

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вынужденный черенковский эффект

В.М. Арутюнян, С.Г. Оганесян

Детально проанализировано взаимодействие свободных электронов с лазерным излучением в неограниченной диэлектрической среде и над поверхностью диэлектрического волновода. Исследование базируется как на классическом, так и на квантовом подходах. Рассмотрены возможности модуляции и поляризации пучка электронов лазерным излучением. Проанализированы возможности создания черенковского лазера и черенковского клистрона.

PACS numbers: 41.60. Bq

Содержание

1. Введение (1089).
 2. Вынужденный черенковский эффект (1090).
 - 2.1. Движение электрона в поле плоской волны в диэлектрической среде.
 - 2.2. Вынужденный черенковский эффект на лазерном пучке конечного размера.
 - 2.3. Модуляция пучка электронов (классическая теория).
 - 2.4. Модуляция пучка электронов (квантовая теория).
 - 2.5. Модуляция поляризованного пучка электронов.
 - 2.6. Намагничивание пучка электронов лазерным излучением.
 - 2.7. Учет разбросов по частотам, энергиям и углам.
 - 2.8. Классическая и квантовая теории черенковского клистрона.
 - 2.9. Теория черенковского клистрона в постоянном магнитном поле.
 - 2.10. Классическая теория черенковского лазера.
 - 2.11. Квантовая теория черенковского лазера.
 - 2.12. Правила отбора в черенковском лазере.
 - 2.13. Вращение плоскости поляризации.
 - 2.14. Теория черенковского лазера в постоянном магнитном поле.
 - 2.15. Вынужденное циклотронное излучение вблизи черенковского конуса.
 - 2.16. Об экспериментальном наблюдении вынужденного черенковского эффекта.
 3. Вынужденный поверхностный черенковский эффект (1113).
 - 3.1. Движение электрона в поле поверхностной волны.
 - 3.2. Модуляция плотности и тока пучка электронов.
 - 3.3. Учет разброса электронов по энергиям и углам.
 - 3.4. Теория черенковского лазера (плоский волновод).
 - 3.5. Теория черенковского лазера в постоянном магнитном поле.
 - 3.6. Теория черенковского лазера (цилиндрический полый волновод).
 - 3.7. Теория черенковского клистрона в постоянном магнитном поле.
 - 3.8. Об экспериментальном наблюдении вынужденного поверхностного черенковского эффекта.
 4. Заключение (1123).
- Список литературы (1124).

В.М. Арутюнян, С.Г. Оганесян. НПО "Лазерная техника", 375090, Ереван, ул. Шопрона, 21
Тел. (8852) 65-05-52; 61-53-98. Факс (8852) 15-10-57
E-mail: bogl@adonis.iasnet.com

Статья поступила 4 октября 1993 г.,
после доработки 6 августа 1994 г.

1. Введение

Создание мощных источников электромагнитного излучения — лазеров — положило начало широким исследованиям, основной целью которых являлось изучение электродинамических эффектов в интенсивном поле. Первая работа в этом направлении была выполнена еще в 1933 г. Капицей и Дираком (*Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29** 297 (1933)), рассмотревшим рассеяние электромагнитной волны электроном в поле еще одной волны (вынужденный комптоновский эффект). В дальнейшем, наряду с этой задачей, развивались теории вынужденных тормозного, магнитотормозного, черенковского и других эффектов. В наших работах выполнен систематический анализ вынужденных черенковского, переходного, дифракционного и комптоновского эффектов. В настоящем обзоре приведены основные результаты по вынужденным черенковскому и поверхностному черенковскому эффектам (в первом случае электроны движутся в неограниченной диэлектрической среде, во втором — над поверхностью диэлектрика). Для краткости оба эффекта вместе мы называем вынужденным черенковским эффектом (ВЧЭ).

Отметим, что наряду с чисто академической стороной вопроса — изучением влияния мощных полей на ход электродинамических эффектов — рассматриваемые задачи имеют важное прикладное значение: создание новых источников электромагнитного излучения (лазеров на свободных электронах) и лазерных ускорителей заряженных частиц.

Идея о применении вынужденного комптоновского эффекта для создания комптоновского лазера была высказана Пантеллом с соавторами (*IEEE J. Quantum Electron.* **4** (11) 905 (1968)) и Мэйди (*J. Appl. Phys.* **42** (3) 1906 (1971)), предложившим создать лазер на ондуляторе. Последняя схема разработана наиболее детально и в настоящее время реализована экспериментально. Основная масса публикаций, посвященных этому лазеру, систематизирована в обзорах [1–6], сборнике [7], монографии [8]. Эффективность лазера на ондуляторе в оптическом и более коротковолновом диапазонах длин

волн не очень велика. Поэтому возникла необходимость изучить и другие электродинамические эффекты. Нами развивались теории усиления электромагнитного излучения на основе вынужденных черенковского, переходного, дифракционного и комптоновского эффектов. Анализ различных режимов работы черенковского лазера приведен в настоящем обзоре.

В результате взаимодействия электрона с интенсивным электромагнитным излучением изменяется его энергия. В настоящее время имеется ряд предложений по ускорению электронов на основе вынужденных комптоновского (включая ондуляторный вариант), черенковского, дифракционного и других эффектов. Современное состояние работ по лазерным ускорителям хорошо отражено в сборнике [9] и обзоре [10]. В наших работах исследовались лишь механизмы излучения и поглощения фотонов на основе перечисленных выше эффектов. Эти результаты играют ключевую роль для понимания всех эффектов в поле лазерного излучения.

Одна из возможностей увеличения эффективности взаимодействия пучка электронов с излучением связана с предварительной модуляцией его плотности. Изучение модуляции пучка электронов на оптических частотах было начато в работах Шварца и Хоры (*Appl. Phys. Lett.* **15** 349 (1969)). На основе модулированных пучков электронов можно создать лазеры на свободных электронах клистронного типа. Результаты анализа работы черенковского клистрона приведены в настоящем обзоре.

При взаимодействии пучка электронов с лазерным излучением меняются их поляризационные состояния. Лазерное излучение может намагнитить неполяризованный пучок электронов или промодулировать его намагниченность, если до взаимодействия он был поляризован. При распространении эллиптически поляризованной волны в пучке электронов происходит вращение ее плоскости поляризации и деформации формы эллипса.

Систематический анализ вышеописанных эффектов позволил установить следующие общие закономерности, лежащие в их основе.

1. Возможности модуляции пучка электронов, усиления электромагнитной волны и намагничивания пучка частиц возникают лишь в случае, когда в процессах излучения и поглощения фотона электроном участвуют либо электроны с различными энергиями, либо фотоны с различными проекциями волнового вектора. В дальнейшем, для краткости, мы будем называть такие процессы асимметричными. Если такой асимметрии нет, то ее нужно создать.

2. Количественно перечисленные эффекты определяются приращением энергии электрона после взаимодействия с излучением в линейном по полю приближении.

Отметим, что список литературы, приведенный в обзоре, состоит из двух частей: в первой части цитируются работы [1–73], прямо связанные с рассматриваемыми задачами, во второй части приводятся работы, связанные с вынужденным черенковским [74–91] и поверхностным черенковским [92–97] эффектами.

2. Вынужденный черенковский эффект

Спонтанное излучение заряженной частицы в диэлектрике — излучение Вавилова–Черенкова (ВЧ) — хорошо

изучено теоретически и экспериментально [11–15]. Оно возникает лишь в случае, когда скорость заряженной частицы больше скорости распространения электромагнитной волны в среде: $v > c/n$.

Если та же частица движется в диэлектрической среде в поле внешней электромагнитной волны, то ее излучение приобретает вынужденный характер. При этом в динамике процесса появляется существенная особенность, не учитываемая в спонтанном эффекте: частица может не только тормозиться, излучая свою энергию в волну (вынужденное черенковское излучение), но и ускоряться, поглощая энергию внешнего поля (вынужденное черенковское поглощение). Как правило, для пучков частиц полностью разделить эти процессы не удается. Очевидно, что конкуренция процессов излучения и поглощения должна сильно ограничивать возможность передачи энергии от пучка частиц в электромагнитную волну и наоборот.

Для анализа ВЧЭ мы используем две модели: 1) электроны взаимодействуют с излучением, которое описывается плоской монохроматической волной, 2) пучок электронов взаимодействует с монохроматической пространственно ограниченной волной. В разделах 2.1, 2.2 исследована динамика электрона в обоих вариантах. Простой анализ классических уравнений движения показал, что в зависимости от начальных условий электрон может как ускориться, так и затормозиться. При переходе к пучку электронов этот эффект приводит к модуляции его плотности и тока на частоте электромагнитной волны (см. раздел 2.3). В разделах 2.4, 2.5 развита квантовая теория ВЧЭ [16–19]. Этот подход позволяет отдельно рассмотреть процессы излучения и поглощения.

Анализ показал, что в основе эффекта модуляции лежит асимметрия этих процессов (см. раздел 1). Эта же асимметрия приводит к намагничиванию пучка электронов [18]. Отметим, что эти эффекты изучены с учетом углового и энергетического разбросов пучка электронов, а также углового и частотного разбросов пучка фотонов (см. раздел 2.7). В разделах 2.8–2.12, 2.14 развита теория усиления электромагнитной волны на основе ВЧЭ — черенковский клистрон [16, 20] и черенковский лазер [21–24]. Ясно, что для получения усиления необходимо, чтобы процессы излучения доминировали над процессами поглощения. Интересная возможность полного подавления процессов поглощения рассмотрена в разделе 2.12 [23]. В разделах 2.9, 2.14 изучался ВЧЭ в постоянном магнитном поле [20, 24]. В этой схеме можно нейтрализовать негативную роль углового разброса пучка электронов и значительно расширить диапазон работы лазера на циклотронном резонансе (см. раздел 2.15) [25].

В разделе 2.13 изучены оптические поляризационные эффекты в системе типа черенковского лазера, связанные с анизотропией и поляризацией пучка электронов [22]. В конце раздела 2 обсуждается возможность экспериментального наблюдения полученных эффектов.

2.1. Движение электрона в поле плоской волны в диэлектрической среде

Если электрон движется в неограниченной диэлектрической среде, то спонтанное черенковское излучение возни-

кает в случае, когда скорость частицы \mathbf{v} , волновой вектор \mathbf{k} и частота ω излучаемой электромагнитной волны удовлетворяют соотношению

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Пусть теперь в той же среде распространяется электромагнитная волна, векторный потенциал которой

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (2)$$

т.е. такая же волна, как и та, что возникает в результате эффекта ВЧ. (В дальнейшем предполагаем, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.)

Вычислим изменение импульса и энергии частицы на основе классических уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad (3)$$

в линейном по полю приближении. Учитывая, что $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, и подставляя в правые части (3) невозмущенную траекторию частицы в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \quad (4)$$

получаем

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}', \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}'. \quad (5)$$

Здесь

$$\Delta\mathbf{p}' = \left[-\frac{e}{c}\mathbf{A}_0 - \frac{e\mathbf{k}(\mathbf{v}_0\mathbf{A}_0)}{c(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)} \right] \cos[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0], \quad (6)$$

$$\Delta\mathcal{E}' = -\frac{e\omega(\mathbf{v}_0\mathbf{A}_0)}{c(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)} \cos[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0], \quad (7)$$

$v_0 = p_0 c^2 / \mathcal{E}_0$ — начальная скорость частицы, n — показатель преломления среды. При расчете считалось, что поле (2) включается адиабатически медленно при $t = -\infty$. Амплитуды величин $\Delta\mathcal{E}'$ и $\Delta\mathbf{p}'\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ содержат черенковский полюс $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0$, совпадающий с условием спонтанного излучения частицы (1).

Предположим сначала, что величина $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 > 0$ (или $v_0 \cos \theta < c/n$) и скалярное произведение $\mathbf{A}_0\mathbf{v}_0 > 0$. Учитывая, что напряженность электрического поля волны (2) равна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ получаем, что в течение времен, определяемых неравенствами

$$\frac{\pi(2N+1) + \mathbf{k}\mathbf{r}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} > t > \frac{2\pi N + \mathbf{k}\mathbf{r}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0},$$

$$\frac{2\pi(N+1) + \mathbf{k}\mathbf{r}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} > t > \frac{\pi(2N+1) + \mathbf{k}\mathbf{r}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0},$$

электрон, отставая от волны, поочередно то тормозится, то ускоряется (здесь $\mathbf{E} = \omega\mathbf{A}_0/c$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — произвольные целые числа). Если величина $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 < 0$ (или $v_0 \cos \theta > c/n$), то электрон, обгоняя волну, поочередно то ускоряется, то тормозится в течение времен, определяемых неравенствами

$$\frac{|\pi(2N+1) - \mathbf{k}\mathbf{r}_0|}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|} > t > \frac{|2\pi N - \mathbf{k}\mathbf{r}_0|}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|},$$

$$\frac{|2\pi(N+1) - \mathbf{k}\mathbf{r}_0|}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|} > t > \frac{|\pi(2N+1) - \mathbf{k}\mathbf{r}_0|}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|}.$$

Из вышеприведенных неравенств следует, что времена, в течение которых происходят эти процессы, совпадают и равны $T_f = \pi/|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|$. За это время элект-

рон проходит путь $L_f = \pi v_0 / |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|$. В этих терминах амплитуда приращения энергии (7) $\Delta\mathcal{E} = (1/\pi)|e|\mathbf{E}_0 L_f$. Очевидно, что максимальное приращение (или потеря) энергии частиц равно работе, совершаемой постоянным электрическим полем с напряженностью \mathbf{E}_0 вдоль пути L_f .

Таким образом, величины T_f и L_f определяют времена и участки траектории, на которых разворачиваются процессы вынужденного излучения энергии электрона в волну или вынужденного поглощения электроном энергии волны. Они совпадают с определениями времен и зон формирования, введенными для описания спонтанного излучения частиц [26–29].

Пусть скорость электронов подбирается так, что величина $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0$ стремится к нулю. Тогда происходит неограниченный рост параметров T_f и L_f . Этот результат соответствует анализу спонтанного эффекта ВЧ: в неограниченной прозрачной среде излучение равномерно движущейся частицы формируется вдоль всей ее траектории. Если величина $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$, то энергия и импульс частицы расходятся. Фактически эта расходимость связана с бесконечно долгим воздействием электрического поля волны (2) на электрон. Рассмотрим более подробно случай $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$. Предположим, что поле (2) включается в течение времени $\Delta t \sim 2\tau$ по закону

$$\mathbf{A}_0(t) = \frac{1}{2}\mathbf{A}'_0 \left(1 + \frac{\tanh t}{\tau} \right). \quad (8)$$

Подставляя (2), (4), (8) в (3) и учитывая условие (1), получаем

$$\Delta\mathcal{E}' = -\frac{1}{2}e\mathbf{E}_0\mathbf{v}_0 \left[t + \tau \ln \left(2 \frac{\cosh t}{\tau} \right) \right] \sin \mathbf{k}\mathbf{r}_0. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{A}'_0/c$ — амплитуда напряженности электрического поля волны (2). Если время взаимодействия электрона с волной $\Delta t \gg \tau$, то

$$\Delta\mathcal{E}' = -e\mathbf{E}_0\mathbf{v}_0 t \sin \mathbf{k}\mathbf{r}_0. \quad (10)$$

Очевидно, что знак этого выражения зависит от фазы $\phi = \mathbf{k}\mathbf{r}_0$. Если $\Delta\mathcal{E}' < 0$, то частица тормозится, передавая свою энергию в поле (2). Если $\Delta\mathcal{E}' > 0$, то частица ускоряется за счет энергии электромагнитной волны.

Выражения (6), (7), (10) справедливы в случае, когда между электроном и волной выполняется условие синхронизма $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 = \text{const}$. Реально, однако, уже небольшие изменения скорости приводят к нарушению этого равенства. Поэтому правильные выражения для энергии и импульса частицы в поле плоской волны можно получить лишь при точном решении уравнений (3) [30]. Тем не менее формулы (6), (7) имеют практическую ценность. Это связано с тем, что реальные пучки имеют определенный разброс по энергиям и углам и при усреднении по этим разбросам черенковская расходимость устраняется.

2.2. Вынужденный черенковский эффект на лазерном пучке конечного размера

Вынужденный черенковский эффект на лазерном пучке конечного диаметра изучался теоретически и экспериментально в [31–38]. Рассмотрим относительно простой случай, когда электромагнитная волна, распространяю-

щаяся вдоль оси z , имеет конечную ширину лишь вдоль оси x :

$$A_{x,y} = \int A_{x,y}(\mathbf{q}') q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}'^2\right) \times \exp(i\mathbf{q}'\mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{q}' + \text{к. с.}, \quad (11)$$

$$A_{x,y}(\mathbf{q}') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a_{x,y} d \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{4}\right), \quad (12)$$

$$a_x = -iA_{0x}, \quad a_y = A_{0y},$$

$$A_z(\mathbf{r}, t) \approx 0.$$

Здесь $\omega = 2\pi c/\lambda$ — частота лазерного излучения, λ — его длина волны в вакууме, \mathbf{q}' — волновой вектор фурье-компоненты поля.

Фурье-образ векторного потенциала (12) выбран таким образом, чтобы в плоскости $z = 0$ амплитуда поля затухала с ростом координаты $|x|$ по гауссовой кривой с шириной $2d$. Для простоты считаем дифракционную расходимость пучка малой ($\lambda/d \ll 1$), что позволяет пренебречь z -проекцией поля.

Вычислим изменение энергии и импульса электрона, движущегося в плоскости xz и пересекающего поле (11) под углом θ , значительно превышающем угловую расходимость лазерного пучка. Из (3) в линейном по полю приближении получаем

$$\Delta \mathcal{E}' = \Delta \mathcal{E} \cos \phi. \quad (13)$$

Здесь амплитуда изменения энергии

$$\Delta \mathcal{E} = \xi_x \Delta E, \quad \Delta E = 2\pi\sqrt{\pi} mc^2 \frac{d}{\lambda} \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{4}\right), \quad (14)$$

фаза $\phi = \mathbf{q}\mathbf{r}_0$, безразмерный параметр $\xi_x = eA_{0x}/mc^2$.

Волновой вектор \mathbf{q} определяется системой уравнений

$$\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_0 = 0, \quad (15)$$

$$q_x^2 + q_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} n\right)^2 \quad (16)$$

и имеет проекции

$$q_x = \frac{\omega}{v_0^2} \left(v_{0x} - v_{0z} \sqrt{(n\beta_0)^2 - 1}\right), \quad q_z = \frac{\omega}{v_0^2} \left(v_{0z} + v_{0x} \sqrt{(n\beta_0)^2 - 1}\right), \quad (17)$$

где $\beta_0 = v_0/c$.

Система уравнений (15), (16) допускает еще одну пару решений, отличающихся от (17) знаками перед корнями. Учитывая, что амплитуда изменения энергии $\Delta \mathcal{E}$ экспоненциально падает с ростом q_x , их вкладом можно пренебречь. Величина $\Delta \mathcal{E}$ играет ключевую роль в теории взаимодействия свободных электронов с лазерным излучением и, как будет показано ниже, определяет характеристики всех процессов, в которых участвует электрон.

Если скорость частицы подобрана так, что

$$q_x = \frac{\omega}{v_0^2} \left(v_{0x} - v_{0z} \sqrt{(n\beta_0)^2 - 1}\right) = 0, \quad (18)$$

то ее взаимодействие с полем происходит в оптимальном режиме. При этом

$$\Delta E = 2\pi\sqrt{\pi} mc^2 \frac{d}{\lambda} \quad (19)$$

и амплитуда изменения энергии частицы $\Delta \mathcal{E}$ максимальна.

Выразим $\Delta \mathcal{E}$ через ширину углового распределения интенсивности поля (11). Пусть угол между вектором \mathbf{q}' и осью z равен θ . Если $\theta \ll 1$, то

$$q'_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta \approx n \frac{2\pi}{\lambda} \theta.$$

Подставляя это выражение в (12), получаем, что интенсивность светового потока имеет гауссово распределение по углам:

$$\frac{dI}{d\theta} \sim \exp\left(-\frac{4 \ln 2 \cdot \theta^2}{\delta_\phi^2}\right);$$

величина $\delta_\phi = \lambda\sqrt{2 \ln 2}/\pi n d$ характеризует угловую ширину этого распределения. Подставим выражение $d/\lambda = 2\sqrt{\ln 2}/\pi n \delta_\phi$ в (19):

$$\Delta E = \frac{4\sqrt{\pi \ln 2}}{n\delta_\phi} mc^2, \quad (20)$$

и сравним формулы (13), (14), (20) и (7). Очевидно, что в случае, когда пучок фотонов имеет разброс по углам, черенковский полюс $\omega/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)$ заменяется на угловую ширину δ_ϕ в соответствии с замечанием, сделанным в конце раздела 2.1.

Формула (13) справедлива при условии

$$|\Delta \mathcal{E}'| \ll \mathcal{E}, \quad (21)$$

накладывающем ограничение на параметры лазерного пучка. Отметим также, что условие пренебрежения z -проекцией векторного потенциала в (3) определяется неравенством

$$\frac{v_{0x}}{v_{0z}} \gg \frac{q_x}{q_z}. \quad (22)$$

Оно выполняется автоматически, если $q_x = 0$ (см. (18)).

Если пучок электронов пересекает поле (11), то в зависимости от фазы ϕ в его энергетическом спектре появляются как ускорившиеся ($\Delta \mathcal{E}' > 0$), так и затормозившиеся ($\Delta \mathcal{E}' < 0$) частицы (13). Это приводит к уширению энергетического спектра электронов, наблюдавшегося в экспериментах [27–30].

2.3. Модуляция пучка электронов (классическая теория)

Вынужденный черенковский эффект приводит к модуляции энергии (13) и, следовательно, скорости пучка частиц. Из теории клистронов [35] хорошо известно, что ускорившиеся электроны могут нагнать электроны, ушедшие из области взаимодействия в более ранние моменты времени. В результате этого процесса пучок электронов теряет свою однородность, а его плотность и ток начинают осциллировать на частоте внешнего поля и ее гармониках. Пренебрегая квантовыми эффектами, рассмотрим особенности модуляции плотности и тока пучка электронов на основе кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (23)$$

где $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e/c[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ — сила Лоренца.

Пусть пучок электронов пересекает под углом θ электромагнитную волну (11), распространяющуюся вдоль оси z . Полагая, что напряженности электрического и магнитного полей невелики, вычислим функцию распределения частиц в области $x \gg d$ по теории возмущений:

$$f = f_0 + f_1. \quad (24)$$

Здесь f_0 — начальная функция распределения частиц,

$$f_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e}{c} A_{0x} d \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{4}\right) \times \\ \times \left(q_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + q_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к. с.}, \quad (25)$$

проекции вектора \mathbf{q} определяются выражениями (17). (При расчетах учитываем неравенство (22).)

Подставляя функцию (24) в выражения для плотности и тока пучка электронов:

$$\rho = \rho_0 \int f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = e\rho_0 \int \mathbf{v} f(\mathbf{p}) d\mathbf{p},$$

получаем

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1, \quad (26)$$

где ρ_0 и $\mathbf{j}_0 = e\rho_0 \int \mathbf{v} f_0 d\mathbf{p}$ — начальная плотность и ток пучка электронов,

$$\rho_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e}{c} \rho_0 A_{0x} d \int \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{4}\right) \times \\ \times \left(q_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + q_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{p} + \text{к. с.}, \quad (27)$$

$$\mathbf{j}_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^2}{c} \rho_0 A_{0x} d \int \mathbf{v} \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{4}\right) \times \\ \times \left(q_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + q_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{p} + \text{к. с.} \quad (28)$$

Предположим для простоты, что до взаимодействия все частицы пучка имели один и тот же импульс $f_0 = \delta(p_x - p_{0x}) \delta(p_z - p_{0z}) \delta(p_y)$. Интегрируя (27), (28) по частям, получаем

$$\rho = \rho_0 \left[1 + x \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \frac{\omega(n^2 - 1)}{v_{0x}} \sin(q_z z - \omega t) + \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \cos(q_z z - \omega t) \right], \quad (29)$$

$$j_x = j_{0x} \left[1 + x \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \frac{\omega(n^2 - 1)}{v_{0x}} \sin(q_z z - \omega t) \right], \\ j_y = 0, \\ j_z = j_{0z} \left[1 + x \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \frac{\omega(n^2 - 1)}{v_{0x}} \sin(q_z z - \omega t) + \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\beta_{0z}^2} \cos(q_z z - \omega t) \right]. \quad (30)$$

Здесь учтено условие (18), волновой вектор $q_z = \omega/v_{0z}$, величина $\Delta \mathcal{E}$ определяется выражениями (14), (19).

Очевидно, что плотность и ток пучка электронов осциллируют на частоте лазерного излучения ω , причем глубина модуляции растет прямо пропорционально дрейфовому расстоянию x (вторые слагаемые в квадратных скобках). Этот результат хорошо известен в теории клистронов. Что касается третьих слагаемых, то они связаны с перегруппировкой плотности частиц при движении в поле (11), сохраняющейся затем и в области дрейфа. Однако глубина модуляции на основе этого механизма невелика.

В разделе 2.7 будет проанализирована роль углового, частотного и энергетического разбросов пучка света и пучка частиц. Приведем также условия применимости формул (29), (30), полученных по теории возмущений. Учитывая, что $\rho_1 \ll \rho_0$, $\mathbf{j}_1 \ll \mathbf{j}_0$, имеем

$$x \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \frac{\omega(n^2 - 1)}{v_{0x}} \ll 1. \quad (31)$$

2.4. Модуляция пучка электронов (квантовая теория)

Рассмотрим эффект модуляции пучка электронов на основе более общего подхода — квантовомеханического. С квантовой точки зрения изменение энергии частицы (13) обусловлено излучением или поглощением ($v = |\Delta \mathcal{E}|/\hbar\omega$) фотонов. Ясно, что в области $x \gg d$ волновая функция пучка частиц является суперпозицией состояний, описывающих различные многофотонные процессы. Плотность и ток пучка электронов модулируются в результате этих процессов. Так как амплитуды излучения и поглощения вносят противоположные вклады, то глубина модуляции пучка частиц зависит от того, насколько они отличаются друг от друга.

Вычислим глубину модуляции релятивистского пучка электронов за счет ВЧЭ в наиболее простом случае — на первой гармонике поля (11), пренебрегая спиновыми эффектами. Будем описывать пучок электронов до взаимодействия плоской волной

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t + i\frac{\mathbf{p}}{\hbar} \mathbf{r}\right). \quad (32)$$

Здесь ρ_0 — плотность электронов, \mathcal{E} и \mathbf{p} — их энергия и импульс.

Вычислим волновую функцию пучка электронов после взаимодействия с полем (11) на основе уравнения Клейна–Гордона:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[c^2 \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + (mc^2)^2 \right] \psi. \quad (33)$$

Представим его решение в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-.$$

Здесь ψ_0 — начальная волновая функция пучка электронов (32), слагаемые ψ_+ и ψ_- описывают процессы поглощения и излучения фотона. Подставляя эти выражения в (33), получаем

$$\left[-(mc^2)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_{\pm} = \\ = -2e\epsilon p_x \int A_{\pm} q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}^2\right) \times \\ \times \exp[\pm i(\mathbf{q}'\mathbf{r} - \omega t)] dq'_x dq'_z \psi_0, \quad (34)$$

где $A_+ = A_x(q)$, $A_- = A_x^*(q)$ (см. (12)). Предполагается, что до взаимодействия электроны движутся в плоскости xz .

