

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

О возможном существовании в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий

М.А. Марков

В статье рассматривается возможность существования асимптотической свободы гравитационных взаимодействий, т.е. ослабление гравитационного взаимодействия с увеличением плотности массы. При всем различии "струнного" подхода и обсуждаемого в статье формализма последующая полная картина Вселенной, возможно, будет иметь с ним много общих черт.

PACS numbers: 04.50. + h

Содержание

- 1. Введение (63).
- 2. Проблема очень ранней Вселенной (67).
- 3. О возможном существовании особой физики "ультрамикромра" в области планковских длин (73).
- Список литературы (75).

1. Введение

Под асимптотической свободой гравитационных взаимодействий в данном случае понимается ослабление гравитационного взаимодействия с увеличением плотности массы.

В уравнениях Эйнштейна гравитационная постоянная κ_0 заменяется функцией

$$\kappa = \kappa_0 \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \tag{1}$$

где ρ — плотность массы материи в сопутствующей материи системе координат, ρ_0 — предельное максимальное значение плотности масс, при котором ψ -функция обращается в нуль:

$$\psi \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \rho_0.$$

При варьировании таким образом модифицированной функции действия Эйнштейна по метрике g_{ik} возникают уравнения, которые при $\rho \ll \rho_0$ совпадают с уравнениями Эйнштейна, описывающие, допустим, вселенную Фридмана, но при $\rho \rightarrow \rho_0$ традиционный член правой части уравнений Эйнштейна стремится к нулю (так как $\kappa \rightarrow 0$). Добавочный же член, автоматически возникающий при варьировании модифицированной

функции действия, оказывается деситтеровского типа, а именно, $F(\rho/\rho_0)A$, где $F(\rho/\rho_0) \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow \rho_0$, а константа A представляет собой A -член метрики Де-Ситтера:

$$A = \frac{1}{l_{\min}^2}.$$

Как в квантовой, так и в классической физике из мировых констант: c — предельной скорости распространения сигнала, e — константы минимального значения величины электрического заряда, \hbar — постоянной Планка — минимальной величины действия и гравитационной постоянной κ_0 можно построить два значения предельно малой длины и предельно большой плотности. Одно из них A — чисто классическое, т.е. не содержащее постоянной Планка \hbar , а именно,

$$\begin{aligned} A = l_{\min} &= \frac{e\kappa_0^{1/2}}{c^2} \sim 10^{-34} \text{ см}, \\ &= \rho_0 = \frac{c^6 e^2}{\kappa_0^2} \sim 10^{95} \text{ г см}^{-3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Другое из них B содержит постоянную Планка:

$$\begin{aligned} B = l_{\min} &= \left(\frac{\hbar\kappa_0}{c^3} \right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см}, \\ &= \rho_0 = \frac{c^5}{\kappa_0^2 \hbar} \sim 10^{94} \text{ г см}^{-3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Наша задача — описать своеобразие некоего *воображаемого* мира, в котором реализуется асимптотическая свобода гравитации в рамках не квантовой, а классической физики, не только сама идея о возможности существования асимптотической свободы гравитационных взаимодействий в воображаемом мире, но и соответствующий формализм, в котором главную роль играет предположение о существовании в таком мире предельно большой плотности масс ρ_0 и связанной с этим формализмом предельно малой длины l_{\min} . С этой точки зрения

М.А. Марков. Институт ядерных исследований РАН, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, 7а
Тел. (095) 132-62-19

Статья поступила 1 сентября 1993 г.

естественно взять классические значения для ρ_0 и l_{\min} для этого воображаемого мира. В этом случае очевидно, что воображаемая нами классическая вселенная с ее своеобразным формализмом, содержащим асимптотическую свободу, могла бы возникнуть в теории и до появления квантовой механики и могла бы в то же время претендовать на описание реально существующей вселенной и предсказать ее начальную инфляционную фазу и деситтеробразную метрику в моменты возникновения вселенной. Но очень распространено мнение о том, что будущая теория гравитации и космология, адекватная существующей в природе, возникнет в рамках квантовой теории (или, например, в теории струн). Поэтому мы в качестве предельных величин в последующем изложении математического аппарата теории будем использовать выражения ρ_0 и l_{\min} , содержащие постоянную Планка. Пользуясь тем, что значения их являются произвольными в данном формализме¹ и, забегая вперед, следует сказать, что развиваемый в ряде статей формализм в случае коллапсирующих объектов, содержащих только гравитирующую материю, останавливает коллапс коллапсирующего объекта на предельной длине порядка l_{\min} . В случае появления во вселенной свободного гравитационного излучения асимптотическая свобода останавливает коллапс лишь в условиях сильного свободного гравитационного поля, если оно превращается в гравитирующую материю. Ниже обсуждаются различные возможности для этого, в частности, для свободного реликтового гравитационного излучения и в случае появления казнеровских возмущений метрики. В случае остановки коллапса черной дыры на расстоянии $\sim l_{\min}$ от классической сингулярности черная дыра неизбежно оказывается источником новых вселенных в другом пространстве (R^n -пространстве), которое находится в абсолютно будущем времени относительно того времени, в котором образовалась данная черная дыра [22, 23].

Вследствие образования черных дыр в данной вселенной (при эволюции звезд или коллапсе закрытой вселенной) данная вселенная распадается на ряд вселенных, а вся вселенная в целом представляет собой совокупность многих вселенных, развивающихся в своих пространствах и временах [33]. Обсуждаются возможные связи между вселенными со связями типа кротовых нор и вопрос о возможном существовании на предельно малых длинах своеобразной "ультрамикробиологии", в которой нарушаются классические представления о пространстве и времени. Не исключено, что длин, меньших предельных l_{\min} , не существует в областях, где плотность масс принимает предельно большое значение. На классическом языке это можно интерпретировать "физически" таким образом, что эта область представляет собой абсолютно твердую среду — шарик, по которому сигнал распространяется с бесконечно большой скоростью, что, например, вблизи классической сингулярности

$$l_{\min}|_{v=\infty} = t = 0.$$

Другими словами, здесь времена и пространства как бы отсутствуют. В конце данной статьи цитируется работа,

¹ Нельзя не заметить удивительную близость численных значений, будем говорить, классических и квантовых значений предельных плотностей (ρ_0) и длин (l_{\min}), которые можно составить из мировых констант.

в которой рассматривается двумерная черная дыра в рамках теории струн. Автор ее приходит к выводу о том, что в его точном решении вблизи классической сингулярности метрика становится евклидовой вместо лоренцевой и что вся вселенная в целом представляет собой совокупность многих вселенных. Не исключено, что наше последующее описание воображаемой вселенной характеризуется асимптотической свободой гравитационных взаимодействий, содержит некоторые характерные черты будущей теории гравитации, адекватной свойствам гравитации, существующей в природе.

Но, может быть, нет необходимости менять классические уравнения гравитации? Может быть, квантованная форма этих уравнений автоматически решит космологические трудности классических уравнений? Такие соображения законны, и они часто высказываются. Прежде всего целесообразно напомнить судьбу этих высказываний применительно к известным трудностям других, т.е. не гравитационных, полей.

Как известно, все другие поля, взятые в отдельности, содержат трудности с бесконечными значениями энергии их точечных источников. С появлением уравнений Дирака возник вопрос: сохраняются ли эти трудности в электродинамике Дирака? В дальнейшем был получен общий ответ: квантовая теория любого из известных полей не решает обсуждаемой нами трудности.

Часто можно услышать утверждение, что в отличие от других полей у нас нет квантовой теории гравитационного поля. Строго говоря, у нас есть квантовая теория *всех* полей в отдельности, в том числе и гравитационного поля, но только в случае *слабых полей*. Это утверждение имеет тот смысл, что вблизи точечного источника, например, электромагнитного поля, когда оно становится сильным, необходимо учитывать взаимодействия электромагнитного поля электрона со всеми видами элементарных частиц, существующих в природе. Эти виртуальные процессы вносят свой вклад в собственную энергию электрона. При этом, в принципе, нельзя исключать и гравитоны. Изложенную ситуацию можно сформулировать фразой: "Все, т.е. любая так называемая элементарная частица, в указанном смысле, состоит из всего [1] многообразия частиц".

Как известно, расходящиеся выражения в современной теории полей во многих случаях пытались исключить различными модификациями именно *классических уравнений* полей в их релятивистской форме, например с помощью введения в соответствующие волновые функции релятивистски инвариантных обрывающих факторов, которые соответственно уменьшали бы вклад в собственную энергию источника поля высоких частот.

Были и другие классические релятивистски инвариантные рецепты избавления от обсуждаемых трудностей, начиная от так называемого "лямбда-лимитинг"-процесса и до использования индефинитной метрики.

Все эти попытки решения проблемы расходимости в теории полей оказались неудачными.

Именно они приводили к распространению сигнала в области сингулярности со сверхсветовыми скоростями. В области сингулярности как бы возникало бесконечно твердое ядро.

"Коварство" этих неудач вызвало недоумение — возникало противоречие с релятивизмом, например, при введении явно релятивистских выражений для факторов. Но, как выяснилось впоследствии, все недо-

разумение заключалось в рассмотрении проблемы в рамках только одного времени t — тогда, когда поле представляет собой систему, состоящую из бесконечного числа частиц.

