясняется, для солитонных решений (3.3.1) теорема 3.3 справедлива даже в одномерном ($D = 1$) случае [63]. Чтобы убедиться в этом, напомним сначала одну лемму вариационного исчисления. Пусть функционал

$$V[\phi] = \int_{\mathbf{R}^D} \mathrm{d}x\, S(\partial_i\phi, \phi)$$

задан в классе кусочногладких функций $\phi\colon \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}^n$, $\phi(\infty) = 0$, и пусть $u(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{x})$ — его поле экстремалей, описываемое непрерывными параметрами α_i, $i = \overline{1, l}$. Тогда справедлива следующая

Лемма 3.1. *Если существуют постоянные c_i, не все равные нулю и такие, что функция*

$$f = \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{\partial u}{\partial\alpha_i}\Big|_{\alpha=0} \tag{3.3.4}$$

обращается в нуль на некоторой поверхности Σ, отделяющей в $\mathbf{R}^D$ область Ω ненулевой меры, в то время как $\nabla f|_\Sigma \neq 0$, то $\delta^2 V$ знакопеременно в окрестности экстремали $u(0; \mathbf{x})$.

Доказательство. Рассмотрим частное возмущение

$$\xi(\mathbf{x} \in \Omega) = 0, \qquad \xi(\mathbf{x} \notin \Omega) = f. \tag{3.3.5}$$

Тогда по свойству поля экстремалей $\delta^2 V[\xi] = 0$. Однако возмущение (3.3.5) не является экстремалью функционала $\delta^2 V$, так как не удовлетворяет условиям сшивания на границе Σ. Поэтому найдутся возмущения, близкие к (3.3.5), для которых $\delta^2 V$ принимает значения любого знака. □

Теорема 3.5. *Стационарные солитонные решения (3.3.1) не могут быть энергетически устойчивыми.*

Доказательство [63]. Пусть функционал Ляпунова V имеет вид (3.1.16). Тогда он допускает поле

[10] С другими изложениями Q-устойчивости можно познакомиться по монографиям [3], §3.3.3, и [14], гл. 10, 14. Здесь мы, в основном, следуем изложению в обзоре [61], §3.

экстремалей вида

$$\psi_0 = u(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha})\exp(-\mathrm{i}\omega t).$$

Так как $|u| < \infty$, $u(\infty) = 0$, то уравнение $f = \partial_1 u(\mathbf{x}) = 0$ выполняется на некоторой поверхности Σ. Поэтому условия леммы 3.1 выполнены, и $\delta^2 V$ знакопеременно при любой размерности D. □

В связи с приведенными утверждениями изучим Q-устойчивость солитонных решений (3.3.1), наложив *условие фиксации заряда*, уже предполагавшееся в определении метрики ρ в (3.3.3):

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x (F_p - F_q s) j_0 = Q[\psi_0] \equiv Q_0. \qquad (3.3.6)$$

Выпишем условие (3.3.6) в линейном приближении:

$$(hu, \dot{\xi}_2) = (g, \xi_1), \qquad (3.3.7)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} h &= -2\omega^2 s(F_{pp} - 2F_{pq}s + F_{qq}s^2) + F_p - F_q s, \\ g &= \mathrm{div}(u\boldsymbol{\alpha}) + uc, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \omega(F_{pq}s - F_{pp})\vec{\nabla} s, \\ c &= 2\omega[F_p + s(F_{ps} - 2F_q - F_{qs}s) - \\ &\quad - \omega^2 s(F_{pp} - 3F_{pq}s + 2F_{qq}s^2)\big]. \end{aligned}$$

Оказывается, что при наложении условия (3.3.7) *безузловые солитоны* ($u > 0$) могут стать устойчивыми (т.е. Q-устойчивыми). Что же касается *узловых солитонов*, то для них справедлива

Теорема 3.6. *Узловые солитонные решения вида* (3.3.1) *энергетически Q-неустойчивы.*

Доказательство. Следуя работе [64], будем полагать, что функционал Ляпунова V допускает поле экстремалей вида

$$\psi_0(\beta) = u\exp\big[\mathrm{i}(\beta - \omega t)\big].$$

Так как для узловых солитонов $u = 0$ на замкнутой узловой поверхности Σ, то функция (3.3.4) вида

$$f = \psi'_0(\beta)|_{\beta=0} = \mathrm{i}\psi_0(0)$$

удовлетворяет условию леммы 3.1, и $\delta^2 V$ знакопеременно в окрестности возмущений

$$\dot{\xi}_i = \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = u,$$

т.е. для $\|\xi_1\| \ll \|\xi_2\|$. Как нетрудно убедиться, условие (3.3.7) также может быть удовлетворено в классе таких возмущений. □

В связи со сказанным нам остается лишь получить условия Q-устойчивости для безузловых солитонов. Для этого выберем в качестве функционала Ляпунова интеграл движения

$$V = E - \omega Q \equiv \tilde{E}[\varphi], \qquad (3.3.8)$$

где E — энергия поля. Вторая вариация V имеет вид

$$\delta^2 V = \left(\dot{\xi}_1, F_p \dot{\xi}_1\right) + \left(\dot{\xi}_2, h\dot{\xi}_2\right) + \sum_{i=1}^{2}\left(\xi_i, \hat{L}_i \xi_i\right), \qquad (3.3.9)$$

где введены самосопряженные операторы

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= 2\omega^4 s\big(F_{pp} + 4F_{qs}s^2 - 4F_{pq}s\big) + F_s + 2F_{ss}s + \\ &\quad + \omega^2\big(-F_p + 6F_q s - 4F_{ps}s + 8F_{qs}s^2\big) + \\ &\quad + \mathrm{div}\big\{-F_p\nabla - 2F_{pp}\nabla u\cdot(\nabla u\nabla) + \\ &\quad + \big[\omega^2(F_{pp} - 2F_{pq}s) - F_{ps}\big]\nabla s\big\}, \\ \hat{L}_2 &= F_s - \omega^2 F_p + F_q(\omega^2 s - p) - \\ &\quad - \mathrm{div}\big[(F_p - F_q s)\nabla + F_q u\nabla u\big]. \end{aligned}$$

Из (3.3.9) следует, что для положительной определенности $\delta^2 V$ необходимо выполнение неравенств $F_p > 0$, $h > 0$. Здесь и в дальнейшем нам будет полезна теорема, принадлежащая Р. Куранту [65].

Теорема 3.7. *Первая собственная функция самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка не имеет нулей и соответствующее собственное значение не вырождено.*

Заметим, что спектр оператора $\hat{L}_2$ неотрицателен, так как в силу уравнений поля $\hat{L}_2 u = 0$, где $u > 0$, и поэтому, по теореме Р. Куранта, функция u является первой собственной функцией оператора $\hat{L}_2$. В то же время нулевая мода $\xi_2 = u$ исключается выбором метрики ρ.

