

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ**СТАНДАРТНЫЕ КВАНТОВЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ ПРЕОДОЛЕНИЯ**

Ю.И. Воронцов

Так называемые стандартные квантовые пределы (СКП) погрешностей измерения координаты, импульса, амплитуды колебаний, энергии, силы и др. обусловлены обратным действием прибора на систему в случае, если прибор реагирует на мгновенное значение координаты. Эти СКП не являются фундаментальными и могут быть преодолены различными путями. Например, при измерении координаты СКП можно преодолеть с помощью подходящей корреляции между сопряженными наблюдаемыми прибора. Рассматриваются условия квантового невозмущающего (неразрушающего) измерения и квазивозмущающего измерения энергии электромагнитных волн. Дан обзор возможных способов таких измерений. Анализируются условия преодоления СКП энергии волн с помощью оптического эффекта Керра. Приведен квантовый предел погрешности такого измерения. Рассматривается влияние диссипации, дисперсии и генерации комбинационных волн. Анализируются результаты известных экспериментов. Рассматривается зависимость квантового предела ошибки обнаружения внешнего воздействия на систему от ее начального состояния. Обсуждается соотношение между погрешностью измерения наблюдаемой A и возмущением наблюдаемой B в случае $[A, B] = \text{оператор}$.

PACS numbers: 03.65.Bz

Содержание**1. Введение (89).**

1.1. Стандартные квантовые пределы (СКП) погрешностей измерения. 1.2. Общая схема косвенных измерений. 1.3. Эволюция состояния системы в процессе измерения.

2. СКП погрешностей измерения координаты и методы их преодоления (91).

2.1. Цель измерения и начальное состояние прибора. 2.2. Неопределенность координаты после измерения. 2.3. Погрешности непрерывного измерения координаты.

3. Квантовые невозмущающие (неразрушающие) измерения (КНИ) (93).

3.1. Эволюция КНИ наблюдаемой в процессе измерения. 3.2. Условия реализации КНИ измерения. 3.3. Невозмущающее измерение энергии гармонического осциллятора. 3.4. Невозмущающее измерение энергии электромагнитных волн.

4. Квазивозмущающие измерения (95).

4.1. Принципы квазивозмущающих измерений. 4.2. Квазивозмущающее измерение энергии волн с помощью керровской нелинейности. 4.3. Влияние самовоздействия пробной волны на погрешность измерения энергии сигнальной волны.

5. Результаты экспериментов по КНИ энергии оптических волн (98).

5.1. Измерение энергии бегущих волн. 5.2. Пути увеличения эффективной нелинейности. 5.3. Измерение путем взаимодействия волн в резонаторе. 5.4. Другие способы КНИ энергии волн.

6. Квантовый предел обнаружения воздействия на систему (100).**7. Соотношение погрешность измерения – возмущение (102).****8. Заключение (102).**

Список литературы (103).

1. Введение**1.1. Стандартные квантовые пределы (СКП) погрешностей измерения**

Квантовые пределы погрешностей измерения физических величин интересовали теоретиков еще в то время, когда экспериментаторов они не касались вовсе [1, 2]. Решение этой проблемы имело не столько практическое, сколько философское значение. Если вдруг окажется, что какая-либо физическая величина в принципе не может быть измерена точно, то какой физический смысл ее точных значений в теории? Если погрешность измерения энергии обратно пропорциональна длительности измерения, как это следует из соотношения Гейзенберга—Бора, то закон сохранения энергии не может быть проверен точно за конечное время и, следовательно, возникает повод сомневаться в его фундаментальности. Появление лазеров и развитие оптических систем передачи информации стимулировали дальнейшее развитие квантовой теории измерений, теорий оценивания и проверки гипотез [3–6]. Особый толчок развитию новых принципов и методов квантовых измерений дали поиски способов обнаружения гравитационных волн от внезем-

Ю.И.Воронцов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, 117234 Москва, Ленинские горы

Тел. (095) 939-39-03

E-mail: yury@mol.phys.msu.ru

Статья поступила 23 сентября 1993 г.

ных источников. Дело в том, что по самым оптимистическим астрофизическим прогнозам относительное изменение размеров тел на Земле под действием гравитационной волны не больше, чем 10^{-19} — 10^{-21} . Гравитационные твердотельные антенны метровых размеров были рассчитаны на частоту волны в несколько килогерц. При частоте $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ и массе $m = 10^3 \text{ кг}$ неопределенность амплитуды собственных колебаний антенны в когерентном состоянии равна $\Delta A = (\hbar / 2m\omega)^{1/2} \cong 2,3 \cdot 10^{-19} \text{ см}$, т.е. порядка или больше ожидаемого сигнала.

Анализ пределов чувствительности гравитационных приемников при традиционных методах наблюдения, проведенный В.Б. Брагинским еще в 1967 г., показал предел чувствительности к силовому воздействию на гармонический осциллятор [7—9]

$$F_0 \tilde{\tau} \geq (2\hbar m \omega)^{1/2} \tag{1}$$

($F_0, \tilde{\tau}$ — амплитуда и длительность действия силы на осциллятор с частотой ω , массой m). Этот предел обусловлен тем, что при непрерывном измерении координаты амплитуда гармонического осциллятора может быть оценена не точнее, чем ее неопределенность в когерентном состоянии.

Подобные исследования по отношению к свободному телу показали, что неопределенность его координаты через время t после ее измерения удовлетворяет неравенству

$$\Delta x(t) \geq (\hbar t / m)^{1/2}, \tag{2}$$

а с ним связан предел чувствительности к импульсу силы

$$F_0 \tilde{\tau} \geq (\hbar m / \tilde{\tau})^{1/2}. \tag{3}$$

Соотношения (1) — (3) стали называть стандартными квантовыми пределами (СКП) погрешностей измерения соответствующих физических величин. Так же называют похожее на (2) соотношение, определяющее предел погрешности оценивания мгновенного значения координаты свободной частицы при непрерывном измерении координаты в течение времени τ [10 — 12].

К числу СКП относят также пределы погрешностей оценивания амплитуды и энергии гармонического осциллятора, равные

$$\Delta \tilde{A} \geq (\hbar / 2m\omega)^{1/2}, \quad \Delta \tilde{W} \geq \langle n \rangle^{1/2} \hbar \omega, \tag{4}$$

где $\langle n \rangle \gg 1$ — среднее число квантов энергии.

Все СКП, кроме (2), не являются фундаментальными, они есть следствие неоптимальности процедуры измерения, которая предполагалась при их обосновании. Цель данной статьи — показать истоки этих СКП, способы их устранения и рассказать о результатах попыток экспериментального преодоления некоторых из СКП. Начать

необходимо с изложения основных положений квантовой теории измерений.

1.2. Общая схема косвенных измерений

По характеру влияния прибора на эволюцию исследуемой системы выделяют измерения косвенные и прямые. К косвенным относят измерения, после которых сохраняется закон эволюции системы. При этом система взаимодействует с первым звеном прибора в течение конечного времени. Информация о значении наблюдаемой величины (наблюдаемой) остается в этом звене, называемом квантовой считывающей системой (КСС) (или квантовым датчиком) в виде изменения его состояния. Значение интересующей наблюдаемой определяется косвенно через измерение в КСС. Косвенные измерения позволяют получать информацию как об исходном состоянии системы, так и о ее состоянии после измерения. Косвенные измерения представляют особый интерес, поскольку используются во всех экспериментах, в которых применяются так называемые пробные тела.

Измерительные приборы состоят из ряда связанных между собой звеньев. Квантовая теория измерений утверждает, что первые каскады могут быть квантовыми, но последний должен быть классическим. Нет общепринятого определения классического. Математические условия классичности наиболее точно сформулированы Р.Л. Стратоновичем [13]. Принципиальные условия классичности сформулированы в [14]: звено прибора можно рассматривать как классическое, если квантовомеханические неопределенности в последующих звеньях не оказывают существенного влияния на общую погрешность измерения. Первые звенья (КСС), которые ведут себя как квантовомеханические, взаимодействуют с исследуемой системой обратимым образом. Взаимодействие КСС с классической частью прибора необратимо. При этом разрушается корреляция состояний системы и КСС. В классическом звене происходит так называемая деквантизация сигнала, т.е. микроскопические изменения в КСС производят макроскопические изменения в классическом звене прибора. Классическую часть прибора в дальнейшем будем называть регистратором. Общая схема косвенного измерения представлена на рис. 1; здесь \hat{A} — измеряемая наблюдаемая системы, $\hat{Q}(\hat{A})$ — наблюдаемая КСС, изменяющаяся в результате взаимодействия с системой, как функция \hat{A} .

Пример. Схема измерения заряда q на емкости LC-контура с помощью пучка электронов (рис. 2). Здесь LC-контур есть исследуемая система, электронный пучок — КСС, экран — регистратор. Импульс электронов после пролета между пластинами зависит от заряда на пластинах. Измерив координату высвечивания электронов на экране, можно получить оценку \tilde{q} заряда.

КСС взаимодействует с системой и с регистратором последовательно во времени. Важно подчеркнуть, что по

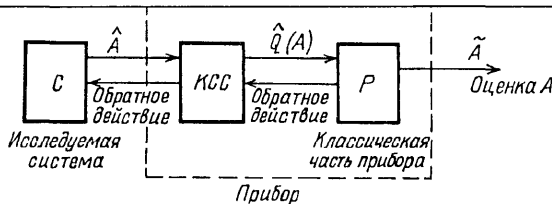


Рис.1

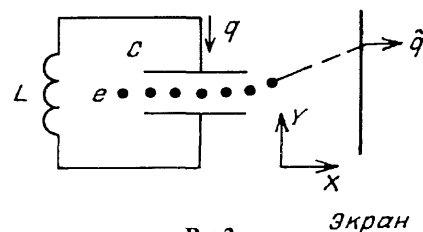


Рис.2

крайней мере одно из звеньев измерительной цепи взаимодействует с другими импульсно.

1.3. Эволюция состояния системы в процессе измерения

Трактовки физиками изменения состояния системы в результате измерения различаются так же, как различаются их взгляды на сущность квантовомеханических законов. Если исходить из того, что физический смысл имеет только то, что может быть проверено экспериментально и что присутствие живого наблюдателя при измерениях не обязательно, этапы изменения состояния можно представить так, как показано на рис. 3. t_1 — момент необратимого взаимодействия КСС с регистратором. В этот момент разрушается корреляция состояния КСС с состоянием системы и последнее становится смесью состояний $\rho_c(\tilde{A}_j)$, где \tilde{A}_j — вероятные значения оценки измеряемой величины [15]. Это означает, что при измерении в ансамбле идентичных систем после t_1 будем иметь ансамбль систем, каждая из которых находится в одном из состояний $\rho_c(\tilde{A}_j)$. Момент t_2 — момент разделения смеси. Имея результаты измерения \tilde{A}_j , эту смесь можно разделить на подансамбли с определенным значением \tilde{A}_j . Тогда система из начального состояния ρ_{0c} перейдет в состояние $\rho_c(\tilde{A}_j)$, т.е. произойдет редукция состояния. В случае точного измерения состоянием $\rho_c(\tilde{A}_j)$ системы будет собственное состояние наблюдаемой A (в момент измерения). В случае измерения в единственной системе такие же статистические закономерности проявляются в результате многократного повторения измерения при возвращении системы каждый раз в ее начальное состояние.

Разделение систем в соответствии с результатами измерения требует некоторых классических действий. Эти действия могут быть выполнены экспериментатором или автоматически.

В смешанном состоянии неопределенность измеряемой наблюдаемой \hat{A} не меньше, чем было бы при свободной эволюции системы. Неопределенности некоммутирующих с \hat{A} наблюдаемых больше, чем при свободной эволюции из-за обратного флуктуационного действия прибора на систему. В качестве меры возмущения прибором некоторой наблюдаемой \hat{B} можно принять разность дисперсий этой наблюдаемой в смешанном и невозмущенном состояниях

$$(\Delta \hat{B})_{\text{pert}}^2 = (\Delta \hat{B})_1^2 - (\Delta \hat{B})_0^2. \tag{5}$$

(Дисперсия наблюдаемой \hat{B} в состоянии $\rho(\tilde{A}_j)$ может быть меньше, чем в начальном состоянии, если в начальном состоянии \hat{B} коррелирует с \hat{A} .) Обычно считается, что неопределенность возмущения наблюдаемой \hat{B} связана с погрешностью измерения наблюдаемой \hat{A} соотношением, тождественным соответствующему соотношению неопределенностей. Однако это не так [10]. Соотношение погрешность измерения — возмущение рассматривается в последней части этой статьи.

