Январь 1994 г. *Том 164, №1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Интегрируемость и матричные модели

А.Ю. Морозов

Обзор теории матричных моделей с точки зрения ее связи с интегрируемыми иерархиями. Приведен весьма подробный анализ дискретных одноматричных, двухматричных "конформных" (многокомпонентных) моделей и модели Концевича, а также тождеств Уорда ("W-условий"), детерминантных формул и непрерывных пределов, переводящих один вид моделей в другой. Обсуждаются вопросы, требующие дополнительной разработки, а также направления дальнейших исследований.

PACS numbers: 02.10.+b,11.17.+y

Содержание

1. Введение

Предлагаемые заметки представляют собой обзор одного из разделов современной теории струн — теории матричных моделей — с главным акцентом на их специфической интегрируемой структуре. Начнем с краткой характеристики этой дисциплины и ее места среди других разделов общей теории струн.

Основное содержание теории струн [1] сводится к исследованию симметрий в возможно более широком смысле слова методами квантовой теории поля. Обычно сначала выбирают ту или иную симметрию и строят теоретико-полевую модель (чаще всего двумерную, по причинам, которые здесь не обсуждаются), обладающую данной симметрией в некотором простом смысле (например, нётеровской симметрией или киральной алгеброй). Главная задача на этом этапе — найти точно решаемую модель (это хороший принцип ограничить динамику, если не дано ничего кроме симметрии). Следующий этап состоит в изучении скрытых симметрий модели, которые так или иначе обусловливают ее точную решаемость и обычно значительно шире исходной симметрии.

"Обратную" операцию *модель* $\longrightarrow$ *симметрия* можно произвести, имея в виду по меньшей мере три соображения.

Можно искать скрытую локальную (калибровочную) симметрию фиксированной или спонтанно нарушенной модели, т.е. идентифицировать ее с какой-либо другой моделью с бóльшим числом полей — *вспомогательной* с точки зрения меньшей модели и *калибровочной с* точки

[1] Общий обзор см. в [1].

А.Ю. Морозов. Институт теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ), 117259, Москва, Большая Черемушкинская, 25

E-mail: Morozov@vxdesy.desy.de

Статья поступила 7 июня 1993 г.

зрения большей (примеры: калибровочная модель ВЗНВ[2], топологические теории в БРСТ-формализме и т.д.).

Можно взять в качестве новой (полной) симметрии модели просто ее операторную алгебру (алгебру наблюдаемых) (см. [2, 3], а также [4], где изложены первые результаты такого подхода). Заслуживает упоминания, что *калибрование* полной алгебры наблюдаемых приводит к "струнной теории поля", ассоциированной с исходной моделью (рассматриваемой в качестве струнной модели).

Можно определить эффективное действие теории как логарифм функционального интеграла и изучать ковариантность этого действия.

Что касается прямой операции *симметрия* $\longrightarrow$ *модель,* то ее примером может служить наиболее исследованный случай, когда исходной симметрией является просто алгебра Ли. С помощью геометрического квантования на этой основе можно построить квантовую механическую модель (см. [5], где приведен наиболее важный пример алгебра Каца–Муди и модели ВЗНВ).

С математической точки зрения оба элемента вышеописанной схемы выглядят как *алгебра* (теория симметрий) и *анализ и геометрия* (теоретико-полевые модели). Идею построения моделей с данной симметрией (в отсутствие всего иного, относящегося к динамике) можно идентифицировать с математической концепцией "универсальных объектов":

Симметрия	=	алгебра
	↓↑	
Модель (с этой симметрией)	=	анализ геометрия

Теория всего

Последовательность итераций двух стрелок на приведенной схеме позволяет глубже понять, расширить и обобщить все рассматриваемые понятия: симметрия, точная решаемость, теория поля, геометрические структуры, квантование и т.д., что способствует значительному прогрессу как в физике, так и в математике. В случае сходимости такого итеративного процесса, конечная точка будет заслуживать наименования *теории всего,* которая действительно объединяет все возможные модели теории поля, погружая их в очень общую, но хорошо структурированную теорию, которая тоже точно решаема в некотором, еще не выясненном смысле слова. В [1] можно найти более подробные данные об этой полуфилософской *программе,* которая известна под названием (современной) *теории струн.* Обратимся теперь к более узкой проблеме: теории матричных моделей.

В настоящее время ее чаще всего связывают с теорией эффективных действий, по крайней мере в тех ситуациях, где находят применение главные результаты современной теории матричных моделей. Такой подход наиболее пригоден для изучения эффективных действий, полученных после интегрирования по двумерным геометриям (в том числе суммирования по родам) и дает *не*пертурбативные (точные) статистические суммы определенных струнных моделей. Важный результат этих исследований состоит в указании на два замечательных (хотя и ожидавшихся [6]) свойства таких статистических сумм.