Как известно, последовательная релятивистская инвариантная теория многих частиц требует введения многих времен. Такой **многовременной** формализм впервые изложен в известной работе Дирака — Фока — Подольского для квантовой электродинамики конечного числа частиц. В классической (не квантовой) электродинамике конечного числа частиц этот формализм изложен мною [2]. Я безуспешно искал **многовременной** формализм для описания бесконечного числа фотонов для самого электромагнитного поля. Когда появилась работа Томонаги [3], стало ясно, что такая проблема решена Томонагой. В формализме Томонаги, а затем Швингера [4] каждой точке (x, y, z) пространственноподобной поверхности приписывалось свое время $t(x, y, z)$. Я же безуспешно искал обобщения формализма Дирака—Фока—Подольского на спектр фотонов, именно квантов на газ фотонов, который должен был иметь непрерывную структуру. Не исключено, что такой формализм, эквивалентный формализму Томонаги, существует.

Появление уравнения Томонаги—Швингера сделало понятным оправданную неудачу всех прежних попыток ликвидировать расходимости в теории полей в рамках одного времени для всех пространственноподобных точек.

В этом случае историческое значение появления уравнения Томонаги—Швингера заключается в том, что все таким образом модифицированные решения уравнения поля не являются решениями последовательно релятивистского уравнения — они не удовлетворяют условию интегрируемости уравнения Томонаги—Швингера, а именно, условию коммутативности соответствующих функций на пространственноподобной поверхности, т.е. *требованию конечного значения скорости распространения сигнала*.

Другими словами, эти направления поисков решения проблемы сингулярности полей полностью закрываются требованиями *последовательной релятивистской инвариантности много (бесконечно) временного формализма уравнений Томонаги—Швингера*².

² Следует сказать, что моя докторская диссертация (1943 г.) была посвящена многовременному формализму в электродинамике, и главный итог рассмотрения попыток решения проблемы расходимости точечных источников поля путем введения релятивистски инвариантных факторов противоречит системе уравнений частиц

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t_s} = H_s(t_s, r_s), \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

В этом случае система уравнения просто не имеет таких решений, так как условие существования решения требует конечной скорости сигнала. Таким образом, введение релятивистски инвариантных формфакторов противоречит последовательной релятивистской теории электродинамики. Но мне не удалось эту систему бесконечного числа уравнений записать в виде одного уравнения, что было сделано Томонагой. В условиях военного времени диссертация не была опубликована. Нарушение причинности в малой области грозит тем, что оно может повести к наблюдаемым нарушениям причинности в макрообластях. Но не исключено, что существование таких малых предельных длин в космологии не ведет к появлению наблюдаемого распространения сигнала со скоростью, большей c , в макрофизике. В дальнейшем мы, конечно, коснемся и этой проблемы. Вернее, она не приведет к нарушению естественного чередования прошлого и будущего.

Как известно, в настоящее время широко развит и с большой практической пользой употребляется так называемый "метод перенормировок", с помощью которого из сингулярности значений в теории полей выделяются конечные значения, которые с успехом используются в дальнейших вычислениях. К сожалению, этот способ выделения конечных величин из бесконечных значений осуществляется лишь в рамках одного поля, т.е. пренебрегается вкладом всех других существующих полей. Но главное — эта процедура является процедурой, "навязанной со стороны" естественному формализму теории поля. Неприязнь к процедуре перенормировок поддерживается известным замечанием Дирака в предисловии к русскому изданию его книги, в котором он писал, что он воздержался от изложения методов перенормировок, так как по его мнению они исчезнут в будущей последовательно теории поля. Более того, возникает подозрение в том, что, может быть, в законности методов перенормировок еще не до конца разобрались.

Выше содержалось замечание о том, что в собственную массу источника любого поля вносят свой вклад и другие поля, не исключая и гравитацию. Но учет вклада гравитационного поля требует знания физических законов в области длин Планка

$$l \sim 10^{-33} \text{ см.}$$

Во всяком случае, возможно, что существование в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий в сильных гравитационных полях, о которой речь пойдет в дальнейшем, поможет глубже понять физический смысл и успех перенормировок. Автором в ряде статей на протяжении последних десяти лет изучались своеобразия классических теорий гравитации, усложненных асимптотической свободой гравитационных взаимодействий. И здесь целесообразно подвести некоторые итоги, очистив этот цикл статей от необоснованных претензий, а иногда и просто от ошибочных утверждений.

* * *

Для самого простого и бедного по своему физическому содержанию воображаемого мира (вселенной) десять лет тому назад (1982 г.) была предложена модификация одного уравнения Эйнштейна, в частности, в упрощенном виде [5, 17]:

$$\left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 + 1 = \frac{8\pi R^2 \kappa_0}{3c^2} \left[\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) + A' \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \right]. \quad (4)$$

Это уравнение описывает историю некоей мыслимой изотропной и однородной закрытой вселенной, заполненной пылевидной материей с плотностью ρ при давлении $p = 0$.

В эпохи вселенной, когда плотность $\rho \ll \rho_0$, в правой части уравнения (4) остается первый член $8\pi R^2 \kappa_0 \rho / 3c^2$. В эту эпоху вселенной она имеет вид вселенной типа Фридмана. При коллапсе вселенной, когда возрастающая плотность материи стремится к ρ_0 , в пределе $\rho = \rho_0$ первый член правой части уравнения (4) исчезает, а от второго члена остается константа A' размерностью плотности материи. При

выборе ее выражения в виде

$$L' = \frac{3c^2}{8\pi\kappa_0} L$$

этот член превращается в $R^2 L$, где константа L имеет размерность $1/l^2$ (см²).

В это время вселенная в процессе $\rho \rightarrow \rho_0$ становится вселенной Де-Ситтера, которая не содержит в своей истории сингулярность³. Уравнение в виде (4) описывает воображаемую вселенную, свойства которой, казалось бы, очень далеки от свойств нашей реальной вселенной. Но, как мы увидим из дальнейшего, некоторые свойства этой воображаемой вселенной очень полезны в поисках формализма, описывающего нашу реальную вселенную. Следует напомнить, что уравнение (4) обсуждается в статье [5], заглавие которой дано в виде: "Предельная плотность материи как универсальный закон природы". Речь идет о плотности материи в сопутствующей системе координат. Предлагая гипотезу о существовании предельного значения плотности материи как решение проблемы сингулярности коллапсирующей вселенной (1982 г.), я по случайным причинам не знал, что эту проблему ранее обсуждал Уилер [6], и отверг ее "с порога" вследствие того, что соответствующее уравнение Эйнштейна в этом случае допускает скорость звука больше скорости света. Предложенное мной уравнение лишено этой трудности.

С другой стороны, ясно, что любая модификация теории, которая ведет к конечному значению кривизны при гравитационном коллапсе, неизбежно ведет к конечному значению плотности коллапсирующей материи.

Рассматриваемая модель вселенной, описываемая уравнением (4), представляет собой вселенную, вечно осциллирующую между значениями R_{\max} и R_{\min} . Характер этих осцилляций очень поучителен и полезен в поисках теории, способной описывать реальную вселенную за всю ее историю. В дальнейшей серии статей, посвященных развитию физических идей, содержащихся в уравнении (4), выясняется, что в основе модификации уравнения Эйнштейна в форме (4) лежит физическое предположение о том, что при больших плотностях уменьшается гравитационное взаимодействие материи. Действительно, константу, характеризующую величину гравитационного взаимодействия, в уравнении (4) заменяет функция $\kappa = \kappa_0 [1 - (\rho^2/\rho_0^2)]$. При $\rho = \rho_0$ гравитационное взаимодействие полностью исчезает. Это свойство материи можно называть асимптотической свободой гравитационных взаимодействий. Как показывает вычисление, при коллапсировании закрытой вселенной с голой массой M_0 κ обращается в нуль лишь в случае $M_0 = \infty$. Другими словами, κ не может принимать отрицательные значения. Дальнейшее более углубленное понимание возможной роли асимптотической свободы гравитационных взаимодействий в решении проблемы сингулярности коллапсирующих систем, заполненных гравитирующей материей, получено в статье [7]. В уравнении (4) "руками" введен Λ -образный член,

который при $\rho \rightarrow \rho_0$ ведет к уравнению Де-Ситтера. В статье [7] рассматривается действие S в виде

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0} \int (R + 2\kappa\epsilon) g^{1/2} d^4x.$$

Эта запись действия аналогична выражению для действия в теории Эйнштейна. Но только здесь κ не является константой, а представляет собой некоторую функцию от плотности энергии ϵ :

$$\kappa = \frac{8\pi G_0}{c^4} \psi \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 0, \quad (5)$$

где плотность энергии дана в выражении Фока [8], плотность же массы ρ^* удовлетворяет уравнению непрерывности

$$(\rho^* u^i) = 0.$$

Варьирование S по метрике g_{ik} ведет к уравнению

$$R^i_k - \frac{1}{2} R \delta^i_k = \left(\frac{\epsilon \partial \kappa}{\partial \epsilon} + \kappa \right) T^i_k - \epsilon^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon} \delta^i_k, \quad (6)$$

где

$$T^i_k = (\epsilon + p) u^i u_k - p \delta^i_k.$$

Уравнение (6) можно переписать в виде

$$R^i_k - \frac{1}{2} R \delta^i_k = G(\epsilon) T^i_k + \Lambda(\epsilon) \delta^i_k, \quad (7)$$

где

$$T^i_k = (\epsilon + p) u^i u_k - p \delta^i_k. \quad (8)$$

Уравнение (6) представляет собой обобщение теории гравитации Эйнштейна на случай существования в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий в математической формулировке (1). Оно оказалось поучительным тем, что асимптотическая свобода ведет автоматически к появлению Λ -образного члена, как это видно из записи уравнения в виде (7). При увеличении плотности ϵ первый член правой части уравнения (7) стремится к нулю и уравнение принимает деситтерообразный вид. В статье [5] показано, что в случае давления $p = 0$ изотропной вселенной, наполненной пылью, уравнение (6) описывает вселенную, осциллирующую между значениями R_{\max} и R_{\min} .