2. СКП погрешностей измерения координаты и методы их преодоления

2.1. Цель измерения и начальное состояние прибора

Целью измерения может быть значение наблюдаемой \hat{A} ,

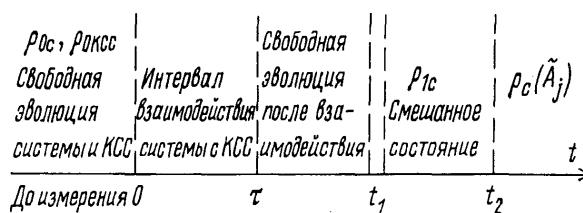


Рис.3

относящееся 1) к невозмущенному состоянию системы; 2) к состоянию, возмущенному в процессе измерения. И в каждом из этих случаев нас может интересовать значение наблюдаемой в момент включения прибора ($t = 0$) или в некоторый момент взаимодействия с прибором, или после измерения. Целью измерения также может быть приготовление нового состояния системы. В каждом случае для получения минимальной погрешности измерения необходимо готовить прибор в особом начальном состоянии. Проиллюстрируем это положение на простейшем примере.

Пример. Измерение координаты свободного тела. Для измерения координаты достаточно, чтобы КСС взаимодействовала с телом в соответствии с гамильтонианом $\hat{H}_i = \alpha_i(t)\hat{x}\hat{Y}$ в течение некоторого времени τ . (Также может быть $\hat{H}_i = \alpha_i(t)f(\hat{x})\hat{Y}$.) Здесь \hat{x} — оператор координаты тела, \hat{Y} — некоторый оператор КСС, $\alpha_i(t)$ — функция связи. Мы примем $\alpha_i(t) = \alpha_0$ для $0 \leq t \leq \tau$ и $\alpha_i = 0$ вне этого интервала времени. КСС может быть представлена свободной частицей с массой M . Полный гамильтониан в простейшем случае представляют в виде [16]

$$\hat{H} = (\hat{p}^2 / 2m) + \alpha_i(t)\hat{x}\hat{Y} + (\hat{P}^2 / 2M),$$

где \hat{P} и \hat{Y} , соответственно, оператор импульса и оператор координаты КСС. Теория допускает существование такого гамильтониана, однако реальный объект, описываемый подобным гамильтонианом, должен содержать кроме двух тел еще нечто, что создает отрицательную жесткость между телами, которая компенсирует положительную, возникающую при упругом взаимодействии тел.

Работая в картине Гейзенберга, получим

$$\begin{aligned} \text{a) } d\hat{x} / dt &= \hat{p} / m, & \text{b) } d\hat{p} / dt &= -\alpha_0 \hat{Y}, \\ \text{c) } d\hat{Y} / dt &= \hat{P} / M, & \text{d) } d\hat{P} / dt &= -\alpha_0 \hat{x}. \end{aligned} \tag{6}$$

В случае достаточно большой массы M оператор \hat{Y} можно считать постоянным (\hat{Y}_0) в течение конечного времени взаимодействия τ . Тогда в интервале $0 < t < \tau$ из (6) получим

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{x}(t) &= \hat{x}_0(t) - (\alpha_0 \hat{Y}_0 t^2 / 2m), \\ \text{b) } \hat{p}(t) &= \hat{p}_0 - \alpha_0 \hat{Y}_0 t, \\ \text{c) } \hat{P}(\tau) &= \hat{P}_0 - \alpha_0 \int_0^\tau \hat{x}(t) dt = \\ &= \hat{P}_0 - \alpha_0 \hat{x}_0(\tau/2)\tau - (\alpha_0^2 \hat{Y}_0 \tau^3 / 6m) = \\ &= \hat{P}_0 - \alpha_0 \hat{x}(\tau/2)\tau - (7\alpha_0^2 \hat{Y}_0 \tau^3 / 24m). \end{aligned} \tag{7}$$

Соотношения (7), c) можно написать в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{a)} \hat{x}_0(\tau/2) &= [(\hat{P}_0 - \hat{P}(\tau))/\alpha_0\tau] - (\alpha_0\hat{Y}_0\tau^2/6m), \\ \text{б)} \hat{x}(\tau/2) &= [(\hat{P}_0 - \hat{P}(\tau))/\alpha_0\tau] - (7\alpha_0\hat{Y}_0\tau^2/24m), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\text{а)} \hat{x}_0(\tau/2) = \hat{x}(0) + (\hat{p}(0)\tau/2m) \quad (9)$$

есть оператор координаты в невозмущенном состоянии в момент $t = \tau/2$,

$$\text{б)} \hat{x}(\tau/2) = \hat{x}(0) + (\hat{p}(0)\tau/2m) - (\alpha_0\hat{Y}_0\tau^2/8m)$$

— в состоянии, возмущенном при взаимодействии с КСС.

Измеряя $P(\tau)$, можно оценить величины $x_0(\tau/2)$ и $x(\tau/2)$. Если \hat{P}_0 не коррелирует с \hat{Y}_0 , дисперсия оценки координаты $x_0(\tau/2)$ будет равна

$$\begin{aligned} (\Delta\tilde{x}_0)^2 &= (1/\alpha_0\tau)^2 [(\Delta\tilde{P})^2 + (\Delta P_0)^2] + \\ &+ (\alpha_0\tau^2/6m)^2 (\Delta Y_0)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $(\Delta\tilde{P})^2$ — дисперсия погрешности измерения импульса $P(\tau)$, $(\Delta P_0)^2$, $(\Delta Y_0)^2$ — дисперсии координаты и импульса КСС в начальном состоянии. Поскольку $(\Delta P_0)^2(\Delta Y_0)^2 \geq \hbar^2/4$, минимизируя правую часть соотношения (10), получим

$$\Delta\tilde{x}_0 \geq (\hbar\tau/3m)^{1/2}. \quad (11)$$

Это один из стандартных квантовых пределов погрешности измерения координаты свободного тела. Причина появления СКП (11) в том, что непосредственно измеряемый импульс $P(\tau)$ содержит составляющую, зависящую от координаты Y_0 . Преодолеть этот СКП можно несколькими путями. В [16] предлагалось исключить влияние Y_0 на $P(\tau)$ с помощью пружины с жесткостью $-\alpha_0^2\tau^2/6m$, соединяемой с КСС на время измерения. Преодолеть этот предел можно и более изящными путями. Например, для оценки величины $x_0(\tau/2)$ следует измерять не $P(\tau)$, а непосредственно комбинацию $P(\tau) + (\alpha_0^2\tau^3 Y_0/6m)$. Такую наблюдаемую можно образовать, например, с помощью поля рассеивающей линзы. Другой путь преодоления СКП (11) — приготовить КСС в таком начальном состоянии, при котором импульс соответствующим образом коррелирует с координатой. Пусть

$$\hat{P}(0) = \hat{P}^0 + (\alpha_0\tau^2\hat{Y}_0/6m), \quad (12)$$

где \hat{P}^0 не коррелирует с \hat{Y}_0 . В этом случае из (7а) получим

$$(\Delta\tilde{x}_0)^2 = [(\Delta\tilde{P})^2 + (\Delta P^0)^2] / (\alpha_0\tau)^2 \rightarrow 0, \quad (13)$$

если $\alpha_0\tau \rightarrow \infty$.

Аналогичная картина будет в случае оценивания $x(\tau/2)$, если

$$\hat{P}(0) = \hat{P}^0 + (7\alpha_0\tau^2\hat{Y}_0/24m).$$

2.2. Неопределенность координаты после измерения

Корреляция координаты и импульса КСС позволяет исключить влияние обратного действия прибора на систему из оценки координаты в тот или другой момент времени. Однако это обратное действие прибора не исключается из самой координаты. Из соотношения (7),

а) следует, что среднеквадратическое (СКВ) возмущение координаты в момент $\tau/2$ равно

$$\tilde{\Delta}x(\tau/2) = \alpha_0\tau^2\Delta Y_0/8m. \quad (14)$$

Возмущение импульса за время измерения равно

$$\tilde{\Delta}p(\tau) = \alpha_0\tau\Delta Y_0. \quad (15)$$

Возмущение импульса рождает возмущение координаты и после взаимодействия ($t > \tau$), а при $t \gg \tau$ это возмущение будет равно

$$\tilde{\Delta}x(t) = \alpha_0\tau t\Delta Y_0/m. \quad (16)$$

Не принимая во внимание начальную неопределенность импульса $p(0)$, получим из (13), (16), что полная дисперсия координаты в момент $t \gg \tau$ будет равна

$$\begin{aligned} (\Delta x(t))^2 &= (\Delta\tilde{x}_0)^2 + (\tilde{\Delta}x(t))^2 \geq \\ &\geq 2\Delta P^0 \cdot \Delta Y_0 t/m \geq \hbar t/m. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, результат повторного измерения координаты свободного тела через время t после первого измерения не может быть предсказан точнее, чем с СКВ погрешностью $(\hbar t/m)^{1/2}$ [9]. Эту величину называют СКП неопределенности координаты тела через время t после ее измерения. Этот предел широко дискутировался физиками в связи с проблемой детектирования гравитационных волн, поскольку он ведет к пределу чувствительности к силе (3) [17—21].

Следует подчеркнуть, что при обосновании соотношения (17) считалось, что информацию о значении координаты в момент t дает только измерение координаты в интервале $0 — \tau$. Теория не запрещает приготовить тело в таком состоянии, что в момент t неопределенность его координаты будет сколь угодно малой. Но такое приготовление не может быть сделано с помощью прибора, который измеряет координату, не создавая нужной корреляции между координатой и импульсом тела после измерения.

В соответствии с соотношением

$$[\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2)] = i\hbar(t_2 - t_1)/m \quad (18)$$

неопределенности координаты свободного тела в моменты $t_1 = 0$ и $t_2 = t$ связаны между собой соотношением

$$\Delta x(0) \cdot \Delta x(t) \geq \hbar t/2m. \quad (19)$$

Следовательно, может быть

$$\Delta x(t) < (\hbar t/m)^{1/2}, \quad (20a)$$

если

$$\Delta x(0) > (\hbar t/4m)^{1/2}. \quad (20б)$$

Однако условие (20б) недостаточно. В общем случае (при $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$)

$$(\Delta x(t))^2 = (\Delta x(0))^2 + (\Delta p(0) \cdot t/m)^2 + \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle t/m. \quad (21)$$

Если последний член в правой части (21) равен нулю, то при любых начальных условиях будет $\Delta x(t) \geq (\hbar t/m)^{1/2}$.

Допустим, что $\hat{p}(0) = \hat{p}^0 - \beta\hat{x}(0)$, где β — число, \hat{p}^0 не коррелирует с $\hat{x}(0)$. Тогда из (21) получим

$$(\Delta x(t))^2 = (\Delta x(0))^2 \left[1 - (\beta t/m) \right]^2 + (\Delta p^0 \cdot t/m)^2 \geq (\hbar t/m) |1 - (\beta t/m)|. \quad (22)$$

Минимальное значение $\Delta x(t)$ достигается при $\Delta x(0) \cdot \Delta p^0 = \hbar/2$ и $\Delta x(0) = (\hbar t/4m) |1 - (\beta t/m)|$.

2.3. Погрешности непрерывного измерения координаты

Выше обсуждался процесс измерения, при котором в качестве КСС использовалась только одна частица. Такие измерения не имеют практического интереса. В реальных измерениях используются потоки частиц или квазичастиц (электронов, фотонов и пр.). В этом случае сила обратного действия на систему прибора, измеряющего координату, может быть представлена в виде суммы

$$F_{ba}(t) = \sum_j F_j(t - t_j), \quad (23)$$

где $F_j(t - t_j)$ — сила обратного действия одной из частиц. Сила $F_j(t - t_j)$ действует в интервале $-\tau_j < t - t_j < 0$, где τ_j — длительность взаимодействия этой частицы с системой. (Теория непрерывных квантовых измерений рассматривается, например, в [10, 12, 22–24].)