Во-первых, эффективное действие для данной модели, в сущности, *то же*, что и для любой другой модели. В самом деле, эффективное действие есть функция констант связи ("источников", по "классической" терминологии), которые представляют собой не что иное, как координаты в *пространстве* разнообразных *моделей* (конфигурационном пространстве полной теории струн): изменения констант связи заменяют одну модель другой.

Во-вторых, эффективное действие обладает огромной дополнительной симметрией, которая напоминает общую ковариантность в пространстве всех моделей (вышеупомянутом конфигурационном пространстве) и в изученных к настоящему времени примерах может быть выражена в понятиях интегрируемых иерархий. (Эта "общая ковариантность" в конфигурационном пространстве может в конечном счете обратиться в главный динамический принцип теории струн.)

Оба эти свойства имеют весьма общий характер и возникают при рассмотрении наиболее общего из возможных лагранжианов с данной симметрией (без ограничений на возможные контрчлены, налагаемых требованиями перенормируемости или "принципами" локальности-минимальности, — именно поэтому этот феномен не очень широко известен среди специалистов по теории поля). Пример в высшей степени нетривиальных расчетов, приводящих к аналогичному заключению, можно найти в [7].

Мы надеемся, что эти замечания станут яснее после того, как будут рассмотрены конкретные примеры. Между тем, представляется целесообразным сформулировать их в самом общем виде не только для того, чтобы заинтриговать читателя, но и потому, что это позволит лучше понять предпосылки и следствия общей теории струн.

Представление о той области теории струн, которая имеет дело с матричными моделями, дает рис. 1.

С матричными моделями напрямую связаны следующие разделы теории струн: теория конформных моделей, теория $N = 2$ суперсимметрии и теория Янга–Милса в любом измерении (сформулированная в терминах петлевых уравнений). По аналогии с теорией Янга–Милса сюда же можно отнести эйнштейновскую гравитацию, однако ее связь с матричными моделями еще недостаточно выяснена.

Конформная теория и $N = 2$ суперсимметрия служат источниками концепции "топологических моделей" [8–11], которые возникают после калибровки всех непрерывных симметрий моделей ВЗНВ и/или как модели с БРСТ-точными тензорами энергии-импульса, которые естественно появляются в контексте $N = 2$ суперсимметрии. При последовательной формулировке на "универсальном пространстве модулей" (объединении пространства модулей всех римановых поверхностей конечного ряда и расслоений над ними) эти модели превращаются в модели "топологической гравитации". Генерирующие функционалы моделей топологической гравитации на самом деле генерируют бесконечные последовательности топологических инвариантов определенных пространств (в некоторых случаях возможно также обратное определение [8], хотя универсальный алгоритм для

[2] ВЗНВ — Весса–Зумино–Новикова–Виттена.