Причем R_{\min} связано со значением константы ϵ_0 в [5]. Если ρ_0 в уравнении (4) и ϵ_0 в уравнении (5) выразить через универсальные константы c , \hbar , κ_0 , то R_{\min} , т.е. длина, на которой прекращается коллапс и начинается новый период в расширении вселенной, оказывается планковской длиной

$$l_{Pl} \sim \left(\frac{\hbar \kappa}{c^3} \right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см.}$$

Ввиду большой близости моделей вселенных, описываемых уравнением (4) и (6), мы в целях большей простоты чаще будем пользоваться уравнением (4) для уяснения

³ Это утверждение справедливо до тех пор, пока мы пренебрегаем возможностями в реальной вселенной возникновения свободного гравитационного поля (например, типа казнеровского) или даже реликтового излучения.

своеобразия физических свойств гравитационного поля⁴, обладающего асимптотической свободой, о которой шла речь выше, и что не позволяет на этом направлении идей построить приемлемую в настоящее время космологию, и есть ли какие-либо возможности эти недостатки преодолеть.

2. Проблема очень ранней вселенной

По современным представлениям очень ранняя вселенная возникает в образе деситтерообразного мира, энергия которого в форме Λ -члена в процессе расширения вселенной распадается на все формы частиц и мир Де-Ситтера превращается в мир типа Фридмана со всеми его своеобразиями. Начало серьезного изучения различных модификаций этого так называемого "инфляционного" периода в истории вселенной положено статьей Гуса [10].

Уравнения (4) и (6) описывают вариант такого процесса инфляции. Следует подчеркнуть, что заглавие статьи [7] дано в виде "Деситтероподобное начальное состояние вселенной как результат асимптотического исчезновения гравитационных взаимодействий материи". Следует заметить, что, публикуя статью с изложением свойств уравнения (4) (1982 г.), я не знал, что более десятилетия тому назад Глинер (в 1970 г.) в статье под названием "Вакуумообразные состояния среды и фридмановская космология" [11] писал: "Цель данной заметки — показать, что вакуумоподобное состояние физической среды (тензор энергии $T_{ik} = \Lambda g_{ik}$) может быть исходным пунктом любой из трех моделей Фридмана"⁵.

В современных вариантах сверхранней вселенной от первичной материи требуется, чтобы она имела свойства скаляра. Природа этого скаляра может быть, в принципе, различного происхождения. Нельзя, например, исключить, что этот скаляр является газом черных дыр⁶. В этом случае уравнение

⁴ Уравнение (4) не получено путем варьирования по метрике действия типа (6). Но можно получить аналог уравнения (4), предполагая функцию χ в виде

$$\chi = \chi_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3\varepsilon_0^2} \right). \quad (3')$$

Тогда функция $G(\varepsilon)$ в (7) принимает вид

$$G(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon} + \chi = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2},$$

а член A'

$$A'(\varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon} = +\frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \varepsilon_0.$$

Таким образом, возникает аналог уравнения (4) в виде

$$\left(\frac{\dot{R}}{a} \right)^2 + 1 = \frac{8\pi R^2 \chi_0}{c^2} \left[\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) + A' \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^3 \right] \quad (4')$$

где

$$A' = \frac{2}{3} \rho_0.$$

⁵ Можно также сказать, что Глинер возродил античную космологию Анаксагора, в которой предполагает некую первичную форму материи, "лишенной какой-либо способности движения" [12].

⁶ Порождаемая первичной Λ -материей материя в образе черных дыр ведет к ряду нетривиальных следствий, относящихся к природе частиц после распада первичных черных дыр; так, не исключено, что максимальная масса в спектре масс элементарных частиц оказывается массой предельно малой черной дыры. С распадом первичных черных дыр может быть связана и барионная асимметрия.

типа (4) могло бы оказаться пригодным для описания очень ранней вселенной. Холодный газ черных дыр в процессе хокинговского распада мог бы естественным образом создать горячую фазу фридмановского мира, для которой уравнение (4) с $p = 0$ уже непригодно, но в принципе пригодно уравнение (6) ($p \neq 0$). При реализации обсуждаемой черной дырной гипотезы существенно более подробное знание свойств черной дыры. Именно, исчезает ли черная дыра полностью в процессе хокинговского излучения. В частности, возможно ли существование черных дыр как угодно малых масс. Есть основания полагать, что предельно малая масса черной дыры определяется мировыми константами c , \hbar , χ_0 , а именно, $m_{\min} \sim (\hbar\chi/c^3)^{1/2} \sim 10^{-5}$ г и радиусом $r \sim (\hbar\chi/c^3)^{1/2}$ см. В статье [13] (1965 г.) приведены соображения о возможном существовании верхней границы в спектре масс элементарных частиц, если в природе существует фундаментальная длина

$$l_0 = \left(\frac{\hbar\chi}{c^3} \right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см},$$

то энергия частицы с длиной волны $\lambda = l_0$

$$E = \frac{\hbar c}{l_0} = \left(\frac{\hbar c}{\chi} \right)^{1/2} c^2 = m_{\max} c^2,$$

$$m_{\max} = \left(\frac{\hbar c}{\chi} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ г}.$$

Таким образом, возникла гипотеза о существовании в природе максимально тяжелой элементарной частицы с массой 10^{-5} г, которая была названа "максимомом". Появление этой гипотезы не имело никакого отношения к возникшей впоследствии теории черных дыр. Впоследствии ряд авторов обсуждал возможности существования в природе такой частицы и предлагал для нее различные названия. Появление теории хокинговского излучения черных дыр (1973 г.)⁷ привело к пониманию того обстоятельства, что в процессе этого излучения неизбежно появится черная дыра с параметрами, характерными для максимона. Этот объект может быть назван и элементарной черной дырой. Он должен либо мгновенно исчезнуть, высвечивая в одном акте всю свою энергию, или остаться стабильным. Существует ряд

⁷ Может быть, не лишне к истории появления теории хокинговского излучения черных дыр напомнить, что вначале были соображения Хокинга, которые формулировались почти в виде закона, именно, что масса черной дыры может только увеличиваться. Но в это время было Фроловым и мной исследовано поведение массы заряженной материи, ушедшей под сферу Шварцшильда. Выяснилось, что такой объект, который нами еще не назывался черной дырой (1970 г.), должен излучать электрический заряд, уменьшая его до $e \sim 137e$ [40] и соответственно массу, где e — заряд электрона. Возникло противоречие с существовавшим тогда законом Хокинга. Это противоречие доставило нам много неприятностей. Я тщетно искал ошибку в наших вычислениях и пришел только, как мне казалось, может быть, к критическому выводу, что закон Хокинга справедлив в классической физике, но в квантовой физике он нарушается, и в своем докладе на Варшавской конференции (1973 г.) [31] я отважился интерпретировать этот процесс рождения, уменьшающий массу черной дыры, как процесс рождения пары в электрическом поле черной дыры: одна частица уходит на бесконечность, а другая падает на дыру, уменьшая ее заряд и массу. Помнится, этот доклад не вызвал никаких замечаний.

статей, обосновывающих стабильность⁸ элементарной черной дыры [14].

Имеется и, казалось бы, серьезное возражение против стабильности элементарных черных дыр, выдвинутое Хокингом [15]. Согласно Хокингу, если в каком-либо замкнутом объеме возникает какое-либо число черных дыр, то при времени $t \rightarrow \infty$ они все должны исчезнуть.

Не входя в детали термодинамических аргументов Хокинга, следует заметить, что в замкнутом объеме, наполненном как угодно большим числом стабильных элементарных черных дыр, они должны исчезать путем слияния двух или нескольких из них в большую черную дыру, которая должна высвечиваться до элементарной стабильной черной дыры. Таким образом, из как угодно большого начального числа элементарных стабильных черных дыр остается лишь одна элементарная черная дыра. Таким образом, в качестве первичной скалярной материи сверххраненной вселенной можно использовать и газ стабильных элементарных черных дыр (максимонов), так как имеется реальная возможность превращения газа стабильных элементарных черных дыр в процессе инфляции в горячую материю фридмановской вселенной⁹. Газ черных дыр как первичная скалярная материя представляет собой наибольший интерес в случае закрытой вселенной, для которой после фазы инфляции конечного максимального расширения предстоит фаза коллапса, которую можно назвать фазой очень поздней вселенной. Естественно предполагать, что очень поздняя вселенная должна вернуться в свою исходную деситтеровскую фазу. Другими словами, все разнообразие полей и частиц во фридмановской фазе вселенной снова должно вернуться к своей первичной скалярной форме. В условиях большой плотности всех форм материи в конечной фазе коллапса кажется возможной идея превращения всей материи в конечной фазе снова в скалярный газ черных дыр. Асимптотическая свобода гравитационных взаимодействий дает формализм деситтеровской симметрии очень ранней и очень поздней закрытой вселенной. Первичная материя в форме черных дыр дает пример физики такой симметрии.