Результат приближенного измерения наблюдаемой $\hat{A}(t)$ может быть представлен как результат точного измерения суммы $\hat{A}(t) + \hat{A}_a(t)$, где $\hat{A}_a(t)$ — некоторый оператор прибора. В рассмотренных выше примерах $\hat{A}_a(t)$ был представлен оператором $\hat{P}_0(t)/\alpha_0\tau$.

Для расчета погрешности измерения координаты можно использовать эквивалентную схему, изображенную на рис. 4. В случае стационарных измерений спектральные плотности случайных функций $F_{ba}(t)$ и $x_a(t)$ удовлетворяют условию

$$S_F(\omega)S_x(\omega) - |S_{F_x}(\omega)| \geq (\hbar^2/4) + \hbar\omega |\text{Im} S_{F_x}(\omega)|, \quad (24)$$

где $S_{F_x}(\omega)$ — спектральная плотность перекрестной корреляционной функции $F_{ba}(t)$ и $x_a(t)$, $\text{Im} S_{F_x}(\omega)$ — ее мнимая часть [10, 25]. Простейшая формула $S_F S_x \geq \hbar^2/4$ была получена в 1976 г. Р.П. Гиффардом.

Поскольку выходной сигнал прибора — классический, физическая величина, оцениваемая по результатам непрерывного измерения координаты, может рассчитываться по правилам классической теории оптимального оценивания. Квантовый предел погрешности оценивания (в случае линейных систем) определяется в этом случае с помощью соотношения (24). Подробно эта проблема рассматривается в [10]. Мгновенные значения координаты могут быть оценены точнее СКП, но СКВ погрешность оценивания средней за время наблюдения τ координаты свободной частицы удовлетворяет соотношению

$$\Delta \bar{x}^\tau \geq \left[(S_F S_x)^{1/2} \tau / m \right]^{1/2} \geq (\hbar \tau / 2m)^{1/2}, \quad (25)$$

если $S_{F_x} \equiv 0$, $S_F(\omega) = S_F$, $S_x(\omega) = S_x$.

Погрешность оценивания среднего за время τ импульса свободной частицы при тех же условиях не меньше, чем

$$\Delta \bar{p}^\tau \geq \left[(S_F S_x)^{1/2} m / \tau \right]^2 \geq (\hbar m / 2\tau)^{1/2}. \quad (26)$$

Амплитуда A , реальная (X_1) и мнимая (X_2) части ком-

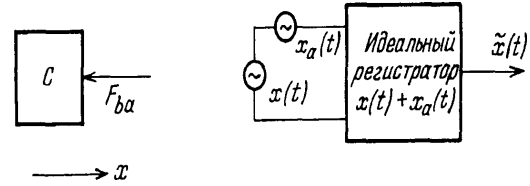


Рис.4

плексной амплитуды гармонического осциллятора могут быть оценены таким путем с погрешностями не меньше, чем

$$\left[(S_F S_x)^{1/2} / m\omega_0 \right]^{1/2} \geq (\hbar / 2m\omega_0)^{1/2}, \quad (27)$$

а оценка энергии соответствует соотношению (4).

Соотношение (24) справедливо в случае идеального прибора, т.е. не влияющего на характер движения системы в среднем. Идеальный прибор не вносит в движение системы диссипацию, жесткость, инерционность. В радиотехнике таким идеальным прибором был бы вольтметр с бесконечно большим входным сопротивлением, или амперметр с нулевым сопротивлением. У прибора с конечной входной проводимостью Y спектральные плотности флуктуаций связаны следующим соотношением [10, 25]

$$S_F(\omega)S_x(\omega) - |S_{F_x}|^2 \geq (\hbar^2/4) + \hbar |\text{Re}(i\omega S_{F_x} Y_{11}^* / Y_{11}) - \omega S_x \text{Re} Y_{11} / |Y_{11}|^2|. \quad (28)$$

Соотношения, учитывающие все четыре Y -параметра реального прибора, приведены в [10, 25].

Пределы погрешностей измерения в распределенных системах исследованы в [26].

СКП (4), (26), (27) можно преодолеть с помощью невозмущающих или квазивозмущающих измерений.

3. Квантовые невозмущающие (неразрушающие) измерения (КНИ)

Квантовым невозмущающим измерением называют такое измерение наблюдаемой \hat{N} , при котором обратное действие прибора на исследуемую систему не влияет на результат первого и последующих измерений этой наблюдаемой. Такие измерения также называют измерениями, свободными от обратного флуктуационного влияния прибора. Толчок к потоку работ на эту тему дала статья [9]. Основы теории и методов КНИ измерений описаны, например, в [10–12, 14, 23, 24, 27, 28].

Наблюдаемую, которая, в принципе, может быть измерена без возмущения, называют невозмущаемой наблюдаемой (КНИ наблюдаемой). КНИ наблюдаемой \hat{N} может быть только такая, которая в гейзенберговской картине при свободной эволюции системы удовлетворяет следующему условию коммутации

$$\left[\hat{N}(t_j), \hat{N}(t_i) \right] = 0. \quad (29)$$

Этому условию удовлетворяют, в частности, все интегралы движения. В случае свободной частицы КНИ наблюдаемыми будут импульс и энергия. В случае

гармонического осциллятора такими наблюдаемыми являются энергия, реальная (X_1) и мнимая части (X_2) комплексной амплитуды

$$a) \hat{X}_1 = \hat{x}(t) \cos \omega_0 t - \left[(\hat{p}(t)/m\omega_0) \sin \omega_0 t \right], \quad (30)$$

$$b) \hat{X}_2 = \hat{x}(t) \sin \omega_0 t + \left[(\hat{p}(t)/m\omega_0) \cos \omega_0 t \right]. \quad (31)$$

КНИ наблюдаемыми могут быть не только интегралы движения [10, 11].

3.1. Эволюция КНИ наблюдаемой в процессе измерения

Есть два типа КНИ наблюдаемых. Одни из них могут быть свободными от обратного флуктуационного влияния даже во время взаимодействия системы с КСС. Другие возмущаются непредсказуемо во время взаимодействия с прибором, но возвращаются к своему невозмущенному значению в момент выключения связи с прибором. В последнем случае во время измерения сохраняется некоторая наблюдаемая $\hat{N}_1(t)$, которая равна наблюдаемой $\hat{N}(t)$ при свободной эволюции системы. Такие неканонические наблюдаемые, как скорость, кинетическая энергия и другие функции обобщенной скорости должны неизбежно изменяться случайным образом во время их измерения [10, 16]. Если бы это было не так, то можно было бы приготовить такое состояние системы, в котором нарушалось бы соотношение неопределенностей. Действительно, при измерении импульса должно происходить возмущение координаты. Случайное возмущение координаты может быть следствием движения с неопределенной скоростью в течение определенного времени, или движения с апостериори известной скоростью, но в течение неопределенного времени. Однако, если скорость могла бы непрерывно регистрироваться, ее значение в каждый момент времени было бы известным.

Пример. Рассмотрим измерение, которому соответствует следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = (\hat{p}^2/2m) + \alpha_i \hat{p} \hat{Y} + (\hat{P}^2/2M). \quad (32)$$

В этом случае будет

$$d\hat{p}/dt = 0, \quad (33)$$

т.е. обобщенный импульс p сохраняется при таком взаимодействии свободного тела с прибором. Но скорость

$$d\hat{x}/dt = (\hat{p}/m) + \alpha_i \hat{Y}(t) \quad (34)$$

в это же время возмущается. Тем не менее она возвра-

щается к исходному своему значению в момент выключения взаимодействия ($\alpha_i = 0$).

С другой стороны, то же самое движение системы и КСС может быть описано гамильтонианом

$$\hat{H} = (\hat{p}_0^2/2m) - \hat{x} \hat{Y} (d\alpha_i/dt) + (\alpha_i^2 \hat{x}^2/2M) - (\alpha_i \hat{x} \hat{P}_1/M) + (\hat{P}_1^2/2M). \quad (35)$$

(Для этого достаточно в соответствующий лагранжиан добавить полную производную от функции $\alpha_i x \dot{Y} m$.) В этом случае получим

$$d\hat{x}/dt = \hat{p}_0/m, \quad d\hat{p}_0/dt = m(\dot{\alpha}_i \hat{Y} + \alpha_i \dot{\hat{Y}}), \text{ т.е.}$$

$$(d/dt)(m\hat{x} - m\alpha_i \hat{Y}) = 0. \quad (36)$$

Теперь обобщенный импульс p_0 равен кинетическому и поэтому не сохраняется во время взаимодействия. Но та же самая комбинация $(m\hat{x} - m\alpha_i \hat{Y})$, что и в первом случае, сохраняется.

3.2. Условия реализации КНИ измерения

Общее условие КНИ измерения может быть сформулировано следующим образом. Для КНИ измерения КНИ наблюдаемой \hat{N} необходимо и достаточно, чтобы после взаимодействия с системой КСС неслась информация о значении N , но не неслась информация о значении некоммутирующих с \hat{N} наблюдаемых.

Это условие удовлетворяется, в частности, при следующем взаимодействии

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \alpha_i \hat{N} \hat{Y} + \hat{H}_a; \quad (37)$$

здесь \hat{H}_s , \hat{H}_a — гамильтонианы системы и прибора соответственно.

Во многих статьях это условие считается необходимым. Но строго говоря, оно достаточно, но не необходимо. Например, чтобы измерить X_2 , можно использовать взаимодействие, которому соответствует $\hat{H}_i = \alpha_i \hat{x}(t) \hat{Y}$, если длительность взаимодействия равна половине периода колебаний осциллятора [10, 29]. В этом случае полное изменение импульса КСС будет пропорционально

$$\int_0^{\pi/\omega} x(t) dt = \int_0^{\pi/\omega} (X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t) dt = X_2/\omega, \quad (38)$$

т.е. КСС в результате взаимодействия получает информацию только о X_2 .

3.3. Невозмущающее измерение энергии гармонического осциллятора

Рассмотрим схему на рис. 5. Здесь LC-контур представляет исследуемую систему. Роль КСС выполняет механический осциллятор (M, k), связанный с подвижными частями индуктивности и емкости. Конструктивно можно сделать так, что будет

$$1/L(Y) = (1 + \alpha_i Y)/L_0, \quad 1/C(Y) = (1 + \alpha_i Y)/C_0, \quad (39)$$

где L_0, C_0 — невозмущенные значения параметров контура. Этой схеме соответствует гамильтониан

$$\hat{H} = \left[(\hat{p}^2/2L_0) + (\hat{q}^2/2C_0) \right] (1 + \alpha_i \hat{Y}) + \hat{H}_a =$$

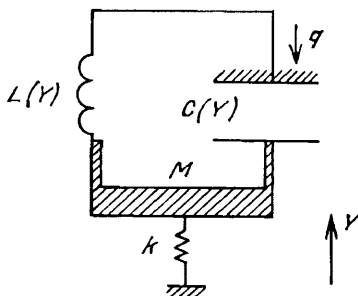


Рис.5

$$= (\hat{n} + 1/2)\hbar\omega_0(1 + \alpha_i \hat{Y}) + \hat{H}_a, \quad (40)$$

где \hat{n} — оператор числа квантов, $\omega_0 = (1/L_0 C_0)^{1/2}$. В этом случае будет

$$d\hat{n}/dt = 0,$$

т.е. число квантов сохраняется даже во время движения КСС. Однако частота зависит от оператора координаты КСС, т.е. является не числом, а оператором:

$$\hat{\omega} = \omega_0(1 + \alpha_i \hat{Y}). \quad (41)$$

Следовательно, во время взаимодействия с КСС остается неизменным не энергия осциллятора, а число квантов n .

Также имеем

$$i\hbar d\hat{p}_y/dt = [\hat{p}_y, \hat{H}_a] + \hat{H}_0 [\hat{p}_y, \alpha_i \hat{Y}], \quad (42)$$

где $\hat{H}_0 = (\hat{n} + 1/2)\hbar\omega_0$ есть оператор энергии невозмущенного осциллятора. Измеряя p_y , можно оценить величину H_0 и n . После измерения подвижные части контура могут быть зафиксированы в положении L_0, C_0 . При этом частота приобретет известное начальное значение ω_0 и, соответственно, восстановится начальное значение энергии контура. Анализ этой схемы в [30] показал, что возможность измерения энергии консервативной сосредоточенной цепи с СКВ погрешностью $\Delta H_0 < \hbar/\tau$ (τ — длительность измерения) не противоречит основам квантовой механики.