Используя неравенство Шварца и условие (3.3.7), получим ограничение

$$\left(\dot{\xi}_2, h\dot{\xi}_2\right) \geq \left(g, \xi_1\right)^2 (u, hu)^{-1},$$

с учетом которого приходим к оценке

$$\delta^2 V \geq \left(\dot{\xi}_1, F_p\dot{\xi}_1\right) + \left(\dot{\xi}_2, h\dot{\xi}_2\right) + \left(\xi_1, \hat{K}\xi_1\right),$$

где введен самосопряженный оператор $\hat{K}$:

$$\hat{K}\xi_1 = \hat{L}_1\xi_1 + g(g, \xi_1)(u, hu)^{-1}. \qquad (3.3.10)$$

Нам нужно установить условия положительности спектра оператора $\hat{K}$, или (что равносильно) положительности квадратичной формы

$$(\xi, \hat{K}\xi) = (\xi, \hat{L}_1\xi) + a^{-1}(g, \xi), \qquad (3.3.11)$$

где $a = (u, hu)$. Рассмотрим сначала случай $a > 0$, особый же случай $a = 0$, отвечающий нерелятивистским системам, будет изучен отдельно. Вычислим действие оператора (3.3.10) на функцию

$$\upsilon = \frac{\partial u}{\partial \omega}. \qquad (3.3.12)$$

После громоздких выкладок, в процессе которых учитываются уравнения поля для u, продифференцированные по ω, найдем

$$\hat{K}\upsilon = \frac{g}{a}\frac{\partial Q}{\partial \omega}. \qquad (3.3.13)$$

Из (3.3.13) путем скалярного умножения на υ получим

$$(\upsilon, \hat{K}\upsilon) = (b - a)\frac{b}{a}, \qquad (3.3.14)$$

где $b = \omega^2 \partial Q/\partial\omega$.

Ясно, что если $\lambda(\omega)$ — наименьшее собственное значение оператора $\hat{K}$, то граница области устойчивости определяется уравнением

$$\lambda(\omega) = 0. \qquad (3.3.15)$$

Однако, как видно из (3.3.13), если выполнено условие

$$b(\omega) = \frac{\partial Q}{\partial \omega} = 0, \tag{3.3.16}$$

то оператор $\hat{K}$ имеет нулевое собственное значение, и соответствующая собственная функция дается формулой (3.3.12). Выясним, когда условия (3.3.15) и (3.3.16) эквивалентны. Заметим, что если оператор $\hat{L}_1$ имеет два или более отрицательных собственных значений, то, взяв в качестве возмущения линейную комбинацию соответствующих собственных функций, можно всегда обеспечить выполнение равенства

$$(g, \xi) = 0, \tag{3.3.17}$$

которое приводит к знакопеременности квадратичной формы (3.3.11). Поэтому для обеспечения устойчивости только при одном дополнительном условии (3.3.6) необходимо потребовать, чтобы в области устойчивости, т.е. в некоторой области изменения параметра ω, оператор $\hat{L}_1$ имел единственное отрицательное собственное значение. Обозначим соответствующую собственную функцию ψ_-. Если при этом

$$(g, \psi_-) \neq 0, \tag{3.3.18}$$

то оператор $\hat{K}$ будет иметь положительный спектр в некоторой области изменения параметра ω. Как видно из (3.3.14) и (3.3.16), эта область определяется условием

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} < 0, \tag{3.3.19}$$

так как в ней с необходимостью $(\upsilon, \hat{K}\upsilon) > 0$, и граница ее задается ничем иным, как уравнением (3.3.15). Таким образом, приходим к следующему критерию условной устойчивости безузловых стационарных солитонов, известному как *Q-теорема* [3, 14, 45, 63, 64, 66—72]:

Теорема 3.8 (Q-теорема). *Безузловые стационарные солитонные решения* (3.3.1) *Q-устойчивы по Ляпунову в области* (3.3.19), *если в ней оператор $\hat{L}_1$ имеет единственное отрицательное собственное значение и соответствующая собственная функция удовлетворяет условию* (3.3.18).

Замечание 3.3. Оператор $\hat{K}$ имеет нулевое собственное значение, отвечающее сдвигам исходного решения (3.3.1) по параметрам группы G инвариантности модели (*нуль-моды*). Такие возмущения не выводят за пределы инвариантного множества U_0 и поэтому исключаются выбором текущей метрики ρ в форме (3.3.3).

Замечание 3.4. Нетрудно указать пределы применимости Q-теоремы, связанные со специальной зависимостью лагранжевой плотности от параметра ω, использованной при доказательстве. Например, эта зависимость меняется при включении векторных калибровочных полей (через удлиненную производную). Q-теорема также не применима, если решения (3.3.1) существуют лишь для некоторых дискретных значений параметра ω, так как по нему в этом случае нельзя дифференцировать. □

Рассмотрим теперь важный частный случай, отвечающий нерелятивистским полевым моделям, когда $a = 0$. Оказывается, в этом случае Q-теорема по-прежнему справедлива и область устойчивости определяется неравенством (3.3.19). Действительно, задача сводится тогда к нахождению спектра оператора $\hat{L}_1$ при условии (3.3.17), в которое превращается условие (3.3.7) при $a \to 0$. Используя множитель Лагранжа χ, для наименьшего собственного значения λ оператора $\hat{L}_1$ имеем представление

$$\lambda = \min_{\|\psi\|=1} \left[(\psi, \hat{L}_1\psi) + \chi(g, \psi) \right]. \tag{3.3.20}$$

Из условия $(g, \psi) = 0$ и уравнения на собственные значения

$$2\hat{L}_1\psi + \chi g = 2\lambda\psi$$

находим множитель Лагранжа

$$\chi = -2\frac{(g, \hat{L}_1\psi)}{\|g\|^2}$$

и вносим его в (3.3.20):

$$\lambda = \min_{\|\psi\|=1} \left[(\psi, \hat{L}_1\psi) - 2(g, \psi)\frac{(g, \hat{L}_1\psi)}{\|g\|^2} \right] \equiv \min_{\|\psi\|=1} P[\psi]. \tag{3.3.21}$$

Таким образом, мы свели задачу к безусловной минимизации функционала $P[\psi]/\|\psi\|^2$. Докажем теперь эквивалентность новой и старой задач. Минимизируя функционал (3.3.21), получим уравнение

$$\hat{L}_1\psi - \left[g(g, \hat{L}_1\psi) + \hat{L}_1 g(g, \psi) \right] \|g\|^{-2} = \lambda\psi. \tag{3.3.22}$$

Заметим, что из его допустимых решений необходимо исключить возможность $\psi = g$, как нарушающую условие (3.3.17). Поэтому, подставляя $\psi = g$ в (3.3.22), найдем

$$g\left[\frac{(g, \hat{L}_1 g)}{\|g\|^2} + \lambda \right] \neq 0. \tag{3.3.23}$$

Наконец, скалярно умножая на g обе части уравнения (3.3.22), получим

$$\left[\frac{(g, \hat{L}_1 g)}{\|g\|^2} + \lambda \right] (g, \psi) = 0,$$

откуда с учетом (3.3.23) выводим, что $(g, \psi) = 0$. Это и доказывает эквивалентность задач (3.3.20) и (3.3.21).

Заметим теперь, что для частной подстановки (3.3.12), когда $\psi = \upsilon$, найдем $\hat{L}_1\upsilon = -g$, и поэтому из (3.3.21) следует равенство

$$P[\upsilon] = -(g, \upsilon) = -\frac{\partial Q}{\partial \omega}.$$

При этом минимизация в (3.3.21) приводит к уравнению

$$-\hat{L}_1 g\frac{(g, \upsilon)}{\|g\|^2} = \lambda\upsilon,$$

из которого вытекает, что значение $\lambda = 0$ по-прежнему отвечает поверхности (3.3.16) в ω-пространстве, а область устойчивости, где $P[\psi] > 0$, определяется неравенством (3.3.19), которое в явной форме выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\omega \int \mathrm{d}^3 x (F_p - F_q s) s\right] < 0. \tag{3.3.24}$$

Как будет выяснено чуть позже, условия теоремы 3.8 также необходимы и для Q-устойчивости безузловых солитонов [62, 73].