Оставляя для дальнейшего обсуждения основного порока модели (4) это недопустимое пренебрежение судьбой неизбежно возникающего в реальной вселенной в процессе коллапса свободного гравитационного

поля и имея в виду, например, рождение казнеровской метрики, представляет некоторый интерес более детальное рассмотрение роли асимптотической свободы в этой, пока, скажем, "игрушечной" модели закрытой вселенной.

Как известно, ковариантная дивергенция от левой части уравнения Эйнштейна обращается в нуль. Обращение в нуль дивергенции правой части уравнения (4) приводит к уравнению, интегрирование которого дает соотношение между плотностью массы ρ и объемом R^3 закрытой вселенной, изотропной, наполненной пылью

$$\frac{\rho(\rho + \rho_0)^3}{|\rho_0 - \rho|} = \frac{M_0 \rho_0^2}{2\pi^2 R^3}. \quad (9)$$

Здесь положено, что константа $A' = 2\rho_0$, M_0 — значение голой массы закрытой вселенной.

$\dot{R} = 0$ ведет согласно уравнению (4) к максимальному размеру вселенной R_{\max} и минимальному R_{\min} .

Если отважиться и ρ_0 в (4) выбрать в планковском виде, то максимальная плотность

$$\rho_0 = \rho_{\text{Pl}} = \frac{c^5}{\hbar \kappa_0^2} \sim 10^{94} \text{ г см}^{-3}.$$

В этом случае

$$R_{\min} \approx l_{\text{Pl}} \left(1 + \frac{m_0}{M_0} \right),$$

где

$$m_0 \approx \left(\frac{\hbar c}{\kappa_0} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ г}.$$

Другими словами, для всех закрытых вселенных с голой массой $M_0 \gg m_0 \approx 10^{-5}$ г минимальные размеры вселенной оказываются планковскими. Если, например, голая масса нашей вселенной $M_0 \approx 10^{55}$ г, то предельно малые ее размеры в конце коллапса

$$R_{\min} = l_{\text{Pl}} (1 + 10^{-60}) \quad (10)$$

Спрашивается, а не сохранится ли это свойство и в модели, которая будет описывать реальную закрытую вселенную?

Спрашивается, сохранятся ли в будущей настоящей теории классические свойства пространства до планковских длин?

Другими словами, различны ли физически в области обсуждаемых длин поправки к планковской длине в виде $l_{\text{Pl}} m_0 / M_0$?

В рассматриваемой модели (4) длина, на которой заканчивается коллапс и начинается процесс нового расширения вселенной, определяется голой массой вселенной. И обратно, место "отскока", место, с которого начинается новый виток осциллирующей вселенной, определяет голую массу M_0 в этом новом витке. Если окажется, что длины l_{Pl} и $l_{\text{Pl}} [1 + (m_0/M_0)]$ в этой области пространства неразличимы, то в последующем витке осцилляции может возникнуть вселенная с любой голой массой

$$M_0 \gg m_{\text{Pl}}.$$

К этому вопросу мы вернемся в конце статьи, обсудив возможность существования при $l < l_{\text{Pl}}$ физики "ультрамикромра".

Следует напомнить, что модель вечно осциллирующей вселенной типа (4) с неизменным значением M_0 не

⁸ Не исключено, что стабильным может оказаться лишь класс холодных черных дыр. [1]

⁹ Следует заметить, что появление газа неэлементарных черных дыр в процессе коллапса не является новой гипотезой. Но утверждение, что в начальной и конечной фазах истории вселенной этот газ состоит из элементарных черных дыр представляет собой новую гипотезу, которая может вызвать возражения. Действительно, если первичная скалярная материя представляет собой газ элементарных черных дыр, которые в процессе инфляции должны в существенной части исчезнуть путем слияния в более крупные черные дыры, а они в процессе хокинговского излучения образовать всю материю фридмановского мира, то успеет ли этот процесс слияния произойти? Правда, соображения, которые приводятся в случае магнитных монополей Дирака (именно, быстрое уменьшение их плотностей в процессе экспоненциального расширения вселенной), здесь могут быть не решающими, так как в процессе экспоненциального расширения очень ранней вселенной в рамках модели (4) плотность материи черных дыр остается практически планковской. Длительность такого состояния ранней вселенной зависит от значения ее голой массы M_0 . За это время расстояние между максимонами практически отсутствует.

может иметь отношения к реальной вселенной, так как энтропия реальной вселенной должна возрастать от осцилляции к осцилляции. Что-то должно случаться с вселенными в процессе коллапса, что устраняет обсуждаемую фундаментальную трудность с ростом ее энтропии. Большим недостатком модели (4) является пренебрежение неизбежными флуктуациями плотности массы в процессе коллапса. Максимальная плотность в модели (4), при которой прекращается коллапс, также зависит от голой массы закрытой вселенной

$$\rho_{\max} = \rho_{\text{Pl}} \left(1 - \frac{m_{\text{Pl}}}{M_0} \right). \quad (11)$$

Может случиться, что в процессе флуктуации в какой-то области коллапсирующей вселенной ρ_{\max} , при котором прекращается коллапс, возникнет во времени раньше, чем это дается формулой (11). Не значит ли это, что в некоторых областях коллапсирующей вселенной анти-коллапсный процесс может возникнуть раньше, чем в других областях вселенной. Не возникнет ли таким образом распад исходной вселенной на ряд вселенных с меньшей голой массой?

Прежде чем начать более подробное обсуждение таких возможностей, целесообразно заметить, что инфляция вселенной в модели (4) существенно отличается от инфляции известных моделей тем, что продолжительность деситтерообразной фазы очень ранней и очень поздней вселенной определяется опять голой массой (M_0) закрытой вселенной. В случае $M_0 \sim 10^{55}$ г деситтерообразная фаза, при которой плотность массы остается практически постоянной, в процессе инфляции длится от $R \approx l_{\text{Pl}} \sim 10^{-33}$ до $R \sim 10^{-13}$ см. В случае давления $p \neq 0$ [16] до $R \sim 10^{-3}$ см. Обсуждаемый вариант модификации уравнений Эйнштейна, как это не раз подчеркивалось выше, основывается на предположении о существовании асимптотической свободы гравитационных взаимодействий. Важно подчеркнуть одно существенное следствие этой гипотезы для понимания физических следствий асимптотической свободы на природе частиц, составляющих материю, в уравнениях (4) и (4'). Как следует из этих уравнений, первый член правой части их при стремлении плотности $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ в пределе ε_0 исчезает. Это обстоятельство привело к неверному замечанию в ряде моих статей о том, что формализм уравнений (4), (4') и (6) содержит как рождение, так и уничтожение частиц. Особенно это касалось уравнения (4). Но как следует из текста (см. [7]), при варьировании действия применялся метод Фока [8], в котором используется выражение для плотности числа частиц n , удовлетворяющих уравнению непрерывности, что характерно вообще для любой классической гидродинамической модели

$$(nu^i)_i = 0. \quad (12)$$

Обсуждаемую ситуацию можно описать таким образом: частицы не исчезают в процессе коллапса, но каждая из частиц становится все более "бесплотной" (меньшей массы), вернее, меньше "весит" вследствие ослабления гравитационного взаимодействия. К моменту прекращения коллапса начальное число частиц сохраняется в виде почти бесплотных их "душ".

Из предыдущего следует, что для описания фаз очень ранней и очень поздней вселенной предполагается для тензора энергии-импульса именно гидродинамическая

форма, в частности, пылевидной материи. Если окажется, что наша вселенная не закрытая, то проблема коллапса очень поздней вселенной вообще отсутствует. Но, тем не менее, проблема коллапса остается проблемой и в этом случае. В открытой вселенной неизбежно возникает коллапс массивных звезд и в конце концов коллапс черных дыр.

Возвращаясь к идее существования в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий и возможной ее роли в решении проблемы сингулярности в процессе гравитационного коллапса, напомним, что проблема сингулярности, о которой идет речь, может быть решена только при условии, что асимптотическая свобода имеет прямое или не прямое отношение к свободному гравитационному полю. Говоря точнее: может ли псевдотензор энергии гравитационного поля в условиях коллапса вселенной обязательно превратиться в тензор в какой-либо материальной форме, и тогда возникает в правой части добавкой к общему тензору материи?