Неопределенность частоты ω во время измерения вызывает увеличение неопределенности фазы на величину

$$\Delta\varphi = \Delta \int_0^\tau \omega(t) dt \geq (1/2)\Delta\tilde{n}. \quad (43)$$

Также имеет место следующее соотношение

$$\Delta\tilde{H} \cdot \Delta\tilde{H}/H_0 \geq \hbar/2\tau, \quad (44)$$

где $\Delta\tilde{H} = \Delta\tilde{n} \cdot \hbar\omega_0$ есть СКВ погрешность измерения энергии, $H_0 = (\langle n \rangle + 1/2)\hbar\omega_0$, $\Delta\tilde{H}$ — неопределенность возмущения энергии во время измерения.

Соотношение (44) может быть написано в следующей форме

$$\Delta\tilde{H} \geq (\hbar/2\tau)(\omega_0/\Delta\tilde{\omega}), \quad (45)$$

где $\Delta\tilde{\omega} = \Delta\varphi/\tau$ — неопределенность возмущения средней за время τ частоты. Следовательно, необходимым условием измерения энергии осциллятора с погрешностью $\Delta\tilde{H} < \hbar/\tau$ является такое начальное состояние КСС, при котором относительная неопределенность частоты исследуемого осциллятора будет больше, чем 0,5.

В процессе измерения таким же способом энергии неконсервативного осциллятора будет происходить изменение времени релаксации. В результате оказывается невозможным измерение энергии с погрешностью меньше, чем \hbar/τ_0^* , где τ_0^* — время релаксации свободного осциллятора [10, 31].

Общая теория непрерывного КНИ измерения числа фотонов предлагается в [23, 32]. Проблема изменения эволюции системы при непрерывном измерении ее энергии ("квантовый эффект Зенона") обсуждается, например, в [10, 12, 23, 226]. Последние по времени обсуждения соотношений энергия — время были в [23, 33, 34].

3.4 Невозмущающее измерение энергии электромагнитных волн.

Энергия электромагнитной волны в объеме V в недиспергирующей среде равна

$$H = \int (1/8\pi)(\epsilon E^2 + \mu H^2) dV = \int (\epsilon\mu/8\pi) [(E^2/\rho) + \rho H^2] dV, \quad (46)$$

где $\rho = (\mu/\epsilon)^{1/2}$. Из соотношения (46) следует, что для невозмущающего измерения энергии необходимо такое взаимодействие КСС с электромагнитным полем, при котором происходит одновременно изменение диэлектрической (ϵ) и магнитной (μ) проницаемостей таким образом, что величина ρ остается неизменной. В этом случае скорость волны ($v = 1/(\epsilon\mu)^{1/2}$) и ее частота ($\omega = 2\pi v/\lambda$) изменялись бы во время измерения, но число квантов (n) и длина волны (λ) оставались бы неизменными. Способ реализации такой схемы измерения пока еще никем не предложен. Предложены методы измерения, при которых, хотя и не выполняются строго условия невозмущающего измерения энергии, но, тем не менее, предел их погрешности может быть много ниже СКП. Такие методы обычно также называют невозмущающими, правильнее же их назвать квази-невозмущающими.

Прежде чем продолжить, обратим внимание на важный результат анализа квантового предела погрешности измерения энергии электромагнитной волны. Неопределенность изменения частоты волны при невозмущающем измерении, обусловленная случайным изменением скорости, равна

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta v/\lambda < 2\pi c_0/2\lambda = \omega_0/2, \quad (47)$$

т.е. $\Delta\omega/\omega_0 < 1/2$. Следовательно, погрешность измерения энергии электромагнитной волны не может быть меньше, чем \hbar/τ [10].

К такому же выводу можно прийти другим путем. В процессе измерения импульса должно происходить возмущение координаты такое, что $\Delta x \geq \hbar/2\Delta p$. Поскольку в нашем случае $\Delta x = \omega\Delta v < \tau c_0/2$, а энергия волны $H = p c_0$, то

$$\Delta\tilde{H} \geq \hbar/\tau. \quad (48)$$

Этот результат противоречит тому, что был получен при анализе измерения в сосредоточенной цепи. Различие результатов связано с различием связей между импульсом и энергией в этих схемах.

4. Квази-невозмущающие измерения

4.1. Принципы квази-невозмущающих измерений

Нарушение условий невозмущающего измерения приводит к тому, что в прибор будет поступать информация не только об интересующей наблюдаемой \hat{N}_1 , но и некоммутирующей с ней наблюдаемой \hat{N}_2 . Это приведет к принципиальному ограничению погрешностей оценивания обеих наблюдаемых. Предел погрешности оценивания N_1 будет зависеть от того, как точно по отклику КСС может быть оценена N_2 . В случае, если $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = 2i\hbar\gamma$, где γ — реальное число, эти СКВ погрешности оценивания связаны между собой соотношениями [10, 14]

$$\Delta\tilde{N}_1 \geq (\gamma\beta\hbar)^{1/2}, \quad \Delta\tilde{N}_2 \geq (\gamma\hbar/\beta)^{1/2}, \quad (49)$$

где $\beta = \Delta\tilde{N}_1/\Delta\tilde{N}_2$. Изменить величину β можно, например, с помощью частотной избирательности КСС.

Пример. Если в схеме рис. 5 исключить зависимость от Y индуктивности [10, 12, 35], то вместо гамильтониана (42) получим

$$\hat{H} = (\hat{p}^2/2L_0) + [\hat{q}^2(1 + \alpha_1\hat{Y})/2C_0] + \hat{H}_a, \quad (50)$$

при котором

$$d\hat{n}/dt \neq 0,$$

а сила, действующая на КСС (тело M на пружине) $F_b = \alpha_1 q^2/2C_0$, будет иметь не только постоянную составляющую, как в схеме на рис. 5, но и переменную, несущую информацию о фазе электрических колебаний. Наблюдая за движением КСС, можно одновременно получить информацию как об энергии, так и о фазе колебаний. Но информацию об энергии можно получить из постоянной составляющей смещения тела M , а информацию о фазе только из высокочастотной составляющей с частотой 2ω . Если частота собственных колебаний тела M $\Omega \ll 2\omega$, то амплитуда его высокочастотных колебаний будет в $(\Omega/2\omega)^2$ раз меньше постоянной составляющей смещения. Соответственно изменится и величина β . Предел погрешности измерения числа квантов будет равен [10, 14]

$$\Delta\tilde{n} = \langle n \rangle^{1/2} \Omega/2\omega. \quad (51)$$

Чтобы в дальнейшем было яснее, какие из предлагаемых схем относятся к квазииневозмущающим, хотя авторы их называют невозмущающими, обратим внимание на некоторые специфические свойства схем невозмущающего измерения энергии. В схеме рис. 5 при смещении тела M под действием поля электрического контура изменяется собственная частота контура, но остается неизменным его характеристическое сопротивление $\rho_c = (L/C)^{1/2}$. Причем величина ω не зависит от фазы электрических колебаний, т.е. колебания в контуре остаются линейными. Собственное движение КСС также не влияет на величину ρ_c .

4.2. Квазииневозмущающее измерение энергии волн с помощью керровской нелинейности

От электромеханической схемы квазииневозмущающего измерения энергии контура легко перекинуть мостик к схеме полностью электрической. Механический осциллятор в описанной схеме играет роль звена, в котором за счет его инерционности происходит подавление информации о фазе электрических колебаний. Но такую же фильтрацию можно осуществить, используя низкочастотный колебательный контур, нелинейная емкость которого, зависящая от квадрата напряженности электрического поля, входит одновременно и в высокочастотный контур [36а]. Измеряя собственную частоту низкочастотного контура, можно, в принципе, оценить энергию высокочастотных колебаний с погрешностью ниже СКП.

Идея использования квадратичной зависимости диэлектрической проницаемости (кубической нелинейной поляризуемости) от напряженности поля положена в основу нескольких предложенных схем квазииневозмущающего измерения энергии электромагнитных волн. В [36б] предложено поместить световод с кубической поля-

ризуемостью в емкостный зазор СВЧ резонатора. При определенной идеализации диэлектрическую проницаемость световода можно считать равной

$$\epsilon(x, y, z, t) = \epsilon_1(1 + \alpha E^2(x, y, z, t)).$$

Емкость конденсатора, заполненного световодом, при известном пространственном распределении поля будет зависеть от энергии поля. Измерив емкость, можно оценить энергию электромагнитной волны. Здесь роль КСС играет электрическое поле, с помощью которого измеряется емкость конденсатора.

В [37, 38] предложено использовать специфические свойства взаимодействия волн в среде с кубической нелинейностью. Известно, что при распространении в такой среде двух гармонических волн, одну из которых

$$E_s(x, t) = A_s \exp [i(\omega_s t - k_s x)] + \text{к.с.}$$

мы назовем сигнальной (СВ), а другую

$$E_p(x, t) = A_p \exp [i(\omega_p t - k_p x)] + \text{к.с.}$$

— пробной (ПВ), их волновые числа равны

$$k_s = k_{s0} \left[1 + (\alpha/4)(|A_s|^2 + 2|A_p|^2) \right],$$

$$k_p = k_{p0} \left[1 + (\alpha/4)(|A_p|^2 + 2|A_s|^2) \right]. \quad (52)$$

Сдвиг фазы ПВ зависит от квадрата амплитуды напряженности поля СВ. Следовательно, измерив фазу ПВ после взаимодействия волн, можно оценить $|A_s|^2$ и энергию СВ.

В схеме с конденсатором емкость не зависит от фазы СВ, т.е. информация о фазе (положении) волны не будет передаваться в КСС. Во второй схеме информацию о фазе сигнальной волны могут нести комбинационные волны.

Первое условие КНИ — неизменность измеряемой величины в результате взаимодействия с прибором — можно считать в этих схемах выполненным только в той степени, в которой допустимо пренебречь образованием гармоник и комбинационных волн. Это допущение можно оправдать влиянием дисперсии среды, однако при строгих оценках не следует забывать, что дисперсия всегда сопровождается диссипацией.

Второе условие КНИ — изменение состояния КСС должно определяться сохраняющей свое значение измеряемой величиной. В рассматриваемых схемах влияние сигнала на КСС определяется величиной $|A_s|^2$, которая, если принять решения (52), не зависит от амплитуды ПВ. Однако следует иметь в виду, что решения (52) справедливы при условии, что на границе ($x = 0$) заданы напряженности полей, а не потоки энергии. При переходе же волны из одной среды в другую с другим волновым сопротивлением $\rho = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ даже при отсутствии отражения происходит изменение амплитуды волны. В обеих анализируемых схемах под действием КСС изменяется ϵ , а величина μ считается неизменной. Следовательно, изменяется ρ и, соответственно, амплитуда поля СВ. Из-за неопределенности амплитуды пробного поля будет неопределенным изменение ρ и, соответственно, изменение E_s . Поэтому, если даже точно будет измерена величина $|E_s|^2$, имеющая место во время взаимодействия волн, то значения этой величины до и после взаимодействия могут быть оценены лишь приближенно. В [39]

показано, что СКВ погрешность оценивания энергии волны в этом случае не может быть меньше, чем

$$\Delta W \geq (\langle n \rangle / \omega_s \tau)^{1/2} \hbar \omega_s, \quad (53)$$

где τ — длительность взаимодействия СВ с пробным полем.

На погрешность измерения в реальных схемах будет влиять диссипация, перекачка энергии в гармоники и комбинационные волны, эффект самовоздействия пробной волны.

Влияние диссипации в нелинейной среде на погрешность измерения энергии волны анализировалась в [40, 41]. Показано, что при малом коэффициенте поглощения (q_d) число квантов в СВ может быть оценено с погрешностью

$$\Delta \tilde{n}_s \geq (\langle n \rangle q_d)^{1/2}. \quad (54)$$

Минимальное поглощение в современных кварцевых волокнах равно $0,2$ дБ км $^{-1}$, т.е. $q_d = 10^{-2}$ при длине 1 км.