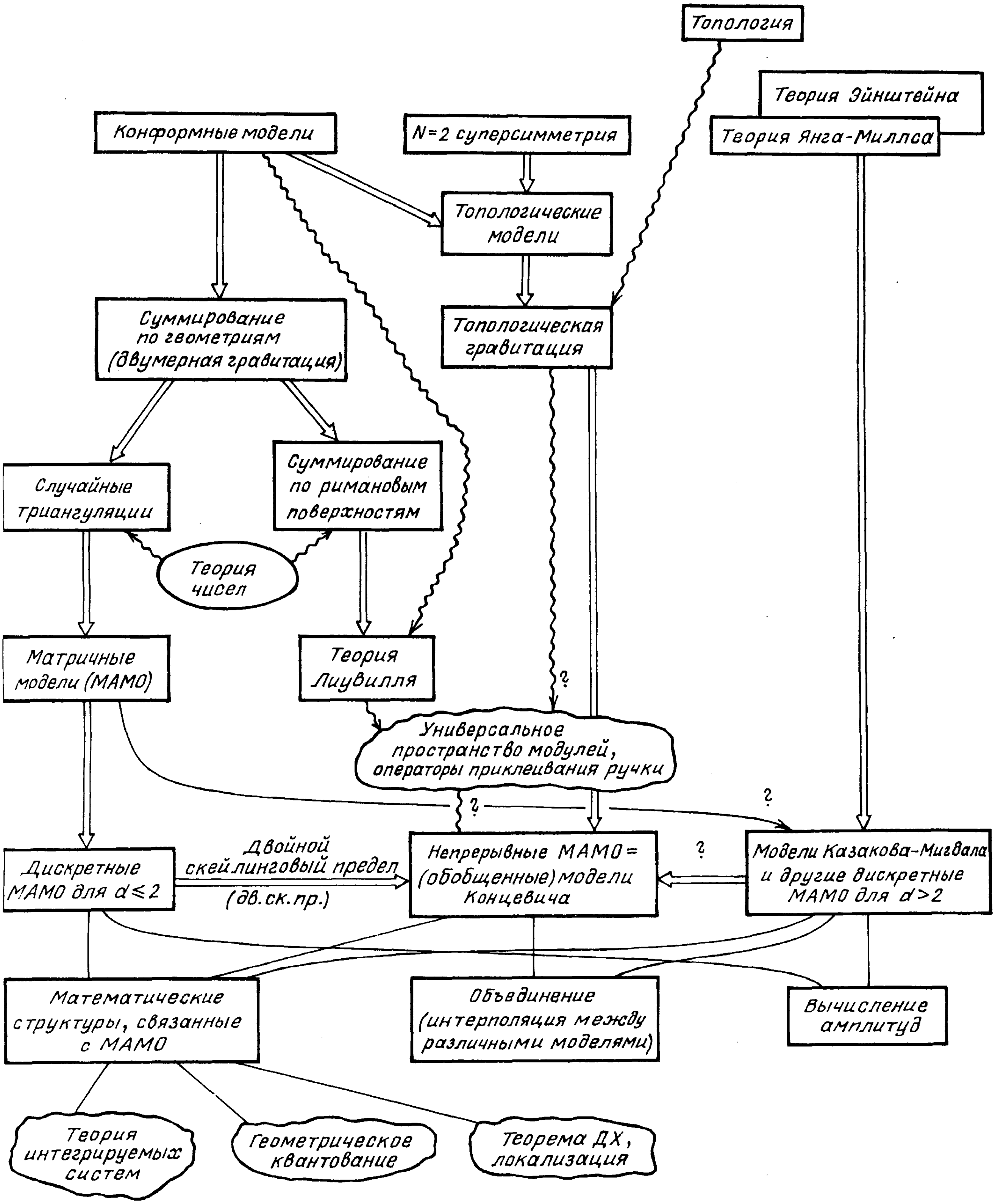

Рис. 1

операции *топология некоего пространства* $\longrightarrow$ *топологическая гравитация* еще не сформулирован).

Альтернативные модели двумерной квантовой гравитации получаются непосредственно из конформных моделей с помощью процедуры "суммирования по геометриям". Существуют два совершенно разных подхода к этой проблеме. Один ("подход Полякова") использует комплексную структуру, характерную для конформной теории [12] и суммы по *римановым поверхностям,* что предполагает интегрирование по пространствам модулей и суммирование по родам. Основным инструментом при этом подходе служит теория свободных полей на римановых поверхностях [13, 14] и формализм бозонизации для конформных теорий поля [15, 16]. Этот подход требует решения теории Лиувилля, которая еще остается предметом интенсивного изучения (и в свою очередь связана с конформной теорией поля). Дальнейший прогресс в этом направлении зависит от разработки (или может быть выражен в понятиях) адекватной теории *универсального пространства модулей*, *операторов приклеивания ручки* и т.п. Сходные задачи возникают при теоретико-полевом подходе к топологической гравитации (новейший обзор см. в [17]).

Альтернативный подход к суммированию по геометриям не имеет прямого отношения к комплексной структуре и предполагает суммирование по произвольным *равносторонним* триангуляциям [18–20][3]. Именно здесь в контексте теории струн впервые появляются матричные модели. Подход с использованием произвольной триангуляции ни в коей мере не является специфическим для конформных моделей (поскольку игнорирует комплексную структуру) и может применяться во многих других случаях, например, для теории Янга–Милса (ЯМ) в любом измерении (где вместо суммирования по геометриям необходимо суммировать "просто" по обычным фейнмановским диаграммам).

Применение матрично-модельного метода обычно предполагает два этапа: формулировку и изучение "дискретной" модели и взятие "непрерывного предела", результатом чего является новая "непрерывная матричная модель", которая иногда снова может быть представлена в форме матричного интеграла.

Одно из важнейших открытий в области матричных моделей состоит в том, что *непрерывные* модели, исходно возникающие из описания произвольно равносторонних триангуляций простейших (минимальных с $c < 1$) струнных моделей, в конечном итоге совпадают с простейшими моделями (CP^1 Ландау–Гинзбурга) топологической гравитации [9, 22–24]: оба (класса) теорий идентичны (во всех подробностях это еще не доказано, но более чем вероятно).