В самом простом случае речь идет, например, о судьбе реликтовых гравитонов, по-видимому, существующих в настоящее время в нашей вселенной, об их судьбе в процессе коллапса. Если вопреки нашим надеждам реликтовое излучение не войдет в какой-либо материальной форме в правую часть уравнения (4), то существование свободного гравитационного поля в конечной фазе коллапса неизбежно приведет к сингулярности.

Существуют оценки сечения рождения электронно-позитронных пар двумя гравитонами. Вероятность этого процесса растет при коллапсе вселенной, и если осмелиться продолжать эти оценки до волн гравитонов планковских длин, то возможно превращение реликтовых гравитонных волн в гравитирующую материю и дало бы возможность асимптотической свободе гравитационных взаимодействий устранить угрозу возникновения сингулярности.

Спрашивается также, может ли сильное свободное гравитационное излучение образовывать черные дыры? Согласно Изаксону интеграл от псевдотензора в условиях плоского пространства на бесконечности обладает уже свойствами тензора. Для коротких волн условие на бесконечности можно ослабить [18]. Таким образом, из гравитационного поля могли бы возникать гравитирующие объекты, для которых должна в уравнении (4) учитываться асимптотическая свобода. Следует заметить, что совокупность волн различных направлений обладает массой покоя [18].

В случае возникновения казнеровских сильных полей в фазе очень поздней вселенной здесь также остается надежда на рождение частиц в условиях очень сильной анизотропии. Для этого процесса тоже есть известные основания. Здесь имеется в виду процесс изотропизации казнеровской анизотропии в очень ранней вселенной в результате бурного рождения материальных частиц. Последние соображения обосновывают необходимость квантования сильного гравитационного поля, если не с целью решения проблемы коллапса в немодифицированных уравнениях Эйнштейна, то вследствие необходимости иметь законченную теорию взаимодействия всех полей.

В дальнейшем мы не будем детально обсуждать возможности модификации левой части уравнения

Эйнштейна, сошлемся лишь на недавно появившуюся статью под названием "A nonsingular universe" [19]. Для сравнения предполагаемой далекой идентичности физического содержания этих двух казалось бы столь различных модификаций уравнений Эйнштейна можно привести часто обсуждаемую модификацию уравнений Эйнштейна, когда в исходной функции действия S заменяется на выражение

$$R \rightarrow R + \beta R^2,$$

где β — константа.

Возникающую в новой форме левую часть уравнения можно преобразовать к ее старой форме¹⁰. Тогда в правой части уравнения возникает T_0^0 в форме

$$T_0^0 = \kappa_0 \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \dots\right) = \kappa_0 \varepsilon f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right).$$

Теперь $\kappa_0 f(\varepsilon/\varepsilon_0)$ играет роль "гравитационной константы", стремящейся к нулю с ростом плотности энергии ε . Другими словами, в этом примере возможной модификации левой части уравнений Эйнштейна в математическом формализме вскрывается реализация асимптотической свободы. Кстати, некоторые варианты такой модификации приведены в той же статье, в которой предложено уравнение (4). Можно указать, что в примере, демонстрирующем роль асимптотической свободы в останвке коллапса, в статье [7] взята функция f в виде

$$f = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-2} \sim 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \dots$$

Более подробное обсуждение предполагаемой большой идентичности физического содержания этих двух возможностей модификации уравнений Эйнштейна будет уместно с появлением в печати продолжения статьи, на которую ссылаются авторы статьи [19].

В дальнейшем нам предстоит напомнить содержание цикла статей, посвященных коллапсу черных дыр, предполагая, что проблема сингулярности коллапса вселенной решена и что в природе существует предельное значение кривизны пространства, что, например, максимальное значение тензора Римана дается выражением

$$R_{\mu\nu\delta\gamma} R^{\mu\nu\delta\gamma} = \frac{1}{l_0^4},$$

где l_0 — длина Планка

$$l_0 = l_{Pl} = \left(\frac{\hbar c}{c^3}\right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см.}$$

Массивная звезда, охлаждаясь в процессе излучения, превращается в нейтронную звезду. При достаточно большой массе нейтронная звезда продолжает сжиматься гравитационными силами, и может наступить такой момент, когда вся ее масса окажется под сферой Шварцшильда. Таким образом, возникает черная дыра. Коллапс черной дыры существенно отличается от коллапса закрытой вселенной. Если для закрытой вселенной, хотя

бы в принципе, мыслима вечно осциллирующая модель, в которой коллапс сменяется расширением, то такая возможность для черной дыры исключена. Дело в том, что полное пространственно-временное описание под сферой Шварцшильда дается диаграммой Крускала [20]. В полной диаграмме пространства-времени Крускала траектория свободной частицы должна исходить из сингулярности или бесконечности и оканчиваться в бесконечности или сингулярности.

Диаграмма Крускала содержит под сферой Шварцшильда две области, одна из которых T_- -область, куда частица попадает, пересекая извне поверхность Шварцшильда. И в этой области обязана закончить свое движение, достигая сингулярности; и для частицы, возникшей в сингулярности, имеется область T_+ , в которой траектория частицы, рожденной в сингулярности, обязана двигаться в T_+ -области от сингулярности изнутри к поверхности Шварцшильда и, пересекая ее, двигаться в пространстве вне сферы Шварцшильда. Это так называемое второе пространство (R'') в отличие от R' -пространства, в которое частица попадает под сферу Шварцшильда и движется к сингулярности в T_- -области, используя в своем движении к сингулярности все время существования. Если бы каким-либо образом частица, пришедшая из R' -пространства, могла бы появиться вблизи сингулярности в T_+ -области, то пересекая поверхность Шварцшильда, она оказалась бы во втором (R'') пространстве, где время снова отсчитывается от нуля. Другими словами, второе пространство R'' находится в абсолютном будущем по отношению к первому пространству.

Напомним, что более двадцати лет тому назад (точнее 1966 г.) в астрономическом журнале появилась статья И.Д. Новикова под названием "Смена сжатия расширением и физические особенности при сжатии" [21]. В этой статье в рамках классической физики рассматривается судьба (т.е. "траектория") коллапсирующей электрически заряженной звезды, именно электрическим полем материи останавливается ее коллапс. В этом случае автор пришел к выводу, что черная дыра после "остановки" коллапса в T_- -области диаграммы Крускала начнет расширяться в T_+ -область и выходит в другое R'' -пространство, лежащее в абсолютном будущем к исходному шварцшильдовскому R' -пространству.

Но данный конкретный случай с электрически заряженной звездой оказался неудачным потому, что в случае учета рождения частиц электромагнитным полем звезды остановки коллапса звезды просто не происходит.

Но если какая-нибудь модификация уравнений Эйнштейна сохраняет конечное значение всех кривизн в процессе коллапса черной дыры, другими словами, материя черной дыры не продвигается в своем движении до сингулярности, то, воспользовавшись соображениями статьи [21], можно утверждать, что в этом случае материя черной дыры может оказаться в T_- -области и, двигаясь под сферой Шварцшильда в направлении от сингулярности, должна пересечь поверхность Шварцшильда и оказаться во втором R'' -пространстве, образуя в нем новую вселенную.

На конференции, посвященной столетию со дня рождения А.А. Фридмана (1988 г.), доклад на эту тему был озаглавлен "Коллапс звезд как возможный источник закрытых и полузакрытых вселенных" [22].

¹⁰ Это сделано, например, В.К. Мальцевым (англо-советский семинар, Москва, 1990). Приводимый нами пример ($R \rightarrow R + \beta R^2$) возникновения эффекта типа асимптотической свободы следует рассматривать лишь как намек на возможность появления асимптотической свободы на пути модификации левой части уравнения Эйнштейна. Но данная форма модификации не устраняет сингулярности, возникающей при коллапсе.

В 1990 г. в "Physics Letters" появилась статья трех авторов на ту же тему под заглавием "Black holes as a possible source of closed and semiclosed worlds" [23]. Следует иметь в виду, что развитие новых вселенных происходит в R^4 -пространствах во времена абсолютно будущих по отношению к временам вселенных, где происходит образование черных дыр. Например, в статье [22] в этой связи сказано, что наша Вселенная, может быть, возникла из черной дыры, которая образовалась в некоей вселенной, существовавшей в абсолютном прошлом времени, т.е. времени, которое было исчерпано в процессе существования черной дыры, и отчет его в новой вселенной начинается снова с нуля.

Так как в процессе существования вселенной и в случае ее коллапса черных дыр образуется много, то мы несколько конкретизируем процесс распада очень поздней вселенной на множество вселенных, о котором в немного другой связи уже шла речь при обсуждении проблемы энтропии в вечно осциллирующей модели вселенной.

Если предыдущие соображения о возникновении вселенных справедливы, то много новых явлений может реализоваться в космологии. Можно напомнить, что еще Джинс в 1928 г. [24] высказал предположение, что в "центрах туманностей материя втекает в наш мир из иного постороннего пространства". Новиков [25] и Нэ-эман [26] высказывали соображения, что галактики — это особые участки нашей вселенной, которые по каким-то причинам отстали в своем развитии от целой вселенной. Это отставание во времени было бы объяснимо, если бы галактики вливались в нашу вселенную из других вселенных в тех процессах, о которых речь шла выше.