Анализа влияния гармоник и субгармоник, насколько известно автору, в публикациях нет. Наиболее существенную роль могут играть комбинационные волны, частоты которых близки к ω_s и ω_p , т.е. волны с частотами $\omega_3 = 2\omega_s - \omega_p$ и $\omega_4 = 2\omega_p - \omega_s$, поскольку они ближе к синхронизму с СВ и ПВ. Можно показать, что если дисперсия достаточна для того, чтобы амплитуды комбинационных волн были всегда много меньше амплитуд основных волн, то пространственный период биений амплитуд комбинационных волн будет равен $2\pi/6\beta_\omega \omega_s (\omega_s - \omega_p)^2$, а максимальные значения амплитуд волн с частотами ω_3 и ω_4 будут равны

$$|A_3|_m = \frac{\alpha \omega_3 |A_s|^2 |A_p|^2}{24 \beta_\omega v_0 \omega_s (\omega_s - \omega_p)^2},$$

$$|A_4|_m = \frac{\alpha \omega_4 |A_s|^2 |A_p|^2}{24 \beta_\omega v_0 \omega_p (\omega_p - \omega_s)^2}. \quad (55)$$

Эти соотношения получены при условии, что линейная дисперсия имеет такую же зависимость от частоты, как в уравнении Кортвега — де Фриса, т.е. $k(\omega) = (\omega/v) + \beta_\omega \omega^3$. Если эту формулу применить к кварцу, то в области длин волн 1 мкм следует считать $\beta_\omega = 10^{-41}$ с 3 /м. Кварц в оптическом диапазоне волн имеет $\chi^{(3)} = 5 \cdot 10^{-15}$ (СГСЭ), $(0,6 \cdot 10^{-33})$ (СИ). Соответственно, $\alpha = \chi^{(3)}/\epsilon_0 \approx 10^{-22}$ (м В $^{-1}$) 2 , т.е. $|A_{3,4}|^2 \ll \ll |A_s|^2 / \langle n_s \rangle^{1/2}$ будет при таких плотностях потока энергии СВ (P_s) и ПВ (P_p), при которых

$$P_s P_p \ll (10^4 \text{ Вт (мкм)}^{-2})^2 / \langle n_s \rangle^{1/2}, \quad (56)$$

если $(\omega_s - \omega_p)/\omega_s \approx 5 \cdot 10^{-3}$, как в [42].

4.3. Влияние самовоздействия пробной волны на погрешность измерения энергии сигнальной волны

Изменение фазы ПВ на длине l за счет нелинейности равно

$$\delta \phi_p l = D_{pp} n_p + D_{sp} n_s, \quad (57)$$

где $D_{pp} = \alpha k_{p0} l \rho \hbar \omega_p / 2 \tau_p S$ — коэффициент самовоздействия ПВ, $D_{sp} = \alpha k_{p0} l \rho \hbar \omega_s / \tau_p S$ — коэффициент взаимодействия ПВ с СВ. $n_{p,s} = |A_{p,s}|^2 \tau_{p,s} S / 2 \rho \hbar \omega_{p,s}$ — число фотонов в пучке длиной $\tau_{p,s} S$ — эффективная площадь поперечного сечения волн.

Если оценивать число квантов в СВ путем измерения фазы ϕ_{pl} , то дисперсия оценки будет равна

$$(\Delta \tilde{n}_s)^2 = D_{sp}^{-2} [(\Delta \tilde{\phi}_{pl})^2 + (\Delta D_{pp} n_p)^2], \quad (58)$$

где $(\Delta \tilde{\phi}_{pl})^2$ — дисперсия погрешности измерения сдвига фазы ϕ_{pl} .

Если на входе ПВ находилась в когерентном состоянии, то $(\Delta \tilde{\phi}_{pl})^2 \geq 1/4 \langle n_p \rangle$. В этом случае будет

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{n}_s)^2 &\geq D_{sp}^{-2} [(1/4 \langle n_p \rangle) + D_{pp}^2 \langle n_p \rangle] = \\ &= D_{sp}^{-2} (\hbar \omega_p / \tau_p) [(1/4 W_p) + D_{pp}^2 (\tau_p / \hbar \omega_p)^2 W_p] \geq \\ &\geq D_{sp}^{-2} D_{pp}; \end{aligned} \quad (59)$$

здесь W_p — мощность пробной волны. Минимальное значение погрешности может быть получено при оптимальном значении мощности ПВ

$$W_{p,opt} = vS / \alpha \omega_p l \rho. \quad (60)$$

В случае, если сигнал и ПВ импульсные, а скорости их распространения различны, длительность их взаимодействия τ_{sp} может быть меньше времени распространения в нелинейной среде (времени самовоздействия) τ_{pp} . В этом случае вместо соотношения (59) следует использовать соотношение

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{n}_s)^2 &= (\tau_s S / \tau_{sp} \cdot 4 \alpha \omega_p \rho \hbar \omega_s)^2 (\hbar \omega_p / \tau_p) [(1/4 W_p) + \\ &+ (\alpha \omega_p \rho \tau_{pp} / 2 S)^2 W_p] \geq \\ &\geq (\tau_{pp} / \tau_{sp})^2 \tau_s^2 S / 4 \alpha \rho \hbar \omega_s^2 \tau_p \tau_{pp}. \end{aligned} \quad (61)$$

Соотношения (59), (61) справедливы в тех пределах, в которых они не противоречат соотношениям (53) и (54). При какой мощности СВ может быть $\Delta \tilde{n}_s \leq (\langle n_s \rangle q_1)^{1/2}$, где $q_1 > q_d$? Из (59) получим

$$W_s \geq vS / 2 \alpha \omega_s l \rho q_1 \approx 2,5 \cdot 10^{12} S / l q_1 \text{ Вт}. \quad (62)$$

При этом оптимальная мощность пробной волны должна быть равна

$$W_{p,opt} = n_{opt} \hbar \omega_p / \tau_s = vS / \alpha l \rho \omega_p \approx 5 \cdot 10^{12} S / l \text{ Вт}. \quad (63)$$

Следовательно,

$$W_{s,min} / W_{p,opt} = \omega_p / 2 \omega_s q_1. \quad (64)$$

В одномодовых оптических волокнах $S \cong 25$ мкм 2 . Поэтому при длине взаимодействия $l \cong 10^3$ м можно получить $q_1 \approx 0,1$, если $W_s \geq 0,6$ Вт, $W_p \approx 0,1$ Вт.

Пределы (59) и (61), обусловленные самовоздействием ПВ, не являются фундаментальными. Влияние самовоздействия, в принципе, можно исключить полностью. Для этого достаточно до взаимодействия или после взаимодействия волн ввести корреляцию ϕ_{p0} с $|A_p|^2$ такую, что будет $\phi_{p0} = \phi_0 - D_{pp} n_p$. Это можно сделать, например, пропустив ПВ через другую среду с нелинейностью, обратной по знаку к той, в которой происходит взаимодействие. Подобный прием использовался, в частности, для компенсации самомодуляции фазы излучения Nd:ИАГ-лазера. Компенсация происходила в ячейке с парами цезия. В [43], [44] предлагается устранять самовоздействие ПВ за счет дисперсии нелинейности среды. Самовоздействие обусловлено той частью нелинейной поляризованности, частота которой возникает в результате следующей комбинации: $\omega_p - \omega_p + \omega_p$. Влияние СВ на ПВ связано с комбинацией

частот $\omega_p - \omega_s + \omega_s$. Для подавления эффекта самовоздействия ПВ следовало бы использовать такую среду, у которой $\chi^{(3)}(\omega_p - \omega_p + \omega_p) \ll \chi^{(3)}(\omega_p - \omega_s + \omega_s)$. Однако следует иметь в виду, что дисперсия нелинейности связана с диссипацией — в идеально прозрачной среде коэффициенты нелинейности от частоты не зависят.

Влияние самовоздействия ПВ на погрешность измерения энергии ПВ может быть значительно ослаблено путем выбора соответствующего режима работы фазового детектора. Сдвиг фазы ПВ относительно опорной (локального осциллятора) измеряется обычно с помощью гомодинного детектора. Ток на выходе гомодинного детектора будет иметь составляющую, пропорциональную величине $A_p A_{L0} \cos(\phi_{L0} - \phi_{pl})$, где A_{L0} , ϕ_{L0} — амплитуда и фаза опорной волны. При достаточно большой интенсивности опорной волны в когерентном состоянии неопределенностями ее амплитуды и фазы можно пренебречь. При этом условии вариация тока, связанная с изменением величин A_p , ϕ_{p0} , A_s , будет равна в первом приближении

$$\begin{aligned} \delta i_p \approx \eta_e A_{L0} \left\{ \delta A_p \left[\cos(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{A}_p (\partial \phi_{pl} / \partial A_p) \sin(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) \right] + \right. \\ \left. + A_p \delta A_s (\partial \phi_{pl} / \partial A_s) \sin(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) \right\}, \quad (65) \end{aligned}$$

где η_e — эффективная эффективность детектора, \bar{A}_p , $\bar{\phi}_{pl}$ — средние значения амплитуды и фазы пробной волны.

Когда хотят измерить сдвиг фаз, считают оптимальным режим, при котором $\cos(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) = 0$. Но в таком случае на δi_p влияет сдвиг фазы за счет самовоздействия. Очевидно, что влияние флуктуации амплитуды ПВ на ток δi_p можно исключить (в линейном приближении), выбрав такой режим детектора, при котором

$$\cos(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) + \bar{A}_p (\partial \phi_{pl} / \partial A_p) \sin(\phi_{L0} - \bar{\phi}_{pl}) = 0. \quad (66)$$

Практически такой способ исключения влияния самовоздействия ПВ имеет смысл только при $\bar{A}_p \partial \phi_{pl} / \partial A_p \leq 1$, так как в противном случае существенно уменьшается зависимость δi_p от δA_s .

5. Результаты экспериментов по КНИ энергии оптических волн

5.1. Измерение энергии бегущих волн

Первая попытка измерить энергию бегущей оптической волны путем взаимодействия волн в кварцевом волокне была предпринята в 1986 г. [37]. Целью эксперимента была демонстрация связи фазы ПВ с квантовыми флуктуациями амплитуды СВ. Блок-схема установки изображена на рис. 6. В оптическое волокно вводилось излучение частотно-стабилизированного криптон-ионного лазера, работающего на двух независимых ограниченных квантовыми шумами переходах на 647 и 675 нМ. Средние мощности соответственно были равны 130 и 60 мВт. Предметом измерения считались амплитудные флуктуации волны E_y (СВ), соответствующей переходу 647 нМ. После взаимодействия в одномодовом волокне длиной 114 М волны имели дополнительную фазовую модуляцию, связанную с самовоздействием и взаимодействием. Модуляция фазы волны E_x несла информацию о модуляции амплитуды волны E_y . После разделе-

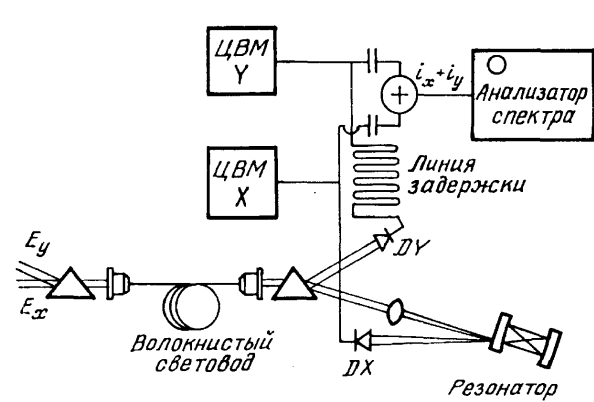


Рис. 6

ния волн призмой СВ попадала на фотодетектор DY . Флуктуации тока этого детектора при достаточно большой мощности СВ пропорциональны флуктуациям амплитуды СВ и не зависят от ее фазы. ПВ направляется на конфокальный резонатор, настроенный таким образом, что фаза отраженной волны на частоте несущей (средней частоте ПВ) изменяется на $\theta = -\pi/3$. При этом создается достаточный сдвиг фаз между несущей и боковыми составляющими, чтобы фазовую модуляцию волны превратить в амплитудную модуляцию тока фотодетектора.

Переменная составляющая тока i_y , задержанная на время τ_3 в коаксиальном кабеле, суммировалась с переменной составляющей тока i_x , а полученная сумма подавалась на анализатор спектра. Корреляция токов проявляется в периодической зависимости спектральной плотности от частоты.