Теорема 3.9. *Условия теоремы* 3.8 *необходимы и достаточны для Q-устойчивости скалярных безузловых солитонов*.

Доказательство. Покажем, что при нарушении условий Q-теоремы безузловые солитоны линеаризованно неустойчивы по метрикам (3.3.3). Рассмотрим для этого следующий функционал Четаева:

$$W = (\tilde{E}_0 - \tilde{E})\Big[(\xi_1, F_p \dot{\xi}_1) - (\xi_2, h\dot{\xi}_2) + \\ + (\xi_1, c\xi_2) - (\xi_2, \boldsymbol{\alpha}\nabla\xi_1)\Big]. \tag{3.3.25}$$

Используя свойство эллиптичности операторов $\hat{L}_i$, необходимое для положительной определенности $\delta^2\tilde{E}$, нетрудно установить ограниченность функционала (3.3.25) по метрике ρ для области $W > 0$, в которой $\delta^2\tilde{E} < -\delta_1 < 0$. В самом деле, в этой области $(\xi_1, \hat{L}_1\xi_1) < -\delta_1$, откуда, учитывая общую структуру оператора

$$\hat{L}_1 = -\partial_i[A_{ik}\partial_k] + B$$

и обозначая $\max(-B) = M$, получим

$$(\partial_i\xi_1, A_{ik}\partial_k\xi_1) < -\delta_1 - (\xi_1, B\xi_1) < M\|\xi_1\|^2.$$

Найденное неравенство вместе с условием эллиптичности

$$(\partial_i\xi_1, A_{ik}\partial_k\xi_1) \geq m\|\nabla\xi_1\|^2, \quad m > 0,$$

и неравенством (3.2.24) и приводят к нужной оценке. Таким образом, для проверки применимости теоремы Четаева—Мовчана остается лишь вычислить производную $\dot{W}$. В силу линеаризованных уравнений движения

$$F_p\ddot{\xi}_1 + c\dot{\xi}_2 + \operatorname{div}(\boldsymbol{\alpha}\dot{\xi}_2) + \hat{L}_1\xi_1 = 0, \\ h\ddot{\xi}_2 - c\dot{\xi}_1 + (\boldsymbol{\alpha}\vec{\nabla})\dot{\xi}_1 + \hat{L}_2\xi_2 = 0 \tag{3.3.26}$$

находим

$$\dot{W} = (\tilde{E}_0 - \tilde{E})\big[(\dot{\xi}_1, F_p\dot{\xi}_1) - (\dot{\xi}_2, h\dot{\xi}_2) - \\ - (\xi_1, \hat{L}_1\xi_1) + (\xi_2, \hat{L}_2\xi_2)\big].$$

Однако в области $\delta^2\tilde{E} < -\delta_1$ в соответствии с (3.3.9) имеем

$$-(\dot{\xi}_2, h\dot{\xi}_2) - (\xi_1, \hat{L}_1\xi_1) > \delta_1 + (\dot{\xi}_1, F_p\dot{\xi}_1) + (\xi_2, \hat{L}_2\xi_2).$$

Поэтому

$$\dot{W} > \delta_1\Big[\delta_1 + 2(\dot{\xi}_1, F_p\dot{\xi}_1) + 2(\xi_2, \hat{L}_2\xi_2)\Big] \geq \delta_1^2 > 0. \qquad \square$$

Для полноты изложения вернемся к обсуждению узловых солитонов, для которых имеет место [61]

Теорема 3.10. *Узловые стационарные солитоны линеаризованно неустойчивы*.

Доказательство. Для узловых солитонов на основании леммы 3.1 и теоремы 3.7 Куранта из уравнений для нулевых мод

$$\hat{L}_2 u = 0, \quad \hat{L}_1\nabla u = 0$$

следует, что операторы $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ имеют отрицательные собственные значения. Если уравнения (3.3.26) разрешить относительно ξ_2, рассматривая ξ_1 как заданный источник, то $\xi_2 = \eta + A(\xi_1)$, где η подчиняется однородному уравнению

$$h\ddot{\eta} + \hat{L}_2\eta = 0, \tag{3.3.27}$$

допускающему знакопеременный интеграл "энергии"

$$E = (\dot{\eta}, h\dot{\eta}) + (\eta, \hat{L}_2\eta).$$

Составляя функционал Четаева

$$W = -E(\eta, h\dot{\eta}),$$

убеждаемся, что его производная $\dot{W}$ положительна в области $E < -\delta_1 < 0$:

$$\dot{W} = E\big[(\eta, \hat{L}_2\eta) - (\dot{\eta}, h\dot{\eta})\big] > \delta_1^2. \qquad \square$$

Заметим, что по сути в теореме 3.10 речь идет о более сильной, спектральной, неустойчивости.

Интересно выделить предельный (нерелятивистский) случай, когда в (3.3.26) $F_p = h = \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad c = 1$. Для доказательства неустойчивости удобно произвести спектральное разложение

$$\hat{L}_2 = \hat{L}_2^{(+)} + \hat{L}_2^{(-)}, \quad \xi_1 = \xi_1^{(+)} + \xi_1^{(-)}$$

в зависимости от знака спектра оператора $\hat{L}_2$.

Возникающее уравнение

$$\ddot{\xi}_1^{(+)} = -\hat{L}_2^{(+)}\hat{L}_1\left(\xi_1^{(+)} + \xi_1^{(-)}\right)$$

имеет решение вида

$$\xi_1^{(+)} = \left(\hat{L}_2^{(+)}\right)^{1/2}\xi + \hat{S}\left(\xi_1^{(-)}\right),$$

где функция ξ удовлетворяет уравнению типа (3.3.27)

$$\ddot{\xi} = -\left(\hat{L}_2^{(+)}\right)^{1/2}\hat{L}_1\left(\hat{L}_2^{(+)}\right)^{1/2}\xi,$$

для которого неустойчивость уже установлена ранее. $\square$

Для применения Q-теоремы необходимо убедиться в единственности отрицательного собственного значения оператора $\hat{L}_1$ (отрицательной моды).

Лемма 3.2. *В случае сферически-симметричных солитонов для единственности отрицательной моды необходимо и достаточно, чтобы функция $u(r)$, $r = |\mathbf{x}|$ была монотонно убывающей, а решение $w(r)$ уравнения $\hat{L}_1(w/r) = 0$ с граничными условиями $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$ имело один внутренний нуль* (*при* $r > 0$).

Доказательство [62]. Для сферически-симметричных солитонов оператор $\hat{L}_1$ коммутирует с генераторами $\hat{\mathbf{J}}$ группы вращений и поэтому выражается через оператор Казимира $\hat{\mathbf{J}}^2$ с собственными значениями $l(l+1)$. В силу эллиптичности оператора $\hat{L}_1$ его спектр

$\lambda(l)$ растет с ростом l. В то же время $\hat{L}_1 \partial_i u = 0$, т.е. нулевая мода $\partial_i u = u'(r) x_i / r$ отвечает моменту $l = 1$, $\lambda(1) = 0$. Так как $u'(r) < 0$, то по *теореме Куранта* $\lambda = 0$ является наименьшим собственным значением для $l = 1$. Поэтому состояния с $\lambda < 0$ могут быть только сферически-симметричными, а их число, по *теореме сравнения Штурма* [65], равно числу внутренних нулей у решения $w(r)$ уравнения $\hat{L}_1(w/r) = 0$ с граничными условиями $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$. □

Рассмотрим примеры применения Q-теоремы, в которых условия леммы 3.2 выполнены, т.е. отрицательная мода единственна.