До сих пор *непрерывные* модели действительно построены и в какой-то степени изучены только в случае струнных моделей, основанных на минимальных конформных теориях с $c < 1$ (более того, только для $q = 1$ в (p, q)-серии). Конформные модели с $c \geq 1$, пригодные для описания калибровочных теорий в пространственно-временно́м измерении $d \geq 2$ (в которых имеются частицы, а не только топологические степени свободы), должны дать начало дискретным матричным моделям с "нефакторизуемым" интегрированием по "угловым переменным", простейшим (решаемым) примером которых служит модель Казакова–Мигдала [25]. Вопрос о непрерывном пределе для таких моделей еще не решен (во всяком случае, с точки зрения интегрируемых структур; решение, вероятно, позволило бы обобщить обычную теорию иерархий Тоды).

Изучение матричных моделей имеет троякую цель. Прежде всего оно имеет в виду поиск *не*пертурбативных (точных) ответов для физических амплитуд в данной модели. Этот вопрос привлекает внимание многих авторов (чему есть вполне очевидные причины). Однако столь же (и, пожалуй, еще более) важно понять математическую структуру матричных моделей (это требует разработки таких тем, как общая теория интегрируемых иерархий, геометрическое квантование, теорема Дустермаата–Хекмана ("теория локализации") и др.). Не менее важно для целей теории струн использование результатов изучения матричных моделей для объединения априорно разных моделей (в соответствии с вышеупомянутым принципом: *не*пертурбативные статистические суммы для разных моделей отличаются изменением переменных в пространстве констант связи). Матричные модели уже сыграли важную роль в разъяснении этого принципа, сделав его более приемлемым для теоретиков.

Сделаем следующий шаг и более подробно рассмотрим область матричных моделей, особенно наиболее изученный ее раздел, связанный с двумерными струнными моделями. Она предстает в виде структуры, представленной на рис. 2. Простым примером матричной модели служит одноматричный интеграл

$$Z_N\{t\} \equiv c_N \int_{N\times N} \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right), \tag{1.1}$$

где интегрирование производится по $N \times N$ эрмитовым матрицам H, а $\mathrm{d}H = \prod_{i,j} \mathrm{d}H_{ij}$. Исходя из (1.1), можно следовать в трех направлениях.

Первое [26] состоит в рассмотрении инвариантной формулировки свойств функционала $Z_N\{t\}$. Он удовлетворяет бесконечному множеству дифференциальных уравнений (по сути, это просто тождества Уорда для функционального интеграла (1.1) [27])

$$\begin{gathered} L_n Z_N\{t\} = 0, \quad n \geq -1, \\ L_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{n-k}}, \\ \frac{\partial}{\partial t_0} Z_N = N Z_N, \end{gathered} \tag{1.2}$$

которое известно под именем "дискретных условий (связей) Вирасоро". $Z_N\{t\}$ можно представить как коррелятор экранирующих операторов во вспомогательной конформной модели (одного свободного поля на "спектральной поверхности"), а условия Вирасоро (1.2), естественно, связаны с алгеброй Вирасоро (киральной алгеброй) в этой конформной модели. Как следствие, $Z_N\{t\}$ является τ-функцией интегрируемой иерархии "цепочки Тоды" (такой вывод должен был бы прямо вытекать из условий Вирасоро, однако эта взаимосвязь понятна еще не до конца).

Наиболее очевидный следующий шаг [26, 28] — взять непрерывный предел иерархии ц е п о ч к и Тоды. В случае специально подобранного ("двойного скейлингового") предела [20] это приводит к иерархии Кортевега – де Фриса (КдФ) и появлению τ-функции, на которую наложены несколько иные ограничения [29, 28] (которые снова образуют подалгебру Бореля дру-

[3] Его отношение к подходу Полякова составляет отдельный, очень интересный, важный и недостаточно изученный вопрос, допускающий нетривиальную переформулировку в терминах теории чисел (см. [21]). Главная загадка здесь состоит в том, что равносторонние триангуляции на самом деле являются *арифметическими* римановыми поверхностями — плотным дискретным подмножеством в полном пространстве модулей с интересными и глубокими алгебраическими свойствами. Эквивалентность двух подходов к двумерной квантовой гравитации предполагает существование некоей теоретико-числовой основы, которую было бы неплохо выявить в чистом виде.