С этой точки зрения центральная область ядра галактики в начальный момент ее образования должна бы иметь метрику Де-Ситтера и характеризоваться своим инфляционным процессом. С этой точки зрения количество материи в начальном состоянии галактики может быть самым различным по своей величине. Другими словами, могли бы возникать и микрогалактики. Может быть, чаще всего пришельцы из абсолютного прошлого в нашу вселенную могут оказаться минимальными белыми дырами и даже единичными максимонами. Но даже если окажется, что ядра наблюдаемых галактик имеют совсем другую природу, то описываемая нами возможность возникновения пришельцев из прошлого в нашу вселенную в виде отдельных максимонов или их групп в различные моменты истории нашей вселенной тем не менее существует, и они могли образовывать среду темной материи [27] в виде максимонов в форме элементарных белых дыр.

Согласно развиваемой выше идее о природе темной материи из одних максимонов максимоны, не обладающие электрическим зарядом, практически не взаимодействуют с веществом. Для них небесные тела прозрачны [13]. Поэтому наша современная вселенная представляла бы собой небесные тела, беспрепятственно двигающиеся в среде максимонов. Ни нейтрино, ни другие виды излучения практически не взаимодействуют с темной материей. Возможно лишь слияние двух или нескольких столкнувшихся максимонов в одну черную дыру большей массы.

В принципе, возможно слияние двух или нескольких элементарных черных дыр с последующим хокинговским излучением, и такое излучение нейтрино малыми черны-

ми дырами из ядер галактик могло бы быть зарегистрированным в нейтринных экспериментах в детекторах типа ДЮМАНД [28]. Здесь особый интерес представляют собой энергии $E_\nu \sim 10^{16}$ эВ и $E_\nu > 10^{19}$ эВ. Следует подчеркнуть, что процесс появления материи в нашей Вселенной, приходящей из других вселенных, может рассматриваться как процесс, имитирующий рождение материи, именно в нашей Вселенной. Имеется много моделей вселенных с непрерывным рождением в них материи. Не возникнет ли конкретная возможность реализовать эти модели в рамках развиваемых выше представлений [41]?

В статье [23] утверждается возможность возникновения "полузакрытых миров". Замкнутый мир характеризуется тем, что масса его материи (так называемая голая масса частиц) так уменьшается гравитационными силами, действующими между частицами материи, что полная энергия закрытой вселенной оказывается равной нулю.

У замкнутой вселенной нет внешнего пространства, нет внешнего наблюдателя, который мог бы констатировать существование вселенной. Замкнутая, или что то же, "закрытая" вселенная электрически нейтральна. Но закрытая, или замкнутая, вселенная обладает одним поразительным свойством. Если в такую вселенную (допустим, нашу вселенную, если она замкнута) вложить один-единственный электрон, вселенная перестает быть замкнутой, появляется внешнее пространство, в котором возникает электрическое поле Кулона. У вселенной открывается горловина, и вся вселенная ведет себя как частица с очень малой массой порядка массы максимона¹¹.

Лет двадцать тому назад (1973 г.), воодушевленный статьей О. Клейна [29] о возможности полузакрытых миров, я опубликовал статью под названием "Микромаксимметрическая вселенная" [30], которой предпослал первые две строфы из стихотворения Брюсова "Мир электрона" (1922):

Быть может, эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны,
И память сорока веков!

Еще, быть может, каждый атом —
Вселенная, где сто планет;
Там — всё, что здесь, в объеме сжатом,
Но также то, чего здесь нет.

В основе статьи, о которой идет речь, лежит внутренне непротиворечивая возможность О. Клейна и общие соображения, связанные с известной фразой Дирака, которой заканчивается одна из его работ: "Было бы странно, если бы природа не использовала эту возможность". И вот такая возможность возникла.

Здесь речь идет о вселенной с как угодно большими горловинами, которая содержит внешнюю массу данной вселенной. Возможно, что эта масса могла бы излучаться объектом, как и в случае обычной черной

¹¹ Вселенная раскрытая также, если в ней окажется одно нейтрино. Закрытая вселенная не обладает вращением (спином). Закрытая вселенная с одним нейтрино представляет собой как бы нейтрино с массой максимона.

дыры. В статье [31] этот объект даже назван черной дырой второго рода. Если масса горловины может излучаться полностью, то возникла бы закрытая вселенная. Если останется предельно малая масса горловины, то данная вселенная будет себя вести во внешнем пространстве, как, скажем, элементарная частица, и есть основания полагать, в виде максимона. Таким образом, не исключено, что наша вселенная наполнена огромным количеством частиц, часть из которых на самом деле является вселенными.

Подводя итог сказанному выше, вселенная в целом может оказаться своеобразной структурой, состоящей из множества вселенных, развивающихся в своих пространствах и временах. Эту вселенную нельзя изобразить на бумажном листе, как например, множество вселенных [32]. Она скорее напоминает русскую куклу "матрешку". Только внутри каждой из матрешек содержится множество других матрешек и т.д. Такой образ вселенной в целом обсуждается в статье [33]. Естественно, такая вселенная в целом не имеет ни начала, ни конца.

В цикле обсуждаемых нами работ по космологии в этом десятилетии стоит упомянуть обсуждение проблем, связанных с принципом Маха.

"Что меня действительно интересует, это имел ли Бог выбор, когда Он создавал Мир".

А. Эйнштейн

Как известно, уравнение Эйнштейна содержит большое количество разнообразных космологических решений. Современное состояние вселенной довольно хорошо описывается решениями уравнения Эйнштейна, найденными А.А. Фридманом. Но эти решения непригодны для описания очень ранней вселенной. Более того, для очень ранней вселенной оказываются естественными решения типа Де-Ситтера. Спрашивается, нельзя ли ограничить божественные возможности этими двумя типами решений? Для исследования поставленной проблемы оказывается удобной запись уравнений Эйнштейна в виде, аналогичном в электродинамике интегральному уравнению Янга—Фельдмана [34]

$$g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} \int G_{\mu\nu}^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}(y) (-g(y))^{1/2} d^4y + A_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где $G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ — аналог функции Грина, $A_{\mu\nu}$ — свободное гравитационное поле. Если в этом уравнении положить $A_{\mu\nu} = 0$, то $g_{\mu\nu}$ отлично от нуля, если только $T_{\alpha\beta} \neq 0$.

Другими словами, в этой теории ($A_{\mu\nu} = 0$) пространство существует лишь в том случае, когда $T_{\alpha\beta} \neq 0$, т.е. само существование пространства связано с наличием материи. *Принципом существования пространства*¹² ($A_{\mu\nu} = 0$) сразу лишается смысла рождение вселенной "из ничего", существование "пустых пространств", начиная с пространства Минковского, и даже асимптотически плоских метрик типа Шварцшильда. Много лет существовало мнение, что пространство Де-Ситтера представляет собой также пустое пространство. Это мнение основывалось на том, что соответствующая этому случаю материя должна

обладать состоянием

$$\varepsilon + p = 0,$$

где ε — плотность энергии, p — плотность давления.

А такая материя не встречается в природе. Но постепенно пришли к пониманию, что речь идет об очень ранней вселенной.

Такое состояние материи возможно. Условие $A_{\mu\nu} = 0$ не означает также отсутствие возникновения гравитационных волн. Но лишь в данном четырехмерном мире они всегда должны иметь материальный источник своего возникновения. Уравнение с $A_{\mu\nu} = 0$ рассматривалось рядом авторов с точки зрения наличия или отсутствия в теории Эйнштейна принципа Маха. Вследствие математической сложности исследования уравнения (13) работы в этом направлении не дали определенных результатов. Мной было предложено В.К. Мальцеву ограничиться исследованием конформно-плоских пространств:

$$g_{\mu\nu}(x) = \varphi^2(x)\eta_{\mu\nu},$$

где

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В отличие от работ других авторов здесь вместо десяти величин $g_{\mu\nu}$ требуется нахождение одной функции $\varphi^2(x)$.

Для определения одной функции $\varphi^2(x)$ нами используется уравнение Эйнштейна в виде

$$R = \frac{8kT}{c^4}, \quad T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}.$$

В этих случаях удается показать, что в числе допустимых метрик этого формализма существует решение как фридмановского, так и деситтеровского типа [35]. Не исключено, что божественные возможности, о которых писал Эйнштейн, ограничиваются такой цепочкой вселенных Фридмана и Де-Ситтера.

Однако наиболее интересным результатом этого упрощения (скалярного) формализма гравитации является то, что в случае $A_{\mu\nu} = 0$ при наличии массивного центрального тела ($M > 0$) пробное тело, взятое как таковое, не взаимодействует по закону Ньютона с массивным центральным телом M , т.е. движение пробного тела в случае $A_{\mu\nu} = 0$ не определяется массой M центрального тела. Значение массы просто выпадает из уравнения движения пробного тела. Но если массу пробного тела m учесть в значении T наравне с массой центрального тела (M_0), то тогда возникает между ними ньютоновское взаимодействие. Другими словами, только при учете влияния на метрику как массы "центрального" тела, так и массы пробного тела, между ними возникает гравитационное ньютоновское взаимодействие. Возможно, это одно из характерных свойств физики, в которой справедлив принцип Маха, правда, в очень обедненной скалярной теории гравитации. Но этот результат вселяет некоторую веру в то, что более основательное исследование интегрального уравнения (13) может привести к доказательству существования принципа Маха.