Пример 3.5. *Степенная модель*. Для этого случая характерна функция Лагранжа типа $F = p + s - s^n/n$ и, соответственно, функция $u(\mathbf{x})$ определяется как решение уравнения

$$\left[\triangle - 1 + \omega^2 + u^{2(n-1)}\right] u = 0. \tag{3.3.28}$$

В частности, уравнение (3.3.28) допускает безузловое решение $u(r)$ при выполнении условий

$$|\omega| < 1, \quad 0 < 1 - 1/n \le 2/D. \tag{3.3.29}$$

Выполнив в (3.3.28) замену переменных

$$r = s(1 - \omega^2)^{-1/2}, \quad u = \upsilon(1 - \omega^2)^{1/[2(n-1)]},$$

нетрудно вычислить заряд $Q(\omega)$ невозмущенного солитона:

$$Q(\omega) = \omega \|u\|^2 = C\omega(1 - \omega^2)^{\{[1/(n-1)] - (D/2)\}}. \tag{3.3.30}$$

Из (3.3.30) следует, что условие (3.3.24) выполняется для частот

$$1 > |\omega| > \left(\frac{n+1}{n-1} - D\right)^{-1/2}. \tag{3.3.31}$$

Условие (3.3.18) также выполнено, так как $g = 2\omega u \neq 0$, а функция $\psi_- \neq 0$, как первая собственная функция оператора $\hat{L}_1$. На этом основании заключаем, что неравенство (3.3.31) определяет область Q-устойчивости безузловых солитонов модели.

Пример 3.6. *Логарифмическая модель* [74]. Данная модель задается функцией Лагранжа вида $F = p + s(1 - \ln s)$ и допускает солитонные решения (3.3.1) вида

$$u(r) = \exp\left[\frac{1}{2}(D - \omega^2 - r^2)\right].$$

Выражение для заряда модели

$$Q(\omega) = C\omega \exp(-\omega^2)$$

определяет область Q-устойчивости безузловых солитонов модели [64, 75] посредством неравенства

$$|\omega| > 1/\sqrt{2}. \tag{3.3.32}$$

Пример 3.7. *Нелинейное уравнение Шрёдингера* рассмотрим в наиболее общем (см. часть I) виде

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = -\left[\triangle + |\psi|^{2(n-1)}\right] \psi, \quad n > 1, \tag{3.3.33}$$

допускающем солитонные решения (3.3.1) с амплитудой u, подчиняющейся (в свою очередь) уравнению, получаемому из (3.3.28) подстановкой $\omega^2 - 1 \to \omega > 0$. Путем замены переменных

$$r = s|\omega|^{-1/2}, \quad u = \upsilon|\omega|^{1/2(n-1)}$$

последнее приводится к виду (3.3.28) при $\omega = 0$, что позволяет выписать явный вид заряда

$$Q(\omega) = \|u\|^2 = C|\omega|^{\{[1/(n-1)] - (D/2)\}}. \tag{3.3.34}$$

Отсюда следует, что *область устойчивости* характеризуется условиями

$$1 < n < 1 + \frac{2}{D}, \tag{3.3.35}$$

а *область неустойчивости* задается неравенствами

$$1 + \frac{2}{D} < n < \frac{D}{D-2}, \tag{3.3.36}$$

вытекающими из (3.3.29) и имеющими смысл при $D \ge 2$. Неустойчивость безузловых солитонов в области (3.3.36) устанавливается с помощью функционала Четаева

$$W = (\tilde{E}_0 - \tilde{E})(\xi_1, \xi_2),$$

являющегося предельным случаем функционала (3.3.25). Неустойчивость узловых солитонов по метрикам

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{2} \|\xi_{i0}\|'_C, \quad \rho = \inf_{u \in U_0} \sum_{i=1}^{2} \|\xi_i\|$$

вытекает из теоремы 3.8.

3.4. Устойчивость многозарядных солитонов

Рассмотрим вполне естественное обобщение Q-теоремы на случай многокомпонентных полей $\psi^s(\mathbf{x}, t)$, $s = \overline{1, n}$, с плотностью лагранжиана

$$L = -F\left(\psi^s, \dot{\psi}^s, \partial_i \psi^s\right), \tag{3.4.1}$$

допускающей внутреннюю группу симметрии G ранга l. Иными словами, в G имеется l диагональных генераторов $\hat{\Gamma}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, l}$, отвечающих сохраняющимся зарядам Q_α, а стационарные (в данном случае *многозарядные*) солитоны описываются функциями вида

$$\psi_s^{(0)}(\mathbf{x}, t) = [\exp(\hat{\omega} t) u(\mathbf{x})]_s, \quad \hat{\omega} = \omega_\alpha \hat{\Gamma}_\alpha. \tag{3.4.2}$$

Это позволяет перейти в (3.4.1) к более удобным полевым переменным $\varphi(\mathbf{x}, t)$ посредством подстановки

$$\psi = \exp(\hat{\omega} t) \varphi,$$

в терминах которых лагранжева плотность системы приобретает вид

$$L = -F(\varphi^s, \dot{\varphi}^s + (\hat{\omega}\varphi)^s, \partial_i \varphi^s).$$

В качестве функционала Ляпунова выберем интеграл

$$V = E - \omega_\alpha Q_\alpha,$$

где обозначено

$$E = \int \mathrm{d}x \{ F - F^{\cdot}_{s} [\dot{\varphi}^s + (\hat{\omega}\varphi)^s] \},$$

$$Q_\alpha = - \int \mathrm{d}x \, F^{\cdot}_{s} (\hat{\Gamma}_\alpha \varphi)^s .$$

Вторая вариация $\delta^2 V$ и условия $\delta Q_\alpha = 0$ записываются в виде

$$\delta^2 V = -\left(F^{\cdot\cdot}_{sr} \dot{\xi}^s, \dot{\xi}^r \right) + \left(\xi^r, \hat{L}_{rs} \xi^s \right), \tag{3.4.3}$$

$$\delta Q_\alpha = -\left(\dot{\xi}^r, F^{\cdot\cdot}_{sr} (\hat{\Gamma}_\alpha u)^s \right) - \left(g^r_\alpha, \xi^r \right) = 0. \tag{3.4.4}$$

Так как в (3.4.3) квадратичная форма по скоростям должна быть положительна, то введем положительно-определенную матрицу

$$A_{\alpha\beta} = -\left(F^{\cdot\cdot}_{sr} (\hat{\Gamma}_\alpha u)^s, \, (\hat{\Gamma}_\beta u)^r \right)$$

и, учитывая (3.4.4) с помощью множителей Лагранжа, исключим из (3.4.3) скорости $\dot{\xi}^s$:

$$\delta^2 V \geq (A^{-1})_{\alpha\beta} \left(g^r_\alpha, \xi^r \right) \left(g^s_\beta, \xi^s \right) + \left(\xi^r, \hat{L}_{rs} \xi^s \right) \equiv \left(\xi, \hat{K} \xi \right). \tag{3.4.5}$$