Будем искать решение уравнения (34) в виде

$$\psi_{\pm} = \int \varphi_{\pm}(x, q'_z) \exp\left(-i \frac{\mathcal{E} \pm \hbar\omega}{\hbar} t + i \frac{p_z \pm \hbar q'_z}{\hbar} z\right) dq'_z. \quad (35)$$

Это позволяет свести дифференциальное уравнение в частных производных (34) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_{\pm} + \gamma_{\pm}^2 \varphi_{\pm} = -2 \frac{e p_x}{c \hbar^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \times \\ \times \int A_{\pm} q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}^2\right) \exp\left(i \frac{p_x \pm \hbar q'_x}{\hbar} x\right) dq'_x, \quad (36)$$

где

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\hbar c} [(\mathcal{E} \pm \hbar\omega)^2 - (p_z \pm \hbar q'_z)^2 c^2 - (mc^2)^2].$$

Его решения имеют вид

$$\varphi_{\pm} = -\frac{2e p_x}{c \hbar^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \frac{1}{\gamma_{\pm}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dq'_x \sin[\gamma_{\pm}(x - \alpha)] \times \\ \times A_{\pm} q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}^2\right) \exp\left(i \frac{p_x \pm \hbar q'_x}{\hbar} \alpha\right). \quad (37)$$

В области $x \gg d$ верхний предел в интегралах (37) можно заменить на $+\infty$. Интегрируя по переменной α , получаем

$$\varphi_{\pm} = i\pi \frac{2e p_x}{c \hbar^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \frac{1}{\gamma_{\pm}} \times \\ \times \left\{ \int A_{\pm} q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}^2\right) \delta\left(\frac{p_x \pm \hbar q'_x}{\hbar} - \gamma_{\pm}\right) \exp(i\gamma_{\pm} x) dq'_x - \right. \\ \left. - \int A_{\pm} q'_z \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}^2\right) \delta\left(\frac{p_x \pm \hbar q'_x}{\hbar} + \gamma_{\pm}\right) \exp(-i\gamma_{\pm} x) dq'_x \right\}. \quad (38)$$

Вторые слагаемые в этом выражении ответственны за однофотонные процессы с отражением электронов от лазерного пучка. Если x -проекция импульса электрона $p_x \gg \hbar/d$, то вероятность таких процессов экспоненциально мала и ими можно пренебречь. Проекции волновых векторов фотонов \mathbf{q}_{\pm} , участвующих в процессах поглощения и излучения, определяются из законов сохранения энергии и импульса и дисперсионного уравнения:

$$\mathcal{E} \pm \hbar\omega = \mathcal{E}^{\pm}, \quad \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{q}^{\pm} = \mathbf{p}^{\pm}, \\ \frac{\omega^2}{c^2} n^2 - (\mathbf{q}^{\pm})^2 = 0. \quad (39)$$

Полагая, что начальные энергия и импульс электрона заданы, получаем

$$q_x^{\pm} = \frac{\omega}{v^2} \left\{ v_x \left[1 \pm \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (1 - n^2) \right] - \right. \\ \left. - v_z \sqrt{n^2 \beta^2 - \left[1 \pm \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (1 - n^2) \right]^2} \right\},$$

$$q_z^{\pm} = \frac{\omega}{v^2} \left\{ v_z \left[1 \pm \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (1 - n^2) \right] + \right. \\ \left. + v_x \sqrt{n^2 \beta^2 - \left[1 \pm \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (1 - n^2) \right]^2} \right\}. \quad (40)$$

Второй парой решений, отличающихся от (40) знаками перед корнями, как и в случае (17), можно пренебречь. Если $n^2 \beta^2 - 1 \gg \hbar\omega(n^2 - 1)/2\mathcal{E}$, то корни в (40) можно разложить в ряд Тэйлора:

$$\mathbf{q}^{\pm} = \mathbf{q} \pm \Delta\mathbf{q}. \quad (41)$$

Проекция вектора \mathbf{q} определяются выражениями (17):

$$\Delta q_x = \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 \beta^2 - 1}} q_z, \quad \Delta q_z = -\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 \beta^2 - 1}} q_x. \quad (42)$$

Пренебрегая слагаемым Δq в законах сохранения (39), находим выражение для импульсов электронов, поглотивших и излучивших фотон:

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}^- = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}.$$

Квантовые поправки (42) вносят асимметрию в эти формулы:

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}^+) - \hbar\Delta\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}^- = (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}^-) - \hbar\Delta\mathbf{q},$$

и играют основную роль в эффекте квантовой модуляции пучка электронов. Учитывая (38), (40), приходим к окончательному выражению для волновой функции пучка электронов в области $x \gg d$:

$$\psi = \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{E}_+}{\hbar\omega} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}^+ \mathbf{r}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{E}_-}{\hbar\omega} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}^- \mathbf{r}) \right] \psi_0, \quad (43)$$

$$\Delta\mathcal{E}_{\pm} = 2\pi\sqrt{\pi} mc^2 \xi_x \frac{d}{\lambda} \exp\left[-\frac{(q_x^{\pm})^2 d^2}{4}\right].$$

Плотность пучка электронов в линейном по полю приближении

$$\rho = i\hbar\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \text{к. с.} = \\ = \frac{1}{2} \rho_0 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{E}_+}{\hbar\omega} \frac{\mathcal{E} + \hbar\omega}{\mathcal{E}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}^+ \mathbf{r}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{E}_-}{\hbar\omega} \frac{\mathcal{E} - \hbar\omega}{\mathcal{E}} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}^- \mathbf{r}) \right] + \text{к. с.} \quad (44)$$

Полагая, что взаимодействие электрона с волной происходит в оптимальном режиме:

$$q_x = 0, \quad q_z = \frac{\omega}{v_z} = \frac{\omega}{c} n, \\ \Delta q_z = 0, \quad \Delta q_x = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega^2 (n^2 - 1)}{\mathcal{E} v_x}, \quad (45)$$

получаем

$$\rho = \rho_0 \left[1 + 2 \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar\omega} \sin(\Delta q_x x) \sin(q_z z - \omega t) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \cos(\Delta q_x x) \cos(q_z z - \omega t) \right]. \quad (46)$$

Здесь величина $\Delta\mathcal{E}$ определяется выражениями (14), (19), слагаемые порядка $\hbar\omega/\mathcal{E}$ отбрасываются.

Проанализируем выражение в квадратных скобках (46). Второе слагаемое пропорционально разности амплитуд излучения и поглощения фотона и описывает квантовую модуляцию пучка электронов. Интересно отметить, что эта разность определяется как асимметричной частью отдачи Δq_x , так и расстоянием до точки наблюдения вдоль оси x . В области $\Delta q_x x \ll 1$ эффект модуляции носит классический характер и выражение для плотности электронов (46) совпадает с (29). Так как в этом пределе второе слагаемое в (46) пропорционально x , то связанную с ним модуляцию можно назвать модуляцией клистронного типа. В области $\Delta q_x x \sim 1$ разница между амплитудами излучения и поглощения достигает максимума, и классическая модуляция трансформируется в квантовую с глубиной $2\Delta\mathcal{E}/\hbar\omega$. В дальнейшем множитель $\sin(\Delta q_x x)$ приводит к пространственной модуляции плотности пучка электронов с периодом $L = 2\pi/\Delta q_x$ вдоль оси x , а глубина модуляции $2\Delta\mathcal{E}/\hbar\omega$ остается постоянной.

Амплитуда модуляции плотности электронов, обусловленная третьим слагаемым в (46), носит классический характер и значительно меньше, чем в предыдущем случае:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \ll \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar\omega}. \quad (47)$$

Как отмечалось в разделе 2.3, она связана с перегруппировкой плотности электронов при движении в поле лазерного излучения, сохраняющейся затем в дрейфовом пространстве $x > d$. Квантовые поправки приводят к дополнительной пространственной модуляции плотности электронов с периодом $L = 2\pi/\Delta q_x$ вдоль оси x .

Аналогично происходит модуляция тока электронов:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1, \quad (48)$$

где $\mathbf{j}_0 = e\rho_0\mathbf{v}$ — его начальное значение, а

$$\mathbf{j}_1 = e\rho_0 \left[2\mathbf{v} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar\omega} \sin(\Delta q_x x) \sin(q_z z - \omega t) + \frac{\mathbf{q}c^2}{\omega} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \cos(\Delta q_x x) \cos(q_z z - \omega t) \right]. \quad (49)$$

Определяя расстояние, разделяющее области классической и квантовой модуляции, из условия $\Delta q_x x_1 = 1$, получаем

$$x_1 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega} \frac{\beta_x}{n^2 - 1}. \quad (50)$$

Выражения (46), (49) справедливы при

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar\omega} \ll 1. \quad (51)$$

В заключение отметим, что начало экспериментальному и теоретическому изучению эффекта квантовой модуляции было положено в [40, 41]. Подробный обзор полученных результатов приведен в [42].

2.5. Модуляция поляризованного пучка электронов

Выражения для глубины модуляции тока и плотности пучка электронов, записанные в виде (46), (48), (49), носят общий характер.

Оценим на основе этих формул вклад магнитного момента электрона в модуляцию пучка электронов. Так как в случае спинового взаимодействия величина $\Delta\mathcal{E} \sim \mu H$ (где $\mu = e\hbar/2mc$ — магнитный момент электрона, а H — напряженность магнитного поля), то амплитуда слагаемых, ответственных за модуляцию клистронного типа, носит чисто классический характер. Интересно отметить, что постоянная Планка \hbar входит только в асимметричную часть отдачи и на расстояниях $x \sim x_1$ не влияет на эффект.

Найдем выражения для плотности и тока поляризованного пучка электронов на основе уравнения Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(\hat{\mathbf{q}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc^2 \beta \right] \psi. \quad (52)$$

Чтобы выделить чисто спиновый вклад, предположим, что электромагнитная волна поляризована вдоль оси y :

$$A_y = \int A_y(\mathbf{q}') q'_z \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}'^2 \right) \times \exp[i(\mathbf{q}'\mathbf{r} - \omega t)] dq' + \text{к. с.}, \quad (53)$$

$$A_y(\mathbf{q}') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} A_{0y} d \exp \left(-\frac{q_x'^2 d^2}{4} \right),$$

а пучок электронов движется в плоскости xz .

Решая уравнение Дирака в линейном по полю приближении, получаем, что в области $x \gg d$ волновая функция пучка электронов имеет вид

$$\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-, \quad (54)$$

где

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} u \exp \left[-i \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t - \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \mathbf{r} \right) \right] \quad (55)$$

— волновая функция начального пучка электронов, а слагаемые

$$\psi_{\pm} = -i \frac{e\pi}{2\hbar c p_x} \exp[i(\mathbf{q}^{\pm} \mathbf{r} \mp \omega t)] (\hat{p}_{\pm} + mc) \hat{A}_{\pm}(\mathbf{q}^{\pm}) \psi_0 \quad (56)$$

описывают процессы поглощения и излучения фотона. Величины \mathbf{q}^{\pm} определяются выражениями (40), (45); операторы

$$\hat{p}_{\pm} = (p_{\mu} \pm \hbar q_{\mu}^{\pm}) \gamma^{\mu}, \quad \hat{A}_{\pm} = A_{\pm}^{\mu} \gamma_{\mu}, \quad A_{+}^{\mu} = (0, 0, A_y(\mathbf{q}), 0), \\ A_{-}^{\mu} = (A_{+}^{\mu})^*, \quad p^{\mu} = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}), \quad (q^{\pm})^{\mu} = (\omega/c, \mathbf{q}^{\pm})$$

— четырехимпульсы электронов и фотонов, участвующих в процессах поглощения (знак «+») и излучения (знак «-»).

Вычислим плотность $\rho = \psi^{\dagger} \psi$ и ток $\mathbf{j} = e c \psi^{\dagger} \boldsymbol{\alpha} \psi$ пучка электронов, полагая, что до взаимодействия его поляризационная матрица имела вид [43]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{p} + mc) (1 - \gamma^5 \hat{a}). \quad (57)$$

Четырехмерный вектор a^{μ} связан с вектором поляризации электрона ζ соотношениями

$$a_0 = \frac{\mathbf{p}\zeta}{mc}, \quad \mathbf{a} = \zeta + \frac{(\zeta \mathbf{p})\mathbf{p}}{(\mathcal{E} + mc^2)m}. \quad (58)$$

Учитывая (54)–(57), получаем

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_y \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_x}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi \right], \quad (59)$$

$$j_x = j_{0x} \left[1 + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_y \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_0 - \beta_z a_z}{\beta_x^2 \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi \right], \quad (60)$$

$$j_y = 0,$$

$$j_z = j_{0z} \left[1 + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_y \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_x}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi \right].$$

Здесь ρ_0 и $\mathbf{j}_0 = e\rho_0 \mathbf{v}$ — начальная плотность и ток пучка электронов, величина $\Delta \mathcal{E}$ определяется (19), $\xi_y = eA_{0y}/mc^2$, $\beta_{x,z} = v_{x,z}/c$, фаза $\phi = q_z z - \omega t$.

При расчетах не учитывались слагаемые порядка $(\Delta E/\mathcal{E})\xi_y \hbar\omega/\mathcal{E}$, связанные с индуцированной намагниченностью пучка электронов лазерным излучением (см. раздел 2.6). Это приближение справедливо, если

$$|\mathbf{a}| \gg \frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}}. \quad (61)$$

Отметим также, что условия углового и энергетического разбросов пучка электронов определяются неравенствами (82). Из (59), (60) видно, что модуляция поляризованного пучка электронов определяется асимметричной частью отдачи Δq_x .

Так как реальный лазерный пучок всегда имеет разброс по углам, то после прохождения поляризатора он содержит примесь состояния с поляризацией вдоль оси x . Для того чтобы оценить возможность выделения спинового вклада, приведем выражения для плотности и тока пучка электронов в общем случае, когда электромагнитная волна поляризована по эллипсу (см. (11)). Вычислим, как и в предыдущем случае, волновую функцию, а затем плотность и ток пучка электронов:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_0 \left[1 + 2 \frac{\Delta E}{\hbar\omega} \xi_x \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_x \cos(\Delta q_{x,x}) \times \right. \\ \left. \times \cos \phi + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \times \right. \\ \left. \times (a_x \xi_y \sin \phi + a_y \xi_x \cos \phi) \right], \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_x = j_{0x} \left[1 + 2 \frac{\Delta E}{\hbar\omega} \xi_x \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi + \right. \\ \left. + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_y \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_0 - \beta_z a_z}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi \right], \end{aligned}$$

$$j_y = e\rho_0 c \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_x \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_0 - \beta_z a_z}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) \cos \phi, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} j_z = j_{0z} \left[1 + 2 \frac{\Delta E}{\hbar\omega} \xi_x \sin(\Delta q_{x,x}) \sin \phi + \right. \\ \left. + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_x \frac{1}{\beta_z^2} \cos(\Delta q_{x,x}) \cos \phi + \right. \\ \left. + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{\beta_x \beta_z} \sin(\Delta q_{x,x}) (a_x \xi_y \sin \phi + a_y \xi_x \cos \phi) \right]. \end{aligned}$$

При расчетах предполагалось, что выполняется неравенство (61). Отметим, что при $\xi_x = 0$ выражения (62), (63) переходят в формулы (59), (60), а при $a^u = 0$ совпадают с (46), (48).

Для интерпретации полученных результатов удобно воспользоваться нерелятивистской квантовой механикой. В этом пределе гамильтонианы орбитального ($\hat{H}_1 = -e\mathbf{A}\mathbf{p}/mc$) и спинового ($\hat{H}_2 = -\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H}$, где $\hat{\boldsymbol{\mu}} = e\hbar\boldsymbol{\sigma}/2mc$, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули) взаимодействий входят независимо, что позволяет проанализировать вклад каждого из них. Решим уравнение Паули [44] в линейном по полю (11) приближении и подставим волновую функцию ψ в определения тока и плотности электронов:

$$\rho = \psi^+ \psi + \text{к. с.}, \quad (64)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e}{2m} \psi^+ \hat{\mathbf{p}} \psi + \text{к. с.} + c \text{ rot } \mathbf{I}. \quad (65)$$

Здесь $\mathbf{I} = (e\hbar/2mc)\psi^+ \boldsymbol{\sigma} \psi$ — намагниченность пучка частиц. Учитывая, что в нерелятивистском пределе поляризационная матрица $\hat{\rho} = (1 + \xi \boldsymbol{\sigma})/2$, получаем выражения, в точности совпадающие с (62), (63) при $v/c \ll 1$.

Расчеты показывают, что второе и третье слагаемые в (62) связаны с орбитальным движением, а четвертое — со спиновым. Более сложен анализ проекцией тока (63). Из (64) следует, что модуляция тока обусловлена как модуляцией плотности пучка частиц (слагаемые типа $\psi^+ \mathbf{p} \psi$), так и модуляцией намагниченности (слагаемые типа $\text{rot } \mathbf{I}$). С первым эффектом связаны осциллирующие слагаемые в x - и z -проекциях тока. В разделе 2.6 показано, что осцилляции намагниченности возникают вследствие а) индуцированной намагниченности пучка электронов, б) модуляции намагниченности, связанной с модуляцией плотности электронов, в) из-за осцилляций магнитного момента электронов около магнитного поля лазерного излучения. Вклад от первого эффекта незначителен (см. (61)), поэтому он не учитывался. С эффектами б) и в) связано возникновение y -проекции тока. Отметим, что эти же эффекты дают вклад в x -проекцию тока. Однако слагаемые, описывающие их, сократились с частью слагаемых, связанных, как отмечалось выше, с модуляцией плотности.

Очевидно, что спиновые эффекты велики, когда величины $\xi_{x,y} \Delta E/\mathcal{E} \sim 1$. При этом, однако, теория возмущений для орбитального движения неприменима ($\xi_{x,y} \Delta E/\hbar\omega \gg 1$). Чтобы не усложнять задачу анализом многофотонных процессов, можно положить, что поле поляризовано вдоль оси y , а электроны движутся в плоскости xz (см. (59), (60)). Из (62), (63) следует, что в оптимальном случае, когда пучок частиц полностью поляризован вдоль оси x , отношение x - и y -проекций поля должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} \leq \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_x}{\beta_x \beta_z}. \quad (66)$$

2.6. Намагничивание пучка электронов лазерным излучением

В результате взаимодействия пучка электронов с лазерным излучением в диэлектрической среде изменяются не только его плотность и ток, но и поляризационное состояние. Очевидно, что последний эффект связан с магнитным полем электромагнитной волны. Как известно, постоянное магнитное поле приводит к прецессии магнитного момента частицы. Если при этом электрон испытывает неупругие столкновения с окружающей средой, то его магнитный момент постепенно

ориентируется вдоль магнитного поля так, чтобы потенциальная энергия $U = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$ стала минимальной.

Картина значительно усложняется, если электрон взаимодействует с магнитным полем лазерного излучения. Так как в этом случае направление и модуль магнитного поля осциллирует с частотой ω , то магнитный момент покоящейся частицы будет осциллировать (а не прецессировать) около магнитного поля на частоте ω .

Если пучок электронов пересекает волну при условии синхронизма (1), то магнитный момент каждой из частиц повернется на угол $\Delta\varphi$, который будет зависеть от фазы поля (11) и времени взаимодействия $T = d/v_x$. Очевидно, что после взаимодействия намагниченность пучка электронов в некоторой фиксированной точке пространства ($x \gg d$, y , z) будет осциллировать на частоте ω . Если при движении электрон участвует в неупругих процессах излучения и поглощения фотона, то это должно привести к намагничиванию пучка электронов вдоль магнитного поля лазерного излучения.

Вычислим намагниченность пучка электронов на основе уравнения Дирака (52). В линейном по полю приближении его волновая функция имеет вид (54)–(56), где вектор $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ определяется (12). Намагниченность пучка электронов в том же приближении

$$\mathbf{I} = \frac{e}{mc} \psi^+ \boldsymbol{\Sigma} \psi = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1, \quad (67)$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{I}_0 = \frac{e}{mc} \psi_0^+ \boldsymbol{\Sigma} \psi_0$$

— оператор спина и начальная намагниченность пучка электронов, \mathbf{I}_1 — линейная по полю поправка.

Полагая, что до взаимодействия поляризация матрица пучка частиц имела вид (57), и учитывая (53)–(56), получаем проекции вектора \mathbf{I}_1 :

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \rho_0 \mu \left\{ \frac{\Delta E}{v_z p_x} \xi_y (1 - \beta_z^2) \sin(\Delta q_x x) \sin \phi - \right. \\ &\quad - \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_z - \beta_z (\boldsymbol{\beta} \mathbf{a})}{\beta_x \beta_z} \cos(\Delta q_x x) \cos \phi + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Delta E}{\hbar \omega} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \xi_x a_x \sin(\Delta q_x x) \sin \phi \right\}, \\ I_{1y} &= \rho_0 \mu \left\{ \frac{\Delta E}{v_z p_x} \xi_x (1 - \beta_z^2) \sin(\Delta q_x x) \cos \phi + \right. \\ &\quad + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{a_z - \beta_z (\boldsymbol{\beta} \mathbf{a})}{\beta_x \beta_z} \cos(\Delta q_x x) \sin \phi + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Delta E}{\hbar \omega} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \xi_x a_y \sin(\Delta q_x x) \sin \phi \right\}, \quad (68) \\ I_{1z} &= \rho_0 \mu \left\{ \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \xi_y \sin(\Delta q_x x) \sin \phi + \right. \\ &\quad + \frac{\Delta E}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{\beta_x \beta_z} \cos(\Delta q_x x) (a_x \xi_x \cos \phi - a_y \xi_y \sin \phi) + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Delta E}{\hbar \omega} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \xi_x a_z \sin(\Delta q_x x) \sin \phi \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mu = e\hbar/2mc$ — магнитный момент электрона, вектор \mathbf{I}_0 связан с начальной поляризацией пучка электронов $\boldsymbol{\zeta}$ соотношением

$$\mathbf{I}_0 = \rho_0 \mu \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \left[\boldsymbol{\zeta} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{p})}{(\mathcal{E} + mc^2)m} \right]. \quad (69)$$

Сравнивая (69) с (58), получаем

$$\mathbf{I}_0 = \rho_0 \mu \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \mathbf{a}.$$

Векторы \mathbf{q} , $\Delta \mathbf{q}$ и величина ΔE определены выражениями (45) и (19), безразмерные параметры $\xi_{x,y} = eA_{0x,y}/mc^2$.

Перейдем к анализу полученных формул. Предположим сначала, что до взаимодействия пучок электронов был неполяризован: $|\boldsymbol{\zeta}| = 0$. Анализ первых слагаемых в (68) показывает, что асимметричная часть отдачи Δq_x приводит к индуцированной ориентации магнитных моментов электронов как вдоль магнитного поля волны (11), так и вдоль магнитного поля $\mathbf{H} = [\mathbf{v}, \partial \mathbf{A} / \partial t] / c^2$, возникающего при переходе в систему отсчета, движущуюся вместе с начальным электроном.

Если начальная поляризация электронов $|\boldsymbol{\zeta}| \neq 0$, то после взаимодействия с лазерным излучением намагниченность в фиксированной точке наблюдения осциллирует на частоте ω , во-первых, за счет осцилляций магнитного момента около магнитного поля волны (вторые слагаемые в (68)) и, во-вторых, за счет модуляции плотности пучка электронов (третьи слагаемые в (68)). Выражения (68) справедливы, если угловой и энергетический разбросы пучка электронов удовлетворяют неравенствам (82). С помощью формул для намагниченности можно легко вычислить спиновый ток $\mathbf{j}_{\text{сп}} = c \text{rot } \mathbf{I}$ и магнитное поле $\mathbf{H} = 4\pi \mathbf{I}$, возникающее в пучке электронов. Отметим, что слагаемые, связанные со спиновым током, возникают автоматически при расчете выражений (60), (63). Однако они были опущены, так как при условии (61) их вклад невелик. Некоторые эффекты, связанные со спиновым током, будут рассмотрены в разделах 2.11–2.13.

2.7. Учет разбросов по частотам, энергиям и углам

Рассмотрим влияние углового, энергетического и частотного разбросов пучков электронов и фотонов на эффекты, рассмотренные в разделах 2.3–2.6. Пусть центральная ось пучка электронов (ось z') лежит в плоскости xz под углом θ к оси z , а его функция распределения по импульсам имеет гауссов вид:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}} \times \\ &\quad \times \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(p_{z'} - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} - 4 \ln 2 \frac{p_{x'}^2 + p_{y'}^2}{\Delta_{\perp}^2} \right] \quad (70) \end{aligned}$$

(оси y и y' обеих систем координат совпадают). Ширина энергетического и углового разбросов такого пучка электронов $\Delta = v_0 \Delta_{\parallel}$ и $\delta = \Delta_{\perp} / p_0$ соответственно. Предположим также, что длительность электромагнитной волны равна τ , а ее разброс по частотам определяется выражением

$$g(\omega) = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau^2}{4} \right]. \quad (71)$$

Учитывая, что распределение фотонов по волновым векторам определяется выражением (12), получаем, что ширина разброса фотонов по углам и частотам

$\delta_\phi = \lambda\sqrt{2\ln 2}/\pi nd$ (см. раздел 2.2) и $\Delta\omega = \sqrt{8\ln 2}/\tau$ соответственно. Чтобы упростить анализ, усредним сначала выражения для плотности пучка частиц (29), (46) по разбросу (70). Пусть средний импульс p_0 удовлетворяет условию синхронизма $\omega - q_z v_0 = 0$. Принимая во внимание, что $|p_z - p_0|$, $|p_x|$, $|p_y| \ll p_0$, разложим проекции (17) волнового вектора \mathbf{q} в ряд Тэйлора:

$$q_x = \frac{\omega n}{cp_0} p_x - \frac{\omega}{v_0 p_0 \sin \theta} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 (p_z - p_0),$$

$$q_z = \frac{\omega}{v_0 \cos \theta} \quad (72)$$

(при расчете предполагалось, что $q_x(0, 0, p_0) = 0$).

Подставляя выражения (72) в (27), (43) и усредняя по импульсам, имеем

$$\rho_{\text{кл}} = \rho_0 \left\{ 1 + R \left[x \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \frac{\omega}{v_x} (n^2 - 1) \sin(q_z z - \omega t) + \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \cos(q_z z - \omega t) \right] \right\}, \quad (73)$$

$$\rho_{\text{кв}} = \rho_0 \left\{ 1 + R \left[\frac{\Delta \mathcal{E}}{\hbar \omega} \sin(\Delta q_x x) \sin(q_z z - \omega t) + \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \cos(\Delta q_x x) \cos(q_z z - \omega t) \right] \right\}. \quad (74)$$

Здесь величины $\Delta \mathcal{E}$, Δq_x , q_z определяются формулами (14), (19), (45), если в них произвести замены $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_0$, $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_0$. Множитель

$$R = \sqrt{2} \delta_\phi \frac{p_0}{D_{\Phi_3}} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 n \beta_0 \sin \theta \exp\left(-\frac{x^2}{d^2} \frac{D_3^2}{D_{\Phi_3}^2}\right), \quad (75)$$

где

$$D_3 = \left[\Delta_{\parallel}^2 + \Delta_{\perp}^2 n^2 \beta_0^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (76)$$

— эффективная ширина пучка электронов,

$$D_{\Phi_3} = \left[D_3^2 + \delta_\phi^2 2n^2 p_0^2 \beta_0^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (77)$$

— совместная эффективная ширина пучка электронов и пучка фотонов.