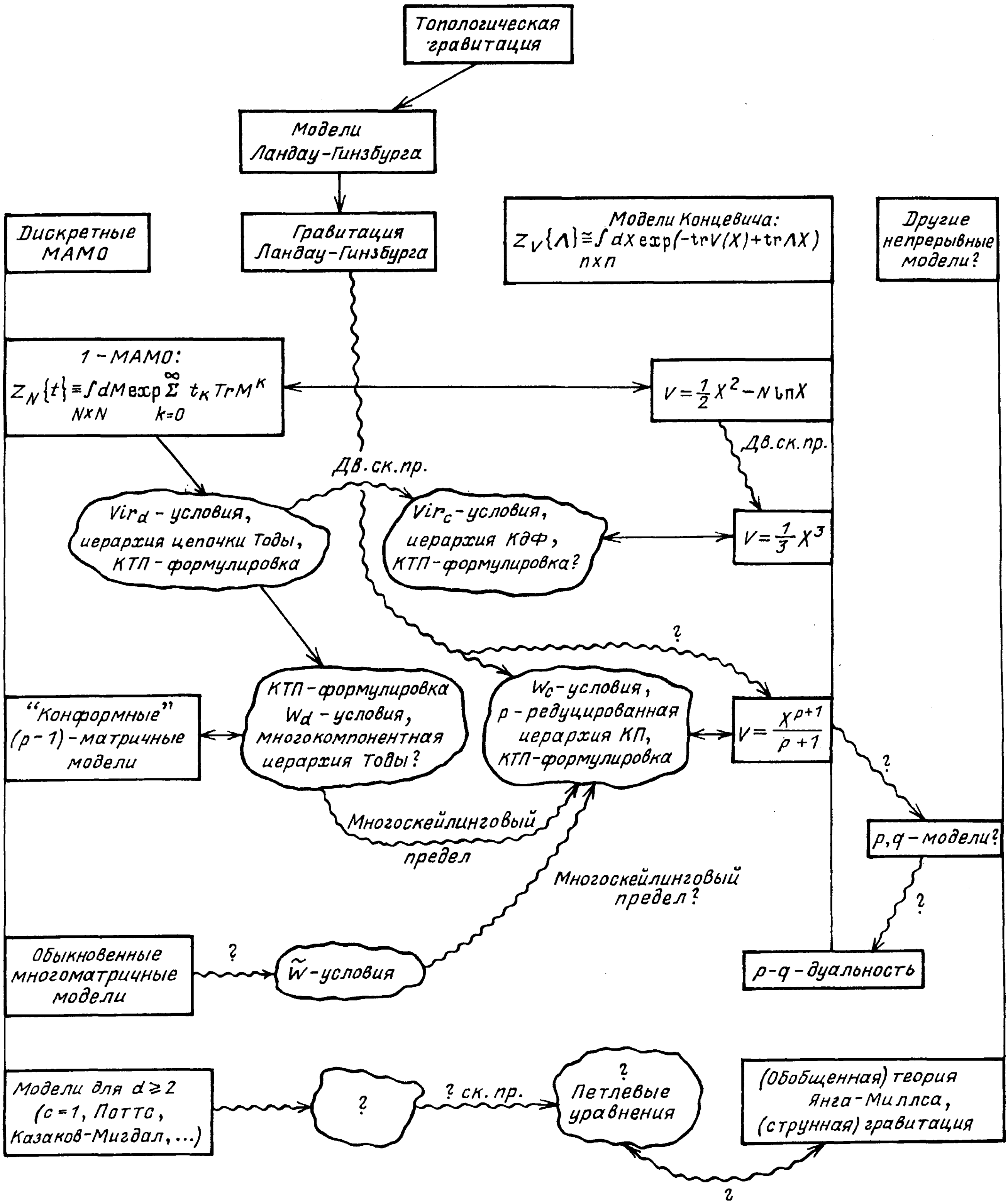

Рис. 2

гой "непрерывной алгебры Вирасоро"):

$$\mathcal{L}_{2n}\mathcal{Z}^{\mathrm{cont}}\{T\}=0,\qquad n\geq -1,$$

$$\mathcal{L}_{2n}\equiv\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{odd}\ k=1}^{\infty}k(T_k+r_k)\frac{\partial}{\partial T_{k+2n}}+\frac{1}{4}\sum_{\mathrm{odd}\ k=1}^{2n-1}\frac{\partial^2}{\partial T_k\partial T_{2n-k}}+\frac{1}{16}\delta_{n,0}+\frac{1}{4}(T_1+r_1)^2\delta_{n,-1},\qquad (1.3)$$

где $r_k=-\frac{2}{3}\delta_{k,3}$. Статсумма "непрерывной модели"

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{cont}}\{T\}\sim\lim_{\mathrm{d.s.}\{N\to\infty\}}\sqrt{Z_N\{t\}}\Big|_{t_{2k+1}=0},\qquad (1.4)$$