Из (3.4.5) видно, что условие устойчивости сводится к требованию положительности спектра оператора $\hat{K}$: $\lambda_0 = \lambda_{\min} > 0$. Чтобы определить границу области устойчивости, продифференцируем уравнение для u^s по ω_α, что приводит к соотношению

$$\hat{L}_{rs} u^s_\alpha = -g^r_\alpha ,$$

где

$$u^s_\alpha \equiv \frac{\partial u^s}{\partial \omega_\alpha}. \tag{3.4.6}$$

С учетом (3.4.6) условие $\lambda_0 = 0$, или (что равносильно) $\hat{K}\xi = 0$, принимает вид

$$\hat{L}\xi + (A^{-1})_{\alpha\beta} \left(\hat{L} u_\alpha \right) \left(\xi, \hat{L} u_\beta \right) = 0. \tag{3.4.7}$$

В свою очередь, из (3.4.7) вытекает, что $\xi = \xi_0 + a_\alpha u_\alpha$, где $\hat{L}\xi_0 = 0$. С другой стороны, в силу (3.4.6) имеем

$$\left(g^r_\alpha, u^s_\alpha \right) = A_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \omega_\beta}, \tag{3.4.8}$$

и поэтому уравнение (3.4.7) эквивалентно алгебраической системе

$$(A^{-1})_{\alpha\beta} a_\gamma F_{\gamma\beta} = 0,$$

обладающей нетривиальным решением $a_\gamma \neq 0$ лишь при условии

$$\det[[F_{\alpha\beta}]] = 0. \tag{3.4.9}$$

Таким образом, условие $\lambda = 0$ выполняется вместе с условием (3.4.9). В то же время из (3.4.6) выводим, что

$$K_{\alpha\beta} \equiv \left(u_\alpha, \hat{K} u_\beta \right) = F_{\alpha\beta} + (A^{-1})_{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu},$$

и поэтому область устойчивости системы расположена внутри области положительности матрицы $F_{\alpha\beta}$, или кратко $F > 0$.

Представим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ функций ξ в виде $\mathcal{H} = N \oplus \mathrm{Ker}\hat{L} \oplus P$, где N и P отвечают, соответственно, отрицательным и положительным собственным значениям оператора $\hat{L}$. Тогда из (3.4.5) следует еще одно необходимое условие для $\lambda_0 > 0$

$$\mathrm{Lin}\{g^r_\alpha\} \equiv \mathcal{H}_g \supset N, \tag{3.4.10}$$

и, в частности, $\dim N \equiv \nu \leq l$.

Покажем, что условия $F > 0$ и (3.4.10) *необходимы и достаточны* для $\lambda_0 > 0$. В самом деле, положим $u_\alpha = x_\alpha + y_\alpha + z_\alpha$, $\xi = a + b + c$, где $x_\alpha, a \in N$; $y_\alpha, b \in \mathrm{Ker}\hat{L}$; $z_\alpha, c \in P$. Минимизируя в (3.4.5) по c, найдем

$$\delta^2 V \geq \left(a, \hat{L} x_\alpha \right) (A + B)^{-1}_{\alpha\beta} \left(a, \hat{L} x_\beta \right) + \left(a, \hat{L} a \right) \equiv \left(a, \hat{M} a \right), \tag{3.4.11}$$

где обозначено $B_{\alpha\beta} = \left(z_\alpha, \hat{L} z_\beta \right)$. Далее, в силу (3.4.10) справедливо разложение $a = s^\alpha x_\alpha$, и поэтому из (3.4.11) выводим оценку

$$\delta^2 V \geq s^\alpha M_{\alpha\beta} s^\beta \equiv s^T \hat{M} s,$$

где $M_{\alpha\beta} = \left(x_\alpha, \hat{M} x_\beta \right)$. Замечая, что

$$B_{\alpha\beta} = \left(u_\alpha, \hat{L} u_\beta \right) - \left(x_\alpha, \hat{L} x_\beta \right)$$

является неотрицательной матрицей, найдем, согласно (3.4.8),

$$A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta} - \left(x_\alpha, \hat{L} x_\beta \right) = -F_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}, \tag{3.4.12}$$

где $C_{\alpha\beta} = -\left(x_\alpha, \hat{L} x_\beta \right)$ — положительная матрица. Таким образом, из (3.4.11) и (3.4.12) выводим, что

$$M = -C - C(F - C)^{-1} C = F(I - C^{-1} F)^{-1},$$

или $M > 0$, если $F > 0$.

Рассмотрим теперь важный частный случай одной отрицательной моды, когда $\nu = \dim N = 1$. Тогда вместо (3.4.5) удобно воспользоваться оценкой

$$\delta^2 V \geq a^{-1} (g, \xi)^2 + \left(\xi, \hat{L} \xi \right) \equiv \left(\xi, \hat{K}' \xi \right), \tag{3.4.13}$$

где $g = \omega_\alpha g_\alpha$, $a = A_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta$. В результате вместо (3.4.6) получаем соотношение

$$\hat{L}(u_\alpha, \omega_\alpha) = -g,$$

а условие положительности спектра оператора $\hat{K}'$ сводится к неравенству

$$F_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = -\omega_\alpha \omega_\beta \frac{\partial Q_\beta}{\partial \omega_\alpha} > 0. \tag{3.4.14}$$

Таким образом, справедливо следующее обобщение Q-теоремы для многозарядных солитонов [3, 59, 61, 70, 73, 76, 77]:

Т е о р е м а 3.11. *Стационарные солитонные решения* (3.4.2) *Q-устойчивы в области $F > 0$ (см.* (3.4.8) *и* (3.4.14)*), если выполнено условие* (3.4.10), *т.е. если пространство, натянутое на векторы g_α, включает отрицательные моды.*

3.5. Метод функциональных оценок для исследования устойчивости

Идея условной устойчивости многомерных солитонов была, в частности, реализована В.Е. Захаровым и Е.А. Кузнецовым, показавшими, что во многих случаях можно сравнительно просто убедиться в существовании нижней грани функционала энергии системы при условии фиксации ряда дополнительных интегралов движения [78, 79]. Правда, при этом остается в стороне ряд тонких вопросов о достижимости нижней грани, о сходимости минимизирующей последовательности, о регулярности и гладкости минимальной конфигурации, однако такой подход вполне соответствует так называемому "физическому уровню строгости" и эффективно работает в разнообразных приложениях. Поскольку в литературе имеются удачные изложения этого метода (см., например, [50, 80]), то здесь мы ограничимся его демонстрацией на некоторых физических моделях.

Пример 3.8. *Нелинейное уравнение Шрёдингера.* Воспользовавшись уже введенными ранее в примере 3.7 определениями динамических величин модели, покажем, что энергия E в $\mathbf{R}^3$ оценивается снизу через заряд Q из (3.3.34). В самом деле,

$$E[\psi] = \int \mathrm{d}^3x\left(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{n}|\psi|^{2n}\right) \equiv \|\nabla\psi\|^2 - \frac{1}{n}\|\psi^n\|^2.$$

Вводя обозначение $I_{2k} = \|\psi^k\|^2,\ k = 1, 2, \ldots$, и используя известные неравенства

$$\|\nabla\psi\|^2 \geq \alpha I_6^{1/3}, \quad \alpha = 3(\pi/2)^{4/3},$$

$$I_{2n} \leq I_2^{(3-n)/2} I_6^{(n-1)/2},$$

приходим к оценке

$$E[\psi] \geq \alpha I_6^{1/3} - \frac{1}{n} I_2^{(3-n)/2} I_6^{(n-1)/2}. \tag{3.5.1}$$

Если $5 > 3n$, то правая часть в (3.5.1) имеет минимум при

$$I_6 = \left[\frac{3(n-1)}{2\alpha n}\right]^{6/(5-3n)} I_2^{3(3-n)/(5-3n)}.$$

Поэтому энергия $E[\psi]$ при фиксированном заряде (числе частиц) $I_2 = Q$ также имеет минимум, который и реализуется на некоторой стабильной конфигурации.