Если ширина углового разброса пучка фотонов невелика:

$$\delta_\phi \ll \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta_{\perp}}{p_0}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n \beta_0 \sin \theta} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \frac{\Delta_{\parallel}}{p_0} \right\}, \quad (78)$$

то $D_{\Phi_3} \approx D_3$ и $R \sim \exp(-x^2/d^2)$. Учитывая, что дрейфовое расстояние $x \gg d$, получаем, что в этом случае эффект модуляции экспоненциально мал. В обратном случае:

$$\delta_\phi \gg \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta_{\perp}}{p_0}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n \beta_0 \sin \theta} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \frac{\Delta_{\parallel}}{p_0} \right\}, \quad (79)$$

множитель

$$R = \exp \left[-\frac{x^2}{\lambda^2} \frac{\pi^2}{4 \ln 2} \frac{\Delta_{\parallel}^2 + \Delta_{\perp}^2 n^2 \beta_0^2 \sin^2 \theta (\mathcal{E}_0/mc^2)^4}{p_0^2 \beta_0^2 \sin^2 \theta (\mathcal{E}_0/mc^2)^4} \right]. \quad (80)$$

Очевидно, что эффект модуляции не мал, если показатель экспоненты (80) меньше или порядка единицы. Отсюда находим условия энергетического и углового разбросов пучка электронов:

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_0} \lesssim \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \frac{\lambda}{x} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \beta_0^3 \sin \theta,$$

$$\delta \lesssim \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \frac{\lambda}{x} \frac{1}{n}. \quad (81)$$

Требования к качеству пучка электронов быстро растут с увеличением дрейфового расстояния x . Учитывая, что квантовая модуляция возникает на расстояниях $x \sim 1/\Delta q_x$, получаем очень жесткие условия для наблюдения этого эффекта:

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_0} \lesssim 2\sqrt{\ln 2} \beta_0^2 (n^2 - 1) \frac{\hbar \omega}{\mathcal{E}_0} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2,$$

$$\delta \lesssim 2\sqrt{\ln 2} \frac{n^2 - 1}{n \beta_0 \sin \theta} \frac{\hbar \omega}{\mathcal{E}_0}. \quad (82)$$

Пусть взаимодействие пучка электронов со светом происходит в газовой среде ($n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n \ll 1$). При этом $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$, $\theta \approx mc^2/\mathcal{E}_0$ и основную роль в обрезателе множителе (80) играет угловой разброс пучка электронов. Перепишем R в более удобном для дальнейшего анализа виде:

$$R = \exp(-\omega^2 T^2), \quad T = x n d / 4\sqrt{\ln 2} c. \quad (83)$$

Из-за углового разброса электроны после взаимодействия приходят в точку наблюдения x за разные времена. При этом время T пропорционально максимальной разности этих времен. Множитель R не мал, если

$$T \leq T_0, \quad (84)$$

где $T_0 = 2\pi c/\omega_0$ — средний период осцилляции электромагнитной волны. Так как длительность волны $\tau \gg T_0$, то

$$T \ll \tau. \quad (85)$$

Усредняя при условии (85) выражения (73), (74) по разбросу (71), имеем

$$R = \exp \left[-\omega_0^2 T^2 - \frac{(t - n_0 z/c)^2}{\tau^2} \right] \quad (86)$$

(для простоты мы не учитываем дисперсию газовой среды $n(\omega) = n_0$). Очевидно, что при условии (84) обрезатый множитель совпадает с огибающей электромагнитной волны: $R = \exp[-(t - n_0 z/c)^2/\tau^2]$. Если длительность волны больше времени наблюдения эффекта модуляции ($\tau \gg \Delta t$) и выполняются условия (81), то $R = 1$ и глубина модуляции максимальна.

2.8. Классическая и квантовая теории черенковского клистрона

Рассмотрим возможность передачи кинетической энергии пучка электронов в электромагнитную волну на основе ВЧЭ. Изменение энергии отдельной частицы после взаимодействия с полем (11) в линейном приближении вычислено в разделе 2.2. Обобщим этот результат на пучок электронов. Рассмотрим сначала случай, когда пучок частиц до взаимодействия пространственно одно-

роден. Это означает, что в каждую фазу поля (11) попадает одно и то же число электронов. Так как знак выражения (13) определяется фазой ϕ , то одна половина частиц пучка электронов ускоряется ($\Delta\mathcal{E} > 0$), а другая половина тормозится ($\Delta\mathcal{E} < 0$). Это обстоятельство создает значительные трудности как с точки зрения ускорения электронов, так и с точки зрения усиления электромагнитной волны. В первом случае максимальное ускорение получает лишь небольшая часть электронов, попавшая в подходящую фазу волны. Во втором случае эффекта вообще нет, так как число затормозившихся электронов равно числу ускорившихся.

Последний результат становится особенно наглядным, если вычислить потери энергии пучка электронов

$$W = \int \mathbf{j} \mathbf{E} dv. \tag{87}$$

Интегрирование осуществляется по всему объему взаимодействия поля с электронами. Подставляя сюда выражение для однородного пучка электронов $\mathbf{j} = e\rho_0\mathbf{v}$ и учитывая, что напряженность электрического поля $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$ (см. (11)), получаем $W = 0$. Этот расчет показывает, что для направленного обмена энергией между волной и электронами необходимо, чтобы пучок электронов был неоднороден: $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$.

Если период его пространственной неоднородности порядка длины волны излучения λ , то баланс между числом электронов, попавших в ускоряющую и тормозящую фазы, поля нарушается. Чтобы усилить электромагнитную волну, необходимо подобрать начальные условия так, чтобы число затормозившихся электронов было больше числа ускорившихся. Схема такого усилителя хорошо известна в радиофизике и носит название клистрон [39]. В оптическом диапазоне частот она впервые была проанализирована А.Н. Скринским и Н.А. Винокуровым в ондуляторном варианте [45]. Интересный способ увеличения эффективности клистрона предложен в [46].

Рассмотрим возможность создания черенковского клистрона. В разделах 2.3, 2.4 показано, что в результате ВЧЭ происходит модуляция тока и плотности пучка электронов. Так как осциллирующие слагаемые токов (30) и (48) пропорциональны внешнему полю, то обмен энергией между электронами и полем (11) возникает лишь во втором приближении по волне. Учитывая, что эффект модуляции может носить как классический ($x \ll x_1$), так и квантовый характер ($x \geq x_1$), найдем коэффициенты усиления в обоих случаях.

Коэффициент усиления классического черенковского клистрона вычислим на основе замкнутой самосогласованной системы уравнений Власова и Максвелла:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{88}$$

$$\mathbf{j} = e\rho_0 \int \mathbf{v} f d\mathbf{p}, \tag{89}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{90}$$

(предполагается, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$).

В дальнейшем будет также использоваться система уравнений, получаемая при объединении (88) с волновым

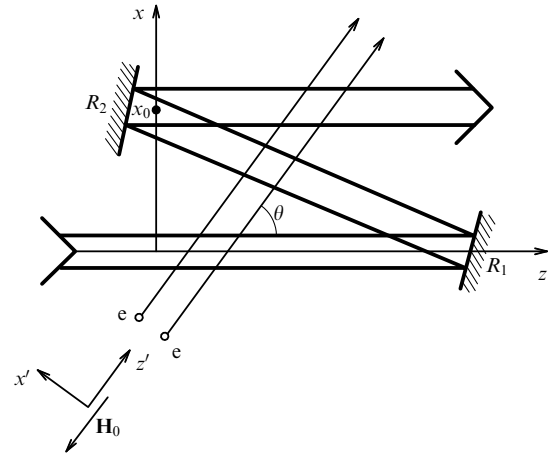


Рис. 1

уравнением

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{91}$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал электромагнитной волны. Как правило, усиливающая среда приводит к слабой зависимости амплитуды поля \mathbf{A}_0 (2) от координаты \mathbf{r} . В этом случае левую часть уравнения (91) можно укоротить:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \approx -i \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] (\mathbf{k}\vec{\nabla}) \mathbf{A}_0 + \text{к.с.}$$

Решение уравнения (91) дает коэффициент усиления амплитуды электромагнитной волны Γ_A . В дальнейшем мы всегда будем вычислять коэффициент усиления интенсивности электромагнитной волны Γ , который связан с Γ_A соотношением $\Gamma = 2\Gamma_A$.

При анализе различных вариантов лазера на свободных электронах мы ограничиваемся только линейными по усиливаемой волне и коэффициенту усиления приближениями (последнее означает, что при расчете тока пучка электронов мы пренебрегаем зависимостью амплитуды от расстояния и времени). После этих замечаний, носящих общий характер, вернемся к расчету черенковского клистрона.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 1, при $\mathbf{H}_0 = 0$. Пучок электронов пересекает электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z , под углом θ и затем движется в дрейфовом пространстве $x > d$. В этой области ток пучка электронов определяется выражением (26). На расстоянии $x = x_0$ тот же пучок света с помощью двух зеркал R_1 и R_2 вновь направляется на пучок электронов и усиливается или поглощается.

Векторный потенциал усиливаемой волны имеет вид

$$A_x = \int A(k_x) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t - ik_x x_0 + i\phi) dk_x + \text{к.с.}, \tag{92}$$

$$A_z \approx 0,$$

$$A(k_x) = -\frac{i}{4\sqrt{\pi}} A_{1x} d \exp\left(-\frac{k_x^2 d^2}{4}\right),$$

$$k_z = \left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_x^2\right)^{1/2}, \quad k_y = 0,$$

где ϕ — фаза, зависящая от расстояния $R_1 R_2$ между зеркалами, а амплитуда A_{1x} медленно зависит от координаты z . Как и в случае (11), фурье-образ поля выбран таким образом, чтобы в плоскости $z = 0$ пучок света имел гауссову огибающую с шириной d . (Предполагается, что дифракционная расходимость пучка света мала и его ширина остается практически неизменной.)

Коэффициент усиления пространственно неоднородной волны проще всего найти из энергетических соотношений. Умножая уравнения (90) на \mathbf{H} и \mathbf{E} и складывая их, получаем

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (n^2 \mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^2) = -\mathbf{jE} - \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{EH}]. \quad (93)$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по объему, заключенному между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии dz друг от друга. Пренебрегая быстро осциллирующими слагаемыми, имеем

$$dP = P(z_2) - P(z_1) = -dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathbf{jE}, \quad (94)$$

где

$$P = \frac{c}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\mathbf{EH}]_{\mathbf{n}} \quad (95)$$

— поток энергии электромагнитной волны, вектор \mathbf{n} направлен вдоль оси z . Так как между усиливаемой волной (92) и пучком электронов (26) нет обратной связи, то после прохождения отрезка $[0, z]$ усредненный по времени поток электромагнитной волны имеет вид

$$P = P_0 \left(1 + \frac{1}{2} \Gamma z\right)^2, \quad (96)$$

где P_0 — поток энергии через плоскость $z = 0$, а

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{P_0 P}} \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathbf{jE}. \quad (97)$$

Если $\Gamma z \ll 1$, то усиление волны носит линейный характер: $P = P_0(1 + \Gamma z)$ с коэффициентом усиления (97). Подставляя в (97) выражения для тока (28) и потока энергии

$$P_0 = c \frac{\sqrt{2\pi}}{16\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 A_{0x}^2 nbd, \quad (98)$$

находим

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4\pi^2 \sqrt{2\pi} \rho_0 e^2 \frac{d}{\lambda} \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{1}{nc^2} e^{i\phi} \times \\ &\times \int v_x \left(q_x \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + q_z \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \right) \exp\left(iq_x x_0 - \frac{q_x^2 d^2}{2}\right) d\mathbf{p} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (99)$$

Так как амплитуда поля (92) A_{1x} медленно зависит от координаты z , то выражение для потока P определяется формулой (98), если A_{0x} заменить на A_{1x} . Проекция волнового вектора \mathbf{q} определяется (17).

Анализ, выполненный в предыдущем разделе, показал, что интеграл, входящий в (99), не мал, если выполняется неравенство (79). Подставляя функцию распределения (70) и разложения (72) в (99) и интегрируя по переменным P_x, P_y, P_z с учетом (79), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma &= 8\pi^2 \sqrt{2\pi} \rho_0 r_0 x_0 \frac{d}{\lambda n} \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \times \\ &\times (n^2 - 1) \sin \phi \exp\left\{-\frac{\pi^2}{4 \ln 2} \left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{\Delta_{\perp}}{P_0}\right)^2 n^2 \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{P_0}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^4 \frac{1}{\beta_0^2 \sin^2 \theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (100)$$

Здесь $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона.

Очевидно, что коэффициент усиления не мал, если фаза $\phi = \pi/2$, а

$$\begin{aligned} x_0 &< \min \left\{ \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \lambda \beta_0 \cos \theta \frac{P_0}{\Delta_{\perp}}, \right. \\ &\left. \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \lambda \sin \theta \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \frac{P_0}{\Delta_{\parallel}} \right\}. \end{aligned} \quad (101)$$

Для релятивистских частиц ($\mathcal{E}_0 \gg mc^2$) основное ограничение на дрейфовое расстояние x_0 возникает из-за углового разброса пучка электронов. В разделе 2.9 рассмотрена возможность нейтрализации углового разброса с помощью постоянного магнитного поля. Если $x_0 = \lambda \sqrt{2 \ln 2} P_0 / \pi \Delta_{\perp} n$, то коэффициент усиления максимален:

$$\Gamma = 45 \rho_0 r_0 \lambda \frac{d}{\lambda} \frac{P_0}{\Delta_{\perp}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \frac{n^2 - 1}{n}. \quad (102)$$

Вычислим теперь коэффициент усиления квантового клистрона. Подставляя выражение для тока (48) в (97) и усредняя по разбросу (70) с учетом (79), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma &= 8\pi \sqrt{2\pi} \rho_0 r_0 \beta_0 d \frac{mc^2}{\hbar \omega} \sin \theta \times \\ &\times \frac{1}{n} \sin(\Delta q_x x_0) \sin \phi \exp\left\{-\frac{\pi^2}{4 \ln 2} \left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{\Delta_{\perp}}{P_0}\right)^2 n^2 + \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{P_0}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \frac{1}{\beta_0^2 \sin^2 \theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (103)$$

Здесь $\Delta q_x = \hbar \omega (n^2 - 1) / (2 \mathcal{E}_0 v_0 \sin \theta)$. Так как квантовая модуляция пучка частиц возникает на расстояниях $x_0 \sim 1/\Delta q_x$, то это приводит к очень жестким требованиям на качество пучка электронов (82).

Отметим также, что теория возмущений, примененная для расчетов токов (26), (48), справедлива для полей, определяемых из неравенств (31), (51). В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) формула (103) переходит в (100).

2.9. Теория черенковского клистрона в постоянном магнитном поле

Негативную роль углового разброса пучка электронов в черенковском клистроне можно нейтрализовать с помощью постоянного магнитного поля, направленного вдоль направления движения электронов (см. рис. 1). Вычислим коэффициент усиления электромагнитной волны (11) на основе системы уравнений (88), (90). В рассматриваемом случае сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}(\mathbf{H} + \mathbf{H}_0)], \quad (104)$$

где $\mathbf{H}_0(0, 0, -H_0)$ — напряженность постоянного магнитного поля, направленная против оси z .

Вычислим функцию распределения электронов, точно учитывая постоянное магнитное поле и в первом приближении модулирующую волну (11). В постоянном магнитном поле решение уравнения (88) имеет вид

$$f_1 = f_0(p_{0x'}, p_{0y'}, p_{0z'}). \quad (105)$$

Здесь функция f_0 определяется выражением (70),

$$\begin{aligned} p_{0x'} &= p_{x'} \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t, \\ p_{0y'} &= p_y \cos \Omega t + p_{x'} \sin \Omega t, \\ p_{0z'} &= p_z \end{aligned} \quad (106)$$

— характеристики уравнения (88), $\Omega = \Omega_0 mc^2 / \mathcal{E}$, $\Omega_0 = |e|H_0/mc$ — ларморова частота,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= [(mc^2)^2 + c^2(p_{0x'}^2 + p_{0y'}^2 + p_{0z'}^2)]^{1/2} = \\ &= [(mc^2)^2 + c^2\mathbf{p}^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

В первом приближении по полю (11) имеется

$$f = f_1 + f_2,$$

где

$$\begin{aligned} f_2 &= -2\pi e \sin \theta \frac{\partial f_0}{\partial p_{z'}} \int J_0\left(\frac{v_{\perp} q'_{z'}}{\Omega}\right) q'_{z'} \times \\ &\times \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \mathbf{q}'^2\right) \delta(\omega - q'_{z'} v_{z'}) \times \\ &\times E_{q'} \exp\left(i\mathbf{q}'\mathbf{r} - i\omega t - iq'_{z'} \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi\right) d\mathbf{q}' + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (107)$$

Фурье-образ электрического поля $E_{q'} = i\omega A_x(\mathbf{q}')/c$ (см. (12)), θ — угол между осями z' и z ; $\tan \varphi = p_y/p_x$; $J_0(a)$ — функция Бесселя нулевого порядка. В (107) учтены только слагаемые, ответственные за вынужденный черенковский эффект:

$$\omega - q_{z'} v_{z'} = 0. \quad (108)$$

Очевидно, что уравнение (108) отличается от (15), использованного при выводе (102), тем, что содержит только одну проекцию скорости $v_{z'}$. Расчеты показывают, что это обстоятельство играет решающую роль в нейтрализации углового разброса электронов в постоянном магнитном поле.

Вычислим x — проекцию тока пучка электронов в области $x \gg d$. Учитывая, что $v_x = v_{x'} \cos \theta + v_{z'} \sin \theta$, и удерживая только слагаемые, осциллирующие на частоте ω , получаем

$$\begin{aligned} j_x &= -\pi e^2 \rho_0 \sin \theta \int \left(1 + \frac{v_{x'}}{v_{z'}} \cot \theta\right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{z'}} J_0\left(\frac{v_{\perp} q_{x'}}{\Omega}\right) \times \\ &\times E_q \exp\left(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t - iq_{x'} \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi\right) d\mathbf{p} + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (109)$$

где

$$\begin{aligned} q_{z'} &= \frac{\omega}{v_{z'}}, \quad q_{x'} = \frac{\omega}{v_{z'}} \sqrt{n^2 \beta_{z'}^2 - 1}, \\ v_{\perp} &= \frac{p_{\perp} c^2}{\mathcal{E}}, \quad p_{\perp} = \sqrt{p_{x'}^2 + p_{y'}^2}. \end{aligned} \quad (110)$$

Подставляя эти выражения в (97), находим коэффициент усиления черенковского клистрона:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -2i\pi \sqrt{\pi} \rho_0 e^2 x_0 d \frac{\sin \theta}{nc} e^{-i\phi} \times \\ &\times \int \left(1 + \frac{v_{x'}}{v_{z'}} \cot \theta\right) \frac{\partial q_x}{\partial p_{z'}} J_0\left(\frac{v_{\perp} q_{x'}}{\Omega}\right) \times \\ &\times f_0 \exp\left(iq_{x'} x_0 - iq_{x'} \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{q_x^2 d^2}{2}\right) d\mathbf{p} + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (111)$$

где $q_x = q_{x'} \cos \theta + q_{z'} \sin \theta$, фаза ϕ определяется расстоянием между зеркалами $R_1 R_2$ (см. рис. 1).

Предположим, что средний импульс p_0 пучка электронов подобран так, что $q_x(p_0) = 0$. В этом случае волновой вектор

$$q_x \approx \frac{\omega}{p_0 v_0 \sin \theta} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 (p_{z'} - p_0) + \frac{\omega c^2}{\mathcal{E}_0^2 v_0 \sin \theta} p_{\perp}^2.$$

Подставляя это разложение в (111) и интегрируя по переменным $p_{z'}$, p_{\perp} , φ , получаем

$$\begin{aligned} \Gamma &= 8\pi^2 \sqrt{2\pi} \rho_0 r_0 x_0 \frac{d}{\lambda} \frac{1}{n\beta_0^2} \times \\ &\times \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^3 \sin \phi I_0\left(\frac{1}{8 \ln 2} \left(\frac{\omega \Delta_{\perp} n \sin \theta}{\Omega_0 mc}\right)^2\right) \times \\ &\times \exp\left\{-\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^2 \frac{\pi^2}{4 \ln 2} \left[\frac{\Delta_{\parallel}}{p_0} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \frac{1}{\beta_0 \sin \theta}\right]^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8 \ln 2} \left(\frac{\omega \Delta_{\perp} n \sin \theta}{\Omega_0 mc}\right)^2\right\}. \end{aligned} \quad (112)$$

Здесь $I_0(a)$ — модифицированная функция Бесселя, $v_0 = p_0 c^2 / \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0 = [(mc^2)^2 + c^2 p_0^2]^{1/2}$.

Отметим также, что при разложении q_x в ряд Тэйлора опущено слагаемое, пропорциональное $(p_{z'} - p_0)^2$, так как его вклад незначителен.

Выражение (112) справедливо при

$$x_0 < \lambda \frac{2 \ln 2}{\pi \beta_0} \left(\frac{p_0}{\Delta_{\perp}}\right)^2 \sin \theta. \quad (113)$$

Очевидно, что это ограничение на x_0 , связанное с угловым разбросом пучка электронов $\delta = \Delta_{\perp} / p_0$, гораздо слабее, чем (101). Если напряженность постоянного магнитного поля

$$H_0 \gg \frac{1}{\sqrt{8 \ln 2}} \frac{\omega \Delta_{\perp} n \sin \theta}{|e|}, \quad (114)$$

фаза $\phi = \pi/2$, а расстояние

$$x_0 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{2 \ln 2} \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \beta_0 \sin \theta,$$

то коэффициент усиления максимален:

$$\Gamma = 45 \rho_0 r_0 \lambda \frac{d}{\lambda} \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{n\beta_0} \sin \theta. \quad (115)$$

Подставляя выражение для x_0 в (113), находим интервал энергий, для которого постоянное магнитное поле нейтрализует угловой разброс пучка частиц:

$$mc^2 < \mathcal{E}_0 < mc^2 \frac{\sqrt[4]{2 \ln 2}}{\beta_0} \sqrt{\frac{p_0}{\Delta_{\perp}}} \sqrt{\frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}}}. \quad (116)$$

В заключение отметим, что в работе [47] исследован коэффициент усиления черенковского клистрона для случая, когда постоянное магнитное поле направлено перпендикулярно скорости движения частиц в области дрейфа.

2.10. Классическая теория черенковского лазера

Рассмотрим взаимодействие пучка электронов с плоской монохроматической волной

$$A_x = \frac{1}{2} A_0 \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}, \quad (117)$$

распространяющейся в диэлектрической среде с показателем преломления n . Ток пучка электронов можно представить в виде ряда теории возмущений по полю:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1 \exp[i(\omega t - kz)] + \mathbf{j}_2 \exp[2i(\omega t - kz)] + \dots \quad (118)$$

Первое слагаемое $\mathbf{j}_0 = e\rho_0\mathbf{v}$ соответствует нулевому приближению и, как отмечалось в разделе 2.8, не дает вклада в обмен энергией между пучком электронов и волной ($W = 0$). Ток $\mathbf{j}_1 \exp[i(\omega t - kz)]$ линеен по полю. Очевидно, что в этом приближении интеграл (87) отличен от нуля, что позволяет передавать энергию электронов в волну, т.е. создавать черенковский лазер. Слагаемые второго и более высоких порядков в (118) ответственны за генерацию гармоник и здесь рассматриваться не будут.

Усиление электромагнитной волны в черенковском лазере имеет следующие существенные отличия от черенковского клистрона.

1. В клистроне разность фаз ϕ между током и усиливаемой волной зависит от расстояния $R_1 R_2$ между зеркалами. Это дает возможность подобрать ее так, чтобы число электронов, попадающих в тормозящую фазу, было больше, чем число электронов, получающих ускорение ($W < 0$). В черенковском лазере разность фаз ϕ между током $\mathbf{j}_1 \exp[i(\omega t - kz)]$ и усиливаемой волной (117) определяется коэффициентом \mathbf{j}_1 , пропорциональным производной от функции распределения частиц (120). Очевидно, что для функции распределения, имеющей экстремальные точки, знак производной и, следовательно, разность фаз ϕ можно подобрать так, чтобы пучок электронов передавал свою энергию в волну ($W < 0$).

2. Существенное отличие черенковского лазера от черенковского клистрона связано с характером усиления. Так как в клистронной схеме модуляция скорости электронов происходит вблизи плоскости $x = 0$, а усиление электромагнитной волны вблизи плоскости $x = x_0$ (см. рис. 1), то между током и волной отсутствует обратная связь. Это приводит к линейному ($\Gamma z \ll 1$) или квадратичному ($\Gamma z \gg 1$) росту интенсивности волны с расстоянием z (см. (96)). В черенковском лазере поле и ток задаются в одной точке. Поэтому усиление электромагнитной волны носит экспоненциальный характер (см. (124)).

Вычислим коэффициент усиления черенковского лазера на основе замкнутой самосогласованной системы уравнений (88), (90). Будем считать, что ширина пучка усиливаемого излучения d велика ($\lambda/d \ll \delta, \Delta/\mathcal{E}$) и

его можно аппроксимировать плоской волной (117). Предположим также, что амплитуда волны A_0 медленно зависит от координаты z .

Решая уравнения (88) в линейном по полю приближении, получаем функцию распределения частиц в виде

$$f = f_0 + f_1. \quad (119)$$

Здесь f_0 — начальная функция распределения электронов,

$$f_1 = \frac{i}{\omega - kv_z} \mathbf{F} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + \text{к. с.}, \quad (120)$$

сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} e \left[\mathbf{E}_0 \left(1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \right] \exp[i(\omega t - kz)]$$

($\mathbf{E}_0 = -i(\omega/c)\mathbf{A}_0$ — амплитуда напряженности электрического поля). При интегрировании предполагалось, что поле (117) включается адиабатически медленно при $t = -\infty$.

Подставляя (120) в (89) и интегрируя по частям, приходим к выражению для x -проекции тока:

$$j_x = -\frac{1}{2} e^2 \rho_0 c A_0 \exp[i(\omega t - kz)] \times \left[\int \frac{f_0(\mathbf{p})}{\mathcal{E}} d\mathbf{p} + (n^2 - 1) \int \frac{v_x p_x f_0(\mathbf{p})}{(\mathcal{E} - ncp_z)^2} d\mathbf{p} \right] + \text{к. с.} \quad (121)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках (121) дает показатель преломления пучка электронов, второе ответственно за усиление или поглощение электромагнитной волны.

Подставляя ток (121) в уравнение (93) и интегрируя его по объему, заключенному между плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, получаем

$$dP = -dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \overline{j_x E_x}. \quad (122)$$

Здесь

$$P = \frac{1}{8\pi} \frac{n\omega^2}{c} abA_0^2 \quad (123)$$

— поток энергии волны через площадь $S = ab$, $dP = P(z_2) - P(z_1)$ изменение потока на участке $dz = z_2 - z_1$.

Решение уравнения (122) имеет вид

$$P = P_0 e^{\Gamma z}, \quad (124)$$

где P_0 — поток энергии волны через плоскость $z = 0$,

$$\Gamma = -2\rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n} \text{Im} \int \frac{mc^2 v_x p_x}{(\mathcal{E} - ncp_z)^2} f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (125)$$

Если функция распределения имеет максимум при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, то

$$\Gamma = -2\rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n} mc^2 v_{0x} p_{0x} J. \quad (126)$$

Здесь множитель

$$J = -\text{Im} \int \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right) f_0(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (127)$$

$x = \mathcal{E} - ncp_z$, $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, λ — длина волны усиливаемого излучения. Запись коэффициента усиления в виде (126) удобна для исследования различных моделей функции распределения частиц. Для установления зависимости коэффициента усиления черенковского лазера от энергетического разброса электронов нужно $f_0(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ заменить на $g(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$. Замена $f_0(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ на $g(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$ позволяет исследовать роль углового разброса электронов.