Наблюдавшийся спектр в интервале 54–58 МГц изменялся с периодом 2 МГц. Квантовые флуктуации амплитуды СВ обуславливали 37% СКВ значения общих флуктуаций тока i_x . Остальной шум был связан с флуктуациями амплитуды ПВ, флуктуациями ее фазы, возникающими при генерации в лазере и за счет эффекта самовоздействия в нелинейной среде. Часть шума обусловлена неидеальностью фотодиода DY (его квантовая эффективность была равна 0,4). Такому уровню шума соответствует $S_s / (S_s + S_x) = (0,37)^2$, где S_s , S_x — составляющие спектральной плотности флуктуаций тока i_x , обусловленная сигналом (S_s) и другими шумами (S_x). Поэтому отношение сигнал/шум = $S_s / S_x \approx 0,2$. Соответственно, СКВ погрешность измерения энергии СВ в этой схеме равна $5 \langle n_s \rangle^{1/2} \hbar \omega_s$, т.е. в 5 раз больше соответствующего СКП.

Сравним это значение погрешности с предсказываемым соотношением (59). Мощность ПВ 60 мВт много меньше оптимальной. Поэтому самовоздействие ПВ не играет роли и можно считать

$$(\Delta \tilde{n}_s)^2 \cong D_{sp}^{-2} \hbar \omega_p / 4 \tau_p W_p,$$

т.е.

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{n}_s)^2 / \langle n_s \rangle &\cong v^2 S^2 / 4 \alpha^2 \rho^2 l^2 \omega_p \omega_s W_p W_s \cong \\ &\cong 3 \cdot 10^{-22} (S/\alpha)^2. \end{aligned} \quad (67)$$

Для одномодового кварцевого волокна в данном диапазоне длин волн можно для оценки принять

$S/\alpha \approx 25 \cdot 10^{10}$ (СИ). В этом случае из (67) получим $(\Delta n_s)^2 / \langle n_s \rangle \approx 20$, что согласуется с результатами эксперимента.

Результаты эксперимента по взаимодействию волн в световоде длиной 500 м описаны в [44]. При мощности СВ 12,6 мВт сдвиг фазы ПВ составил $1,38 \cdot 10^{-2}$. Согласно соотношению (62) при такой мощности СВ и длине волокна погрешность измерения не может быть меньше СКП.

Чтобы преодолеть СКП энергии при заданных длине и нелинейности оптического волокна, следует увеличивать мощности СВ и ПВ. Таким путем пытались решить проблему авторы [42]. Они измеряли энергию одного оптического солитона, наблюдая сдвиг другого солитона, взаимодействующего с первым. Для этого в оптическое волокно с отрицательной дисперсией групповой скорости запускались три солитона, приготовленные с помощью специальной оптической схемы из одного импульса лазера. Первый (опорный) и третий (пробный) имеют одинаковые средние длины несущей 1455 нм. У среднего (сигнального) длина волны несколько больше (1460,7 нм). Скорость сигнального несколько меньше скорости пробного, поэтому происходит обгон, во время которого изменяются скорости солитонов за счет их нелинейного взаимодействия. В результате расстояние между опорным и пробным солитонами изменяется пропорционально энергии сигнального. Затем опорный и пробный солитоны подаются на интерферометр Маха—Зендера и далее на фотодетектор. Выходной фототок зависит от сдвига фазы пробного солитона относительно опорного. Полный сдвиг фазы пробного солитона, обусловленный взаимодействием с сигнальным был равен 1,22 рад. при энергии сигнального 15 пкДж ($1,1 \cdot 10^8$ фотонов) и длительности 2,6 пкс. Экспериментаторы, как и в [37], ограничились демонстрацией корреляции между выходным сигналом интерферометра и квантовыми флуктуациями энергии сигнального солитона. Для этого был применен метод, подобный использованному в [37]. Тройки солитонов генерировались с частотой 100 МГц. Сигнальные солитоны с выхода волокна подавались на фотодетектор, ток которого суммировался с током от интерферометра, задержанным линией задержки. Суммарный ток после усиления попадал в анализатор спектра. Искомая корреляция проявлялась в виде периодической зависимости интенсивности спектра от частоты. По оценкам авторов приблизительно 60% СКВ значения фазовых шумов на выходе фазового детектора составляли шумы, связанные с дробовыми шумами сигнального солитона. Этому соответствует отношение сигнал/шум $\approx 1/1,8$, т.е. $(\Delta n_s)^2 / \langle n_s \rangle \approx 1,8$.

Если бы не было шумов, обусловленных несовершенством элементов схемы (потери в волокне 0,1 дБ, в соединениях 0,2 дБ, в дифракционных решетках 0,6 дБ, фотодиодах 1,7 дБ), оценка энергии солитона могла быть близкой к СКП, но не могла быть значительно меньше его. Действительно, из параметров схемы $l=400$ м, дисперсия групповой скорости 12 пкс км^{-1} длительность сигнала 2,6 пкс, длительность пробного солитона 3,6 пкс, его энергия 6 пкДж ($4,4 \cdot 10^7$ фотонов), разность длин волн сигнального и пробного солитонов 5,7 нм следует, что длительность взаимодействия солитонов (время обгона), определяемая дисперсией, равна прибли-

зительно $\tau_{sp} \approx 2,5 \cdot 10^{-7}$ с, в то время как длительность самовоздействия $\tau_{pp} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с. Из соотношения (61) получим $(\Delta n)^2 \geq 1,6 \cdot 10^8 \approx \langle n \rangle$. (Эффективная площадь сечения принята равной 25 мкм^2 .) К сожалению, и в этом красивом эксперименте преодолеть СКП погрешности энергии не удалось.

5.2. Пути увеличения эффективной нелинейности.

Чтобы преодолеть СКП погрешности измерения энергии волны при разумной мощности сигнала, необходимо получить такое взаимодействие СВ с прибором, при котором эффективная нелинейность была бы много больше, чем у кварца, а потери бы оставались малыми. На практике оказывается, что в прозрачных средах, чем больше нелинейность, тем больше диссипация, хотя, в принципе, такая связь не обязательна. Поиск более эффективных способов измерения идет различными путями. В [45] предложено использовать взаимодействие волн в экситонных полупроводниках (CdS, GaAs), рассчитывая исключить потери в них с помощью эффекта самоиндуцированной прозрачности. Другие направления поисков — использование взаимодействия потоков частиц со стоячей или бегущей волной в области ее неоднородного пространственного распределения. Предлагается, например, использовать рассеяние потока электронов, пролетающих вдоль диэлектрического волновода в неоднородном поле волны [46,47]. Из-за поперечной неоднородности поля волны на электроны действует, кроме переменной, еще постоянная составляющая силы (сила Миллера [48]), пропорциональная квадрату амплитуды напряженности электрического поля волны. Этот эффект тем сильнее, чем меньше разность между скоростью электронов v_e и скоростью волны v . Оценки показывают, что обнаружить действие на электрон инфракрасного импульса с энергией в один фотон теоретически возможно при следующих условиях: а) относительная разность скоростей электрона и волны не больше 10^{-3} ; б) длина взаимодействия не менее 10 см; в) длительность импульса 1 пкс.

Эффективным способом усиления нелинейного взаимодействия при относительно малой мощности СВ является накопление энергии в высокодобротных микрорезонаторах [49]. Например, В.Б. Брагинским и В.С. Ильченко изготовлены сферические оптические резонаторы из сапфира, имеющие добротность 10^8 — 10^9 при диаметре 40 — 400 мкм . Эффективный объем поля в таких резонаторах для мод типа "шепчущей галереи" имеет порядок 10^{-9} см^3 . Объем солитона в эксперименте [42] был на порядок больше.

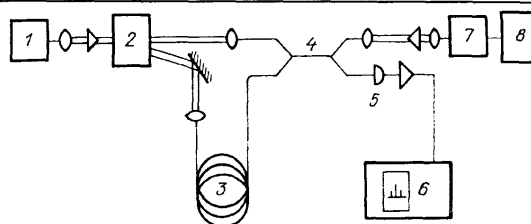


Рис.7

5.3. Измерение путем взаимодействия волн в резонаторе

Возможность измерения энергии волны с помощью нелинейного взаимодействия волн в резонаторе анализировалась в [50, 51]. Теоретические исследования при достаточно жестких ограничениях показывают, что квазиравновозмущающее измерение энергии волны с помощью нелинейного резонатора, в принципе, возможно. Однако экспериментальная проверка идеи с помощью кольцевого резонатора показала, что преодоление СКП в такой схеме весьма проблематично [51]. Необходимы очень жесткие, невоспроизводимые практически ограничения на классические шумы, связанные с рассеянием СВ и ПВ в резонаторе. Тем не менее авторы [51] считают, что схема с резонатором дает лучшие результаты, чем схема с бегущей волной.

В [52] описаны результаты эксперимента по взаимодействию волн в нелинейном резонаторе, который являлся внешним резонатором лазера. Схема эксперимента представлена на рис. 7. Излучение одночастотного полупроводникового лазера 1 ($\lambda = 1,28$ мкм), проходя через акустооптический модулятор 2, работающий в брегговском режиме на частоте 65 МГц, делится на два пучка: нулевой и 1-й дифракционный. Далее, нулевой пучок вводится в одномодовый волоконный световод 3 длиной 5,7 км. Основным механизмом обратной связи волокна с лазером было рэлеевское рассеяние назад в световоде. На выходе нулевой пучок объединяется с первым дифракционным пучком в направленном волоконном ответвителе 4, один из выходов которого подсоединен к лавинному германиевому фотодиоду 5. Сигнал биений усиливался и подавался на анализатор спектра радиосигналов 6. Для ввода СВ в интерферометр использовался свободный выход ответвителя, а источником служил другой полупроводниковый лазер 7 ($\lambda = 1,55$ мкм), интенсивность которого модулировалась по синусоидальному закону генератором 8. Средняя мощность излучения СВ в световоде не превышала 100 мкВт. Когда частота модуляции была кратной межмодовому расстоянию для продольных мод внешнего резонатора, наблюдалось резкое увеличение эффективности взаимодействия между ПВ и СВ. В таком режиме получен набег фазы $PV5 \cdot 10^{-2}$ при мощности СВ 70 мкВт. При этом ПВ проходила нелинейную среду не менее 50 раз.

По сдвигу фазы ПВ на единицу мощности СВ данный эксперимент превосходит описанные выше эксперименты не менее чем на три порядка. Однако это не дает оснований считать, что в данном эксперименте может быть преодолен СКП. При потерях в волокне 0,3 дБ/км затухание СВ при однократном прохождении волокна составляет около 1,7 дБ. Более того, увеличение эффективности взаимодействия при определенных частотах модуляции СВ говорит о том, что имеет место значительная перекачка энергии через комбинационные волны.

Согласно соотношению (62) при мощности СВ 70 мкВт можно преодолеть СКП только при эффективной длине взаимодействия не меньше 10^6 м.

В [53] показано, что преодолению СКП в схеме с резонатором могут препятствовать не только классические, но и квантовые шумы. Если резонатор работает в режиме стоячей волны, то неизбежно случайное отражение СВ, связанное со случайным изменением частоты резонатора при измерении. Для преодоления СКП необходим режим бегущей волны. Подобный режим может

быть в идеальном кольцевом или сферическом резонаторах. В реальных же резонаторах из-за различных неоднородностей, в том числе связанных со спонтанным или индуцированным возбуждением акустических волн, происходит перекачка энергии из одной моды в другие.

5.4. Другие способы КНИ энергии волн.

В процессе поиска возможных схем КНИ энергии электромагнитных волн исследователи не оставили без внимания ни одно известное явление, при котором электромагнитные волны производят какой-либо низкочастотный макроскопический эффект. Рассматривался эффект оптического выпрямления [54]. Он признан малоперспективным для измерения ввиду ничтожности коэффициента преобразования. В [55, 56] доказывается возможность КНИ энергии путем генерации второй гармоники в резонаторе с квадратичной нелинейностью. В [57] предлагается использовать двухфотонные переходы в атомах. Возможность применения для КНИ эффекта самоиндуцированной прозрачности в двухуровневых системах обсуждается в [58]. Авторы [59] утверждают, что путем взаимодействия с полем в резонаторе квазирезонансного луча ридберговских атомов и последующего измерения сдвига фазы их волновой функции можно приготовить и непрерывно контролировать состояние поля с заданным числом фотонов. В [60] доказывается, что если частота света существенно отличается от частоты атомного резонанса и резонатор, в котором происходит взаимодействие атомов с оптическим полем, имеет достаточно большую добротность, атомный луч не будет влиять на число фотонов в резонаторе, а наблюдая за отклонением луча, можно оценить это число фотонов. Анализ схемы измерения, в которой используются когерентно-приготовленные трехуровневые атомы в ламбда-, или каскадной, конфигурации, взаимодействующие с полем резонатора, приведен в [61, 62].