Пример 3.9. *Уравнение Кортевега — де Фриса* в $\mathbf{R}^1$ имеет вид

$$\partial_t\varphi + \partial_x^3\varphi + 6\varphi\partial_x\varphi = 0, \tag{3.5.2}$$

описывая волны на мелкой воде. Известно, что оно допускает законы сохранения энергии

$$E[\varphi] = \int \mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \varphi^3\right] \equiv \frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2 - I_3$$

и импульса

$$P = \int \mathrm{d}x\,\varphi^2 = I_2.$$

Используя неравенство Гальярдо—Ниренберга—Ладыженской

$$I_3 \leq \mathrm{C} I_2^{5/4}\|\partial_x\varphi\|^{1/2}, \quad \mathrm{C} = \mathrm{const},$$

получаем оценку для энергии снизу:

$$E[\varphi] \geq \frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2 - \mathrm{C} I_2^{5/4}\|\partial_x\varphi\|^2. \tag{3.5.3}$$

Минимизируя правую часть (3.5.3) по $\|\partial_x\varphi\|$, получим новую оценку

$$E[\varphi] \geq \mathrm{C}_0 I_2^{5/3}, \quad \mathrm{C}_0 = \mathrm{const}.$$

Таким образом, при фиксированном импульсе $P = I_2$ энергия ограничена снизу и поэтому имеет минимум, который реализуется на некоторой устойчивой конфигурации.

Пример 3.10. *Уравнение Кадомцева—Петвиашвили* в $\mathbf{R}^2$ имеет вид

$$\partial_x\left(\partial_t\varphi + \partial_x^3\varphi + 6\varphi\partial_x\varphi\right) = 3\partial_y^2\varphi$$

и обычно рассматривается как двумерное обобщение уравнения Кортевега—де Фриса. Оно также допускает законы сохранения энергии

$$E[\varphi] = \int \mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + \frac{3}{2}(\partial_y w)^2 - \varphi^3\right],$$

$$\partial_x w = \varphi,$$

и импульса

$$P = \int \mathrm{d}x\,\varphi^2 = I_2.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера

$$I_3 \leq (I_2 I_4)^{1/2},$$

и очевидными неравенствами

$$I_4 \leq 4\int \mathrm{d}^2x|\varphi\partial_x\varphi| \cdot \int \mathrm{d}^2x|\varphi\partial_y\varphi|,$$

$$\int \mathrm{d}^2x|\varphi\partial_y\varphi| = \int \mathrm{d}^2x|\varphi\partial_{xy}^2 w| \leq$$

$$\leq \int \mathrm{d}^2x|\partial_x\varphi| \cdot |\partial_y w| \leq \|\partial_x\varphi\| \cdot \|\partial_y w\|,$$

объединяя которые, приходим к соотношению

$$I_3 \leq 2I_2^{3/4}\|\partial_x\varphi\| \cdot \|\partial_y w\|^{1/2},$$

позволяющему получить оценку для энергии снизу:

$$E[\varphi] \geq \frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2 + \frac{3}{2}\|\partial_y w\|^2 - 2I_2^{3/4}\|\partial_x\varphi\| \cdot \|\partial_y w\|^{1/2}. \tag{3.5.4}$$

Минимизируя правую часть в (3.5.4) по $\|\partial_x\varphi\|$ и $\|\partial_y w\|$, получаем неравенство

$$E[\varphi] \geq -\frac{2}{3}I_2^3,$$

означающее, что при фиксированном импульсе $P = I_2$ минимум энергии реализуется на стабильной солитонной конфигурации.

3.6. Устойчивость плазменных солитонов (БГК-структур)

Применим прямой метод Ляпунова для исследования устойчивости плазменных солитонов типа *электронных фазовых дыр*, или *волн Бернштейна—Грина—Крускала* [81, 82]. Запишем уравнения Власова—Пуассона для функции $f(t,x,\upsilon)$ распределения электронов и напряженности $E(t,x)$ электрического поля в плазме в uuoueuAuu aeeoA uAa:

$$\partial_t f + \upsilon\partial_x f - E\partial_\upsilon f = 0, \tag{3.6.1}$$

$$\partial_x E = 1 - \int \mathrm{d}\upsilon\, f. \tag{3.6.2}$$

С учетом граничных условий

$$E(t,\pm\infty) = 0, \quad f(t,\pm\infty,\upsilon) = f_\infty(\upsilon),$$
$$\int \mathrm{d}\upsilon\, f_\infty(\upsilon) = 1,$$

отвечающих нейтральной системе, и выбирая систему отсчета, связанную с центром распределения f_∞, можно исключить электрическое поле с помощью (3.6.2):

$$E(t,x) = -\int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}\upsilon' f(t,x',\upsilon') - f_\infty(\upsilon'),$$

переписав уравнение (3.6.1) в виде

$$\partial_t f + \upsilon\partial_x f + \partial_\upsilon f \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}\upsilon \big(f(t,x',\upsilon') - f_\infty(\upsilon')\big) = 0. \tag{3.6.3}$$

Пусть уравнение (3.6.3) имеет стационарное решение

$$f_0 = f_0(w,\mu), \quad E_0(x) = -\phi'{}_0(x+a), \quad a = \mathrm{const},$$

где $w = (\upsilon^2/2) - \phi_0(x+a)$ — энергия электрона, $\mu = \mathrm{sgn}\,\upsilon$. Так как функция распределения положительна, то полагаем $f = \chi^2$, $f_0 = \chi_0^2$, считая функцию $\chi_0(x+a,\upsilon)$ решением уравнения

$$\hat{D}_0\chi_0 = 0, \tag{3.6.4}$$

в котором использован стационарный оператор Лиувилля

$$\hat{D}_0 = -\upsilon\partial_x + E_0\partial_\upsilon.$$

Вводя возмущение $\xi = \chi - \chi_0$ и учитывая, что оно должно удовлетворять линеаризованному условию нормировки

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}\upsilon\, \chi_0 \xi = 0, \tag{3.6.5}$$

удобно представить возмущение ξ в виде

$$\xi = \hat{D}_0\left[S(2f_0)^{-1/2}\varphi\right], \quad S = |\partial_w f_0|^{1/2}.$$

Тогда нетрудно убедиться, что уравнение (3.6.5) удовлетворяется в силу (3.6.4), а новая неизвестная функция $\varphi(t,x,\upsilon)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\hat{L}\partial_t\varphi = \hat{H}\varphi, \tag{3.6.6}$$

где введены следующие операторы:

$$\hat{L} = \epsilon\hat{D}_0, \quad \epsilon = \mathrm{sgn}\,\partial_w f_0,$$
$$\hat{H} = \epsilon\hat{D}_0^2 + \upsilon S \int \mathrm{d}\upsilon'\upsilon' S(x,\upsilon').$$

Замечая, что $\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\upsilon\,\chi_0^2 = \infty$, убеждаемся с учетом (3.6.4), что $\hat{L}\chi_0 = 0$, и поэтому нулевое собственное значение оператора $\hat{L}$ принадлежит непрерывному спектру. Это позволяет обратить оператор $\hat{L}$ и привести уравнение (3.6.6) к нормальной форме:

$$\partial_t\varphi = \hat{D}_0\varphi - \epsilon S \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}\upsilon'\upsilon' S'\varphi'. \tag{3.6.7}$$