Рассмотрим общий случай, когда пучок электронов имеет гауссовы разбросы по энергиям и углам:

$$f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = g(\mathcal{E}, \theta) d\mathcal{E} d\theta \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (128)$$

$$g(\mathcal{E}, \theta) = \frac{8 \ln 2}{\pi} \frac{1}{\delta \Delta} \exp \left\{ -4 \ln 2 \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2} + \frac{\theta^2}{\delta^2} \right] \right\}.$$

В этом случае величину

$$J = -\text{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{E} \int_0^{\infty} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi g(\mathcal{E}, \theta) \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right) \quad (129)$$

удобно вычислять в системе координат, связанной с пучком частиц.

Направим ось z' вдоль центральной оси пучка частиц и проведем плоскость $x'z'$ через ось z' и вектор \mathbf{A} (рис. 2). Введем угол θ_0 между волновым вектором \mathbf{k} и осью z' , угол θ между осью z' и направлением скорости \mathbf{v} и угол θ' между волновым вектором \mathbf{k} и направлением скорости \mathbf{v} . Так как подинтегральная функция быстро затухает при $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_0$ и $\theta \neq 0$, то пределы интегрирования по этим переменным выбраны $[-\infty, +\infty]$ и $[0, +\infty]$ соответственно.

Перейдем в интеграле (129) к новым переменным:

$$u = \mathcal{E} - ncp \cos \theta', \quad v = \theta, \quad \varphi = \varphi. \quad (130)$$

Тогда

$$J = -\text{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi g(u, v, \varphi) \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} \right| \left(\frac{d}{du} \frac{1}{u} \right). \quad (131)$$

Интегрируя это выражение по частям и используя правило

$$\frac{1}{x - i\eta} \Big|_{\eta \rightarrow +0} = i\pi \delta(x) + P \frac{1}{x}, \quad (132)$$

получаем

$$J = \frac{2(4 \ln 2)^2}{\pi \Delta^3 \delta} \int_0^{\infty} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{p}{mc} \right)^4 (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \times \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2} - 4 \ln 2 \frac{\theta^2}{\delta^2} \right], \quad (133)$$

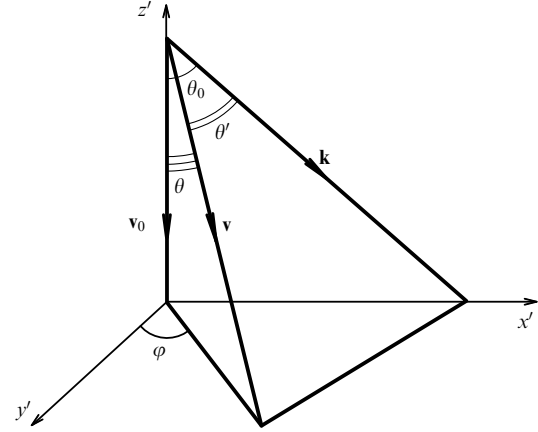


Рис. 2

где \mathcal{E} определяется из уравнения

$$\mathcal{E} - ncp \cos \theta' = 0. \quad (134)$$

Формула (133) учитывает вклад в усиление электромагнитной волны от электронов, имеющих все возможные направления скорости \mathbf{v} . Максимальный вклад дают частицы, движущиеся вдоль оси z' . Из (134) находим их энергию:

$$\mathcal{E}_m = \frac{mc^2}{[1 - n^{-2}(\cos \theta_0)^{-2}]^{1/2}}. \quad (135)$$

Она должна быть достаточно близка к \mathcal{E}_0 , чтобы коэффициент усиления не был экспоненциально мал.

Для скоростей, составляющих угол θ' с осью z , энергия определяется выражением

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{[1 - n^{-2}(\cos \theta')^{-2}]^{1/2}}. \quad (136)$$

Так как отличный от нуля вклад дают лишь частицы с энергиями, близкими к \mathcal{E}_m , то знаменатель в (136) можно разложить в ряд Тэйлора:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \left[1 - \theta \tan \theta_0 \sin \varphi \left(\frac{p_m}{mc} \right)^2 \right]. \quad (137)$$

Здесь учтено, что угол θ' связан с θ и φ соотношением (см. рис. 2)

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \theta_0 (1 + \tan \theta \tan \theta_0 \sin \varphi) \approx \cos \theta_0 (1 + \theta \tan \theta_0 \sin \varphi). \quad (138)$$

(Анализ показывает, что при разложении по малому углу θ достаточно ограничиться линейным приближением.)

Разложение (137) справедливо для пучков с угловым разбросом

$$\delta < \left(\frac{mc}{p_0} \right)^2 \cot \theta_0. \quad (139)$$

Подставляя разложение (137) в формулу (133) и вынося медленно меняющиеся функции угла из-под

знака интеграла, получаем

$$J = 2\sqrt{\pi} (4 \ln 2)^{3/2} \left(\frac{p_0}{mc}\right)^4 \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_0}{D^3} \times \exp\left[-4 \ln 2 \frac{(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_0)^2}{D^2}\right], \quad (140)$$

где эффективная ширина

$$D = \left[\Delta^2 + \delta^2 \mathcal{E}_0^2 \left(\frac{p_0}{mc}\right)^4 \tan^2 \theta_0 \sin^2 \varphi\right]^{1/2}. \quad (141)$$

Так как зависимость подинтегральной функции от угла φ сложная, то интегрирование по этой переменной выполнено приближенно. В дальнейшем предполагается, что $\sin^2 \varphi$ принимает наибольшее значение, равное единице.

Отметим, что тот же результат можно получить точно, если выбрать начальную функцию распределения электронов в виде (70). Коэффициент усиления (126) максимален при энергии $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 - D/\sqrt{8 \ln 2}$:

$$\Gamma = 16 \ln 2 \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\mathcal{E}_0 m v_0^2 (p_0/mc)^4 \sin^2 \theta_0}{\Delta^2 + \delta^2 \mathcal{E}_0^2 (p_0/mc)^4 \tan^2 \theta_0}, \quad (142)$$

где $e = 2,718\dots$ — основание натурального логарифма. Соответствующая энергии \mathcal{E}_m частота определяется из (134) при $\theta' = \theta_0$.

Если угловой разброс пучка электронов

$$\delta \ll \frac{\Delta}{\mathcal{E}_0} \left(\frac{mc}{p_0}\right)^2 |\cot \theta_0|, \quad (143)$$

то коэффициент усиления определяется только энергетическим разбросом:

$$\Gamma = 8,4 \rho_0 r_0 \lambda \beta_0^3 \frac{n^2 - 1}{n} \left(\frac{p_0}{mc}\right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\Delta}\right)^2 \sin^2 \theta_0. \quad (144)$$

Отметим, что в этом случае Γ очень сильно зависит от средней энергии частиц ($\Gamma \propto (\mathcal{E}_0/mc^2)^3$, если $\Delta/\mathcal{E}_0 = \text{const}$).

Для обычных релятивистских пучков выполняется обратное неравенство:

$$\delta \gg \frac{\Delta}{\mathcal{E}_0} \left(\frac{mc}{p_0}\right)^2 |\cot \theta_0|. \quad (145)$$

В этом случае коэффициент усиления определяется только угловым разбросом пучка электронов:

$$\Gamma = 8,4 \rho_0 r_0 \lambda \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \frac{n^2 - 1}{n^3} \frac{1}{\delta^2}. \quad (146)$$

Очевидно, что учет углового разброса полностью изменяет зависимость коэффициента усиления от энергии частицы: он начинает убывать с ростом средней энергии пучка электронов, как mc^2/\mathcal{E}_0 .

В разделе 2.14 показано, что негативную роль углового разброса можно нейтрализовать с помощью постоянного магнитного поля. Отметим также, что техника расчета, развитая в этом разделе для анализа работы черенковского лазера и используемая в дальнейшем, справедлива для коэффициентов усиления, удовлет-

воряющих неравенству

$$\Gamma < k \frac{\Delta v}{v}, \quad (147)$$

где $\Delta v/v$ — относительный разброс пучка электронов по скоростям вдоль направления распространения волны.

Экспоненциальный рост амплитуды плоской поперечной волны (117) и, следовательно, поправки к начальной функции распределения (120) означает, что пучок электронов и замедляющая среда являются неустойчивой системой, причем неустойчивость носит черенковский характер. Вопросы поглощения и нарастания возмущений, связанные с вынужденным эффектом ВЧ, хорошо известны и изучены в теории плазмы: затухание Ландау, пучковая неустойчивость [48, 49].

В отличие от рассматриваемых нами схем в плазме замедленной является продольная волна. Поэтому такую среду можно использовать как активную, лишь если на входе и выходе из плазмы имеются преобразователи поперечной волны в продольную и наоборот. Что касается механизма усиления и техники расчета инкремента неустойчивости, то они аналогичны в обоих случаях.

Отметим, что в соответствии с принятой в физике плазмы терминологией различают два типа неустойчивостей: гидродинамическую и кинетическую [49]. В первом случае можно пренебречь температурой плазмы и разбросом пучка электронов по энергиям, т.е. инкремент неустойчивости определяется плотностью частиц и их скоростью. Во втором случае оба разброса играют существенную роль, поэтому инкремент неустойчивости определяется функциями распределения как пучка частиц, так и плазмы.

В наших работах предполагается, что выполняется неравенство (147), т.е. исследуется кинетическая черенковская неустойчивость системы. В [50] рассматривались как кинетическая, так и гидродинамическая неустойчивости (см. также раздел 2.14).

2.11. Квантовая теория черенковского лазера

Если угловой разброс пучка электронов $\delta \rightarrow 0$, то, подставляя $f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = g(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$ в (127) и интегрируя по частям, получаем, что знак коэффициента усиления черенковского лазера определяется производной от функции распределения частиц по энергиям. Физический смысл этого обстоятельства становится очевидным при анализе ВЧЭ на основе законов сохранения энергии и импульса:

$$\mathcal{E}^\mp \mp \hbar\omega = \mathcal{E}_2, \quad \mathbf{p}^\mp \mp \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_2. \quad (148)$$

Если угол θ_0 между волновым вектором \mathbf{k} и импульсом частицы \mathbf{p} задан, то система уравнений (148) определяет энергию и импульс электронов, участвующих в процессах излучения и поглощения фотона:

$$\mathcal{E}^- = \mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^+ = \mathcal{E}_1 - \Delta\mathcal{E}. \quad (149)$$

Здесь энергия \mathcal{E}_1 определяется из уравнения (134) при $\theta = \theta_0$, а

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega}{2} (n^2 - 1) \left(\frac{p_1}{mc}\right)^2. \quad (150)$$

Так как в процессах излучения и поглощения участвуют разные электроны, то это позволяет усиливать излучение

в случае, когда число излучающих электронов $N(\mathcal{E}^-)$ больше числа поглощающих $N(\mathcal{E}^+)$. Учитывая, что $\Delta N = N(\mathcal{E}^-) - N(\mathcal{E}^+) \propto g(\mathcal{E}^-) - g(\mathcal{E}^+)$, и разлагая функцию распределения в ряд Тэйлора по малому параметру $\Delta\mathcal{E}$, получаем, что перенаселенность $\Delta N \propto 2(dg/d\mathcal{E}_1) \times \Delta\mathcal{E} > 0$ на левом крыле функции распределения частиц по энергиям. С классической точки зрения (см. раздел 2.10) это означает, что при $dg/d\mathcal{E}_1 > 0$ число частиц, попадающих в тормозящую фазу, больше, чем число частиц, получающих ускорение.

Проанализируем роль спиновых и поляризационных эффектов в черенковском лазере. Вычислим коэффициент усиления монохроматической электромагнитной волны, поляризованной по эллипсу:

$$A_x = A_1 \cos(kz - \omega t), \quad A_y = -A_2 \sin(kz - \omega t), \quad (151)$$

на основе замкнутой самосогласованной системы уравнений Дирака и Максвелла:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc^2 \beta \right] \psi, \quad (152)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (153)$$

$$\mathbf{j} = ec\psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (154)$$

Полагая, что амплитуды волны $A_{1,2}$ слабо зависят от координаты z , получаем решение уравнения Дирака в линейном по полю приближении:

$$\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-. \quad (155)$$

Здесь ψ_0 — начальная волновая функция пучка частиц (55); слагаемые

$$\psi_{\pm} = \pm \frac{ec(\hat{p}_{\pm} + mc)\hat{A}_{\pm} \exp[\pm i(kz - \omega t)]}{4\hbar\omega\mathcal{E}[1 - n\beta_z \mp (\hbar\omega/2\mathcal{E})(n^2 - 1)]} \psi_0 \quad (156)$$

описывают процессы излучения и поглощения фотона; четырехвекторы $p_{\pm}^{\mu} = p^{\mu} \pm \hbar k^{\mu}$, $k^{\mu}(\omega/c, 0, 0, K)$; операторы $\hat{p} = p_{\mu}\gamma^{\mu}$, $\hat{A}_{\pm} = A_{\mu}^{\pm}\gamma^{\mu}$; векторы $\mathbf{A}^{\pm} = \hat{i}A_1 \pm \hat{j}A_2$.

Считается, что до взаимодействия поляризация матрица плотности имела вид (57), находим проекции тока моноэнергетического пучка электронов:

$$j_x = \frac{e^2\rho_0 c}{2\mathcal{E}} \left[(1 - n\beta_z)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \right)^2 (n^2 - 1)^2 \right]^{-2} \times \\ \times \left\{ [(1 - n^2)\beta_x^2 - (1 - n\beta_z)^2] A_1 + \right. \\ \left. + i(1 - n^2) + \left[\beta_x\beta_y + i \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} (a_3 - na_0) \right] A_2 \right\} \times \\ \times \exp[i(kz - \omega t)] + \text{к. с.}, \quad (157)$$

$$j_y = \frac{e^2\rho_0 c}{2\mathcal{E}} \left[(1 - n\beta_z)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \right)^2 (n^2 - 1)^2 \right]^{-2} \times \\ \times \left\{ (1 - n^2) \left[\beta_x\beta_y - i \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} (a_3 - na_0) \right] A_1 + \right. \\ \left. + i[(1 - n^2)\beta_y^2 - (1 - n\beta_z)^2] A_2 \right\} \times \\ \times \exp[i(kz - \omega t)] + \text{к. с.} \quad (158)$$

Сравним x -проекцию тока (157) с классическим выражением (121). Отметим прежде всего, что при

квантовом расчете энергии частиц, участвующих в процессах излучения и поглощения, расщепляются. Из полюса выражения (157) следует, что

$$1 - n\beta_z = \mp \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (n^2 - 1). \quad (159)$$

Здесь знак "−" соответствует излучению фотона, "+" — поглощению. Решения этих уравнений определяются выражениями (149), (150).

Сравним коэффициент при A_1 (157) и числитель во втором слагаемом (121). Очевидно, что квантовый расчет привел к дополнительному слагаемому, пропорциональному $(1 - n\beta_z)^2$. Анализ выражения для тока в нерелятивистском пределе (64) показывает, что оно связано с индуцированной намагниченностью пучка электронов (аналогичный эффект рассматривался в разделах 2.5, 2.6).

Рассмотрим теперь коэффициент при A_2 . Слагаемое, пропорциональное $\beta_x\beta_y$, в выражении (121) отсутствует, так как при его расчете предполагалось, что $A_y = 0$. Слагаемое, пропорциональное $a_3 - na_0$, связано с начальной поляризацией пучка электронов (аналогичный эффект рассматривался в разделе 2.5). Очевидно, что поляризованный пучок электронов — это анизотропная среда, обладающая гиротропией [44], с коэффициентом

$$g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{(n^2 - 1)(a_3 - na_0)}{(1 - n\beta_z)^2 - (\hbar\omega/2\mathcal{E})^2 (n^2 - 1)^2}. \quad (160)$$

Подставляя (157), (158) в (153) и учитывая, что амплитуды поля (151) слабо зависят от координаты z , получаем систему укороченных дифференциальных уравнений для определения $A_{1,2}$:

$$\frac{dA_1}{dz} = aA_1 + bA_2, \quad (161)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = qA_1 + dA_2. \quad (162)$$

Здесь коэффициенты

$$a = iR[(1 - n^2)\beta_x^2 - (1 - n\beta_z)^2], \\ b = -R[(1 - n^2)\beta_x\beta_y - iv], \\ d = iR[(1 - n^2)\beta_y^2 - (1 - n\beta_z)^2], \\ q = R[(1 - n^2)\beta_x\beta_y + iv], \\ R = \frac{\omega_p^2}{2n\omega c} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \left[(1 - n\beta_z)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \right)^2 (n^2 - 1)^2 \right]^{-1}, \\ \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2\rho_0}{m}, \\ v = \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} (a_3 - na_0)(n^2 - 1). \quad (163)$$

Рассмотрим сначала усиление электромагнитной волны, линейно поляризованной вдоль оси x , пренебрегая спиновыми эффектами. Предположим, что пучок электронов движется в плоскости xz и имеет гауссов разброс по энергиям:

$$g(\mathcal{E}) = \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\Delta} \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2} \right]. \quad (164)$$

Представляя множитель R из (163) в виде разности амплитуд излучения и поглощения фотона:

$$\begin{aligned} R &\sim \left[(1 - n\beta_z)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} \right)^2 (n^2 - 1)^2 \right]^{-1} = \\ &= - \left[\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}} (n^2 - 1) \right]^{-1} \left\{ \left[1 - n\beta_z + \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (n^2 - 1) + i\eta \right]^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - n\beta_z - \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}} (n^2 - 1) + i\eta \right]^{-1} \right\}_{\eta \rightarrow 0}, \end{aligned} \quad (165)$$

и усредняя правую часть (161) по энергиям с учетом правила (163), получаем коэффициент усиления интенсивности электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi\rho_0 r_0 \lambda \sin^2 \theta_0 \frac{mv_0^2}{n\hbar\omega} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \times \\ &\quad \times \mathcal{E}_0 [g(\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}) - g(\mathcal{E}_1 - \Delta\mathcal{E})]. \end{aligned} \quad (166)$$

Очевидно, что коэффициент усиления зависит от того, насколько удастся разделить процессы излучения и поглощения фотона. Если величина

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega}{2} (n^2 - 1) \left(\frac{p_1}{mc} \right)^2 \ll \Delta, \quad (167)$$

то, разлагая функцию распределения в ряд Тэйлора, возвращаемся к формуле (144). Для релятивистских частиц, когда величина $\Delta\mathcal{E} \gg \Delta$, можно подобрать начальные условия так $(1 - n\beta_z - (\hbar\omega/2\mathcal{E})(n^2 - 1) = 0)$, чтобы вклад процессов поглощения был экспоненциально мал. В этом случае коэффициент усиления носит чисто квантовый характер:

$$\Gamma = 5,9 \rho_0 r_0 \lambda \frac{mv_0^2}{n\hbar\omega} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta} \sin^2 \theta_0. \quad (168)$$

Однако при больших энергиях существенную роль начинает играть угловой разброс пучка частиц (145). Поэтому практическая реализация этого предельного случая связана со сложной проблемой создания пучков частиц с ничтожно малым угловым разбросом (143). Если усреднить полюсы (165) по энергетическому и угловому разбросам (128), то при $\hbar \rightarrow 0$ вновь возвращаемся к формуле (142).

Проанализируем вклад спина в процесс усиления электромагнитной волны. Чтобы выделить чисто спиновое взаимодействие электрона с волной, предположим, что он движется параллельно оси z ($\beta_x = \beta_y = 0$). Усиление электромагнитной волны на поляризованном пучке электронов проанализировано в следующем разделе. Здесь мы рассмотрим усиление электромагнитной волны на неполяризованном пучке электронов ($|\zeta| = 0$) за счет его индуцированной намагниченности. Полагая, что пучок электронов имеет гауссов разброс по энергиям (116), из (161), (162) получаем

$$\Gamma = 2,1 \rho_0 r_0 \lambda \beta_0 \frac{(n^2 - 1)^2}{n} \left(\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\Delta} \right)^2 \quad (169)$$

(роль углового разброса при $\theta_0 = 0$ несущественна; см. (141)). Так как $\hbar\omega/\mathcal{E}_0 \ll 1$, то коэффициент усиления спинового черенковского лазера невелик.

2.12. Правила отбора в черенковском лазере

При усилении электромагнитного излучения круговой поляризации на поляризованном пучке электронов ($|\zeta| \neq 0$) возникает возможность полного подавления процесса поглощения фотонов. Покажем это на основе закона сохранения момента импульса для системы фотон-электрон в случае, когда все фотоны поляризованы по правому кругу и движутся вдоль оси z . Момент импульса таких фотонов равен \hbar . Направим пучок электронов вдоль волнового вектора фотонов. Электроны могут излучать или поглощать фотоны в соответствии с законами сохранения энергии и импульса (148), дополненными законом сохранения момента импульса

$$S_{1z} \pm I_z = S_{2z}. \quad (170)$$

Здесь I_z — z -проекция момента импульса фотона, пробегающая значения $\hbar, 0, -\hbar$; S_z — z -проекция момента импульса электрона, принимающая значения $\hbar/2$ и $-\hbar/2$.

Если $I_z = \hbar$, $S_{1z} = \hbar/2$ (фотоны поляризованы по правому кругу, электроны поляризованы вдоль оси z), то электроны могут только излучать фотоны с переворотом спина: $S_{2z} = -\hbar/2$. Если электроны поляризованы против оси z ($S_{1z} = -\hbar/2$), то закон сохранения (170) разрешает только поглощение фотонов. Таким образом, пучок электронов, поляризованный в направлении своего движения, является полностью перенаселенной средой для света, поляризованного по правому кругу и распространяющегося в том же направлении.

Вычислим в этом случае коэффициент усиления электромагнитной волны. Выберем ее векторный потенциал в виде

$$\begin{aligned} A_x &= A_0 \cos(\omega t - kz), \\ A_y &= A_0 \sin(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (171)$$

Решая уравнение Дирака (152) в линейном по полю приближении, получаем

$$\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-, \quad (172)$$

где ψ_0 определяется (55),

$$\psi_{\pm} = \mp \frac{ec(\hat{p}_{\pm} + mc)\hat{A}_{\pm} \exp[\mp i(\omega t - kz)]}{4\mathcal{E}\hbar[\omega - kv \mp (\hbar\omega^2/2\mathcal{E})(n^2 - 1) \pm i\eta]_{\eta \rightarrow 0}} \psi_0, \quad (173)$$

$\hat{A}_{\pm} = \hat{A}_0 \pm \hat{j}iA_0$. Остальные обозначения приводятся те же, что и в (156).

Полагая, что до взаимодействия поляризационная матрица плотности электронов имела вид (57), находим x -проекцию тока:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{e^2 \rho_0 c}{4\mathcal{E}} A_0 \exp[i(\omega t - kz)] \times \\ &\quad \times \left[\frac{(\omega - kv)(1 + \zeta_z)}{\omega - kv + (\hbar\omega^2/2\mathcal{E})(n^2 - 1) - i\eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - kv)(1 - \zeta_z)}{\omega - kv - (\hbar\omega^2/2\mathcal{E})(n^2 - 1) - i\eta} \right]_{\eta \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (174)$$

Аналогичный вид имеет и y -проекция тока.

Первое слагаемое в фигурных скобках (174) описывает процесс излучения фотона, второе — процесс поглощения фотона. Если $\zeta_z = 1$, т.е. пучок частиц полностью поляризован вдоль оси z , то амплитуда

процесса поглощения равна нулю и коэффициент усиления максимален.

Если $\zeta_z = 0$, то усиление идет только за счет индуцированной намагниченности (см. раздел 2.6) и определяется разностью амплитуд излучения и поглощения фотона (см. (168)). Усредняя ток (174) по разбросу (164) при $\zeta_z = 1$ и подставляя его в укороченное уравнение (153), получаем

$$\Gamma = 18,5 \rho_0 r_0 \lambda_k \beta_0 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta}. \quad (175)$$

Здесь $\lambda_k = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны электрона.

Сравнение коэффициентов усиления интенсивности электромагнитной волны (169) и (175) показывает, что подавление процессов поглощения ведет к увеличению эффективности черенковского лазера в $\Delta/\hbar\omega$ раз. Тем не менее абсолютная величина Γ (175) невелика по сравнению со (142), так как спиновое взаимодействие электрона с волной ($H_1 = -\mu\mathbf{H}$) значительно меньше орбитального ($H_2 = -e\mathbf{c}\mathbf{A}\beta_0$).

Отметим также, что в спиновом лазере электроны и усиливаемая волна движутся в одном направлении почти с одной и той же скоростью. Поэтому их взаимодействие может быть довольно продолжительным и привести к наблюдаемому эффекту.

В заключение отметим, что классическая и квантовая теории спонтанного излучения магнитного момента (в том числе и вперед) детально рассматривались в работах [52–54]. В соответствии с результатами [52–53] на пороге ($1 - nv/c = 0$ или $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}_1$, где \mathcal{E}_1 — энергия начального электрона, движущегося со скоростью волны (149)), как спонтанный, так и вынужденный эффекты ВЧ вперед отсутствуют. В случае спонтанного эффекта это связано с тем, что частота излученного фотона, определяемая из уравнения

$$1 - n \frac{v}{c} = -\frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}_1} (n^2 - 1),$$

равна нулю.

В случае вынужденного эффекта множитель $1 - nv/c$ обращает в нуль оба слагаемых в токе (174). Если скорость электрона больше скорости фотона:

$$v = \frac{c}{n} \left[1 + \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}_1} (n^2 - 1) \right]$$

или $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}$ (см. (149)), то как спонтанный, так и вынужденный эффекты возможны и имеют порядок отдачи [22, 54]. Интересно оценить скорость электрона, излучившего фотон. Учитывая, что $v_2 = c^2 p_2 / \mathcal{E}_2$, получаем

$$\frac{v}{2} = \frac{c}{n} \left[1 - \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{E}_1} (n^2 - 1) \right],$$

т.е. скорость электрона меньше скорости фотона. Это приводит к отставанию электрона от излученного им поля¹.

¹ Авторы статьи благодарны Д.М. Седракину и В.О. Папаняну за ряд ценных замечаний при обсуждении этих вопросов.

2.13. Вращение плоскости поляризации

Система уравнений (161), (162) позволяет проанализировать поляризационные характеристики электромагнитной волны, движущейся в пучке электронов. Так как поляризованный пучок электронов — анизотропная среда, то это приводит к деформации и повороту эллипса электромагнитной волны (151). Остановимся более подробно на последнем эффекте, так как его можно применить для анализа структуры и поляризации пучка электронов.

Чтобы упростить задачу, удобно отделить поляризационные эффекты от эффектов усиления. Для этого достаточно предположить, что средняя энергия пучка электронов удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0| > \Delta, \quad (176)$$

где \mathcal{E}_1 определяется из (134), Δ — ширина энергетического разброса пучка электронов. В этом случае усреднение правых частей (161), (162) по разбросу пучка электронов (128) осуществляется заменой всех его параметров на средние величины: $\mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}$ и т.д. В дальнейшем предполагается, что $\bar{\beta}_x = 0$, $\bar{\beta}_y = \bar{\beta} \sin \theta$, $\bar{\beta}_z = \bar{\beta} \cos \theta$ и знак среднего опускается.

Будем искать решение для амплитуды A_1 в виде

$$A_1(z) = f \exp(i\chi_1 z) + l \exp(i\chi_2 z), \quad (177)$$

полагая, что в точке $z = 0$ поле (151) поляризовано по эллипсу:

$$A_1(z = 0) = A_{0x}, \quad A_2(z = 0) = A_{0y}, \quad (178)$$

с главными осями, направленными вдоль x и y .