а T связано с t линейной трансформацией [19, 28]:

$$T_k = \frac{1}{2}\sum_{m\geq\frac{1}{2}(k-1)} \frac{g_m}{\left(m-\frac{k-1}{2}\right)!}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}, \qquad k \text{ нечетно},$$
$$g_m = mt_{2m}, \quad m\geq 1; \quad g_0 = 2N. \tag{1.5}$$

Эту $\mathcal{Z}^{\text{cont}}\{T\}$ можно снова представить в форме матричного интеграла (по эрмитовым $n\times n$-матрицам) [22, 30–33]:

$$\mathcal{Z}^{\text{cont}}\{T\} = \mathcal{Z}_V\{T\} \tag{1.6}$$

с $V(X) = \frac{1}{3}X^3$, где

$$\mathcal{Z}_V\{T\} \sim \mathcal{F}_{V,n}\{L\} \equiv \int_{n\times n} \mathrm{d}X \exp[-\operatorname{tr} V(X) + \operatorname{tr} LX], \tag{1.7}$$

а

$$T_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr} L^{-k/2}, \qquad k \text{ нечетно}. \tag{1.8}$$

Функция $\mathcal{Z}_V\{T\}$ (но не $\mathcal{F}_{V,n}\{L\}$) независима от n: единственно, что имеет место для конечных значений n — это то, что правая сторона (1.7) не может описывать $\mathcal{Z}_V\{T\}$ в *произвольных* точках в T-пространстве в соответствии с (1.8). Непрерывные условия Вирасоро (1.3) в действительности эквивалентны тривиальному матричнозначному тождеству Уорда

$$\left(V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\text{tr}}}\right) - L\right)\mathcal{F}_{V,n}\{L\} = 0. \tag{1.9}$$

Другое направление, ведущее от дискретной одноматричной модели, состоит в том, чтобы идентично переписать ее в форме модели Концевича, на этот раз с $V(X) = X^2$ и дополнительным фактором $(\det X)^N$ под интегралом в $\mathcal{F}_{V,n}\{L\}$ [36]. Тогда двойной скейлинговый предел можно изучать во внутренних терминах моделей Концевича [36].

Третий путь ведет к многоматричным моделям. В *непрерывном* варианте они должны давать **τ-функции** редуцированных КР-иерархий [37] (КД — это $p=2$ редукция), на которые распространяются "непрерывные W-условия") [29]. Матричные модели для таких τ-функций — это модели Концевича с $V(X)\sim X^{p+1}$ [30–33]. Однако на *дискретном* уровне дело обстоит не так просто. Самые распространенные дискретные многоматричные модели [34] определяются как многократные матричные интегралы вида

$$Z_N\{t^{(\alpha)}\} \equiv$$
$$\equiv c_N^{p-1}\int_{N\times N} \mathrm{d}H^{(1)}\ldots \mathrm{d}H^{(p-1)} \prod_{\alpha=1}^{p-1} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k^{(\alpha)} \operatorname{Tr} H_{(\alpha)}^k\right)\times$$
$$\times \prod_{\alpha=1}^{p-2} \exp\left(\operatorname{Tr} H^{(\alpha)}H^{(\alpha+1)}\right) \tag{1.10}$$

(форма "члена взаимодействия" $\operatorname{Tr} H^{(\alpha)}H^{(\alpha+1)}$ ограничена принципом "решаемости", хотя и не вполне однозначно). Эти модели служат частными примерами картановских моделей со скалярным произведением и за исключением одноматричного ($p=2$) и двухматричного ($p=3$) случаев практически никак не выделены среди моделей такого типа. Это находит отражение в отсутствии каких-либо разумных тождеств Уорда и интегрируемых структур для этих моделей, которые бы так или иначе задавали их зависимость от переменных $t^{(\alpha)}$ с $2\leq\alpha\leq p-2$. Поэтому "мультискейлинговый непрерывный предел" этих моделей вряд ли поддается сколько-нибудь строгому исследованию. (С точки зрения "физических" применений не столь уж важно иметь дискретную модель, ассоциированную с непрерывной, однако это интересная проблема с точки зрения "науки для науки".) Для двухматричного ($p=3$) случая тождества Уорда можно выразить в форме "$\tilde{W}$-условий" [38] и оно имеет вид [30]

$$\tilde{W}_{n-m}^{(m+1)}\{t\}Z_N\{t,\bar{t}\} = (-)^{m+n}\tilde{W}_{m-n}^{(n+1)}\{\bar{t}\}Z_N\{t,\bar{t}\} \tag{1.11}$$

(здесь t и $\bar{t}$ обозначают $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$, а m, n — любые *не*отрицательные целочисленные).