Реализация принципа Маха в интегральном формализме теории гравитации привлекательна тем, что сво-

¹² Пока не доказано, что (13) при $A_{\mu\nu} = 0$ содержит принцип Маха, оно содержит принцип существования пространства только при наличии материи.

бодное гравитационное поле возникает в этой теории только за счет тензора материи.

Если в интегральном формализме ввести условие асимптотической свободы, то возникающее свободное гравитационное поле за счет тензора материи может оказаться под влиянием фактора, характеризующего асимптотическую свободу.

А то обстоятельство, что возникающий псевдотензор энергии гравитационного поля в этом формализме автоматически интегрируется по всему четырехмерному пространству оставляет надежду (Изаксон [36]), что появляющаяся таким образом энергия (масса) гравитационного поля действительно характеризуется асимптотической свободой. Другими словами, проблема сингулярности, которая нас занимала на предыдущих страницах и которую мы пытались решить, в частности, в рамках физических квантовых эффектов, при реализации принципа Маха может быть решена в общем виде еще в классической физике. Но эти интуитивные соображения пока не подтверждены математически и скорее всего не соответствуют действительности, т.е. если в этом случае не происходит "полная изаксонизация" гравитационного излучения [36] — псевдотензор излученного поля в каждом акте излучения приобретает свойство тензора. Во всяком случае точный ответ на этот вопрос могло бы дать уравнение типа (13), в котором κ было бы задано функцией (1).

3. О возможном существовании особой физики "ультрамикромра" в области планковских длин

На предыдущих страницах мы рассматривали проблему, предполагая, что в области, близкой к сингулярности, классические свойства пространства-времени полностью сохраняются в области меньших планковских длин ($l \sim 10^{-33}$ см) и времен, меньших $t \sim 10^{-41}$ с.

Еще полвека тому назад (1940 г.) для преодоления трудности с сингулярностью полей была предложена идея нелокальности в форме некоммутативности полей $\varphi(x)$ и координаты, другими словами, некоммутативность координат [36], что вело также к распространению сигнала со скоростью, большей скорости света. Может быть, целесообразно изменить точку зрения о недопустимости мгновенных сигналов в космологии на обсуждаемых планковских длинах. Эта возможность обсуждается в статье [37].

В случае бесконечной скорости сигнала на пути l_{pl} теряет свой смысл время как расстояние l , деленное на скорость $l/v(\rightarrow \infty) = t = 0$. Если в области T_- и T_+ на диаграмме Крускала разделены абсолютно твердым ядром радиуса, равного длине Планка, то материя черной дыры в процессе коллапса, достигая расстояния от сингулярности, в T_- -области оказывается мгновенно на расстоянии l_{pl} от сингулярности в T_+ -области. Другими словами, обладая таким свойством, критическая длина l как бы не существует в пространстве.

Необязательно пространство представлять в виде какой-то решетки. Например, классические свойства пространство могло бы терять только в условиях области предельной плотности материи. Кстати, для измерения предельно малой длины наблюдателем неизбежно используется длина волны, т.е. квант предельной плотности материи. Такое толкование физики

предельной длины, по-видимому, не ведет к наблюдаемым нарушениям причинности в макромире, нарушения макроскопической связи между настоящим и будущим.

На предыдущих страницах высказано, скорее, скептическое отношение к решению обсуждаемых проблем гравитационного коллапса в рамках будущей квантовой теории сильного гравитационного поля. Но естественное присутствие длины Планка $l_{\text{pl}} = (\hbar\kappa/c^3)^{1/2}$ в конечном выражении кривизны тензора Римана

$$R_{\mu\nu\lambda\delta}R^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{1}{l_{\text{pl}}^4},$$

вернее, присутствие постоянной Планка в данном формализме, кажется, сильно свидетельствует не в пользу упоминаемого скепсиса. Но в [37] рассматривается возможность появления фундаментальной длины, связанной с нарушением классических характеристик *самого* пространства, которые в квантовой теории не имеют места (имеется в виду, например, некоммутативность координат, выражение для которых могло бы содержать \hbar). Согласно предыдущему не исключено, что очень ранняя и очень поздняя вселенная описываются гидродинамической материей в форме холодного газа черных дыр.

Конечно, очень соблазнительно образ этой развиваемой нами теории классической вселенной, ее истории расширить до предельно малых размеров, приняв в качестве предельной плотности выражение, состоящее из мировых констант c , κ , \hbar :

$$\rho_0 \sim \frac{c^5}{\hbar\kappa^2} \sim 10^{94} \text{ г см}^{-3};$$

тогда предельные малые размеры в истории вселенной, действительно, определяются длиной Планка

$$R_{\text{min}} \sim \left(\frac{\hbar\kappa}{c^3}\right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см.}$$

Очевидно, и это следует подчеркнуть, в этом случае мы вступаем в область гипотез, которые пока не подтверждены каким-либо формализмом. Конечно, повторяем, не исключено, что квантование сильного нелинейного гравитационного поля в будущей теории автоматически приведет к существованию в природе такой предельной длины, но также возможно, что эти надежды не оправдаются. Конечно, появление в выражении R_{min} постоянной Планка делает естественной идею связать появление R_{min} с формализмом квантовой механики. Но здесь нужна и некоторая осторожность: квантовая теория всех других полей не содержит такого рода предельную длину. Формализм квантовой механики формулируется в рамках классических представлений о пространстве при как угодно малых длинах.

С другой стороны, нужна известная смелость утверждать, что наше представление о пространстве справедливо до любых малых размеров. Нельзя исключить *a priori* такую ситуацию, когда физика квантовой механики существенно модифицируется при наличии в природе предельной длины. Обычно существование предельной длины связывается с представлением пространства, как некоторой решетки. Здесь идет скорее речь о своеобразном отсутствии длин меньше планковских лишь в областях, где возникает предельная плотность материи. Еще раз подчеркнем, что в классической интерпретации

отсутствие длин меньше планковских могло бы иллюстрироваться малой областью типа бесконечно твердого шарика, в которой сигнал распространяется с бесконечной скоростью, так что понятия длительности сигнала — время его распространения отсутствует [37]. В случае появления вселенных в результате эволюции черных дыр в [7] детерминировано, но здесь, в принципе, не исключается нарушение всех законов сохранения. Если угодно, в этом образе пространство вблизи классической сингулярности интерпретируется в духе черного ящика, о котором идет речь в известной статье [6] Уилера. Не исключено, что в "ультрамикромире" при возникновении предельной плотности царит "беззаконие", а сама постоянная Планка появляется как комбинация мировых констант

$$h = \frac{c^5}{\kappa_0^2 \rho_0}$$

Предлагаемая модель вселенной в целом — совокупность вселенных, рождающихся и развивающихся в своих пространствах и временах. Если она в каком-то общем смысле соответствует действительности, то возникает вопрос о том, что представляют собой эти отдельные вселенные. Например, мы не знаем, является ли наша вселенная открытой или закрытой. Не исключен также вопрос: возможно ли существование вселенной полностью закрытой, если, в принципе, возможно появление в ней материи черных дыр из вселенных, существовавших в абсолютно прошлом времени по отношению к временам данной вселенной, или просто потому, что существование предельной длины не позволяет вселенной полностью закрыться?

В статьях, посвященных развиваемой нами модели вселенной, в целом, часто используется в качестве первоматерии в инфляционной фазе очень ранней вселенной газ черных дыр вместо обычно обсуждаемого скалярного поля. Такая первоматерия содержит ряд привлекательных черт, но эта гипотеза органически не связана с обсуждаемой нами моделью вселенной в целом. Но, кажется, она имеет право на обсуждение. Также имеет право на обсуждение и темная материя в виде стабильных элементарных дыр или частиц, масса которых выражается в виде

$$m = \alpha \left(\frac{\hbar c}{\kappa} \right)^{1/2}$$

Но α такова, что материя этих частиц не находится, например, под сферой Шварцшильда. Любопытно, что такие частицы, в том числе и стабильные элементарные черные дыры, практически не взаимодействуют с обычной материей, но довольно сильно взаимодействуют друг с другом:

$$E = \frac{m^2 \kappa}{r} = \frac{\alpha^2 \hbar c}{r}$$

при $\alpha \sim 1$ две такие частицы взаимодействуют друг с другом на два порядка сильнее, чем кулоновское взаимодействие двух электронов... Но наиболее интересное научное событие, которое привлекло внимание автора, — это появление препринта (В.П. Фролов и др.), озаглавленного как "Wormholes as devise for study of black holes interior" (Nordita, preprint 93/8A). Как известно, существуют возражения против применимости боровской интерпретации квантовой теории, например, для таких

объектов, как закрытые вселенные, как физика материи под сферой Шварцшильда. Существование кротовых дыр вписывается в общую картину той мыслимой модели, о которой речь шла выше. В том смысле, что множественные вселенные представляют собой некий связанный организм.