В произвольной точке z имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos(k_1 z - \omega t) + a_2 \cos(k_2 z - \omega t), \\ A_2 &= a_3 \sin(k_1 z - \omega t) + a_4 \sin(k_2 z - \omega t). \end{aligned} \quad (179)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Delta n} \left\{ v A_{0y} - [n_2 + (1 - n\beta_z)^2] A_{0x} \right\}, \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta n} \left\{ -v A_{0y} + [n_1 + (1 - n\beta_z)^2] A_{0x} \right\}, \\ a_3 &= -\frac{1}{\Delta n} \left\{ v A_{0x} + [n_1 + (1 - n\beta_z)^2] A_{0y} \right\}, \\ a_4 &= \frac{1}{\Delta n} \left\{ v A_{0x} + [n_2 + (1 - n\beta_z)^2] A_{0y} \right\}, \end{aligned} \quad (180)$$

где

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= -(1 - n\beta_z)^2 + \frac{1}{2} (1 - n^2) \beta_y^2 \times \\ &\times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \left[\frac{\hbar\omega mc^2}{\mathcal{E}^2 \beta_y^2} (a_3 - na_0) \right]^2} \right\}, \\ \Delta n &= n_1 - n_2, \quad k_{1,2} = k + R n_{1,2} = k + \chi_{1,2}. \end{aligned}$$

Величины R и v определяются выражениями (163). В системе координат (x', y', z) , повернутой на угол

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \arctan \left\{ 2\sqrt{1 + 4\chi^2} \left(\chi \frac{r^2 - 1}{r} - 1 \right) \sin(\Delta kz) \times \right. \\ &\times \left. \left[(1 + 4\chi^2) \frac{r^2 - 1}{r} - 8\chi \left(\chi \frac{r^2 - 1}{r} - 1 \right) \sin^2 \frac{\Delta kz}{2} \right]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (181)$$

относительно системы (x, y, z) , векторный потенциал (179) описывает эллипс с главными осями, направленными вдоль x' и y' . Величина $\Delta k = k_1 - k_2$, $r = A_{0x}/A_{0y}$ — отношение осей эллипса в точке $z = 0$, параметр $\chi = \hbar\omega mc^2(a_3 - na_0)/(2\mathcal{E}^2\beta_y^2)$.

Если $|\chi| \ll 1$ (или $\theta \gg (\hbar\omega mc^2|a_3 - na_0|)^{1/2}/2cp$), то поворот эллипса обусловлен в основном тем, что пучок электронов направлен под углом θ к направлению распространения волны:

$$\varphi_\theta = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2r}{1-r^2} \sin \left[\pi \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \beta^2 \sin^2 \theta \times \frac{1-n^2}{n} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{(1-n\beta_z)^2} \frac{z}{\lambda} \right] \right\}. \quad (182)$$

Если $|\chi| \gg 1$ (или $\theta \ll (\hbar\omega mc^2|a_3 - na_0|)^{1/2}/2cp$), то угол поворота обусловлен тем, что пучок электронов поляризован:

$$\varphi_g = \frac{\pi}{n} g_3 \frac{z}{\lambda}. \quad (183)$$

Здесь множитель g_3 определяется выражением (160).

Рассмотрим более детально условия на угловой и энергетический разбросы пучка электронов. При усреднении множителя R (163) угловым и энергетическим разбросами можно пренебречь, если

$$1 - n\beta + \frac{\theta^2}{2} > \theta\delta, \quad (184)$$

$$1 - n\beta + \frac{\theta^2}{2} > \frac{\Delta}{\mathcal{E}} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{n}{\beta}.$$

Пусть $\theta \neq 0$. Полагая для определенности

$$1 - n\beta + \frac{\theta^2}{2} = 3\theta\delta, \quad (185)$$

получаем условие на среднюю энергию пучка электронов:

$$\mathcal{E} > mc^2 \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\Delta}{\mathcal{E}} \frac{1}{\theta\delta}}. \quad (186)$$

Предположим также, что при $\theta = 0$

$$1 - n\beta = 3 \frac{\Delta}{\mathcal{E}} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{n}{\beta}. \quad (187)$$

Соотношения (185), (187) позволяют привести формулы (182), (183) к виду, удобному для численных оценок:

$$\varphi_\theta = 0, 1 \rho_0 r_0 \lambda z \beta^2 \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{\delta^2} \frac{r}{1-r^2} \frac{1-n^2}{n}, \quad (188)$$

$$\varphi_g = \zeta_z \rho_0 r_0 \lambda_k z \beta \frac{\mathcal{E}}{\Delta} \frac{n^2 - 1}{n^2}. \quad (189)$$

Здесь λ_k — комптоновская длина волны электрона, ζ_z — степень поляризации пучка электронов вдоль оси z , r_0 — классический радиус электрона.

2.14. Теория черенковского лазера в постоянном магнитном поле

Анализ работы черенковского лазера, выполненный в разделе 2.10, показал, что его эффективность ограничена угловым разбросом пучка электронов (146). Негативную

роль углового разброса можно нейтрализовать с помощью постоянного магнитного поля, направленного вдоль пучка частиц. Предположим, что пучок электронов распространяется вдоль оси и имеет гауссов разброс по импульсам:

$$f_0(\mathbf{p}) = \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\Delta_\perp^2 \Delta_\parallel} \times \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(p_z - p_0)^2}{\Delta_\parallel^2} - 4 \ln 2 \frac{p_x^2 + p_y^2}{\Delta_\perp^2} \right], \quad (190)$$

а напряженность постоянного магнитного поля $H_z = -H_0$. Направим усиливаемую волну, линейно поляризованную в плоскости xz , под углом θ к оси z :

$$A_{x'} = \frac{1}{2} A_0 \exp(i\omega t - ikz') + \text{к. с.} \quad (191)$$

Векторный потенциал (191) записан в системе координат x', y, z' , связанной с волной.

Вычислим коэффициент усиления электромагнитной волны на основе системы уравнений (88), (91). Решая кинетическое уравнение (88) точно по постоянному магнитному полю и в первом приближении по усиливаемой волне (191), получаем

$$f(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}_0) + f_1(\mathbf{p}). \quad (192)$$

Здесь функция f_0 определяется выражением (190), вектор \mathbf{p}_0 имеет проекции

$$p_{0x} = p_x \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t, \quad (193)$$

$$p_{0y} = p_y \cos \Omega t + p_x \sin \Omega t,$$

$$p_{0z} = p_z,$$

$$\Omega = |e|H_0 \frac{c}{\mathcal{E}},$$

$$\mathcal{E} = [(mc^2)^2 + c^2 \mathbf{p}_0^2]^{1/2} = [(mc^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2]^{1/2}.$$

Второе слагаемое

$$f_1 = \frac{i}{\omega - k_z v_{0z}} \left\{ F_{1,x} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{0x}} - i \frac{\partial f_0}{\partial p_{0y}} \right) e^{i\varphi'} + F_{-1,x} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{0x}} + i \frac{\partial f_0}{\partial p_{0y}} \right) e^{-i\varphi'} + F_{0,z} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0z}} \right\} \times \exp \left[i \left[\omega t - k_z z - k_x x - k_x \frac{v_{0\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi') \right] \right], \quad (194)$$

где

$$F_{r,x} = \frac{eE_{x'}}{2i} (\cos \theta - n\beta_{0z}) J_r \left(k_x \frac{v_{0\perp}}{\Omega} \right), \quad (195)$$

$$F_{r,z} = \frac{eE_{x'}}{2i} (-\sin \theta + n\beta_{0\perp} \frac{r\Omega}{k_x v_{0\perp}}) J_r \left(k_x \frac{v_{0\perp}}{\Omega} \right),$$

$$v_{0\perp} = \frac{c^2 p_{0\perp}}{\mathcal{E}}, \quad p_{0\perp} = (p_{0x}^2 + p_{0y}^2)^{1/2},$$

$$\beta_{0\perp} = \frac{v_{0\perp}}{c}, \quad \tan \varphi' = \frac{p_{0y}}{p_{0x}}.$$

Отметим, что при расчете функции f_1 возникают слагаемые на всех гармониках частоты Ω :

$$f_1 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{Q_r}{\omega - k_z v_{0z} + r\Omega}.$$

В (194) оставлена только нулевая гармоника ($r = 0$), ответственная за ВЧЭ. Слагаемые с $r \neq 0$ описывают циклотронное излучение электронов в диэлектрической среде. Коэффициент усиления циклотронного лазера в случае $r = -1$ проанализирован в следующем разделе.

Подставляя (192) в (89), переходя от переменных \mathbf{p} к \mathbf{p}_0 и выделяя слагаемые, пропорциональные $\exp[i(\omega t - kz')]$, получаем выражение для x' -проекции тока, ответственной за усиление электромагнитной волны (191):

$$j_x = \pi e^2 \rho_0 \sin^2 \theta E_x \exp i(\omega t - kz') \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{0z} \int_0^{\infty} dp_{0\perp} p_{0\perp} \frac{v_{0z}}{\omega - k_z v_{0z}} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0z}} J_0^2 \left(k_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right). \quad (196)$$

Выполним интегрирование по переменной p_{0z} с помощью правила (132). Подставляя полученное выражение в (91) и учитывая, что функция распределения (190) имеет максимум при $p_{0x} = p_{0y} = 0$, $p_{0z} = p_0$, получаем коэффициент усиления черенковского лазера в постоянном магнитном поле:

$$\Gamma = -256\sqrt{\pi}(\ln 2)^{5/2} \rho_0 r_0 \lambda \sin^2 \theta \cos \theta \times \\ \times \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \frac{p_0 mc}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}^3} \int_0^{\infty} dp_{0\perp} (p_{0z} - p_0) J_0^2 \left(\frac{k_x p_{0\perp}}{m\Omega_0} \right) p_{0\perp} \times \\ \times \exp \left[-4 \ln 2 \frac{p_{0\perp}^2}{\Delta_{\perp}^2} - 4 \ln 2 \frac{(p_{0z} - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right]. \quad (197)$$

Здесь $\Omega_0 = |e|H_0/mc$, величина p_{0z} определяется из уравнения

$$\omega - k_z v_{0z} = 0. \quad (198)$$

Чтобы упростить дальнейший анализ, выделим явную зависимость p_{0z} от $p_{0\perp}$. Предположим, что решение уравнения (198) при $p_{0\perp} = 0$ имеет вид $p_{0z} = b$. Если $p_{0\perp} \neq 0$, то величину p_{0z} можно представить в виде

$$p_{0z} = b + q_1 p_{0\perp} + q_2 p_{0\perp}^2. \quad (199)$$

Подстановка этого выражения в (198) показывает, что $q_1 = 0$, а $q_2 = (b/mc)^2/2b$. Разложение (199) справедливо при $q_2 \Delta_{\perp}^2 \ll b$. Учитывая, что $b_0 \approx p_0$, получаем условие на средний импульс (или среднюю энергию) $\mathcal{E}_0 = [(mc^2)^2 + c^2 p_0^2]^{1/2}$ пучка электронов:

$$0 < p_0 \ll 1,4 \frac{mc}{\delta}, \quad (200)$$

где $\delta = \Delta_{\perp}/p_0$ — угловой разброс пучка электронов. Подстановка (199) в (197) выделяет явную зависимость подынтегрального выражения от $p_{0\perp}$. Тем не менее выполнить интегрирование точно не удастся.

Рассмотрим два предельных случая:

1) магнитное поле H_0 принимает произвольные значения, но импульс электронов ограничен условием

$$q_2 \Delta_{\perp}^2 \ll |b - p_0|$$

или

$$0 < p_0 \ll 1,4 \frac{mc}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}} \right)^{1/2} \quad (201)$$

(это условие более жесткое, чем (200));

2) магнитное поле велико (см. (206)), а импульс электронов лежит в интервале (200).

В первом случае из неравенства (201) следует, что величина $p_{0z} - p_0 \approx b - p_0$. Учитывая это и интегрируя (197) по переменной $p_{0\perp}$, получаем

$$\Gamma = -32\sqrt{\pi}(\ln 2)^{3/2} \rho_0 r_0 \lambda \sin^2 \theta \cos \theta \left(\frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \right)^2 \frac{p_0}{mc} I_0(R) \times \\ \times \frac{b - p_0}{\Delta_{\parallel}} \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(b - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} - R \right]. \quad (202)$$

Здесь аргумент модифицированной функции Бесселя нулевого порядка

$$R = \frac{\Delta_{\perp}^2 \omega^2 n^2 \sin^2 \theta}{8 \ln 2 (mc)^2 \Omega_0^2}. \quad (203)$$

Очевидно, что в области (201) коэффициент усиления (202) растет прямо пропорционально среднему импульсу (или средней энергии) $\mathcal{E}_0 = p_0 c^2/v_0$ пучка электронов. Коэффициент усиления максимален, если расстройка

$$b - p_0 = -\frac{\Delta_{\parallel}}{\sqrt{8 \ln 2}}, \quad (204)$$

а параметр $R \ll 1$:

$$\Gamma = 8,4 \rho_0 r_0 \lambda \beta_0 \sin^2 \theta \cos \theta \left(\frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \right)^2 \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}. \quad (205)$$

Учитывая для R определение (203), получаем условие на постоянное магнитное поле:

$$H_0 \gg 0,4 \frac{\Delta_{\perp}}{|e|} \omega n \sin \theta. \quad (206)$$

Проанализируем теперь коэффициент усиления (197) в более широком диапазоне средних импульсов (200) (случай 2). Предположим, что напряженность постоянного магнитного поля удовлетворяет условию (206). Учитывая, что $p_{0\perp} \lesssim \Delta_{\perp}$, получаем, что в этом случае в подынтегральном выражении (197) можно положить $J_0^2(k_x p_{0\perp}/m\Omega_0) \approx 1$. Интегрируя по переменной $p_{0\perp}$, имеем

$$\Gamma = 32\sqrt{\pi}(\ln 2)^2 \rho_0 r_0 \lambda \sin^2 \theta \cos \theta \times \\ \times \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \frac{p_0 mc}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}^2} \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(b - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right] \times \\ \times \frac{1}{a} \left\{ \frac{\sqrt{\pi \ln 2}}{q_2} \frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}^2} \exp \left(\frac{d^2}{4a^2} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{d}{2a} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (207)$$

Здесь величина $a = 2\sqrt{\ln 2} q_2/\Delta_{\parallel}$, параметр

$$\frac{d}{2a} = \sqrt{\ln 2} \left(1 + 2q_2 \Delta_{\perp} \frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}} \frac{b - p_0}{\Delta_{\parallel}} \right) \left(q_2 \Delta_{\perp} \frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}} \right)^{-1}, \quad (208)$$

функция $\Phi(x)$ — интеграл вероятности [55].

Предположим, что продольный и поперечный разбросы пучка электронов одного порядка: $\Delta_{\parallel} \sim \Delta_{\perp}$, а расстройка $b - p_0 \sim \Delta_{\parallel}$. В этом случае аргумент интеграла вероятности (208) определяется

параметром

$$q_2\Delta_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{mc} \right)^2 \frac{\Delta_{\perp}}{b}.$$

Если $q_2\Delta_{\perp} \ll 1$, то величина $d/2a \gg 1$. Учитывая асимптотическое разложение функции $\Phi(x)$ при $x \gg 1$:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) \exp(-x^2) \quad (209)$$

и неравенство $R \ll 1$ (205), получаем, что в этом пределе выражение (207) совпадает с (202), а при условии (204) — с (205).

Воспользуемся этим обстоятельством для уточнения верхнего предела импульса p_0 . Предположим, что расстройка $b - p_0$ определяется (204) при всех значениях p_0 . Разложение (209) справедливо при $1/2x^2 \ll 1$. Полагая для определенности $1/2x^2 = 10^{-1}$ и учитывая (208), получаем, что коэффициент усиления черенковского лазера имеет вид (205) в области

$$0 < p_0 \leq 0,9mc \left(\frac{p_0}{\Delta_{\perp}} \frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}} \right)^{1/2}. \quad (210)$$

При дальнейшем увеличении импульса p_0 аргумент интеграла вероятности $x = d/2a$ сначала убывает до нуля ($q_2\Delta_{\perp} \sim 1$), а затем до -1 ($q_2\Delta_{\perp} \gg 1$). Во всей этой области коэффициент усиления (207) обратно пропорционален средней энергии пучка электронов: $G \propto mc^2/\mathcal{E}_0$.

Отметим также, что в этой области импульсов выражение в фигурных скобках (207) сначала убывает до нуля, а затем становится отрицательным. Этот эффект связан с тем, что с ростом p_0 импульс $p_{0z} = b + q_2\Delta_{\perp}^2$ (см. (199)) становится больше p_0 , а на правом крыле функции распределения (190) пучок электронов поглощает энергию электромагнитной волны. Таким образом, область линейного роста коэффициента усиления с ростом среднего импульса пучка электронов определяется неравенством (210).

В заключение покажем, что линейный, а не кубический (см. (144)) характер зависимости коэффициента усиления (205) от средней энергии электронов имеет простую интерпретацию на основе законов сохранения энергии и импульса (см. раздел 2.15). Решая систему уравнений (212) при $r = l$, получаем, что z -проекции импульсов электронов, участвующих в процессах излучения и поглощения фотона, отличаются на величину

$$\Delta p = \frac{\hbar\omega}{2v_0}. \quad (211)$$

Очевидно, что в этом случае асимметричная часть импульса и, следовательно, коэффициента усиления не содержит характерного для черенковского эффекта множителя $(p_0/mc)^2(n^2 - 1)$ (см. (150)).

Отметим, что теория черенковского лазера развивалась также Волшем [50]. Исследования, выполненные нами, показали, что одним из главных параметров, определяющих работу черенковского лазера, является угловой разброс пучка электронов δ . Основное отличие работ Волша от наших связано с тем, что в них не учитывается угловой разброс пучка частиц. Для обоснования такой модели Волш предполагает, что вдоль пучка электронов направлено бесконечно большое магнитное поле. Очевидно, однако, что магнитное поле не устраняет углового разброса пучка электронов. Действительно,

пусть пространственно однородный пучок электронов описывается в точке (x, y, z) функцией распределения (190). Если направить постоянное магнитное поле вдоль пучка (ось z), то электроны начнут вращаться в плоскости xu . Так как пучок электронов однороден, то число электронов, имеющих импульс p_{\perp} и уходящих из этой точки, точно равно числу электронов, имеющих тот же импульс и приходящих в ту же точку. Поэтому угловой разброс пучка электронов остается прежним. (Здесь мы не учитываем такие эффекты, как магнитотормозное излучение и рассеяние электронов на молекулах среды.) Этот же вывод подтверждается точным расчетом (см. (192), (193)). Поэтому для описания работы черенковского лазера в области (147) необходимо учитывать как энергетический, так и угловой разбросы.

2.15. Вынужденное циклотронное излучение вблизи черенковского конуса

Исследования, выполненные в разделах 2.9, 2.14, показали, что постоянное магнитное поле оказывает существенное влияние на ВЧЭ. Рассмотрим теперь влияние диэлектрической среды на вынужденное циклотронное излучение электронов. Вынужденное излучение электронов, движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме (лазер на циклотронном резонансе), хорошо изучено теоретически и экспериментально [56–58].

Рассмотрим возможность расширения области действия этих генераторов в инфракрасную и видимую части спектра электромагнитных волн. Основную трудность в этой задаче (создание магнитных полей большой напряженности или сильнооточных высокоэнергетических пучков электронов) можно обойти, если рассмотреть циклотронное излучение в диэлектрической среде вблизи черенковского конуса (1).

Проанализируем особенности работы лазера на циклотронном резонансе на основе законов сохранения энергии и импульса, к которым присоединим дисперсионное уравнение:

$$\mathcal{E}_r \pm \hbar\omega = \mathcal{E}_l, \quad p_z^{\pm} \pm \hbar k_z = p, \quad \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \mathbf{k}^2. \quad (212)$$

Здесь энергия $\mathcal{E}_r = [(mc^2)^2 + c^2 p_z^2 + 2mc^2 \hbar \Omega_0 (r + 1/2)]^{1/2}$, $r = 0, 1, 2, \dots$ — произвольные числа, n — показатель преломления газовой среды, $\Omega_0 = |e|H_0/mc$ — ларморова частота, H_0 — напряженность постоянного магнитного поля, направленного против оси z . Излучение или поглощение фотона сопровождается переходом электрона с уровня r на уровень l .

Если $r = l$, то уравнения (212) описывают ВЧЭ (см. разделы 2.9, 2.14). Остальные переходы ($r \neq l$) описывают вынужденное циклотронное излучение на всех гармониках ларморовой частоты. Остановимся более подробно на излучении первой гармоники: $r - l = \pm 1$. Направим пучок фотонов вдоль оси z ($k_x = 0$). После того, как квантовые числа r и l определены и зафиксированы частоты Ω_0 и ω , система уравнений (212) определяет z -проекции импульсов электронов, участвующих в излучении (знак "-") или поглощения (знак "+") фотонов:

$$p_z^{\mp} = p_0 \pm \Delta p. \quad (213)$$

Величина p_0 вычисляется из уравнения

$$\omega = \frac{\Omega_0}{1 - n\beta_r} \frac{mc^2}{\mathcal{E}_r}, \quad (214)$$

а асимметричная часть импульса

$$\Delta p = \frac{\hbar k}{2} \frac{n^2 - 1}{n(n - \beta_r)}. \quad (215)$$

Здесь $\beta_r = p_0 c / \mathcal{E}_r$. Если $n > 1$, то $\Delta p > 0$ и усиление, как и в случае (150), происходит на левом крыле гауссова разброса пучка электронов по z -проекции импульса.

Отметим, что при рассматриваемой нами геометрии (волновой вектор фотонов и постоянное магнитное поле направлены вдоль оси z):

а) асимметричная часть импульса и, следовательно, коэффициент усиления циклотронного лазера ($\Gamma \sim \Delta p \partial f_0 / \partial p_0$) отличны от нуля лишь в диэлектрической среде ($n \neq 1$);

б) черенковский фактор $1 - n\beta_r$ в (214) можно сделать сколь угодно малым; это позволяет получить усиление в оптической области частот даже для слабых магнитных полей (очевидно, что для рентгеновских частот $n < 1$ и это рассуждение становится неверным).

Найдем коэффициент усиления электромагнитной волны

$$A_x = A_1 \sin(\omega t - kz), \quad A_y = A_2 \cos(\omega t - kz) \quad (216)$$

на основе системы уравнений (88), (91), полагая, что постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z . Вычислим функцию распространения электронов из (88), точно учитывая постоянное магнитное поле и в первом приближении усиливаемую волну:

$$f(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}_0) + f_1. \quad (217)$$

Здесь характеристики \mathbf{p}_0 определяются выражениями (193), а линейная по полю (216) добавка

$$f_1 = -e \{ G_1 \exp i[(\omega + \Omega)t - kz] + B_1 \exp i[(\omega - \Omega)t - kz] \} + \text{к. с.}, \quad (218)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= -i \frac{G_2 E_+}{\Omega + \omega(1 - n\beta_{0z})} + \frac{B_2 \Omega E_+}{[\Omega + \omega(1 - n\beta_z)]^2} - \\ &\quad - it \frac{B_2 \Omega E_+}{\Omega + \omega(1 - n\beta_{0z})}, \\ B_1 &= i \frac{G_2^* E_-}{\Omega - \omega(1 - n\beta_{0z})} + \frac{B_2^* \Omega E_-}{[\Omega - \omega(1 - n\beta_z)]^2} + \\ &\quad + it \frac{B_2^* \Omega E_-}{\Omega - \omega(1 - n\beta_{0z})}, \\ G_2 &= \frac{1 - n\beta_{0z}}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{0x}} - i \frac{\partial f_0}{\partial p_{0y}} \right) + \frac{n\beta_-}{2} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0z}}, \\ B_2 &= \frac{1}{2} \beta_- \left(\beta_{0y} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0x}} - \beta_{0x} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0y}} \right), \\ E_{\pm} &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} (-A_1 \pm A_2), \quad \beta_{\pm} = (\beta_{0x} \pm i\beta_{0y}), \\ \Omega &= \Omega_0 \frac{mc^2}{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} = [(mc^2)^2 + c^2 \mathbf{p}_0^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (219)$$

Слагаемые, пропорциональные B_1 , описывают усиление на нормальной частоте ($1 - n\beta_{0z} > 0$), а слагаемые, пропорциональные G_1 , — на аномальной ($1 - n\beta_{0z} < 0$). В дальнейшем рассматривается только первый случай и предполагается, что усиливаемая волна имеет круговую

поляризацию ($A_1 = A_2 = A_0$):

$$E_+ = 0, \quad E_- = -\frac{\omega}{c} A_0. \quad (220)$$

Оставляя в выражении для тока (89) только слагаемые, зависящие от времени (как $\exp(i\omega t)$), получаем

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{i}{4} \rho_0 e^2 \frac{\omega}{c} A_0 \exp i(\omega t - kz) \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dp_{0\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{0z} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{v_{0\perp} p_{0\perp} (1 - n\beta_{0z})}{\Omega - \omega(1 - n\beta_{0z}) + i\eta} \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{0\perp}} + \frac{i}{p_{0\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \right) + n\beta_{0\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0z}} \right]_{\eta \rightarrow 0} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (221)$$

Выражение (221) записано в цилиндрической системе координат $(p_{0\perp}, p_{0z}, \varphi)$. Полагая, что амплитуда A_0 медленно зависит от координаты z , находим коэффициент усиления циклотронного лазера:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{Re} \left\{ i \frac{2\pi}{n} e^2 \rho_0 \int_0^{\infty} dp_{0\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{0z} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \right. \\ &\quad \times \frac{\beta_{0\perp} p_{0\perp} (1 - n\beta_{0z})}{\Omega - \omega(1 - n\beta_{0z}) + i\eta} \times \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{0\perp}} + \frac{i}{p_{0\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \right) + n\beta_{0\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{0z}} \right] \right\}_{\eta \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (222)$$

Выберем начальную функцию распределения электронов с учетом цилиндрической симметрии задачи в виде

$$\begin{aligned} g(\mathcal{E}, \theta) &= \frac{4 \ln 2}{\pi} \frac{1}{\Delta \delta} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -4 \ln 2 \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2} - 4 \ln 2 \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\delta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (223)$$

где θ — угол между скоростью электрона и осью z . Перейдем от функции распределения электронов в импульсном пространстве $f_0(\mathbf{p})$ к функции распределения по энергиям и углам (223). Учитывая правило (132), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma &= -16\sqrt{\pi} (\ln 2)^{3/2} \rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\beta_0^4 \sin^2 \theta_0}{(\beta_0 - n \cos \theta_0)^2} \times \\ &\quad \times \frac{mc^2 \mathcal{E}_0}{D^2} \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{D} \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)^2}{D^2} \right], \end{aligned} \quad (224)$$

где $r_0 = e^2 / mc^2$ — классический радиус электрона,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{cp_0}{\mathcal{E}_0}, \quad p_0 = \frac{[\mathcal{E}_0^2 - (mc^2)^2]^{1/2}}{c}, \\ D &= \left[\Delta^2 + \delta^2 \mathcal{E}_0^2 n^2 \frac{\beta_0^4 \sin^2 \theta_0}{(\beta_0 - n \cos \theta_0)^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (225)$$

— эффективная ширина, энергия \mathcal{E}_1 определяется из уравнения

$$\omega = \frac{\Omega_0 mc^2 / \mathcal{E}_1}{1 - n\beta_1 \cos \theta_0}, \quad (226)$$

$$\beta_1 = \frac{p_1 c}{\mathcal{E}_1}, \quad \mathcal{E}_1 = [(mc^2)^2 + c^2 p_1^2]^{1/2}.$$

При интегрировании было использовано неравенство

$$|\beta_0 - n \cos \theta_0| \geq \delta n \beta_0^2 \sin \theta_0. \quad (227)$$

Если частоты ω и $\Omega_0 = |e|H_0/mc$ подобраны так, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 - D/\sqrt{8 \ln 2}$, то коэффициент усиления (224) максимален:

$$\Gamma = 4, 2\rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\beta_0^4 \sin^2 \theta_0}{(\beta_0 - n \cos \theta_0)^2} \times \times \mathcal{E}_0 m c^2 \left(\Delta^2 + \delta^2 \mathcal{E}_0^2 n^2 \frac{\beta_0^4 \sin^2 \theta_0}{(\beta_0 - n \cos \theta_0)^2} \right)^{-1}. \quad (228)$$

Если

$$\delta n \frac{\beta_0^2 \sin \theta_0}{|\beta_0 - n \cos \theta_0|} \geq \frac{\Delta}{\mathcal{E}_0},$$

то усиление определяется только угловым разбросом пучка электронов и не зависит от угла θ_0 :

$$\Gamma = 4, 2\rho_0 r_0 \lambda \frac{n^2 - 1}{n^3} \frac{m c^2}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\delta^2}. \quad (229)$$

Очевидно, что коэффициенты усиления циклотронного лазера (229) и черенковского лазера (146) практически совпадают.