Существует действительно интересное множество дискретных многоматричных моделей, но они имеют несколько иную форму (1.10). Эти теории можно обозначить как "конформные матричные модели", поскольку они возникают непосредственно из обобщения формулировки одноматричной модели "в терминах КТП" [39]: достаточно заменить дискретные условия Вирасоро в теории одного свободного поля W_p-условиями в теории $p-1$ свободных полей. Тогда формулировка матричного интеграла включает "член взаимодействия" $\mathit{Det}\left(H^{(\alpha)}\otimes I - I\otimes H^{(\alpha+1)}\right)$ вместо $\exp(\operatorname{Tr} H^{(\alpha)}H^{(\alpha+1)})$, о чем не так легко догадаться *a priori,* но определенные таким образом модели и их непрерывные пределы можно рассматривать точно так же, как в случае одноматричных моделей (правда, этот вопрос пока до конца не разработан). Рассматриваемый подход открывает также возможность формулировать дискретные модели для любого множества связей, например, связанных с более экзотичными W-алгебрами и квантовыми группами (т.е. подход помогает решить обратную проблему *связи* $\longrightarrow$ *дискретная матричная модель*). Этот вариант также заслуживает дальнейшего изучения. Другое естественное наименование для этого множества теорий — "многокомпонентные картановкие модели".

Модели Концевича также следует сопоставить с топологическими моделями гравитации Ландау–Гинзбурга (ГЛГ), хотя все детали связи между ними еще не выяснены (см., однако, [17, 40]).

К числу главных нерешенных загадок во всей этой области относится описание общих (p,q)-моделей. Формально обобщенная модель Концевича (1.7) дает такое описание, однако на самом деле статистическая сумма **(τ-функция)** становится сингулярной при приближении к точке "фазового перехода", где изменяется q, и модель Концевича с $V(X)$ = (*полином степени* $p+1$) дает удовлетворительное описание только $(p,1)$-моделей. Вообще, интеграл Концевича описывает преобразование дуальности между (p,q)- и (q,p)-моделями: $(p,q)\longrightarrow(q,p)$ [41], но ни одну из этих моделей порознь. (Единственным исключением служат $(p,1)$-модели, поскольку они связаны указанным преобразованием с $(1,p)$-моделями, которые вполне тривиальны.)

На самом деле, непрерывные модели имеют два *разных* множества "временных переменных". До сих пор мы вводили T, которые по сути являются параметрами разложения производящего функционала для корреляционных функций. Точнее, параметры $\hat{T}$ зависят от характера модели (вакуума), вокруг которой рассматривается пертурбативное разложение; при этом они несколько отличаются от модельно-независимых T. Другое множество "времен" $r_k = [p/k(p-k)]\mathrm{Res}[V'(\mu)]^{1-k/p}\,\mathrm{d}\mu$ параметризует форму полиномиального "потенциала" $V_p(X)$ (степени $p+1$) и оно задает координаты в пространстве (матричных) моделей. Эти два типа переменных — параметры генерирующего функционала и параметры, характеризующие форму лагранжиана, — практически одинаковы (точнее, они были бы *совершенно* одинаковыми, если бы не существовало петлевых (квантовых) эффектов). Это сходство между T и r отражается в замечательном свойстве статистической суммы $(p+1)$-модели — в ее выраженной зависимости только от *суммы* "времен" $\hat{T}$ и r [40]:

$$\mathcal{Z}_{V_p}\{T\} = f_p(r \mid \hat{T}_k + r_k)\tau_p\{\hat{T}_k + r_k\} \tag{1.12}$$

с некоторой простой (и известной) функцией f_p. (В вышеприведенном уравнении (1.8) для мономного кубического потенциала $V_3(x) = \frac{1}{3}x^3$, $\hat{T}_k = T_k = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\,L^{-k/2}$, тогдакак $r_k = -\frac{2}{3}\delta_{k,3}$.)

Последнее, о чем следует упомянуть в этом общем описании теории матричных моделей, — ее отношение к теории групп. Обобщенная модель Концевича (ОМК) (1.7) тесно связана с "интегрируемой природой" групповых характеристик и с интегралами по коприсоединенным орбитам (характерами всех неприводимых представлений группы $U(n)$ обычно являются τ-функции КП [101]). Некоторые "дискретные" (или квантовые) варианты интеграла Концевича представляют собой суммирование по всем неприводимым представлениям $U(n)$ ("интеграл" по *модели* $U(n)$ или по множеству всех коприсоединенных орбит):

$$\mathcal{F}_V^{\mathrm{qu}}\{G\} \equiv \sum_R d_R\chi_R(G)\exp\left[-\sum_{k=0}^{\infty} v_k C_k(R)\right], \tag{1.13}$$