Из (3.6.7) следует, что существует интеграл движения

$$V = \int \mathrm{d}x \left[-\int \mathrm{d}\upsilon\, \epsilon \big(\hat{D}_0\varphi\big)^2 + \left(\int \mathrm{d}\upsilon\, \upsilon S\varphi\right)^2 \right], \tag{3.6.8}$$

который в случае монотонных распределений, т.е. при $\epsilon = -1$, является положительно определенным. Поэтому разумно выбрать метрики ρ_0, ρ следующим образом:

$$\rho_0^2 = \int \mathrm{d}x \left[\int \mathrm{d}\upsilon \big(\hat{D}_0\varphi\big)^2 + \left(\int \mathrm{d}\upsilon\, \upsilon S\varphi\right)^2 \right],$$
$$\rho = \inf_a \rho_0.$$

В таком случае при $\epsilon = -1$ функционал $V = \rho_0^2 \geq \inf_a \rho_0^2 = \rho^2$ можно рассматривать как функционал Ляпунова. Тем самым устанавливается устойчивость монотонных по энергии w распределений электронов в плазме Власова—Пуассона. Этот результат известен как *теорема Ньюкома—Гарднера* в случае однородных распределений (т.е. для $\partial_x f_0 = 0$).

Покажем, что монотонные распределения не только локально, но и глобально устойчивы. С этой целью выберем функционал Ляпунова

$$V_1 = \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{1}{2}E^2 + \int \mathrm{d}\upsilon \left[\frac{1}{2}f\upsilon^2 + \lambda(f - f_\infty) + G(f) \right] \right\},$$

где $\lambda = G'(f_0) - w$ — множитель Лагранжа, найденный из условия $\delta V_1(f_0) = 0$. Так как $\lambda = \mathrm{const}$, то после дифференцирования λ по w находим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w} = S^2 G''(f_0) - 1 = 0. \tag{3.6.9}$$

Уравнение (3.6.9) позволяет выразить функцию $G(f)$ и сделать вывод о выпуклости функционала $V_1[f]$, а тем самым и об устойчивости монотонных распределений.

Однако если распределение не является монотонным, т.е. если ϵ знакопеременно, то функционал (3.6.8) также знаконеопределенный, что говорит о неустойчивости. В самом деле, рассмотрим функционал Четаева

$$W = V \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\upsilon\, \epsilon F(x,\upsilon)\big(\hat{D}_0\varphi\big)^2, \tag{3.6.10}$$

где $F(x, v)$ — решение вспомогательного уравнения

$$\hat{D}_0 F = 1 + \epsilon F^2 \int \mathrm{d}v\, v^2 S^2. \tag{3.6.11}$$

Используя уравнения (3.6.7), (3.6.11) и выражение (3.6.10), найдем

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -V\left\{-V + \int \mathrm{d}x\left[\int \mathrm{d}v\, vS(\varphi - F\hat{D}_0\varphi)\right]^2 + \right.$$
$$+ \int \mathrm{d}x\left[\left(\int \mathrm{d}v\, v^2 S^2\right)\int \mathrm{d}v\, F^2\left(\hat{D}_0\varphi\right)^2 - \right.$$
$$\left.\left. - \left(\int \mathrm{d}v\, vSF\hat{D}_0\varphi\right)^2\right]\right\}.$$

Отсюда видно, что в области $V < 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq V^2.$$

Последнее утверждение означает, что выполняются условия теоремы Четаева—Мовчана (теорема 3.2) о неустойчивости по метрикам ρ_0', ρ', где положено

$$\rho'^2_0 = \rho_0^2 + \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v\, |F|\left(\hat{D}_0\varphi\right)^2, \quad \rho' = \inf_a \rho'_0.$$

Следует подчеркнуть, что известные частотные критерии неустойчивости [83] здесь неприменимы в силу существенной неоднородности распределений.

Список литературы

1. Фейнман Р. (1975) *Взаимодействие фотонов с адронами* (М., Мир).
2. Эйнштейн А. (1966) *Собрание научных трудов*. Т.2 (М., Наука).
3. Makhankov V.G., Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. (1993) *The Skyrme Model: Fundamentals, Methods, Applications* (Heidelberg, Berlin, New York, Springer-Verlag).
4. Lee T.D. *Physica Scripta* **20**, 440 (1979); *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (1985) (London, New York, Harwood Acad. Publ.).
5. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. (1980) *Теория солитонов: Метод обратной задачи*. (Под ред. Новикова С.П.) (М., Наука).
6. Буллаф Р., Кодри Ф. (ред.) (1983) Солитоны (М., Мир).
7. Калоджеро Ф., Дегасперис А. (1985) *Спектральные преобразования и солитоны* (М., Мир).
8. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. (1985) *Итоги науки и техники. Сер.*"*Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*" (М., ВИНИТИ) Т.4. С. 179—284.
9. Тахтаджян Л.., Фаддеев Л.Д. (1986) *Гамильтонов подход в теории солитонов* (М., Наука).
10. Абловиц М., Сигур Х. (1987) *Солитоны и метод обратной задачи* (М., Мир).
11. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. (1988) *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М., Мир).
12. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Маланюк Т.Г., Маханьков В.Г. *Физ. ЭЧАЯ* **19**, 252 (1988).
13. Ньюэлл А. (1989) *Солитоны в математике и физике (М., Мир)*.
14. Makhankov V.G. (1990) *Soliton Phenomenology* (Kluwer Academic Publ.).
15. Zakharov V.E. (ed.) (1991) *What is Integrability?* (Springer-Verlag).
16. Antoniou I., Lambert F.J. (eds.) (1991) *Solitons and Chaos* (Springer-Verlag).
17. Склянин Е.К. *Зап.научных семинаров ЛОМИ* **95**, 55 (1980). Изергин А.Г., Корепин В.Е. *Физ. ЭЧАЯ*. **13**, 501 (1982).
18. Thacker H.B. *Rev.Mod.Phys.* **53**, 253 (1982).
19. Кричевер И.М. *УМН* **32**, 183 (1977).
20. Салль М. А. *Теор. и мат.физ.* **53**, 227 (1982).
21. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. *Phys.Rep.* **71**, 313 (1981).
22. Кричевер И.М. *Функц. анализ и его прилож.* **20**, 42 (1977).
23. Benilov E.S., Burtzev S.P. *Phys.Lett. A* **98**, 256 (1983).
24. Kundu A., Makhankov V.G., Pashaev O. Physica *D* **11**, 375 (1984).
25. Давыдов А.С. (1984) *Солитоны в молекулярных системах* (Киев., Наукова думка).
26. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. *Теор. и мат.физ.* **53**, 55 (1982).
27. Ishimori Y. Progr. *Theor.Phys.* **72**, 33 (1984).
28. Davey A., Stewartson K. *Proc.Roy.Soc.* (*London*) *A* **338**, 101 (1974).
29. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ* **61**, 118 (1971).
30. Boiti M., Leon J., Martina L., Pempinelli F. *Phys.Lett. A* **132**, 432 (1988).
31. Fokas A., Santini P.M. *Phys. Rev.Lett. A* **63**, 1329 (1989).
32. Boiti M., Martina L., Pashaev O., Pempinelli F. *Phys.Lett. A* **160**, 55 (1991). Santini P.M. *Physica. D* **41**, 2 (1990).
33. Makhankov V.G. (1992) JINR Preprint E4-92-208 (Dubna).
34. Konopelchenko B., Dubrovsky V. *Physica. D* **48**, 367 (1991); *D* **55**, 42 (1992).
35. Манаков С.В. *ЖЭТФ* **65**, 505 (1973).
36. Makhankov V.G., Slavov S.I. (1990) *IVth International Workshop* "*Solitons and Applications*" (Eds. Makhankov V.G., Fedyanin V.K., Pashaev O.K.) (Singapore, World Scientific). P. 107.
37. Fordy A., Kulish P. *Comm.Math.Phys.* **89**, 427 (1988).
38. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) (1984) *Введение в квантовую статистическую механику* (М., Наука).
39. Dubrovin B.A., Makhankov V.G. (1993) Preprint Univ. of Colorado (Boulder).
40. Makhankov V.G. (1993) LANL (CNLS). Preprint LA-UR-93-1331 (Los Alamos).
41. Hronek J., Makhankov V.G. (1992) Preprint Univ. of Roma, No. 851. (Roma, INFN).
42. Degasperis A. (1991) *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems* (Eds. Makhankov V.G., Pashaev O.K.) (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag). P. 61.
43. Degasperis A. (1990) In *Inverse Method in Action* (Ed. Sabatier P.C.) (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag).
44. Boiti M., Leon J., Martina L., Pempinelli F., Perrone D. (1991) In *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems* (Eds. Makhankov V.G., Pashaev O.K.) (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag). P. 47.
45. Makhankov V.G. *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978).
46. Ляпунов А.М. (1935) *Общая задача об устойчивости движения*. (Л., М., ОНТИ).
47. Арнольд В.И. *Прикл.мат. и мех.* **29**, 846 (1965).
48. Зубов В.И. (1957) *Методы А.М. Ляпунова и их применение* (Л., Изд-во ЛГУ).
49. Мовчан А.А. *Прикл.мат. и мех.* **24**, 988 (1960).
50. Kuznetsov E.A., Rubenchik A.U., Zakharov V.E. *Phys.Rep.* **142**, 103 (1986).
51. Арнольд В.И. *ДАН СССР* **162**, 273 (1965).
52. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T., Weinstein A. *Phys.Rep.* **123**, 1 (1985).
53. Shatah J., Strauss W. *Comm.Math.Phys.* **100**, 173 (1985).
54. Benjamin T.B. *Proc.Roy.Soc* (*London*) *A* **328**, 153 (1972).
55. Grillakis M. *Comm.Pure and Appl.Math.* **41**, 747 (1988).
56. Hobart R.H. *Proc.Phys.Soc* (*London*). **82**, 201 (1963); **85**, 610 (1964).
57. Derrick G.H. *J.Math.Phys.* **5**, 1252 (1964).
58. Duff M.J., Isham C.J. *Nucl.Phys.B* **108**, 130 (1976).
59. Рыбаков Ю.П. (1983) *Проблемы теории грав. и элем.частиц* (М., Энергоатомиздат). Вып. 14. С.161.
60. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. (1989) *Модель Скирма и солитоны в физике адронов. Лекции для молодых ученых*. Вып. 55. Р4-89-568 (Дубна, ОИЯИ).
61. Рыбаков Ю.П. (1991) *Итоги науки и техники. Сер.* "*Классическая теория поля и теория гравитации*". Т. 2. Гравитация и космология (М., ВИНИТИ). С. 56.
62. Рыбаков Ю.П. (1986) *Проблемы теории грав. и элем.частиц*. (М., Энергоатомиздат). Вып. 16. С.174.