В перечисленных выше статьях предлагаемые методы измерения считаются квантовыми невозмущающими. Формально это обосновывается тем, что при используемом гамильтониане взаимодействия измеряемая наблюдаемая оказывается интегралом движения даже во время взаимодействия с прибором. Фактически же берутся приближенные гамильтонианы, в которых не учитываются некоторые процессы, существенные при вычислении квантовых пределов погрешности измерения. Например, при анализе взаимодействия волн в керровской среде не учитываются рождение гармоник и комбинационных волн, изменение волнового сопротивления среды. Влияние этих эффектов на точность измерения обсуждалась выше. При анализе взаимодействия луча атомов с электромагнитным полем в резонаторе не учитывается обычное линейное по электрическому полю взаимодействие, взаимодействие поля с поступательным движением атомов в областях неоднородности поля.

6. Квантовый предел обнаружения воздействия на систему

Выше упоминалось, что одним из побудительных мотивов к развитию теории и методов невозмущающих квантовых измерений было стремление преодолеть

СКП ошибки обнаружения силового воздействия на систему. В общем случае ошибка обнаружения зависит от начального состояния системы и от того, по результату измерения какой наблюдаемой системы принимается решение. Связь квантового предела ошибки обнаружения с начальным состоянием системы рассмотрена в [10,63].

Процесс обнаружения воздействия можно представить состоящим из трех этапов. Сначала готовится некоторое состояние системы. Затем она эволюционирует. На третьем этапе производится некоторое измерение, по результатам которого принимается решение, было ли интересующее воздействие на систему во время ее эволюции. Для получения минимальной ошибки обнаружения измерение должно быть оптимальным, т.е. должна точно измеряться такая наблюдаемая системы, которая позволяет минимизировать ошибку обнаружения. В общем случае оптимальная процедура измерения не будет аналогичной процедуре приготовления начального состояния системы.

Чтобы выяснить квантовый предел обнаружения внешнего воздействия на систему, рассмотрим чистые начальные состояния. После эволюции (перед измерением) система может находиться в двух вероятных состояниях:

$$|\Psi_0(t)\rangle = \hat{U}_0(t)|\Psi(0)\rangle,$$

или

$$|\Psi_1(t)\rangle = \hat{U}_1(t)|\Psi(0)\rangle, \quad (68)$$

где $|\Psi(0)\rangle$ — вектор начального состояния, $\hat{U}_0(t)$, $\hat{U}_1(t)$ — операторы эволюции при невозмущенном и возмущенном движении соответственно. Квантовый предел средней вероятности ошибки различения двух чистых состояний равен [3]

$$P_{w,d} = 1 - (1 - 4\zeta_0\zeta_1|\gamma|^2)^{1/2}, \quad (69)$$

где ζ_0 , ζ_1 — априорные вероятности состояний $|\Psi_0\rangle$, $|\Psi_1\rangle$, $|\gamma| = |\langle\Psi_0|\Psi_1\rangle|$. В рассматриваемом случае

$$|\gamma| = |\langle\Psi(0)|\hat{R}(t)|\Psi(0)\rangle|. \quad (70)$$

Оператор $\hat{R} = \hat{U}_0^+\hat{U}_1$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar d\hat{R}/dt = \hat{H}_1^0\hat{R},$$

где $\hat{H}_i^0 = \hat{U}_0^+(\hat{H}_i - \hat{H}_0)\hat{U}_0$, \hat{H}_1 , \hat{H}_0 — гамильтонианы возмущенного и невозмущенного движений. Оператор $\hat{R}(t)$ подобен оператору рассеяния, который используется при решении уравнения эволюции в картине взаимодействия. Представив $\hat{R}(t)$ в форме $\hat{R}(t) = e^{i\hat{\varphi}(t)}$, получим

$$|\gamma|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi} d\Phi(\varphi) \right|^2,$$

где $\Phi(\varphi)$ — функция распределения вероятностей собственных значений оператора φ .

Различные функции $\Phi(\varphi)$ могут дать $|\gamma| = 0$. В случае оптимального начального состояния будет [10, 63]

$$|\gamma| = \cos^2 \Delta\varphi, \text{ если } \Delta\varphi < \pi/2, \\ = 0, \text{ если } \Delta\varphi > \pi/2. \quad (71)$$

Оптимальным считается состояние, в котором $|\gamma| = 0$ при минимальной величине $\Delta\varphi$. Такое состояние характеризуется следующим распределением плотности

вероятностей φ

$$W(\varphi) = [\delta(\Delta\varphi - \pi/2) + \delta(\Delta\varphi + \pi/2)]/2. \quad (72)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда оператор $\hat{H}_i^0(t)$ удовлетворяет следующему условию

$$[[\hat{H}_i^0(t_1), \hat{H}_i^0(t_2)], \hat{Q}] = 0, \quad (73)$$

где \hat{Q} — произвольный оператор. Это условие выполняется, когда на линейную систему действует классическая сила ($F(t)$). В этом случае будет

$$\hat{\varphi}(t) = \hbar^{-1} \int_0^t \hat{H}_i^0(t') dt'. \quad (74)$$

В случае обнаружения действия классической силы $F(t)$ в течение времени $\tilde{\tau}$ получим

$$\hat{H}_i^0(t) = F(t)\hat{x}^0(t) \quad (75)$$

и, следовательно,

$$\hat{\varphi}(t) = \hbar^{-1} \int_0^t F(t)\hat{x}^0(t) dt, \quad (76)$$

где

$$\hat{x}^0(t) = \hat{U}_0^+(t)\hat{x}(0)\hat{U}_0(t). \quad (77)$$

Формула (76) подсказывает путь, как получить максимальную величину $\Delta\varphi$, если известна функция $F(t)$. К сожалению, неизвестно как можно приготовить оптимальное состояние.

Рассмотрим такие начальные состояния, при которых

$$W(\varphi) = \alpha_\varphi \exp(-\varphi/2\sigma)(1 + f(\varphi)), \quad (78)$$

где $f(\varphi)$ — полином конечной степени, σ и α_φ — параметры. Такое распределение имеет место, когда классическая сила действует на осциллятор в когерентном состоянии ($f(\varphi) \equiv 0$), в сжатом состоянии ($f(\varphi) \equiv 0$), в состоянии с заданной энергией ($(1 + f(\varphi))$ — полином Эрмита).

Пределу чувствительности обнаружения соответствуют $\Delta\varphi < 1$ и $\sigma < 1$. В этом случае из (76) и (78) получим

$$|\gamma|^2 \cong 1 - (\Delta\varphi)^2. \quad (79)$$

Следовательно, если $\zeta_0 = \zeta_1 = 1/2$, то будет

$$P_{w,d} \approx (1 - \Delta\varphi)/2. \quad (80)$$

Примем в качестве порога обнаружения $P_{w,d} \approx 0,25$. Такое значение $P_{w,d}$ имеет место, когда сигнал равен СКВ значению флуктуации.

Пример. Если сила имеет форму прямоугольного импульса с амплитудой F_0 , длительностью $\tilde{\tau}$, то из (76) и (80) получим

$$F_0\tilde{\tau} = \hbar/2\Delta\bar{x}, \quad (81)$$

где

$$\Delta\bar{x} = \Delta \left[(1/\tilde{\tau}) \int_0^{\tilde{\tau}} \hat{x}^0(t) dt \right]. \quad (82)$$

а) Если сила действует на свободную массу m , то

$$\Delta\bar{x} = \Delta x(\tilde{\tau}/2), \quad (83)$$

т.е. порог обнаружения в данном случае тем ниже, чем больше неопределенность координаты массы в момент

действия силы. (Напомним, что речь идет о чистых начальных состояниях.)

б) Такая сила действует на гармонический осциллятор с массой m , частотой ω_0 .

Пусть $\omega_0 \tilde{\tau} \ll 1$. Тогда в случае когерентного начального состояния получим

$$F_0 \tilde{\tau} = (\hbar m \omega_0 / 2)^{1/2}. \quad (84)$$

Это есть СКП обнаружения действия силы на осциллятор. Если начальное состояние с заданным значением числа квантов n и $n \gg 1$, будет

$$F_0 \tilde{\tau} = (\hbar m \omega_0 / 2n)^{1/2}. \quad (85)$$

Первым получил соотношения (84) и (85) В.Б. Брагинский, анализируя конкретные методы обнаружения действия силы.

Если сила имеет форму синусоидального цуга длительностью $\tilde{\tau}$, с частотой Ω , амплитудой F_0 и $\Omega \tilde{\tau} = 2k\pi$ (k — целое), то по отклику свободного тела можно обнаружить с вероятностью ошибки 0,25 силу, у которой

$$F_0 \tilde{\tau} = \hbar m \Omega / 2 \Delta p, \quad (86)$$

где Δp — неопределенность импульса тела во время действия силы. По отклику гармонического осциллятора при $\omega_0 = \Omega$ можно обнаружить с той же вероятностью ошибки силу, удовлетворяющую условию

$$F_0 \tilde{\tau} = \hbar / \Delta X_2, \quad (87)$$

где ΔX_2 — неопределенность мнимой части комплексной амплитуды. В когерентном состоянии

$$\Delta X_{2(c)} = (\hbar / 2m\omega_0)^{1/2}.$$

В n -состоянии

$$\Delta X_{2(n)} = (\hbar n / 2m\omega_0)^{1/2} \gg \Delta X_{2(c)}.$$

Такое же неравенство может быть и в сжатом состоянии.

Обратим внимание на то, что состояние системы с минимальным значением произведения $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$ не имеет преимуществ перед другими чистыми гауссовскими состояниями. Это справедливо при условии, что измерение оптимально, т.е. измеряется наблюдаемая, соответствующая начальному состоянию и форме силы. Такая наблюдаемая определяется соотношением

$$\hat{A} = \hat{U}_1 |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| U_1^\dagger - U_0^\dagger |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| U_0. \quad (88)$$

Как показывает анализ, процедура приготовления известных состояний не совпадает с процедурой оптимального измерения. Оптимальная наблюдаемая может быть такой комбинацией канонических переменных, которая не имеет известных рецептов измерения. Экспериментаторы стараются идти по такому пути, при котором можно преодолеть СКП обнаружения, используя как для приготовления, так и для измерения одну и ту же процедуру, если даже при этом порог обнаружения будет выше его квантового предела. Такую возможность дают невозмущающие и квазивозмущающие измерения, теория и методы которых описаны выше.

Квантовая считывающая система может взаимодействовать с пробным телом таким образом, что в прибор будет поступать информация об изменении состояния

пробного тела под действием внешней силы, а не о самом состоянии [29]. Соотношения (76), (80) будут иметь силу в этом случае.

На проблему квантовомеханических ограничений чувствительности в гравитационно-волновом эксперименте первым обратил внимание В.Б. Брагинский (1967 г.). В дальнейшем к ее анализу подключились Ю.И. Воронцов, Ф.Я. Халили, К.S. Thorne, С.М. Caves, W.G. Unruh, В.В. Дадонов, В.И. Манько, В.Н. Руденко, А.В. Гусев [64 — 66], С.П. Вятчанин [67], R. Onofrio, F. Bordoni и другие. Экспериментально преодолеть какой-либо из этих СКП еще не удалось.