В заключение отметим, что вопрос создания циклотронного лазера рассматривался также в [59].

2.16. Об экспериментальном наблюдении вынужденного черенковского эффекта

Рассмотрим возможности экспериментального наблюдения полученных эффектов. Очевидно, что в случае объемного ВЧЭ целесообразно использовать газовую среду. Это позволяет снизить негативную роль эффекта многократного рассеяния электронов на атомах. Так как отличие показателя преломления газовой среды от единицы невелико ($n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n \sim 10^{-4}$), то из условия $1 - n\beta \cos \theta = 0$ вытекает, что энергия частицы \mathcal{E} и угол θ должны удовлетворять неравенствам

$$\theta^2 < 2\Delta n, \quad \left(\frac{m c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 < 2\Delta n. \quad (230)$$

Если $\Delta n = 0,5 \cdot 10^{-4}$, то $\theta < 10^{-2}$ рад, а $\mathcal{E} > 50$ МэВ.

Следовательно, в обычных газовых средах ВЧЭ возможен лишь на релятивистских электронных пучках. Если использовать резонансный газ, то Δn можно увеличить до значений порядка 10^{-2} – 10^{-1} . Это позволяет снизить энергию частиц до 3,5–1,1 МэВ, а угол θ возрастает до 0,1–0,4 рад. При этом, однако, из условия резонанса возникает жесткое условие на частоту электромагнитного излучения: $\omega \approx \omega_0$, где ω_0 — частота резонансного перехода атома или молекулы.

Рассмотрим возможность наблюдения динамических эффектов. Для оценок удобно воспользоваться соотношениями

$$\xi_1 = 0,85 \cdot 10^{-9} \lambda \sqrt{P_1}, \quad \xi_2 = 0,61 \cdot 10^{-9} \lambda \sqrt{P_2}, \quad (231)$$

где $P_{1,2}$ — мощность волны (измеренная в ваттах на квадратный сантиметр), λ — ее длина волны (в микрометрах), безразмерный параметр $\xi = |e|A_0/mc^2$, индексы 1 и 2 соответствуют линейной и круговой поляризациям излучения.

При мощности лазерного излучения $P = 4,5 \cdot 10^{10}$ Вт/см², $\lambda = 1,06$ мкм, ширине пучка $2d = 2$ мм амплитуда $\Delta \mathcal{E}$ (14) равна 10^6 эВ. Учитывая, что энергия фотона $\hbar\omega = 1,2$ эВ, получаем, что в результате ВЧЭ электрон может излучать или поглощать до 10^6 фотонов. Очевидно, что для получения значительных ускорений необходимо повторять этот процесс многократно.

Оценим поля, необходимые для квантовой модуляции тока и плотности пучка электронов (46), (48). Глубина модуляции достигает 10%, если мощность лазерного излучения $P = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Вт/см², $\lambda = 1,06$ мкм, $d = 1$ мм. Если показатель преломления газовой среды $n = 1,021$, энергия частиц $\mathcal{E} = 2,5$ МэВ, угол $\theta = 2,77 \cdot 10^{-2}$, то расстояние $x_1 = 1/\Delta q_x$, разделяющее области квантовой и классической модуляции, равно 45,4 см.

Пусть теперь механизм излучения и поглощения фотонов основан на взаимодействии магнитного момента электронов с излучением (см. раздел 2.5). Предположим, что пучок частиц с приведенными выше параметрами полностью поляризован вдоль оси x ($\xi_x = 1$). В этом случае для достижения глубины модуляции 10% (см. (59), (60)) требуется мощность лазерного излучения $P = 4,9 \cdot 10^7$ Вт/см². Оценим возможность намагничивания пучка частиц на основе ВЧЭ. Если до взаимодействия пучок электронов был неполяризован ($|\xi_x| = 0$), то после взаимодействия степень его намагничивания $\eta_x = \max(I_x/\rho_0 \mu)$ вдоль оси x (см. (68)) составляет 31,6% при $P = 1,2 \cdot 10^{10}$ Вт/см², $\lambda = 1,06$ мкм, $n = 1,021$. Глубина модуляции намагниченности поляризованного пучка электронов, связанная с модуляцией его плотности (68), достигает 10% при $P = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Вт/см².

Во всех рассмотренных случаях угловой и энергетический разбросы пучка электронов должны удовлетворять условиям (82). Для вышеприведенных параметров $\Delta/\mathcal{E} \approx 0,7 \cdot 10^{-6}$, $\delta \approx 1,02 \cdot 10^{-6}$ (требование на угловой разброс можно снизить с помощью постоянного магнитного поля, а на энергетический, — если использовать резонансную среду с $n = 1,1$ – $1,01$). Отметим, что столь жесткие требования к качеству пучка электронов являются основными препятствиями для экспериментального наблюдения квантовых эффектов.

Перейдем к анализу различных схем усилителей электромагнитного излучения на основе ВЧЭ. Хотя коэффициент усиления квантового клистрона велик (см. (103)), однако для его реализации, как отмечалось выше, требуются уникальные пучки частиц. Сравним коэффициенты усиления черенковского клистрона (102): $\Gamma = \Gamma_{кл}$, и черенковского клистрона в постоянном магнитном поле (115): $\Gamma = \Gamma_{кл}^H$. Их отношение

$$\frac{\Gamma_{кл}^H}{\Gamma_{кл}} = \frac{n \sin \theta}{\beta_0 (n^2 - 1)} \frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}}. \quad (232)$$

Если угол θ и энергия частиц \mathcal{E}_0 связаны с показателем преломления $n = 1 + \Delta n$ соотношением $\theta = m c^2 / \mathcal{E}_0 = \sqrt{\Delta n}$, а продольный и поперечный разбросы одного порядка: $\Delta_{\parallel} \approx \Delta_{\perp}$, то для релятивистских частиц отношение

$$\frac{\Gamma_{кл}^H}{\Gamma_{кл}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2m c^2} \geq 1.$$

Сравним коэффициенты усиления черенковского лазера (146): $\Gamma = \Gamma_{\perp}$, и черенковского лазера в постоянном магнитном поле (215): $\Gamma = \Gamma_{\perp}^H$. Их отношение

$$\frac{\Gamma_{\perp}^H}{\Gamma_{\perp}} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \frac{n^2 \sin^2 \theta}{n^2 - 1} \left(\frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}} \right)^2. \quad (233)$$

Если $\theta = \sqrt{2\Delta n}$, $\Delta_{\perp} \simeq \Delta_{\parallel}$, $mc^2/\mathcal{E} < \theta$, то в области импульсов, определяемых условием (210), отношение

$$\frac{\Gamma_{\perp}^H}{\Gamma_{\perp}} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \gg 1.$$

Очевидно, что как в случае клистрона, так и в случае лазера магнитное поле позволяет значительно увеличить эффективность усиления.

Сравним коэффициенты усиления черенковского лазера (205) и черенковского клистрона (115):

$$\frac{\Gamma_{\perp}^H}{\Gamma_{\text{кл}}^H} = 0,2 \frac{\lambda}{d} \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \beta_0 \sin \theta. \quad (234)$$

Если, например, $d/\lambda = p_0/\Delta_{\parallel}$, $\theta = mc^2/\mathcal{E}_0$, то отношение

$$\frac{\Gamma_{\perp}^H}{\Gamma_{\text{кл}}^H} = 0,2 \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}.$$

Очевидно, что в этом случае $\Gamma_{\perp}^H < \Gamma_{\text{кл}}^H$, если $\mathcal{E}_0 < 5mc^2$, и $\Gamma_{\perp}^H > \Gamma_{\text{кл}}^H$, если $\mathcal{E}_0 > 5mc^2$. Пусть средняя энергия пучка электронов $\mathcal{E} = 12,6$ МэВ, $\Delta_{\parallel}/p_0 = 10^{-3}$, $\rho_0 = 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $n = 1,0016$, $\theta = 3,97 \cdot 10^{-2}$ рад, напряженность постоянного магнитного поля $H = 100$ кГс. Тогда коэффициент усиления (205) $\Gamma_{\perp}^H = 0,2 \text{ см}^{-1}$ на длине волны $\lambda = 1$ мкм.

В заключение рассмотрим оптические поляризационные эффекты в системе типа черенковского лазера (см. раздел 2.13). Если пучок электронов направлен под углом к направлению распространения волны и поляризован, то это приводит к повороту эллипса поляризации пробного сигнала (181). В случае (188) вклад намагниченности пучка электронов в этот эффект незначителен. Полагая, что плотность частиц $\rho_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, их средняя энергия $\mathcal{E} = 6,65$ МэВ, $\delta = \Delta/\mathcal{E} = 10^{-3}$, длина волны пробного сигнала $\lambda = 0,67$ мкм, угол $\theta = 6,9 \cdot 10^{-2}$ рад, коэффициент $r = 1,6$, получаем, что $\varphi_{\theta} = 1,4 \cdot 10^{-5}$ рад, если область взаимодействия $L = 1$ см.

Пусть пучок частиц и электромагнитная волна распространяются в одном направлении. В этом случае поворот обусловлен только спином электронов (189). Если частицы полностью поляризованы вдоль оси z ($\zeta_z = 1$), $\mathcal{E} = 4,98$ МэВ, $\rho_0 = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $L = 10$ м, то угол $\varphi_z = 1,1 \cdot 10^{-7}$ рад. Показатель преломления газовой среды в обоих случаях предполагается равным $n = 1,005$.

3. Вынужденный поверхностный черенковский эффект

В черенковском лазере или в черенковском клистроне пучок электронов распространяется в диэлектрической среде под углом к усиливаемому излучению. Ясно, что это создает трудности для транспортировки пучка электронов и ограничивает область его взаимодействия с волной. Область взаимодействия электронов с волной можно сделать произвольной, если усиливаемая волна

распространяется в волноводе, а пучок электронов движется над его поверхностью.

Как известно [14], электроны, движущиеся над диэлектрической средой, могут спонтанно излучать электромагнитное излучение, если скорость электрона, частота и волновой вектор волны удовлетворяют соотношению

$$\omega - k_z v = 0. \quad (235)$$

Здесь ось z направлена вдоль поверхности среды, v — скорость электрона вдоль этой же оси, k_z — z -проекция волнового вектора волны. Уравнение (235) совпадает с условием спонтанного излучения электромагнитной волны в неограниченной диэлектрической среде (1). Отметим, что интенсивности спонтанного излучения в обоих случаях — величины одного порядка, если расстояние от электрона до поверхности диэлектрической среды не очень велико.

Совершенно иначе обстоит дело с ВЧЭ. Если в первом случае (неограниченная среда) асимметричная часть отдачи всегда отлична от нуля (см. (42), (150)) и это позволяет получить усиление электромагнитной волны (см. разделы 2.8, 2.10), то во втором случае разделить процессы излучения и поглощения фотонов удается далеко не всегда. Покажем это на основе законов сохранения энергии импульса.

Пусть электромагнитная волна распространяется в плоском волноводе, находящемся в диэлектрической (газовой) среде. Выражения для проекций электрического поля в волноводе и вне его и дисперсионные уравнения приведены в разделе 3.1 (см. (247)–(250)). Отметим, что в отличие от случая неограниченной среды x -проекция волнового вектора над поверхностью диэлектрика является чисто мнимой величиной: $k_x = iq_x$.

Получим условия излучения и поглощения фотона электроном на основе уравнения Клейна–Гордона (33). Основная трудность при решении этой задачи связана с выбором начальной волновой функции электрона. С классической точки зрения электрон движется только над поверхностью диэлектрика. Чтобы получить квантовомеханическое описание, адекватное классическому, предположим, что волновая функция электрона имеет вид волны де Бройля над поверхностью волновода и равна нулю в волноводе:

$$\psi = \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \exp\left(-i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} t + i \frac{p_z}{\hbar} z\right), \quad x > a,$$

$$\psi = 0, \quad x < a.$$

(Фактически поле кристалла аппроксимируется бесконечно высоким потенциальным барьером.) Такой выбор хорошо согласуется с экспериментальными результатами, согласно которым медленные электроны проникают в кристалл лишь на несколько атомных слоев (Марадулин А *Дефекты и колебательный спектр кристаллов* (М.: Наука, 1968) с. 359).

Предположим, что поле (247) адиабатически медленно выключается и выключается при $z = \mp \infty$. Представим z -проекцию векторного потенциала в виде

$$A_z = -\frac{ic}{2\omega} E_{1z} \exp[i(k_z z - \omega t) - q_x x] + \text{к. с.}$$

В линейном по полю приближении волновая функция электрона имеет вид

$$\psi = \psi_0 + \psi_- + \psi_+,$$

где ψ_0 — начальная волновая функция электрона, а слагаемые ψ_{\mp} описывают процессы излучения и поглощения фотона.

Будем искать функции ψ_{\mp} в виде

$$\psi_{\mp} = \varphi_{\mp}(z) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{E} \mp \hbar\omega) - q_x x \right].$$

Подставляя эти выражения в (33) и интегрируя уравнения второго порядка точно так же, как и в разделе 2.4, находим, что после взаимодействия волновые функции

$$\begin{aligned} \psi_{\mp} = & \frac{2\pi e E_z p_z c^2}{\omega} \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mathcal{E}}} \times \\ & \times \exp \left(-i \frac{\mathcal{E} \mp \hbar\omega}{\hbar} t - q_x x + i \frac{p_z \mp \hbar k_z}{\hbar} z \right) \times \\ & \times \delta [(\mathcal{E} \mp \hbar\omega)^2 + (\hbar q_x c)^2 - (mc^2)^2 - (p_z \mp \hbar k_z)^2 c^2]. \end{aligned}$$

Учитывая также соотношение (248), получаем, что электрон может излучить или поглотить фотон, если его начальные энергия ($\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\mp}$) и импульс ($p_z \rightarrow p_z^{\mp}$) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^{\mp} \mp \hbar\omega)^2 + (\hbar q_x c)^2 - (p_z^{\mp} \mp \hbar k_z)^2 c^2 &= (mc^2)^2, \\ \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 &= k_z^2 - q_x^2. \end{aligned} \quad (236)$$

Так как электрон движется в области $x > a$, а поле (247) не имеет определенного значения x -проекции волнового вектора, то в случае ВПЧЭ в отличие от случая ВЧЭ нельзя говорить об определенном значении x -проекции импульса как в начальном, так и в конечном состояниях электрона.

Примем чисто формально, что импульс частицы может принимать комплексные значения. В этом случае условия (236) можно найти на основе системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mp} \mp \hbar\omega &= \mathcal{E}_2, & p_z^{\mp} \mp \hbar k_z &= p_{2z}, \\ \mp \hbar k_x^{\mp} &= p_{2x}, & \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 &= k_x^2 + k_z^2. \end{aligned} \quad (237)$$

Здесь $k_x^+ = iq_x$, $k_x^- = (k_x^+)^*$, знак "+" соответствует поглощению фотона, а знак "-" — излучению. Хотя физический смысл имеет лишь следствие (236) из этой системы уравнений (при расчетах необходимо учитывать, что $\mathcal{E}_2^2 = (mc^2)^2 + (cp_2)^2$, $(p_{2x}^{\mp})^2 = -|p_{2x}^{\mp}|^2$), тем не менее она удобна для анализа, так как аналогична обычной системе уравнений (148).

Из (236) следует, что в вакууме ($n_1 = 1$) в обоих процессах участвует один и тот же электрон, скорость которого определяется из (235). Так как и модули амплитуд обоих процессов также совпадают, то глубина модуляции клистронного типа (см. раздел 2.8), перенаселенность пучка электронов (см. раздел 2.11) и коэффициенты усиления черенковского лазера и черенковского клистрона равны нулю. Это своеобразное вырождение можно снять различными способами: 1) поместить волновод в газовую среду; 2) направить вдоль волновода постоянное магнитное поле; 3) рассмотреть усиление

на частицах, скорость которых лежит вне черенковского конуса.

1. Если волновод находится в газовой среде ($n_1 \neq 1$), то из системы уравнений (236) находим, что энергия частиц, участвующих в излучении и поглощении фотона, различны:

$$\mathcal{E}^{\mp} = \mathcal{E} \pm \Delta\mathcal{E}. \quad (238)$$

Здесь величина \mathcal{E} определяется из (235), а асимметричная часть энергии

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hbar\omega(n_1^2 - 1) \left(\frac{p}{mc} \right)^2. \quad (239)$$

2. Направим постоянное магнитное поле вдоль поверхности волновода, находящегося в вакууме. Энергии и импульсы электронов, участвующих в процессах излучения и поглощения определяются из уравнений

$$\mathcal{E}_r^{\mp} \mp \hbar\omega = \mathcal{E}_l, \quad p_z^{\mp} \mp \hbar k_z = p_z, \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_z^2. \quad (240)$$

Здесь

$$\mathcal{E}_r = \left[(mc^2)^2 + c^2 p_z^2 + 2mc^2 \hbar\Omega_0 \left(r + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}$$

— энергия электрона в постоянном магнитном поле, $r = 0, 1, 2, \dots$, $\Omega_0 = |e|H_0/mc$ — ларморова частота, k_z — z -проекция волнового вектора поля (247).

Если $r = l$, частота ω и волновой вектор k_z фотона заданы, то система уравнений (240) определяет z -проекции импульсов частиц, участвующих в излучении (знак "-") и поглощении (знак "+") фотона:

$$p_z^{\mp} = p \pm \Delta p. \quad (241)$$

Величина p определяется из (235), а

$$\Delta p = \frac{\hbar\omega}{2v}. \quad (242)$$

Очевидно, что снятие вырождения в этом случае связано с тем, что закон сохранения импульса вдоль оси x (направление, перпендикулярное магнитному полю) не выполняется.

3. Пусть электрон, который до взаимодействия имел энергию \mathcal{E} и импульс $\mathbf{p}(0, 0, p)$ взаимодействует с полем (247) на конечном участке волновода $L \geq z \geq 0$. Расчет амплитуд вероятностей излучения и поглощения фотона показывает, что в этом случае закон сохранения импульса вдоль оси z :

$$p_z \mp \hbar k_z = p_z^{\mp} \quad (243)$$

может не выполняться. Поэтому процессы излучения и поглощения фотона (объединенные с дисперсионным уравнением (248)) описываются уравнениями

$$\mathcal{E} \mp \hbar\omega = \mathcal{E}^{\mp}, \quad \mp \hbar k_x^{\mp} = p_x^{\mp}, \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_z^2. \quad (244)$$

Так как волновод находится в вакууме, то $n_1 = 1$.

Вычислим z -проекцию импульса электрона после взаимодействия. Учитывая, что

$$p_z^{\mp} = \frac{1}{c} [(\mathcal{E}^{\mp})^2 - c^2 (p_x^{\mp})^2 - (mc^2)^2]^{1/2}$$

и используя (244), получаем

$$p_z^\mp = p \mp \hbar \left(k_z + \frac{\omega - k_z v}{v} \right) - \hbar k_z \frac{\hbar(\omega - k_z v)}{pv}. \quad (245)$$

Сравнение этого равенства с (243) показывает, что электрон, скорость которого лежит вне черенковского конуса, поглощает или излучает в поле (247) фотоны, у которых z -проекции волновых векторов

$$Q_z^\pm = k_z + \frac{\omega - k_z v}{v} \mp \Delta Q \neq k_z.$$

Здесь слагаемое

$$\Delta Q = k_z \frac{\hbar(\omega - k_z v)}{pv}. \quad (246)$$

Очевидно, что оно вносит асимметрию в процессы поглощения и излучения. Так как в рассматриваемом случае условие синхронизма (235) не выполняется, то этот эффект не является, строго говоря, черенковским.

Несколько иной подход к анализу вынужденных процессов в полях, имеющих в некоторых точках особенности (в нашем случае это включение и выключение поля в точках $z = (0, L)$), рассмотрен В.М. Арутюняном и С.Г. Оганесяном (*ЖЭТФ* 72 466 (1977)).

Все три варианта снятия вырождения использованы в разделах 3.2, 3.3 для получения модулированного пучка электронов. В разделе 3.3 исследована роль углового и энергетического разбросов пучка электронов. В разделах 3.4–3.7 показано, что ВПЧЭ можно использовать для создания черенковского лазера и черенковского клистрона [60–64]. В разделе 3.1 исследована динамика частицы в поле поверхностной волны.

Так как квантовые эффекты в случае ВЧЭ были достаточно подробно исследованы в разделе 2, то весь анализ этого раздела базируется только на классических уравнениях.

3.1. Движение электрона в поле поверхностной волны

Пусть монохроматическая электромагнитная волна распространяется в диэлектрическом волноводе, толщина которого равна $2a$, а длина и ширина не ограничены (рис. 3). Расположим волновод симметрично относительно плоскости yz . Напряженность электрического поля электромагнитной волны ТМ-типа над волноводом ($x > a$) имеет вид [65]

$$E_z = E_{1z} \exp i(k_x x + k_z z - \omega t), \quad E_x = -\frac{k_z E_z}{k_x}, \quad (247)$$

где $k_x, k_y = 0, k_z$ — проекции волнового вектора \mathbf{k} .

В случае полного внутреннего отражения k_x есть чисто мнимая величина: $k_x = iq_x$, причем

$$q_x^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2. \quad (248)$$

(Предполагается, что волновод находится в газовой среде, показатель преломления которой равен n_1 .) В волноводе

$$\begin{aligned} E_z &= E_{2z} \sin(k'_x x) \exp i(k'_z z - \omega t), \\ E_x &= i \frac{k'_z}{k'_x} E_{2z} \cos(k'_x x) \exp i(k'_z z - \omega t), \end{aligned} \quad (249)$$

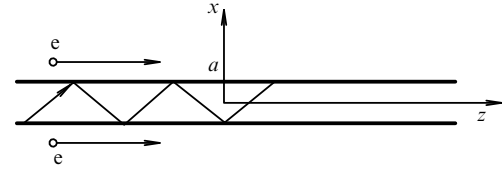


Рис. 3

а дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = (k'_x)^2 + (k'_z)^2, \quad (250)$$

где n_2 — показатель преломления волновода.

Из условия непрерывности полей на границе следует, что z -проекции волновых векторов полей (247), (249) удовлетворяют соотношениям

$$k_z = k'_z, \quad \operatorname{tg} k'_x a = \frac{n_2^2 q_x}{n_1^2 k'_x}. \quad (251)$$

Амплитуды полей (247), (249) связаны соотношением

$$E_{1z} = E_{2z} \sin(k'_x a) \exp(q_x a). \quad (252)$$

Решения уравнения (251) дают набор собственных мод волновода.

Пусть электрон до взаимодействия с волной двигался параллельно поверхности волновода:

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = z_0 + v_0 t. \quad (253)$$

Найдем изменение его импульса и энергии в двух случаях: 1) поле включается адиабатически медленно, 2) электрон взаимодействует с волной на ограниченном участке волновода ($L \geq z \geq 0$).

В первом случае, подставляя выражения для электрического (см. (247)) и магнитного ($\mathbf{H} = c[\mathbf{kE}]/\omega$) полей в (3), получаем

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta \mathcal{E}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \frac{e E_{1z} (\omega - k_z c)}{c q_x (\omega - k_z v_0)} \exp(-q_x x_0) \cos[k_z z_0 + (k_z v_0 - \omega)t], \\ \Delta p_y &= 0, \\ \Delta p_z &= -\frac{e E_{1z}}{\omega - k_z v_0} \exp(-q_x x_0) \sin[k_z z_0 + (k_z v_0 - \omega)t], \\ \Delta \mathcal{E} &= -v_0 \frac{e E_{1z}}{\omega - k_z v_0} \exp(-q_x x_0) \sin[k_z z_0 + (k_z v_0 - \omega)t], \end{aligned} \quad (254)$$

где скорость $v_0 = p_0 c^2 / \mathcal{E}_0$. Отметим, что выражения (254) отличаются от (6), (7) лишь обрезанием множителем $\exp(-q_x x_0)$. Поэтому все пояснения к (5) остаются в силе и здесь.

Пусть частица и волна движутся синхронно:

$$\omega - k_z v_0 = 0, \quad (255)$$

а поле включается в течение времени 2τ по закону

$$E_{1z} = \frac{1}{2} E'_{1z} \left(1 + \frac{\tanh t}{\tau} \right).$$

Интегрируя (3) по времени, получаем, что при $t \gg \tau$ приращение энергии возрастает пропорционально времени взаимодействия электрона с волной:

$$\Delta \mathcal{E} = eE'_{1z} v_0 t \exp(-q_x x_0) \cos(k_z z_0). \quad (256)$$

Предположим, что электрон взаимодействует с волной на конечном отрезке волновода $L \geq z \geq 0$. Интегрируя уравнения (3), имеем

$$\Delta \mathcal{E} = eE'_{1z} L \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp(-q_x x_0) \cos\left(\alpha - \frac{\omega}{v_0} z_0\right), \quad (257)$$

где расстройка $\alpha = (\omega - k_z v_0)L/2v_0$. В зависимости от фазы $\phi = \alpha - \omega z_0/v_0$ частица либо ускоряется ($\Delta \mathcal{E} > 0$), либо тормозится ($\Delta \mathcal{E} < 0$). Если отрезок $[0, L]$ пересекает пучок электронов, то взаимодействие приводит к модуляции его энергии.

Так как амплитуды полей E_{1z} и E_{2z} связаны соотношением (252), то взаимодействие электронов с волной (247) эффективно, если прицельный параметр

$$x_0 - a < \frac{1}{q_x}. \quad (258)$$

Учитывая (248), (255), получаем, что в газовой среде ($n_1 \neq 1$)

$$x_0 - a < \frac{\lambda v_0}{2\pi c} \left(1 - n_1^2 \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

а в вакууме ($n_1 = 1$)

$$x_0 - a < \frac{\lambda v_0}{2\pi c} \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}.$$

Отметим также, что формулы (254), (256), (257) справедливы в случае, если

$$|\Delta \mathbf{p}| < p_0, \quad |\Delta \mathcal{E}| < \mathcal{E}_0. \quad (259)$$

3.2. Модуляция плотности и тока пучка электронов

Модуляция энергии пучка электронов в результате ВПЧЭ (256) приводит к модуляции его скорости. Однако этого, как уже отмечалось в начале раздела 3, недостаточно для получения модуляции клистронного типа тока и плотности пучка электронов. Отметим еще одно обстоятельство, осложняющее анализ эффекта модуляции на основе ВПЧЭ. Реальные пучки электронов всегда имеют разброс по углам. Очевидно, что электроны, летящие под углом к поверхностям волновода, будут либо уходить из области взаимодействия с полем (247), либо влетать в волновод и быстро рассеиваться. Число таких электронов можно уменьшить, если направить вдоль центральной оси пучка частиц постоянное магнитное поле (см. раздел 3.3).