63. Рыбаков Ю.П. (1979) *Проблемы теории грав. и элем.частиц.* (М., Атомиздат). Вып. 10. С.194.
64. Kumar A., Nisichenko V.P., Rybakov Yu.P. *Intern.J.Theor.Phys.* **18,** 425 (1979).
65. Курант Р., Гильберт Д. (1951) *Методы математической физики.* Т. 1 (М., Л., ГИТТЛ).
66. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. *Изв. вузов. Сер.* "*Радиофизика*" **16,** 1020 (1973).
67. Заставенко Л.Г. *Прикл.мат. и мех.* **29**, 430 (1965).
68. Рыбаков Ю.П. (1966) *Проблемы теории грав. и элем.частиц* (М.: Атомиздат). С. 68.
69. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. *Phys.Rev. D* **13**, 2739 (1976).
70. Grillakis M., Shatah I., Strauss W. *J.Funct.Anal.* **74**, 160 (1987); **94**, 308 (1990).
71. Laedke E.W., Spatchek K.H. *Phys.Rev.Lett.* **52**, 279 (1984).
72. Weinstein M.I. *Comm.Pure and Appl.Math.* **39**, 51 (1986).
73. Рыбаков Ю.П. (1985) *Структура частиц в нелинейной теории поля* (М., Изд-во Ун-та дружбы нар.).
74. Bialynicki-Birula I., Mycielski J. *Ann.Phys.* (New York) **100**, 62 (1976).
75. Симонов Ю.А. *ЯФ*. **30**, 1457 (1979).
76. Oh Y.-G. *J. Geom. and Phys.* **4**, 163 (1987).
77. Rybakov Yu.P., Chakrabarti S. *Int.J.Theor.Phys.* **23**, 325 (1984).
78. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. *ЖЭТФ* **66**, 594 (1974).
79. Кузнецов Е. А., Турицын С.К. *ЖЭТФ* **82**, 1457 (1982).
80. Кингсеп А.С., Чукбар К.В., Яньков В.В. (1987) *Вопросы теории плазмы* (М., Энергоатомиздат). Вып. 16. С.209.
81. Bernstein I.B., Greene J.M., Kruskal M.D. *Phys.Rev.* **108**, 546 (1957).
82. Turikov V.A. *Physica Scripta* **30**, 73 (1984).
83. Эккер Г. (1974) *Теория полностью ионизированной плазмы* (М., Мир).

LOCALIZED NON-TOPOLOGICAL STRUCTURES: CONSTRUCTION OF SOLUTIONS AND STABILITY PROBLEMS

V.G. Makhan'kov
Center for Nuclear Studies, Los Alamos National Laboratory, USA and Joint Institute for Nuclear Research, Dubna
Los Alamos, P.O. Box 1663, Mail Stop B258, New Mexico 87545 USA; 141980, Dubna, Moscow Region, Russian Federation
E-mail: mvg@goshawk.lapl.gov
max@lcta.jinrc.dubna.su
Yu.P. Rybakov, V.I. Sanyuk
People's Friendship University of Russia, Moscow
6, Ulitsa Mikhlukho-Maklaya, 117198, Moscow, Russian Federation
E-mail: sanyuk@udn.msk.su

Possibilities in the description of structures localized in a finite region (solitons, vortices, defects and so on) within the framework of both integrable and nonintegrable field models are discussed. For integrable models a universal algorithm for the construction of soliton-like solutions is duscussed in detail. This might be generalized to many dimensional cases and its efficacy for several examples exceeds that of the standart inverse scattering transform method. For nonintegrable models we focus mainly on methods of studying the stability of soliton-like solutions, since stability problems become the most substantial ones, when one turns to a description of many dimensional solitons. We pay a special attention to those stable localized structures, which are not endowed with topological invariants, since for topologically nontrivial structures there exist efficacious methods of stability analysis, based on energy estimates. Here the principal topics of the Lyapunov's direct method in application to distributed systems are discussed. Efficacious criteria of stability for stationary solitons, endowed with one or several charges (the Q-theorem) are derived. We also illustrate with several examples the applicability of the method of functional estimates and discuss the stability of plasma solitons of the electron phase hole type.
Bibliography — 83 references.

Received 21 October 1993