7. Соотношение погрешность измерения — возмущение

В процессе взаимодействия системы с прибором, измеряющим наблюдаемую A , происходит случайное возмущение всех некоммутирующих с A наблюдаемых. Каким образом погрешность измерения A связана с возмущением наблюдаемой B ? Известно, что дисперсии любых наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} системы в любых ее состояниях связаны между собой соотношением неопределенностей

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \hbar^2 |\langle \hat{C} \rangle|^2 / 4(1 - r^2), \quad (89)$$

где r — коэффициент корреляции между \hat{A} и \hat{B} в данном состоянии системы, $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}] / i\hbar$. Величины ΔA и ΔB не связаны с погрешностями измерений, они могут быть получены экспериментально при статистической обработке результатов точных измерений наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} в различных элементах ансамбля систем, находящихся в заданном состоянии или многократных измерений в одной системе при возвращении системы каждый раз в начальное состояние. В научной литературе и в учебниках встречается утверждение, что соотношение неопределенностей связывает также дисперсию погрешности измерений наблюдаемой \hat{A} ($(\Delta A)_{\text{meas}}^2$) и изменение дисперсии наблюдаемой \hat{B} ($(\Delta B)_{\text{pert}}^2$), производимое прибором при таком измерении. В подтверждение такого мнения приводят пример с возмущением импульса при измерении координаты, получая соотношение

$$(\Delta x)_{\text{meas}}^2 (\Delta p)_{\text{pert}}^2 \geq \hbar^2 / 4.$$

Анализ этой проблемы показал, что соотношение неопределенностей и соотношение между погрешностью измерения и возмущением имеют один и тот же вид только в том случае, когда S не является оператором и $r = 0$ [10]. В случае $[[\hat{A}(t_1), \hat{A}(t_2)], \hat{A}(t_3)] = 0$ и $[[\hat{B}, \hat{A}], \hat{A}] = 0$ будет

$$(\Delta A)_{\text{meas}}^2 (\Delta B)_{\text{pert}}^2 \geq (\hbar^2 / 4) |\langle \hat{C} \rangle|^2 \neq (\hbar^2 / 4) |\langle \hat{C} \rangle|^2; \quad (90)$$

здесь под $(\Delta B)_{\text{pert}}^2$ понимается величина (5), определяемая относительно смешанного состояния системы. Например, при измерении энергии свободной частицы будет

$$(\Delta H)_{\text{meas}}^2 (\Delta x)_{\text{pert}}^2 \geq (\hbar / 2m)^2 (p^2).$$

Если же

$$[[\hat{B}, \hat{A}], \hat{A}] \neq [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}], \quad (91)$$

то

$$(\Delta A)_{\text{meas}}^2 (\Delta B)_{\text{pert}}^2 \neq (\Delta A)_{\text{pert}}^2 (\Delta B)_{\text{meas}}^2. \quad (92)$$

В частности,

$$(\Delta x)_{\text{meas}}^2 (\Delta H)_{\text{pert}}^2 \neq (\Delta H)_{\text{meas}}^2 (\Delta x)_{\text{pert}}^2. \quad (93)$$

Для произвольных наблюдаемых общее соотношение, подобное (90), еще не известно.

В этой статье не затронуты проблемы невозмущающего измерения импульса свободного тела и квадратурных амплитуд осциллятора и волны. О состоянии исследований в этих областях можно узнать в работах [10,12,23,28,34,68,69 — 71].

Вероятное разрешение дискуссии в [1] и [2] о пределах измеримости напряженностей электромагнитного поля содержится в [72].

8. Заключение

Так называемые стандартные квантовые пределы погрешностей измерения (1, 3, 4, 11 и др.) не являются фундаментальными, они имеют место при определенной процедуре измерения. Возможны различные пути их преодоления. Наблюдаемые, являющиеся интегралами движения, и другие "невозмущаемые" наблюдаемые могут быть измерены, в принципе, с погрешностью ниже соответствующей СКП, с помощью техники невозмущающих или квазивозмущающих измерений. Попытки экспериментально преодолеть некоторые из СКП, пока что кончились неудачей из-за различных технических препятствий. Но посвятившие себя этой проблеме исследователи не теряют надежды, и в ряде лабораторий мира продолжают настойчивые попытки преодолеть некоторые из названных выше СКП погрешностей измерения. В случае успеха экспериментальная физика получит ряд новых возможностей в фундаментальных исследованиях, появятся новые методы передачи и обработки информации.

Автор благодарит Международный научный фонд за финансовую поддержку.

Список литературы

- Landau L., Peierls R. *Zs.Phys.* **69**, 56 (1931); перевод: Ландау Л.Д. (1969). *Собрание трудов*. Т. 1. (М., Наука). С. 56—70.
- Bohr N., Rosenfeld L. *Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **12** (8), 3—65; перевод: Бор Н. (1971). *Избранные труды*. Т. II. (М., Наука). С. 120—162.
- Хелстром К. (1979) *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*. (М., Мир).
- Холево А.С. (1980) *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*. (М., Наука).
- Курикша А.А. (1973) *Квантовая оптика и оптическая локация*. (М., Сов. радио).
- Стратонович Р.Л. *J. Stoch.* **1**, 87—126 (1973).
- Брагинский В.Б. (1970) *Физические эксперименты с пробными телами*. (М., Наука); *ЖЭТФ* **53**, 1434—1441 (1967).
- Брагинский В.Б., Манукин А.Б. (1974) *Измерение малых сил в физических экспериментах*. (М., Наука).
- Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И. *УФН* **114**, 41—53 (1974).
- Воронцов Ю.И. (1989) *Теория и методы макроскопических измерений*. (М., Наука).
- Caves C.M., Thorne K.S., Drever R.W.P. et al. *Rev.Mod.Phys.* **52**, 341 (1980).
- Braginsky V.B., Khalili F.Ya. (1992) *Quantum Measurement*. (Cambridge University Press).
- Стратонович Р.Л. (в печати).
- Braginsky V.B., Vorontsov Yu.I., Thorne K.S. *Science* **209**, 547—557 (1980).
- Дирак П.А.М. (1979) *Принципы квантовой механики* (М., Наука).
- Aharonov Y., Saffo J.L. *Ann. of Phys.* **91** (2), 279—294 (1975).
- Yuen H.P. *Phys. Rev.Lett.* **51** (9), 719—721 (1983).
- Yuen H.P. *Phys. Rev.Lett.* **52**, 1730 (1984).
- Wei-Tou Ni *Phys. Rev.A* **33** (4), 2225—2227 (1986).
- Partovi M.H., Blankenbecler R. *Phys.Rev.Lett.* **57** (23), 2891—2893 (1986).
- Caves C.M. *Phys.Rev.Lett.* **54** (23), 2465—2468 (1985).
- а) Халили Ф.Я. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **22** (1), 37—42 (1981).
б) Халили Ф.Я. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **27** (2), 19—23 (1986).
- Mensky M.B. (1993) *Continuous Quantum Measurements and Path Integrals*. (ИОР Publ.).
- Менский М.Б. (1983) *Группа путей. Измерения, поля, частицы*. (М., Наука).
- Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я. *Радиотехн. и электрон.* **27** (12), 2392—2398(1982).
- Воронцов Ю.И. *Вестн. Моск. ун-та. Сер.3* **26** (4), 8—14 (1985).
- Unruh W.G. *Phys.Rev.D.* **18**, 1764—1772 (1978).
- Брагинский В.Б. *УФН* **156** (1), 93 (1988).
- Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я. *ЖЭТФ* **82** (1), 72—76 (1982).
- Воронцов Ю.И. *УФН* **133** (2), 351—365 (1981).
- Воронцов Ю.И., Кобзарь И.В. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **30** (1), 71—74(1989).
- Ueda M., Imoto N., Nagaoka H., Ogaw T. *Phys.Rev.A* **46** (5), 2859—69 (1992).
- Busch P. *Found. Phys.* **20** (1), 1—43 (1990).
- Mensky M.B. *Phys. Lett.A* **169** (6), 403—410 (1992).
- Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я. *ЖЭТФ* **73** (4), 1340—1343(1977).
- а) Брагинский В.Б., Вятчанин С.П. *ДАН СССР* **264** (5), 1136—1138(1982).
б) Брагинский В.Б., Вятчанин С.П. *ДАН СССР* **259** (3), 570—572 (1981).
- Levenson M.D. et al. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2473 (1986).
- Imoto N., Haus H.A., Yamamoto Y. *Phys.Rev.A* **33**, 2287 (1985).
- Воронцов Ю.И. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **31** (6), 34—37 (1990).
- Imoto N., Saito S. *Phys.Rev.A* **39**, 675 (1989).
- Воронцов Ю.И. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **31** (5), 29—34 (1990).
- Sakai Y., Hawkins R.J., Friberg S.R. *Optics Lett.* **15** (4), 239—241 (1990).
Friberg S.R., Machida S., Yamamoto Y. *Phys.Rev.Lett.* **69** (22), 3165—3168 (1992).
- Martens H., de Muynck W.M. *Quantum Opt.* **4** (5), 303—316 (1992).
- Imoto N., Watkins S., Sasaki Y. *Optics Commun.* **61**, 159 (1987).
- Wanatabe K, et al. *Phys.Rev.Lett.* **62**,2257(1989).
- Брагинский В.Б., Вятчанин С.П. *Phys. Lett.A* **132**, 206 (1988); *ДАН СССР* **307**, 96 (1989).
- Вятчанин С.П. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **31** (5), 411—47 (1990).
- Гапонов А.В., Миллер М.А. *ЖЭТФ* **34**, 241 (1958).
- Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Il'chenko V.S. *Phys.Lett.A* **137**, 393 (1989).
- Alsing O., Milburn G.J., Walls D.F. *Phys.Rev.A* **37** (8), 2970—2978 (1988).
- а) Bachor H.-A., Levenson M.D., Walls D.F. et al. *Phys.Rev.A* **38** (1), 180—190(1988).
б) Chaba A.N., Collett M.J., Walls D.F. *Phys.Rev.A* **46** (3), 1499—1506 (1992).
- Дианов Е.М., Охотников О.Г., Прохоров А.М. и др. *КЭ* **16** (4), 864—868 (1989).
- Халили Ф.Я. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **30** (4), 3—7 (1989).
- Shelby R.M., Levenson M.D. *Optics Commun.* **64** (6), 553—559 (1987).
- Dance M., Collett M.J., Walls D.F. *Phys.Rev.Lett.* **66** (9), 1115—1118(1991).
- Grangier P., Roch J.F., Reynaud S. *Ann. de Phys.* **15** (Colloq. 1), 9—15(1990).
- Blockley C.A., Walls D.F. *Optics Commun.* **79** (3—4), 241—250 (1990).

58. Watanabe K., Nakano H., Honold A., Yamamoto Y. *Phys. Rev. Lett.* **62** (19), 2257 — 2260 (1989).
59. Brune M., Harche S., Lefevre V. et al. *Phys.Rev.Lett.* **65** (8), 976 — 979 (1990).
60. Holland M.J., Walls D.F., Zoller P. *Phys.Rev.Lett.* **67** (13), 1716 — 1719(1991).
61. Poizat J.-P., Collet M.J., Walls D.F. *Phys. Rev. A* **45** (7), 5171 — 5179 (1992).
62. Cheri K.M., Grangier P., Poizat J.-P., Walls D.F. *Phys. Rev. A* **46** (7), 4276 — 4285(1992).
63. Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3* **26** (3), 3 — 8 (1985).
64. Далонов В.В., Манько В.И., Руденко В.Н. *ЖЭТФ* **78** (3), 881 — 896 (1980); *Письма ЖЭТФ* **36** (3), 53 — 55 (1982); *Тр. ФИАН СССР* **152**, 12 — 30(1983).
65. Гусев А.В., Руденко В.Н. *ЖЭТФ* **76** (5), 1488 — 1499 (1979).
66. Кулагин В.В., Руденко В.Н. *ЖЭТФ* **94** (4), 51 — 57 (1988). *Nuovo Cimento* **100** (6), 601 — 607 (1987).
67. Вятчанин С.П. *ДАН СССР* **272**, 342 — 346 (1983).
68. Roch J.F., Roger G., Grangier P. et al. *Appl.Phys. B.* **55** (3), 291 — 297 (1992).
69. Брагинский В.Б., Халили Ф.Я. *ЖЭТФ* **94** (1), 151 (1988).
70. Holland M.J., Collett M.J., Walls D.F., Levenson M.D. *Phys. Rev. A* **42** (5), 2995 — 3005 (1990).
71. Shelby R.M., Levenson M.D., Perlmutter S.M. *J.Opt.Soc. Am. B* **5**, 347 — 357(1988).
72. Менский М.Б. *Теор. и мат. физика* **80** (1), 29 — 39 (1989).