Анализ эффекта модуляции начнем с простой модели, предполагая, что все частицы пучка движутся вдоль поверхности волновода и имеют один и тот же импульс $\mathbf{p}_0(0, 0, p_0)$. Вычислим плотность и ток пучка электронов после взаимодействия с полем (247) на отрезке $L \geq z \geq 0$ на основе кинетического уравнения (23). Решая его в линейном по полю приближении, получаем, что в области $z > L$ функция

$$f = f_0 + f_1,$$

где $f_0 = \delta(p_z - p_0) \delta(p_x) \delta(p_y)$ — начальная функция распределения электронов,

$$f_1 = -\text{Re} \left\{ LF_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\sin \alpha'}{\alpha' v_z} \times \exp \left[i \left[k_x x + \frac{\omega - k_x v_x}{v_z} z - \omega t - \alpha' \right] \right] \right\}, \quad (260)$$

сила

$$\mathbf{F}_1 = e \left[\mathbf{E}_1 \left(1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} \mathbf{E}_1) \right], \quad E_{1x} = -\frac{k_z E_{1z}}{k_x},$$

расстройка

$$\alpha' = \frac{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}}{2v_z} L.$$

Вычисляя плотность и ток пучка электронов и удерживая только слагаемые клистронного типа, получаем

$$j_x = j_y = 0, \quad (261)$$

$$j_z = j_0 \left[1 - 4\pi^2 \xi_z \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0 \beta_0} \frac{zL}{\lambda^2} \left(n_1^2 - 1 + \frac{\omega - k_z v_0}{\omega \beta_0^2} \right) \times \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp(-q_x x) \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v_0} z + \alpha \right) \right], \quad (262)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{j_z}{j_0}. \quad (263)$$

Здесь $j_0 = e\rho_0 v_0$ — начальный ток электронов, $\xi_z = eE_{1z}/mc\omega$, $\beta_0 = v_0/c$, расстройка

$$\alpha = \frac{\omega - k_z v_0}{2v_0} L. \quad (264)$$

Запись тока и плотности электронов в виде (261)–(263) позволяет рассмотреть различные предельные случаи. Если волновод находится в вакууме ($n_1 = 1$) и выполняется условие синхронизма (255), то второе слагаемое в (262) обращается в нуль и

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0, \quad \rho = \rho_0$$

в соответствии с анализом, выполненным в начале раздела 3.

Если волновод находится в газовой среде ($n_1 > 1$) и выполняется условие синхронизма (255), то

$$j_z = j_0 \left[1 - 4\pi^2 \xi_z \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0 \beta_0} \frac{zL}{\lambda^2} (n_1^2 - 1) \times \exp(-q_x x) \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v_0} z \right) \right], \quad (265)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{j_z}{j_0}.$$

Если волновод находится в вакууме ($n_1 = 1$), а скорость электронов лежит вне черенковского конуса, то $\alpha \neq 0$ и

$$j_z = j_0 \left[1 - 4\pi \xi_z \frac{mc}{p_0 \beta_0} \frac{z}{\lambda} \sin \alpha \times \exp(-q_x x) \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v_0} z + \alpha \right) \right], \quad (266)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{j_z}{j_0}.$$

Очевидно, что в двух последних случаях ток и плотность пучка электронов осциллируют на частоте ω , причем глубина модуляции растет прямо пропорционально дрейфовому расстоянию z (модуляция клистронного типа).

Приведем также условия применимости формул (265), (266):

$$4\pi^2 \xi_z \frac{mc^2}{\epsilon_0 \beta_0} \frac{zL}{\lambda^2} (n_1^2 - 1) \ll 1, \quad (267)$$

$$4\pi \xi_z \frac{mc}{\rho_0 \beta_0} \frac{z}{\lambda} \sin \alpha \ll 1.$$

3.3. Учет разброса электронов по энергиям и углам

Рассмотрим модуляцию пучка электронов, который до взаимодействия имел гауссов разброс по импульсам:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{(4 \ln 2)^{3/2}}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel} \pi^{3/2}} \exp \left[-4 \ln 2 \frac{(p_z - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} - 4 \ln 2 \frac{p_x^2 + p_y^2}{\Delta_{\perp}^2} \right]. \quad (268)$$

Ширины энергетического и углового разбросов этого пучка определяются выражениями $\Delta = v_0 \Delta_{\parallel}$, $\delta = \Delta_{\perp} / p_0$. Пусть электроны взаимодействуют с полем (247) на отрезке $L \geq z \geq 0$. Вычислим их плотности и ток в области $z > L$ в случае, когда вдоль оси z приложено постоянное магнитное поле $H_z = -H_0$. Так как нас интересуют только электроны, которые движутся над поверхностью волновода, то к кинетическому уравнению (88) необходимо присоединить неравенство

$$x > a. \quad (269)$$

Решая уравнение (88) точно по постоянному магнитному полю, и в линейном приближении по полю (247) получаем

$$f = f_0 + f_1. \quad (270)$$

Здесь f_0 — начальная функция распределения частиц (268),

$$f_1 = -\text{Re} \left[eE_{1z} \frac{L}{v_z} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} I_0 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \times \exp \left(-q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi - q_x x + i \frac{\omega}{v_z} z - i\omega t - i\alpha \right) \right], \quad (271)$$

$\Omega = |e|H_0 c / \mathcal{E}$, скорость $v_{\perp} = c^2(p_x^2 + p_y^2)^{1/2} / \mathcal{E}$, расстройка

$$\alpha = \frac{\omega - k_z v_z}{2v_z} L, \quad (272)$$

угол φ определяется из уравнения $\text{tg} \varphi = p_y / p_x$. Отметим, что в (271) учтено только слагаемое, ответственное за ВЧЭ.

Перейдем к анализу неравенства (269). При решении уравнения (88) в постоянном магнитном поле использованы характеристики (106), в которых нужно опустить штрихи. Одновременно в неравенство (269) нужно подставить выражение

$$x = x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi'), \quad \tan \varphi' = \frac{p_{0y}}{p_{0x}}.$$

Так как это неравенство должно выполняться в любой момент времени, то $x_0 > a + v_{0\perp} / \Omega$. Возвращаясь вновь к

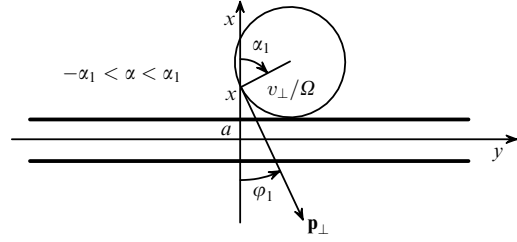


Рис. 4

переменным \mathbf{k} , \mathbf{v} и учитывая, что $\Omega t - \varphi' = -\varphi$, получаем условия на угол φ :

$$\pi - \varphi_1 > \varphi > \varphi_1. \quad (273)$$

Здесь

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \arcsin \frac{a + v_{\perp} / \Omega - x}{v_{\perp} / \Omega}, \quad (274)$$

если $a < x < a + 2v_{\perp} / \Omega$, и $\varphi_1 = -\pi/2$, если $x \geq a + 2v_{\perp} / \Omega$.

Неравенства имеют простой физический смысл. Так как v_{\perp} — проекция скорости частицы на плоскость xu , то $v_{\perp} / \Omega = r_{\perp}$ — ее ларморовский радиус. Пусть частица проходит через точку x , лежащую в области $a < x < a + 2r_{\perp}$. Ее траектория не пересекает плоскость $x = a$, если угол между импульсом \mathbf{p}_{\perp} и осью x лежит в интервале (273) (рис. 4). Если $a \geq a + 2r_{\perp}$, то угол φ может быть любым. Таким образом, из множества частиц, проходящих через точку x , неравенства (273) отбирают лишь те, чьи траектории расположены над поверхностью волновода.

Переходя к цилиндрическим координатам в импульсном пространстве ($p_x, p_y, p_z \rightarrow \varphi, p_{\perp}, p_z$), находим выражение для z -проекции тока пучка электронов:

$$j_z = j_{0z} + j_{1z}, \quad (275)$$

где j_{0z} — z -проекция тока пучка электронов до взаимодействия,

$$j_{1z} = -\text{Re} \left[e^2 \rho_0 L E_{1z} \exp(-q_x x - i\omega t) \times \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} d\varphi \exp \left(-q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \times I_0 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \exp i \left(\frac{\omega}{v_{\perp}} z - \alpha \right) \right], \quad (276)$$

если $a < x < a + 2v_{\perp} / \Omega$, и

$$j_{1z} = -\text{Re} \left[2\pi e^2 \rho_0 L E_{1z} \exp(-q_x x - i\omega t) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \times I_0^2 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \exp i \left(\frac{\omega}{v_z} z - \alpha \right) \right], \quad (277)$$

если $x \geq a + 2v_{\perp} / \Omega$.

Предположим, что средний импульс пучка электронов удовлетворяет условию синхронизма $\omega - k_z v_0 = 0$. Чтобы упростить дальнейшие расчеты, предположим

также, что напряженность постоянного магнитного поля

$$H_0 > \frac{mc\omega}{|e|} \delta. \quad (278)$$

В этом случае относительный вклад слагаемого (276) в силу тока

$$I_z = \int_a^\infty dx \int_{-1/2}^{1/2} dy j_z$$

порядка $\delta mc\omega/|e|H_0 \ll 1$ и им можно пренебречь.

Учитывая, что $p_\perp \leq \Delta_\perp$, $|p_z - p_0| \leq \Delta_\parallel$ разложим величину $1/v_z$ в ряд Тэйлора около точки $1/v_0$:

$$\frac{1}{v_z} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{p_0 v_0} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 (p_z - p_0) + \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \frac{(p_z - p_0)^2}{p_0 \mathcal{E}_0} + \frac{p_\perp^2}{2p_0 \mathcal{E}_0}. \quad (279)$$

Подставляя это разложение в (277) и учитывая определение (268), имеем

$$j_{1z} = j_{0z} 4\pi^2 \xi_z \left(\frac{mc}{p_0} \right)^3 \frac{zL}{\lambda^2} \times \exp \left[- \left(\frac{z}{z_1} \right)^2 - q_x x \right] \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v_0} z \right). \quad (280)$$

Здесь $\xi_z = eE_{1z}/mc\omega$,

$$z_1 = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \lambda \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \beta_0 \frac{p_0}{\Delta_\parallel}. \quad (281)$$

При расчете предполагалось, что расстояние

$$z \ll \frac{2 \ln 2}{\pi} \lambda \left(\frac{p_0}{\Delta_\perp} \right)^2 \frac{1}{\beta_0}, \quad (282)$$

а средний импульс пучка электронов

$$p_0 \ll 1, 4mc \frac{p_0}{\Delta_\perp} \sqrt{\frac{\Delta_\parallel}{p_0}}. \quad (283)$$

Отметим, что при условиях (278), (282) ток (280) не зависит от углового разброса пучка электронов. Что касается роли энергетического разброса, то он определяет область дрейфа электронов $z < z_1$, где z_1 задается выражением (281).

Теория возмущений, использованная при расчете выражения (280) справедлива при

$$|j_{1z}| \ll j_{0z}. \quad (284)$$

3.4. Теория черенковского лазера (плоский волновод)

Рассмотрим возможность усиления электромагнитной волны на основе ВПЧЭ в простейшем случае, когда волновод находится в газовой среде, а пучок электронов движется параллельно волноводу и имеет только разброс по энергиям. Анализ, выполненный в начале раздела 3, показал, что электроны, участвующие в процессах излучения и поглощения имеют разные энергии (см. (238)). Так как $\Delta \mathcal{E} > 0$, то на левом крыле

гауссова распределения электронов по энергиям число электронов, участвующих в излучении ($N(\mathcal{E}^-) \sim g(\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E})$) больше числа электронов, участвующих в поглощении ($N(\mathcal{E}^+) \sim g(\mathcal{E} - \Delta \mathcal{E})$), и коэффициент усиления $\Gamma > 0$.

Вычислим коэффициент усиления черенковского лазера на основе системы уравнений (88), (93). Из кинетического уравнения (88) находим функцию распределения электронов в линейном приближении по полю (247):

$$f = f_0 + f_1, \quad (285)$$

где f_0 — функция распределения электронов до взаимодействия,

$$f_1 = i\mathbf{F} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega + i\eta} \Big|_{\eta \rightarrow 0}, \quad (286)$$

$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + (e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ — сила Лоренца.

Коэффициент усиления Γ найдем из уравнения (93), полагая, что электроны движутся по обе стороны волновода (см. рис. 3):

$$\Gamma = -2\text{Re} \frac{1}{P} \int_a^\infty dx \int_{-1/2}^{1/2} dy \mathbf{j}\mathbf{E}^*. \quad (287)$$

Здесь

$$P = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-1/2}^{1/2} dy [\mathbf{E}^* \mathbf{H}] \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} l \frac{k_z \omega}{\varepsilon_2 c} |E_{1z}|^2 \frac{\exp(-3q_x a)}{k_x'^2 q_x'^2} \times \left[a(\varepsilon_2^2 q_x^2 + \varepsilon_1^2 k_x'^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{q_x^2 + k_x'^2}{q_x} \right] \quad (288)$$

— поток энергии волны (247), (249) вдоль оси z , l — произвольная ширина вдоль оси y , $\varepsilon_{1,2} = n_{1,2}^2$ — диэлектрические проницаемости газовой среды и волновода.

Подставляя (89), (286), (288) в (287) и полагая, что пучок электронов имеет только гауссов разброс по энергиям (154), получаем

$$\Gamma = 2,7 \rho_0 r_0 \lambda \beta_0^3 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\Delta} \right)^2 \times (\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 \beta_0^2 - 1)(1 - \varepsilon_1 \beta_0^2) \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \times \left\{ 1 + 2\pi a \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2(1 - \varepsilon_1 \beta_0^2) \right] \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta_0^2)^{1/2}}{\lambda \beta_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right\}^{-1}, \quad (289)$$

где $\beta_0 = v_0/c = p_0 c/\mathcal{E}_0$, r_0 — классический радиус электрона. Очевидно, что в вакууме ($\varepsilon_1 = 1$) $\Gamma = 0$ в соответствии с анализом законов сохранения энергии и импульса.

Перейдем к анализу случая, когда взаимодействие электронов с волной происходит в вакууме ($\varepsilon_1 = 1$) на ограниченном участке волновода L (рис. 5). Решение кинетического уравнения (88) для этой схемы имеет вид (285), где

$$f_1 = i\mathbf{F} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega} + \frac{\exp[i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})z/v_z]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right\}. \quad (290)$$

Усиление, связанное с первым слагаемым в квадратных скобках, проанализировано выше. Второе слагаемое в функции распределения (290) связано с включением взаимодействия в точке $z = 0$. Она приводит к модуляции плотности тех электронов, скорости которых не совпадают со скоростью волны:

$$\omega - k_z v_z \neq 0. \quad (291)$$

Анализ, выполненный в начале раздела 3, показал, что этому условию удовлетворяют те частицы пучка, для которых не выполняется закон сохранения импульса вдоль оси z . Найдем условия, при которых пучок электронов усиливает поле (247), (249). Вычислим коэффициент усиления в случае, когда волновод находится в кольцевом резонаторе (см. рис. 5). Полагая, что потери в системе равны нулю, проинтегрируем сначала уравнение (93) по объему, заключенному между плоскостями, расположенными на расстоянии L друг от друга:

$$\frac{d}{dt} W = -2\text{Re} \int_0^L dz \int_a^\infty dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \mathbf{jE}^*. \quad (292)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^L dz \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-l/2}^{l/2} dy [\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2] \quad (293)$$

— энергия электромагнитного поля.

Интегрируя (292) по времени, находим коэффициент усиления электромагнитной волны:

$$\Gamma = -2\text{Re} \frac{1}{cW} \int_0^L dz \int_a^\infty dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \mathbf{jE}^*. \quad (294)$$

Учитывая (247), (249), (89), (290), (293), получаем

$$\Gamma = -2\pi\rho_0 r_0 L \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_0}\right)^3 \alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \times \\ \times \frac{\varepsilon_2 \beta_0^2 - 1}{\beta_0^3 (\varepsilon_2 - 1)} \left\{ 1 + 2\pi \frac{a}{\lambda} \frac{mc^2}{\varepsilon_0} \left[1 + \varepsilon_2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_0}\right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (295)$$

где $\alpha = (\omega - k_z v_0)L/2v_0$. При расчете предполагалось, что пучок электронов моноэнергетичен: $g(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$. Это приближение справедливо при

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_0} \ll \frac{\lambda}{2\pi L} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \beta_0^3. \quad (296)$$

Множитель

$$v = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

имеет максимальное значение $v = 0,8$ при $\alpha = -1,75$.

Отметим, что последний вариант черенковского лазера впервые рассматривался в [66]. Авторы предполагали, что пучок электронов может двигаться только в одном направлении (см. раздел 2.14) и учитывали только z -проекцию электрического поля. Это предположение приводит к увеличению коэффициента усиления (295) в $(1 - k_z v_0/\omega)^{-1} (mc^2/\mathcal{E}_0)^2$ раз.

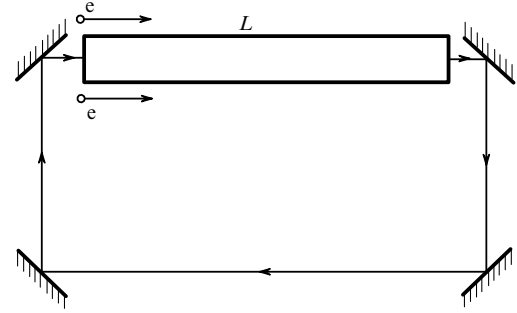


Рис. 5

3.5. Теория черенковского лазера в постоянном магнитном поле

Пусть электромагнитная волна распространяется в плоском волноводе (247), (249). Пустим над его поверхностью пучок электронов, имеющий гауссов разброс по импульсам (268). Направим против оси z постоянное магнитное поле $H_z = -H_0$ и вычислим коэффициент усиления черенковского лазера из системы уравнений (88), (93).

Решая кинетическое уравнение (88) точно по постоянному магнитному полю и в первом приближении по полю (247), с учетом неравенства $x > a$ получаем

$$f = f_0 + f_1. \quad (297)$$

Здесь f_0 определяется выражением (268), а

$$f_1 = -ieE_{1z}I_0 \left(q_x \frac{v_\perp}{\Omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{1}{\omega - k_z v_z} \times \\ \times \exp \left(ik_z z - i\omega t - q_x x - q_x \frac{v_\perp}{\Omega} \sin \varphi \right). \quad (298)$$

При расчете f_1 удерживались только слагаемые, ответственные за вынужденный черенковский эффект, $I_0(R)$ — модифицированная функция Бесселя, угол φ определяется соотношением $\tan \varphi = p_y/p_x$, $p_\perp = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$, $v_\perp = p_\perp c^2/\mathcal{E}$. Из неравенства $x > a$ получаем условие на угол φ :

$$\pi - \varphi_1 > \varphi > \varphi_1, \quad (299)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\arcsin a + v_\perp/\Omega - x}{v_\perp/\Omega},$$

если расстояние $a < x < a + 2v_\perp/\Omega$, и $\varphi_1 = -\pi/2$, если расстояние $x \geq a + 2v_\perp/\Omega$. Анализ, выполненный в разделе 3.3, показал, что при этом в функции распределения учитываются лишь электроны, движущиеся над поверхностью волновода.

Подставляя (298) в (89), находим z -проекцию тока пучка электронов:

$$j_{1z} = -ie^2 \rho_0 E_{1z} \exp(ik_z z - i\omega t - q_x x) \times \\ \times \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} d\varphi \int_{-\infty}^\infty dp_z \int_0^\infty p_\perp dp_\perp I_0 \left(q_x \frac{v_\perp}{\Omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{v_z}{\omega - k_z v_z} \times \\ \times \exp \left(-q_x \frac{v_\perp}{\Omega} \sin \varphi \right), \quad (300)$$

если $a < x < a + 2v_{\perp}/\Omega$,

$$j_{2z} = -2i\pi e^2 \rho_0 E_{1z} \exp(ik_z z - i\omega t - q_x x) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} I_0^2 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{v_z}{\omega - k_z v_z}, \quad (301)$$

если $x \geq a + 2v_{\perp}/\Omega$.

Пусть электроны движутся по обе стороны волновода. Тогда из уравнения (93) находим, что коэффициент усиления черенковского лазера

$$\Gamma = -2\text{Re} \frac{1}{P} \int_a^{a+2v_{\perp}/\Omega} dx \int_{-1/2}^{1/2} dy j_{1z} E_z^* + \\ + \int_{a+2v_{\perp}/\Omega}^{\infty} dx \int_{-1/2}^{1/2} dy j_{2z} E_z^*. \quad (302)$$

Здесь величины j_{1z} , j_{2z} и поток P определяются выражениями (300), (301) и (288). Интегрируя по переменным x , y , p_z , получаем

$$\Gamma = -32\pi \ln 2 \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} \right)^{3/2} \rho_0 r_0 \lambda \frac{\mathcal{E}_0 mc}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}^3} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \times \\ \times \frac{k_x^2 q_x^2}{k_z \omega [a(\varepsilon^2 q_x^2 + k_x^2) + \varepsilon(k_x^2 + q_x^2)/q_x]} \times \\ \times \left\{ \int_a^{a+2v_{\perp}/\Omega} dx \exp(-2q_x x) \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} dy \exp\left(-q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi\right) \times \right. \\ \times \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} (p_z - p_0) I_0 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \times \\ \times \exp\left(-4 \ln 2 \frac{p_{\perp}^2}{\Delta_{\perp}^2} - 4 \ln 2 \frac{(p_z - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2}\right) + \\ \left. + \frac{\pi}{q_x} \exp(-2q_x a) \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} (p_z - p_0) I_0^2 \left(q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-4 \ln 2 \frac{p_{\perp}^2}{\Delta_{\perp}^2} - 4 \ln 2 \frac{(p_z - p_0)^2}{\Delta_{\parallel}^2} - 4q_x \frac{v_{\perp}}{\Omega}\right) \right\}. \quad (303)$$

Импульс p_z определяется из уравнения

$$\omega - k_z v_z = 0. \quad (304)$$

Полагая, что $p_z = b$ при $p_x = p_y = 0$, найдем явную зависимость p_z от проекции импульса на плоскость xy :

$$p_z = b + q_2 p_{\perp}^2. \quad (305)$$

Здесь величина $q_2 = (1/2b)(b/mc)^2$. Разложение (305) справедливо при условии $q_2 \Delta_{\perp}^2 \ll b$ или, учитывая, что $b \approx p_0$, $\delta = \Delta_{\perp}/p_0$, при

$$p_0 \ll 1,4 \frac{mc}{\delta}. \quad (306)$$

Подстановка (305) в (303) позволяет выделить явную зависимость подинтегрального выражения в (303) от переменной p_{\perp} . Тем не менее вычислить интегралы (303) в общем виде не удастся. Чтобы упростить расчеты, предположим, что параметр $q_x v_{\perp}/\Omega \ll 1$. Учитывая, что

максимальное значение скорости $v_{\perp} = c^2 p_{\perp}/\mathcal{E} \lesssim c^2 \Delta_{\perp}/\mathcal{E}_0$ (см. (268)), получаем условие на постоянное магнитное поле:

$$H_0 \gg \frac{\omega mc}{|e|} \delta, \quad (307)$$

где $\delta = \Delta_{\perp}/p_0$ — угловой разброс пучка электронов. В этом случае отношение первого слагаемого в фигурных скобках (303) ко второму порядка $q_x v_{\perp}/\Omega \ll 1$ и им можно пренебречь.

Анализ, проведенный в разделе 2.14, показал, что второй интеграл в (303) максимален при $q_2 \Delta_{\perp}^2 \ll |b - p_0|$. Учитывая, что $q_2 = (1/2b)(b/mc)^2$ и $|b - p_0| \sim \Delta_{\parallel}$, получаем условие на средний импульс пучка электронов:

$$p_0 \ll 1,4 \frac{mc}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}}}. \quad (308)$$

Полагая, что расстройка $b - p_0 = -\Delta_{\parallel}/\sqrt{\delta \ln 2}$ (см. раздел 2.14) и выполняются неравенства (307), (308), находим окончательное выражение для коэффициента усиления черенковского лазера в постоянном магнитном поле:

$$\Gamma = 8,4 \rho_0 r_0 \lambda \left(\frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \right)^2 \frac{mc}{p_0} \frac{(n\beta_0)^2 - 1}{\beta_0^2 (n^2 - 1)} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2\pi}{(n\beta_0)^2} \frac{amc}{\lambda p_0} \left[1 + n^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (309)$$

3.6. Теория черенковского лазера (цилиндрический полый волновод)

Рассмотрим усиление электромагнитной волны, распространяющейся в полем цилиндрическом волноводе (рис. 6). Направим ось цилиндрического волновода с внутренним и внешним радиусами d и b вдоль оси z . Проекция напряженностей электрического и магнитного полей ТМ₀-моды на ось z :

$$E_z = \exp(ik_{\parallel} z - i\omega t) \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} AI_0(k_{\perp} r), \\ BJ_0(k'_{\perp} r) + CN_0(k'_{\perp} r), \\ DK_0(k_{\perp} r), \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} r < d \\ d \leq r \leq b \\ r > b \end{array} \right\} + \text{к. с.}, \quad (310)$$

$$H_z = 0,$$

определяют остальные компоненты волны:

$$E_r = i \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \exp(ik_{\parallel} z - i\omega t) \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} -AI_1(k_{\perp} r), \\ -\frac{k_{\perp}}{k'_{\perp}} [BJ_1(k'_{\perp} r) - CN_1(k'_{\perp} r)], \\ DK_1(k_{\perp} r), \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} r < d \\ d \leq r \leq b \\ r > b \end{array} \right\} + \text{к. с.}, \quad (311)$$

$$E_{\theta} = 0,$$

$$H_{\theta} = i \frac{\omega}{ck_{\perp}} \exp(ik_{\parallel} z - i\omega t) \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} -AI_1(k_{\perp} r), \\ -n^2 \frac{k_{\perp}}{k'_{\perp}} [BJ_1(k'_{\perp} r) + CN_1(k'_{\perp} r)], \\ DK_1(k_{\perp} r), \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} r < d \\ d \leq r \leq b \\ r > b \end{array} \right\} + \text{к. с.}, \\ H_r = 0.$$

Формулы (310), (311) записаны в цилиндрических координатах r, θ, z ; A, B, C, D — константы, определяемые ниже, J_m, N_m, I_m, K_m , где $m = 0, 1$ — обычные и модифицированные функции Бесселя. Проекция волнового вектора на ось z и на плоскость xu в волноводе и вне его связаны соотношениями

$$k'_\perp = \left[\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_\parallel^2 \right]^{1/2}, \quad k_\perp = \left[k_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right]^{1/2}.$$

Из условий сшивания компонент электромагнитного поля (310), (311) на границах $r = d$ и $r = b$ получаем условие существования мод:

$$\frac{J_0(u_2)I_1(u_1)/I_0(u_1) - n^2(u_1/u_2)J_1(u_2)}{N_0(u_2)I_1(u_1)/I_0(u_1) - n^2(u_1/u_2)N_1(u_2)} = \frac{J_0(u_3)K_1(u_4)/K_0(u_4) + n^2(u_4/u_3)J_1(u_3)}{N_0(u_3)K_1(u_4)/K_0(u_4) + n^2(u_4/u_3)N_1(u_3)}, \quad (312)$$

и выражения для безразмерных величин $B/A, C/A$ и D/A :

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{B}{C} \frac{C}{A}, \\ \frac{B}{C} &= \frac{n^2(u_1/u_2)N_1(u_2) - N_0(u_2)I_1(u_1)/I_0(u_1)}{J_0(u_2)I_1(u_1)/I_0(u_1) - n^2(u_1/u_2)J_1(u_2)}, \\ \frac{C}{A} &= \frac{I_0(u_1)}{N_0(u_2) + (B/C)J_0(u_2)}, \\ \frac{D}{A} &= \frac{(B/A)J_0(u_3) + (C/A)N_0(u_3)}{K_0(u_4)}. \end{aligned} \quad (313)$$

Параметры u_i (где $i = 1, 2, 3, 4$) имеют вид

$$u_1 = k_\perp d, \quad u_2 = k'_\perp d, \quad u_3 = k'_\perp b, \quad u_4 = k_\perp b. \quad (314)$$

Пусть однородный пучок электронов с гауссовым разбросом по импульсам (268) входит в полость волновода и взаимодействует с полем (310), (311) и постоянным магнитным полем с напряженностью $H_z = -H_0$. Коэффициент усиления черенковского лазера вычислим на основе системы уравнений (88), (93). Решая кинетическое уравнение в области $r < d$, находим функцию распределения частиц

$$f = f_0 + f_1.$$

Первое слагаемое f_0 определяется выражением (268), линейная по полю (310), (311) добавка

$$f_1 = \frac{eA}{i(\omega - k_\parallel v_z)} \left[I_0(k_\perp r) + \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega} \sin(\varphi - \theta) I_1(k_\perp r) \right] \times \exp(ik_\parallel z - i\omega t) + \text{к. с.}, \quad (315)$$

где $\Omega = \Omega_0 mc^2 / \mathcal{E}$, $\Omega_0 = |e|H_0/mc$ — ларморова частота, углы θ и φ определяются соотношениями $\tan \theta = y/x$, $\tan \varphi = p_y/p_x$.