Следует также упомянуть, что если асимптотическая свобода гравитационных взаимодействий, действительно, ведет к конечному значению предельной кривизны, то на основании результатов статьи [23], в принципе, возможно создание новых вселенных в лаборатории, если в лаборатории можно получать черные дыры, сжимая какое-то количество материи за ее гравитационный радиус. Но также надо подчеркнуть, что эта возможность может реализоваться и в любой другой космологической теории, в которой существует предельное значение кривизны. Существование асимптотической свободы гравитационных взаимодействий может существенно изменить теорию элементарных частиц. Это, например, касается электродинамики, если сохранится современный характер этой теории с ее логарифмической расходимостью. Существование в природе предельной плотности энергии, естественно, меняет формализм электродинамики. И фундаментальная важность для теории элементарных частиц роли гравитационного поля высказывалась еще в статьях Маркова (1947 г.) [42], Ландау и Померанчука (1955 г.) [43].

Пока нельзя исключить, что все действительно элементарные частицы с массой покоя, отличной от нуля, будут характеризоваться логарифмической расходимостью в случае пренебрежения гравитационным полем.

Появление свободного гравитационного поля во вселенной, заполненной материей, доставляло, как следует из статьи автора, много забот. При попытках решения этой проблемы возник ряд гипотез, которые пока имеют право на существование.

Но в случае их неудач возникает одна, может быть, почему-либо неприемлемая идея.

Выше обсуждалась возможность в процессе коллапса разделения вселенной на ряд вселенных, если в процессе коллапса возникают в отдельных областях предельные плотности не одновременно. В этих областях возможна одновременная остановка движения коллапсирующей материи, для которой возникает начальная фаза расширения. Представим себе такую ситуацию, когда во вселенной для всей коллапсирующей материи возникает момент остановки коллапса. Если в данной вселенной присутствует свободное гравитационное поле, то не возникает ли такая ситуация, когда оказываются две вселенные, одна из которых, заполненная материей, начнет расширяться, а другая, заполненная свободным гравитационным излучением, начнет даже сжиматься и в конце концов превращаться в точечную закрытую сингулярность, если и в этом случае требовать сохранения закона предельной плотности массы. Да, в этой точке будет бесконечное значение кривизны, но спрашивается, имеет ли этот закрытый объект какой-либо физический смысл?

Наконец, последнее критическое замечание. Конечно, физики, занимающиеся космологией, могут принять возможность существования в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий и связанных с ней существования предельного значения плотности материи. Может быть, автором угадано много

реальных черт реальной вселенной. Но вряд ли для них приемлемо, что ψ -функция, описывающая асимптотическую свободу гравитационных взаимодействий, в действительности имеет вид, например

$$\psi \approx \psi_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0} \right).$$

Спрашивается, из какого формализма будущей последовательной теории гравитации может возникнуть существующая в природе функция ψ ? В свое оправдание можно только сказать, что ψ -функция должна находиться в классе функций, которые имеют вид

$$\psi \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \rightarrow 0,$$

если $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ или даже при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Как неполноту данного обзора, следует отметить отсутствие даже упоминания новых теорий, именно попыток искать новые возможности в теории гравитации на основе своеобразных свойств, в частности, теории струн.

Здесь мы имеем в виду, например, статью М.Дж. Перри, Е. Тео "Non-singularity of the exact two-dimensional string black hole" [39], в которой утверждается, что вблизи классической сингулярности возникает область не лоренцевой, а евклидовой метрики¹³ и вся вселенная представляет собой совокупность вселенных, связанных кротовыми дырами. Не исключено, что при всем различии "струнного" подхода и обсуждаемого нами формализма последующая полная картина вселенной может иметь много общих черт.

Может быть, когда-нибудь окажется экспериментальная возможность обнаружить уменьшение гравитационной постоянной в условиях большой плотности материи.

¹³ Этот результат, казалось бы, близок или даже аналогичен обсуждаемым нами возможностям существования своеобразной "субмикробиологии" при планковских или субпланковских длинах.

Список литературы

1. Марков М.А. (1976) *О природе материи*. (М., Наука). С. 140.
2. Markov M.A. *Phys. Zs. Sowjetunion* **7**, 42 (1943).
3. Tomonaga S. *Prog. Theor. Phys.* **1**, 27 (1946).
4. Schwinger J. *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948).
5. Марков М.А. *Письма ЖЭТФ* **36**, 214 (1982); [9].
6. Wheeler J.A. In Misner C., Thorne K., Wheeler J.A. (1973) *Gravitation*. (San Francisco, Freeman).
7. Markov M.A., Mukhanov V.F. *Nuovo Cimento B* **86**, 97 (1985).
8. Фок В.А. (1955) *Теория пространства, времени и тяготения*. (М., Гостехиздат).
9. Markov M.A. *Ann. Phys. (New York)* **155**, 33 (1984).
10. Starobinsky A.A. *Phys. Lett.* **B91**, 99 (1980).
Guth A. *Phys. Rev. D* **123**, 347 (1981).
11. Глинер Э.Б. *ДАН СССР* **102**, 771 (1970).
12. Рожанский И.Д. (1983) *Анаксагор*. (М., Мысль). С.29.
13. Markov M.A. *Prog. Theor. Phys. Suppl. 1: Commemoration Issue for 30th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa* (1965).
14. Мальцев В.К., Марков М.А. (1980) *Quantum miniobjects in general relativity*. Preprint P-160. (Moscow, Inst. for Nucl. Res. Academy of Sciences of the USSR).
Banch T.S. *J. Phys. A: Math. Gen.* **14**, L39 (1981).
Муханов В.Ф. *Письма ЖЭТФ* **33**, 549 (1981).
MacGibbon J.H. *Nature (London)* **329**, 308 (1987).
15. Hawking S.W. *Phys. Rev. D* **14**, 2460 (1976).
16. Аман Э.Г., Марков М.А. *Теор. и мат. физика* **58**, 163 (1984).
17. Markov M.A. (1985) *Macro-micro symmetric universe*. In *Proceedings of Conference on Group Theoretical Methods in Physics. May 22-24*. (Yurmala, USSR).
18. Зельдович Я.Б., Новиков И.Я. (1975) *Строение и эволюция вселенной*. (М., Наука). С. 486.
19. Mukhanov N.F., Brandenberger R. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1169 (1992).
20. Kruskal M. *Phys. Rev.* **119**, 1743 (1960).
21. Новиков И.Д. *Астрон. ж.* **43**, 911 (1966).
22. Markov M.A. (1988) In *Proceedings of the Friedman Centenary Conference. Leningrad*. (Singapore, World Scientific).
23. Frolov V.P., Markov M.A., Mukhanov V.F. *Phys. Rev. D* **41**, 383 (1990).
24. Jeans J. (1928) *Astronomy and Cosmology*. (Camb. Univ. Press).
25. Новиков И.Д. *Астрон. ж.* **41**, 1075 (1964).
26. Ne'man Y. *Astrophys. J.* **141**, 1303 (1965).
27. Markov M.A. *Phys. Lett. A* **172**, 331 (1933).
28. Markov M.A., Zheleznykh I.M. *Nucl. Instrum. and Meth. A* **248**, 242 (1986).
29. Klein O. (1961) In *W. Heisenberg und die Physik unserer Zeit*. (Brunswick). P.345.
30. Марков М.А. (1973) В кн.: *Будущее науки*. (М., Знание).
31. Markov M.A. (1974) In *Gravitational Radiation and Gravitational Collapse*. (Ed. De Witt-Morette C.). P. 106-131.
32. Линде А. (1990) *Физика элементарных частиц и инфляционная вселенная*. (М., Наука). С.57.
33. Markov M.A. *Phys. Lett. A* **151**, 15 (1990).
34. Sciamia D.W. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **113**, 34 (1954).
Альтшулер Б.Л. *ЖЭТФ* **51**, 1143 (1966).
Linden-Bell D. *Mon. Not. Roy. Soc.* **135**, 413 (1967).
Gilman R.C. *Phys. Rev. D* **2**, 1400 (1970).
Mal'tsev V.K., Markov M.A. (1976) *On integral formulation of Mach Principle in conformally flat space*. Preprint JINR E-2977. (Dubna).
Мальцев В.К., Марков М.А. *Тр. ФИАН* **96**, 11 (1977).
35. Мальцев В.К. *Теор. и мат. физика* **83**, 476 (1990).
36. Isaacson R.A. *Phys. Rev. A* **166**, 1263 (1968).
37. Марков М.А. *ЖЭТФ* **10**, 1311 (1940).
38. Markov M.A. (1991) *Proceedings of the First A.D. Sakharov Conference on Physics*.
39. Perry M.J., Teo E. Preprint No. DAMTP R93/I.
40. Марков М.А., Фролов В.П. *Теор. и мат. физика* **3**, 3 (1970).
Markov M.A. (1970) In *Cosmology and Elementary Particles* (Triest). Paper IC 71/33.
41. Bondi H., Gold T. *Mon. Not. RAS* **108**, 252 (1948).
Hoyle F. *Mon. Not. RAS* **109**, 252 (1948).
Priani E.A. *Proc. R. Soc. (London) A* **228**, 455 (1955).
Hoyle F., Narlikar J.V. *Proc. R. Soc. (London) A* **282**, 141 (1964).
42. Марков М.А. *ЖЭТФ* **17**(9), 848 (1947).
43. Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. *ДАН СССР* **103**, 489 (1955).