При расчетах предполагалось, что магнитное поле достаточно велико:

$$H_0 \gg \max \left\{ \frac{c\Delta_\perp}{|e|d}; \frac{ck_\perp \Delta_\perp}{|e|} \right\}, \quad (316)$$

и учитывались только слагаемые, содержащие черенковский полюс. Если зафиксировать координаты точки

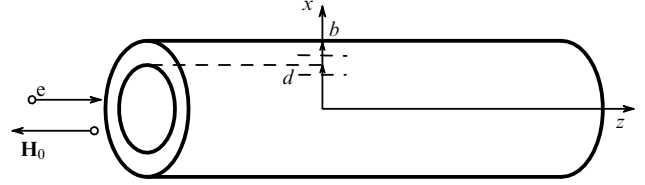


Рис. 6

наблюдения $\mathbf{r}(r, \theta, z)$, то из неравенства $r < d$ получаем условия на угол φ :

$$-\pi - v + \theta < \varphi < v + \theta, \quad d - 2v_\perp/\Omega < r < d, \\ 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < r < d - 2v_\perp/\Omega. \quad (317)$$

Здесь

$$v = \arcsin \frac{d^2 - 2dv_\perp/\Omega - r^2}{2rv_\perp/\Omega}. \quad (318)$$

Условия (317) отбирают электроны, проходящие через точку \mathbf{r} и не пересекающие стенки волновода.

Коэффициент усиления черенковского лазера вычислим из уравнения (93):

$$\Gamma = -\frac{1}{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathbf{jE}. \quad (319)$$

Здесь P — поток энергии электромагнитной волны (310), (311) через плоскость xu , определяемый выражениями (325), (322), (323), числитель и знаменатель усредняются по времени.

Учитывая (88), (315), (317), получаем

$$\Gamma = 8,4 \rho_0 r_0 \lambda \frac{mc}{p_0} \left(\frac{p_0}{\Delta_\parallel} \right)^2 (1 - \gamma) G, \quad (320)$$

где ρ_0 — плотность начального пучка электронов, r_0 — классический радиус электрона, $\mathcal{E}_0 = p_0 c^2 / v_0$ — средняя энергия пучка электронов, $\beta_0 = v_0/c$. Параметры γ и G определяются выражениями

$$\gamma = \frac{I_0^2(u_1)}{I_0^2(u_1) - I_1^2(u_1)} \frac{c\Delta_\perp}{|e|H_0 d}, \quad (321)$$

$$G = \left[I_0^2(u_1) - I_1^2(u_1) \right] \left\{ I_1^2(u_1) - I_0^2(u_1) + \frac{2}{u_1} I_0(u_1) I_1(u_1) + \left(\frac{Du_4}{Au_1} \right)^2 \left[K_0^2(u_4) - K_1^2(u_4) + \frac{2}{u_4} K_0(u_4) K_1(u_4) \right] + \frac{n^2}{u_2^2} \left[u_4^2 \psi(u_3) - u_1^2 \psi(u_2) \right] \right\}^{-1}, \quad (322)$$

где величина

$$\psi = \left(\frac{B}{A} \right)^2 (J_1^2 - J_0 J_2) + \left(\frac{C}{A} \right)^2 (N_1^2 - N_0 N_2) + \frac{BC}{A^2} (2J_1 N_1 - N_2 J_0 - N_0 J_2). \quad (323)$$

Формула (320) справедлива при

$$p_0 \ll 1, 4mc \sqrt{\frac{p_0}{\Delta_{\perp}}} \sqrt{\frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}}}, \quad \gamma \ll 1. \quad (324)$$

Множитель G связан с потоком энергии поля (310), (311) соотношением

$$P = A^2 \frac{d^2 \omega k_z}{4k_{\perp}^2 G} \left[I_0^2(u_1) - I_1^2(u_1) \right]. \quad (325)$$

Рассмотрим усиление электромагнитной волны пучком электронов с умеренными энергиями ($\mathcal{E}_0 \geq mc^2$). Если подобрать размеры волновода так, что $d > \lambda$, то выражения (312), (320)–(323) упрощаются. Учитывая, что $u_i \gg 1$ и используя асимптотические представления для функций Бесселя [55], получаем

$$\tan \frac{k'_{\perp}(b-d)}{2} = \frac{n^2 k_{\perp}}{k'_{\perp}}, \quad (326)$$

$$G = \left\{ 2 + 2\pi \frac{(b-d)mc}{\lambda p_0} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{n^2 \beta_0^2 - 1} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (327)$$

$$\gamma = 1, 1 \frac{\omega \Delta_{\perp}}{\Omega_0 p_0}. \quad (328)$$

Отметим, что при оценке потока энергии в волноводе ($d > r > b$) учитывались лишь первые (основные) слагаемые в асимптотическом представлении функций Бесселя и Неймана. Приведем также выражение для G в случае, когда удерживаются и вторые слагаемые:

$$G = \frac{n^2 \beta_0^2 - 1}{2\beta_0^2(n^2 - 1)} \left\{ 1 + \pi \frac{(b-d)mc}{\lambda p_0} \frac{1}{n^2 \beta_0^2} \times \left[1 + n^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (329)$$

Что касается величины γ , то она связана с учетом первой поправки по параметру $\omega mc \Delta_{\perp} / |e| H_0 p_0$ (при расчете усиления в плоском волноводе она просто отбрасывалась). Очевидно, что при уменьшении магнитного поля H_0 коэффициент усиления убывает в соответствии с анализом, выполненным в начале раздела 3.

Возможность усиления электромагнитного излучения в плоском и цилиндрическом волноводах рассматривалась также в ряде работ Волша с соавторами [61–64] в случае, когда пучок электронов одномерен ($\delta = 0$) и может двигаться только параллельно волноводу (эта модель анализировалась нами в конце раздела 2.14). При расчете усиления авторы предполагали, что пучок электронов моноэнергетичен ($\Delta = 0$) и исследовали случай больших коэффициентов усиления². Очевидно, что в пределе $\Delta = 0$ механизм усиления отличен от нашего. Отлична от наших работ и роль магнитного поля. У Волша оно играет роль ведущего поля (см. [50] с. 303), у нас оно введено для создания асимметрии в процессах излучения и поглощения фотона электроном, т.е. для создания механизма усиления.

² Вопрос больших коэффициентов усиления и связанная с ним проблема нелинейных эффектов (насыщения, генерации гармоник и т.д.) в настоящем обзоре не рассматриваются.

Отметим, что, строго говоря, напряженность магнитного поля как параметр не входит в исходные уравнения, рассматриваемые Волшем: он просто постулирует, что одномерность пучка электронов эквивалентна очень сильному магнитному полю. Поэтому результаты, полученные на основе этой модели, носят, скорее, качественный характер.

В [71–73] начаты экспериментальные исследования ВПЧЭ.

3.7. Теория черенковского клистрона в постоянном магнитном поле

Схему, в которой усиливается волна движется в волноводе, а электроны летят над его поверхностью, можно использовать для создания черенковского клистрона. Пусть электроны движутся в постоянном магнитном поле $H_z = -H_0$ и взаимодействуют с полем (247) на двух участках плоского волновода: $(0, L)$ — модулирующий промежуток, $(z_0, z_0 + L_1)$ — усиливающий промежуток; дрейфовое расстояние $z_0 \gg L, L_1$. Коэффициент усиления клистрона вычислим на основе системы уравнений (88), (93).

Решая уравнение (88) точно по постоянному магнитному полю и в первом приближении по полю (247), получаем функцию распределения частиц в области $z > L$ (270), (271). Подставляя (271) в (89), находим z -проекцию тока (276), (277).

Коэффициент усиления черенковского клистрона вычислим из уравнения (93) в случае, когда частицы движутся по обе стороны волновода. После взаимодействия с электронами на отрезке $[0, L_1]$ поток излучения

$$P = P_0 \left(1 + \frac{1}{2} \Gamma L_1 \right)^2,$$

где

$$\Gamma = -\frac{2}{L_1} \operatorname{Re} \int_a^{\infty} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_{z_0}^{z_0+L_1} dz \frac{\mathbf{jE}^*}{\sqrt{PP_0}}. \quad (330)$$

Здесь P_0 — поток энергии электромагнитной волны, определяемый выражением (288).

Для упрощения дальнейших расчетов предположим, что напряженность магнитного поля достаточно велика (см. (278)). В этом случае током (276) можно пренебречь. Будем считать также, что средний импульс пучка электронов удовлетворяет соотношению

$$\omega - k_z v_0 = 0. \quad (331)$$

Подставляя (277), (279) в (330) и интегрируя по переменным x, y, z, p_{\perp}, p_z , получаем

$$\Gamma = 4\pi \rho_0 r_0 L \left(\frac{mc}{p_0} \right)^5 \frac{\omega}{c} z_0 \exp \left(-\frac{z_0^2}{z_1^2} \right) \frac{n^2 \beta_0^2 - 1}{n^2 - 1} \times \sin(\phi + \pi) \left\{ 1 + \frac{2\pi}{n^2 \beta_0^2} \frac{amc}{\lambda p_0} \left[1 + n^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (332)$$

Здесь расстояние

$$z_1 = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \lambda \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \beta_0 \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}}, \quad (333)$$

ϕ — разность фаз между током (277) и усиливаемой волной (247), (249), зависящая от дрейфового расстояния z_0 . При расчете (332) предполагалось, что средний импульс пучка частиц

$$p_0 < 1, 4mc \frac{p_0}{\Delta_{\perp}} \sqrt{\frac{\Delta_{\parallel}}{p_0}}. \quad (334)$$

Если $z_0 = z_1/\sqrt{2}$, фаза $\phi = 3\pi/2$, то коэффициент усиления максимален:

$$\Gamma = 17,9 \rho_0 r_0 L \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \left(\frac{mc}{p_0}\right)^3 \frac{n^2 \beta_0^2 - 1}{\beta_0(n^2 - 1)} \times \left\{ 1 + \frac{2\pi}{n^2 \beta_0^2} \frac{amc}{\lambda p_0} \left[1 + n^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (335)$$

3.8. Об экспериментальном наблюдении вынужденного поверхностного черенковского эффекта

Рассмотрим возможности наблюдения ВПЧЭ. Так как показатель преломления волновода n достигает значения 1,5–2, то условие синхронизма (255) можно выполнить для сильноточных низкоэнергетичных пучков электронов. Если $\mathcal{E}_0 \geq mc^2$, то взаимодействие электронов с волной эффективно при определенных параметрах $x_0 - a$ порядка длины волны λ (см. (258)).

Рассмотрим усиление электромагнитного излучения в плоском волноводе (см. разделы 3.5, 3.7). Сравнивая коэффициенты усиления черенковского лазера $\Gamma_{\text{л}}^H$ (309) и черенковского клистрона $\Gamma_{\text{кл}}^H$ (335), получаем

$$\frac{\Gamma_{\text{л}}^H}{\Gamma_{\text{кл}}^H} = 0,5 \frac{\lambda}{L} \frac{p_0}{\Delta_{\parallel}} \left(\frac{p_0}{mc}\right)^2 \frac{1}{n^2 \beta_0}. \quad (336)$$

Пусть $\Delta_{\parallel}/p_0 = \lambda/L$. Тогда

$$\frac{\Gamma_{\text{л}}^H}{\Gamma_{\text{кл}}^H} = 0,5 \left(\frac{p_0}{mc}\right)^2 \frac{1}{n^2 \beta_0}.$$

Очевидно, что в этом случае $\Gamma_{\text{л}}^H \ll \Gamma_{\text{кл}}^H$, если $\beta_0 \ll 1$, и $\Gamma_{\text{л}}^H \gg \Gamma_{\text{кл}}^H$, если $p_0 \gg 1, 4nmc$. Если ток пучка электронов составляет 1кА/см², его средняя энергия $\mathcal{E}_0 = 1$ МэВ, то из (309) получаем, что для разбросов $\delta = \Delta/\mathcal{E}_0 = 10^{-1}$ оптимальной областью усиления являются миллиметровые длины волн. Если толщина волновода $2a = 1$ мм, его показатель преломления $n = 1,5$, напряженность постоянного магнитного поля $H_0 \geq 22$ кГс, то коэффициент усиления (309) равен $\Gamma = 0,1$ см⁻¹ на длине волны $\lambda = 5$ мкм.

Улучшение качества пучка на порядок ($\delta = \Delta/\mathcal{E} = 10^{-2}$) позволяет получить $\Gamma = 0,1$ см⁻¹ на длине волны $\lambda = 5$ мкм. При этом напряженность постоянного магнитного поля $H_0 \geq 220$ кГс. (Предполагается, что отношение a/λ и показатель преломления n одни и те же в обоих случаях.)

Рассмотрим теперь усиление электромагнитного излучения в цилиндрическом полом волноводе, изготовленном из кварца. Предположим, что длина волны усиливаемого излучения $\lambda = 4$ мм. Диэлектрическая проницаемость кварца в миллиметровой области длин волн $\varepsilon = 3,8$. Выберем внутренний и внешний радиусы волновода равными 5 и 10 мм. Пусть средняя энергия пучка электронов $\mathcal{E}_0 = 150$ кэВ; его плотность

$\rho_0 = 0,5 \cdot 10^9$ см⁻³, а угловой и энергетический разбросы равны $\delta = 10^{-2}$ и $\Delta/\mathcal{E} = 0,5 \cdot 10^{-2}$. Если напряженность постоянного магнитного поля $H_0 = 4$ кГс, то коэффициент усиления (320) равен $\Gamma = 0,1$ см⁻¹.

Экспоненциальный рост мощности излучения в черенковском лазере получен на основе линейного по полю приближения. Очевидно, что этот результат справедлив лишь в области, где можно пренебречь нелинейными эффектами. В настоящем обзоре мы не рассматривали эти вопросы. Поэтому отметим лишь, что границу области линейной теории можно оценить, если учесть в токе пучка электронов кубическую по полю добавку и потребовать ее малость по сравнению с линейной. Для пучков электронов с умеренными энергиями ($\mathcal{E} \sim mc^2$) это условие приводит к неравенству $\xi < (\Delta/\mathcal{E})^2$ (где безразмерный параметр $\xi = |e|E_0/mc\omega$). Отсюда получаем, что для выбранных выше параметров цилиндрического волноводного лазера нелинейные эффекты начинают играть роль при мощностях около 1 кВт.

4. Заключение

В обзоре детально исследовано взаимодействие электронов с монохроматической электромагнитной волной в неограниченной диэлектрической среде и над поверхностью диэлектрического волновода. Проанализирована динамика частиц, а также возможности модуляции и поляризации пучка электронов лазерным излучением. Рассмотрены возможности создания черенковского лазера и черенковского клистрона. Исследования выполнены в линейном по полю приближении на основе классического и квантового подходов. Последний оказался особенно плодотворен как при анализе механизмов, лежащих в основе всех перечисленных эффектов, так и при поиске возможностей влияния на их ход. Установлено, что широкие возможности воздействия на ВЧЭ связаны с постоянным магнитным полем.

Полная теория ВЧЭ, конечно, пока далека от завершения. Перечислим некоторые вопросы, в которых в настоящее время уже появилась ясность, либо они находятся в стадии разработки. В области теории — это анализ эффекта квантовой модуляции в случае, когда отдельные частицы описываются волновыми пакетами [9]. Совместно с А.М. Акоюном завершена работа по теории усиления электромагнитного импульса в черенковском волноводном лазере. В стадии завершения находится нелинейная теория ВЧЭ. Отметим, что ряд результатов в этой области получен в [84].

Имеется целый ряд вопросов, связанных с экспериментальной реализацией ВЧЭ. Прежде всего — это негативная роль эффекта многократного рассеяния пучка электронов в среде. Эту трудность можно обойти в случае ВПЧЭ. Здесь, однако, мы сталкиваемся с другой проблемой — осаждением электронов на поверхность волновода. Статический заряд искажает траектории частиц, нарушая работу лазера, а пробой разрушает стенки волновода. В связи с этим нами совместно с Р.А. Акоповым и Э.М. Лазиевым развита теория черенковского волнового лазера с проводящими поверхностями. Пока не исследован вопрос оптимизации формы волновода. Очень важное применение может найти ВЧЭ с точки зрения ускорения частиц.

И, наконец, в завершение обзора отметим, что теоретические и экспериментальные исследования ВЧЭ

носят основополагающий характер, так как к нему, в конечном счете, сводятся вынужденный переходной, дифракционный и комптоновский эффекты.

Список литературы

1. Варфоломеев А А *Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития*: Обзор (М.: ИАЭ, 1980)
2. Федоров М В *УФН* **35** 213 (1981)
3. Карбушев Н И, Рухадзе А А, Федотов А В и др., Препринт ФИАН СССР, № 84 (М., 1982)
4. Диденко А Н, Кожевников А В *Изв. вузов. Сер. Физ.* **26** (3) 12 (1983)
5. Варфоломеев А А *Экспериментальные исследования ЛСЭ*: Обзор (М.: ИАЭ, 1987)
6. Buzzarri U, Ciocci F, Dattoli C et al. *Nuovo Cimento* **10** (5) 1 (1987)
7. *Генераторы когерентного излучения на свободных электронах*: Сб. статей, пер. с англ. под ред. А.А. Рухадзе (М.: Мир, 1983)
8. Маршалл Т *Лазеры на свободных электронах* (М.: Мир, 1987)
9. *Вопросы атомной науки и техники. Серия ядерно-физ. исследов.*: Науч.-тех. сб., Вып. 6 (14), 7 (15) (Ереван, 1990)
10. Амагуни А Ц, Лазиев Э М, Нагорский Г А и др. *Развитие новых методов ускорения заряженных частиц в ЕрФИ*: Обзор (Ереван: ЦНИИАтоминформ, 1989)
11. Черенков П А *ДАН СССР* **2** 451 (1934)
12. Вавилов С И *ДАН СССР* **2** 457 (1934)
13. Тамм И Е, Франк И М *ДАН СССР* **14** 107 (1937)
14. Болотовский Б М *УФН* **62** 201; **75** 295 (1957)
15. Джелли Дж. *Черенковское излучение и его применение* (М.: ИЛ, 1960)
16. Оганесян С Г, Саргсян Н А *Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.* **25** 201 (1990)
17. Оганесян С Г, Саргсян Н А *Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.* **23** 112 (1988)
18. Оганесян С Г, Саргсян Н А, Абаджян С В *Поляризация электронных пучков лазерным излучением в среде* (Деп. АрмНИИНТИ 10-Ар-87, 1987)
19. Oganessian S G, Abadjan S V *Opt. Commun.* **73** 380 (1989)
20. Оганесян С Г, Саргсян Н А *ЖТФ* **59** 138 (1989)
21. Арутюнян В М, Оганесян С Г *Письма в ЖТФ* **7** 539 (1981)
22. Оганесян С Г, Абаджян С В *Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.* **22** 133 (1987)
23. Oganessian S G, Sargsyan N H *Phys. Lett. A* **140** 249 (1989)
24. Оганесян С Г, Саргсян Н А *ЖТФ* **61** 205 (1991)
25. Арутюнян В М, Оганесян С Г *Тез. докл. XII Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике, Ч.1* (М.: 1985) с. 351
26. Череев П А, Тамм И Е, Франк И М *Нобелевские лекции* (М.: Физматгиз, 1960)
27. Франк И М *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* **6** (1–2) 3 (1937)
28. Тер-Микаэлян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван, 1969)
29. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984)
30. Арутюнян В М, Аветисян Г К *Квант. электрон.* **7** 54 (1972)
31. Pistrup M A, Rothbard G B, Fleming R H, Pantell R H *J. Appl. Phys.* **46** 132 (1975)
32. Edinghoff J A, Kimura W D, Pantell R H et al. *IEEE J. Quantum Electron.* **17** 1507 (1981)
33. Edinghoff J A, Kimura W D, Pantell R H et al. *Phys. Rev. A* **23** 1848 (1981)
34. Kimura W D, Wang D Y, Pistrup M A et al. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-18** 239 (1982)
35. Kimura W D, Wang D W, Pistrup M A et al. *Appl. Phys. Lett.* **40** 102 (1982)
36. Kimura W D *J. Appl. Phys.* **53** 5433 (1982)
37. Mussakhanyan V V *Phys. Lett. A* **70** 313 (1979)
38. Бабаханян Э А, Мусаханян В В *Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.* **16** 186 (1981)
39. Гайдук В И, Палатов К И, Петров Д М *Физические основы электроники сверхвысоких частот* (М.: Сов. радио, 1971)
40. Schwarz H, Hora H *Appl. Phys. Lett.* **15** 349 (1969)
41. Варшалович Д А, Дьяков М И *ЖЭТФ* **60** 90 (1971)
42. Hora H, Handel P H *Adv. Electron. Electron Phys.* **69** 55 (1987)
43. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Релятивистская квантовая теория, Ч. I* (М.: Наука, 1968)
44. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974)
45. Винокуров Н А, Скринский А Н, Препринт ИЯФ 77-59 (Новосибирск, 1977)
46. Варфоломеев А А *ЖЭТФ* **85** 41 (1983)
47. Wang D Y, Fauchet A.-M., Pistrup M A, Pantell R H *IEEE J. Quantum Electron.* **19** 389 (1983)
48. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
49. Александров А Ф, Богданкевич Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1988)
50. Walsh J E *Adv. Electron. Electron Phys.* **58** 271 (1982)
51. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
52. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 589 (1940)
53. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* (М.: Наука, 1987)
54. Соколов А А, Лоскутов Ю М *ЖЭТФ* **32** 630 (1957)
55. Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971)
56. Гапонов А В, Петелин М И, Юлпатов В К *Изв. вузов. Сер. Радиофиз.* **10** 1414 (1967)
57. Hirschfield J L, Bernstein J B, Wachtel J M *IEEE J. Quantum Electron.* **1** 237 (1965)
58. Петелин М И *Изв. вузов. Сер. Радиофиз.* **17** 902 (1974)
59. Аветисян Г К, Ацагорян К З *ЖТФ* **54** 2347 (1984)
60. Оганесян С Г *Квант. электрон.* **12** 1058 (1985)
61. Оганесян С Г, Саргсян Н А *Квант. электрон.* **16** 2183 (1989)
62. Oganessian S G, Abadjan S V *Opt. Commun.* **75** 197 (1990)
63. Оганесян С Г, Абаджян С В *ЖТФ* **60** 187 (1990)
64. Оганесян С Г, Саргсян Н А *Опт. Спектроскоп.* **69** 1157 (1990)
65. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Сов. радио, 1957)
66. Walsh J E, Murphy J B *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-18** 1259 (1982)
67. Garate E P, Shaughnessy C H, Walsh J E *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-23** 1627 (1987)
68. Walsh J E, Marshall T C, Schlesinger S P *Phys. Fluids* **20** 709 (1977)
69. Walsh J E, Marshall T C, Mross M R, Schlesinger S P *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **25** 561 (1977)
70. Garate E P, Walsh J E *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-13** (6) 524 (1985)
71. Van Laven S, Branscum J, Colub J et al. *Appl. Phys. Lett.* **41** 408 (1982)
72. Garate E, Cook R, Heim P et al. *J. Appl. Phys.* **58** 627 (1985)
73. Garate E P, Walsh J., Shaughnessy C et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **259** (1–2) 125 (1987)
74. Саакян Г С *ДАН АрмССР* **28** 121 (1959)
75. Давыдовский В Я, Якушев Е М *ЖЭТФ* **52** 1068 (1967)
76. Бонч-Осмоловский А Г *ЖТФ* **35** 1757 (1965)
77. Нагорский Г А, Орлов Ю Ф *ЖЭТФ* **64** 761 (1973)
78. Бабаханян Э А, Мусаханян В В, Препринт ЕФИ-549 (36)-82 (Ереван, 1982)
79. Бабаханян Э А, Мусаханян В В *Вопросы атомной науки и техники. Сер. ядерно-физ. исслед.*: Научно-тех. сб., Вып. 6 (14) (Ереван, 1990) с. 35
80. Fontana J R, Pantell R H *J. Appl. Phys.* **54** 4285 (1983)
81. Zhuang Jie Jia *Acta Phys. Sin.* **33** 1255 (1984)
82. Harutunian V M, Avetissian H K *Phys. Lett.* **44** 281 (1973)
83. Оганесян С Г, Аветисян Г К *Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.* **8** 395 (1973)
84. Арутюнян В М, Аветисян Г К *ЖЭТФ* **62** 1639 (1972)
85. Мусаханян В В, Никишов А И *ЖЭТФ* **66** 1258 (1974)
86. Ивантер И Г, Ломоносов В В *ЖЭТФ* **80** 879 (1981)
87. Gover A, Livni Z *Opt. Commun.* **26** 375 (1978)
88. Becker W, Mc Iver J C *Phys. Rev. A* **25** 956 (1982)
89. Pistrup M A *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-19** 1827 (1983)
90. Soln J J. *Appl. Phys.* **54** 2036 (1983)

91. Саргсян Н А *Письма в ЖТФ* **16** 59 (1990)
92. Walsh J, Jonson B, Dattoli G, Renieri A *Phys. Rev. Lett.* **53** 779 (1984)
93. Johnson B, Walsh J *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **237** 239 (1985)
94. Walsh J E, Johnson B, Shaughnessy C et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **250** 308 (1986)
95. Johnson B, Walsh J E *Phys. Rev. A* **33** 3199 (1986)
96. Ciocci F, Dattoli G, De Angellis A. et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **259** 128 (1987)
97. Dattoli G, Doria A, Gallerano G P et al. *Nuovo Cimento B* **103** (3) 281 (1989)

THE STIMULATED CHERENKOV EFFECT

V.M. Arutunyan, S.G. Oganessian

R&D Comp. "Lazerain Tekhnika", 375090, Yerevan, Shoproon St., 21

Tel. 7(8852) 65-0552, 61-5398.

Fax 7(8852) 15-1057

E-mail: bogl@adonis.iasnet.com

The interaction between free electrons and a laser field in a limitless dielectric medium and above the surface of a dielectric waveguide is discussed. The investigation is based both on classical and on quantum approaches. The possibilities of electron-beam modulation and polarisation are also discussed. The theories of the Cherenkov laser and the Cherenkov klystron are developed.

Bibliography — 97 references

Received 4 October 1993, revised 6 August 1994