где d_R, χ_R и $C_k(R)$ — размерность, характер и собственное значение k Казимира для неприводимого представления R группы $U(n)$. Временные переменные $T_k \sim \frac{1}{k}\mathrm{tr}\,G^k$, а потенциал $V(X) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k X^k$. Это выражение может быть обобщено до

$$\mathcal{F}_V^{\mathrm{qu}}\{G\} \equiv \sum_R \chi_R(\bar{G})\chi_R(G)\exp\left[-\sum_{k=0}^{\infty} v_k C_k(R)\right]. \tag{1.14}$$

Свойства этих "квантовых" моделей Концевича подлежат дальнейшему изучению (объекты, подобные (1.13), образуются также в теории локализации, в частности, при изучении двумерной теории ЯМ; см., например, [43, 44]).

Настоящие заметки в основном содержат обзор представлений, разрабатываемых группой исследователей из Москвы (и Киева), а также полученных ею результатов.

В этой работе принимают участие А. Герасимов, А. Забродин, А. Лосев, Ю. Макеенко, А. Маршаков, А. Миронов, А. Михайлов, А. Орлов, С. Пакуляк, И. Полюбин, С. Харчев, Л. Чехов.

Приношу извинение за недостаточно исчерпывающие ссылки на работы других групп.

2. Тождества Уорда для простейших матричных моделей

2.1. Тождества Уорда как уравнения движения

Мы приступаем к систематическому рассмотрению матричных моделей, начиная с их самой простой и в то же время самой фундаментальной характеристики: тождеств Уорда (ТУ) для статистических сумм. Статистическая сумма по определению есть функционал констант связи в лагранжиане, и ТУ следует в данном случае понимать как (дифференциальные или конечно-разностные) уравнения, наложенные на этот функционал. Если статистическая сумма представлена в форме матричного интеграла[4], то ТУ обычно подразумеваются его инвариантностью (или, лучше сказать, ковариантностью) при заменах переменных интегрирования (отсюда название ТУ).

В обычной теории поля, как правило, имеют дело с моделями, в которых ТУ либо вовсе отсутствуют, либо, в лучшем случае, имеется их конечное число — в этом случае говорят, что они отражают наличие в теории какой-то *симметрии*. Однако конечное множество этих ТУ никоим образом не обеспечивает *полное* описание динамики: число (квантовых) уравнений движения (УД) обычно бесконечно, и их решения никогда не задаются ТУ однозначным образом. Различие между ТУ и УД возникает потому, что лагранжианы, рассматриваемые обычной теорией поля, существуют не в самой обобщенной форме: обычно они жестко ограничены "принципами" типа перенормируемости и минимальности. В результате в лагранжиане просто недостаточно много сопрягающих констант для имитации последствий *любого* изменения переменных интегрирования изменением констант связи; поэтому не всякое УД можно представить как (дифференциальное) уравнение для статистической суммы. Иными словами, ограничивая форму лагранжиана по причинам "несимметрийного" свойства, мы разрушаем тем самым громадную первоначальную "симметрию" (ковариантность) модели, которая достаточна для описания всех динамик (всех УД), как диктуемых симметрией; в результате для идентификации УД как ТУ, ассоциированных с исходной огромной симметрией, требуется более широкий подход. Эта симметрия (разумеется, не нётеровского типа) является специфическим свойством всех *квантовомеханических* статистических сумм, поскольку они всегда представляются функциональными интегралами.

Случилось так, что матричные модели стали первым

[4] Во избежание путаницы подчеркнем, что в таком представлении *нет* никакой нужды, во всяком случае, в какой-либо простой его форме. Чем дальше развивается теория матричных моделей, тем реже она имеет дело с *матрицами* и матричными интегралами. Тем не менее (как и в случае полной *теории струн*) первоначальное название по-прежнему сохраняется. Как бы то ни было, главное содержание теории матричных моделей (по крайней мере ее раздела, рассматриваемого в предлагаемых заметках) состоит в поиске *инвариантных* формулировок свойств статистических сумм, тогда как матричные интегралы (если они вообще имеются) рассматриваются как формы их специфической реализации (представления). Более того, могут существовать очень разные представления матричного интеграла одной и той же статистической суммы. Простейший пример: базовая дискретная одноматричная модель, которую можно представить также в форме интеграла Концевича (см. ниже).

классом квантовомеханических систем (функциональных интегралов), для которых тождество

"все УД ≡ всем ТУ"

оказалось не просто курьезным феноменом, но стало объектом тщательного изучения и считается источником точной решаемости (интегрируемости) теории. Разумеется, значение этого факта (и вытекающих из него последствий) ни в коей мере не ограничивается одними матричными моделями, оно вполне универсально, хотя специалисты, работающие в других областях, еще не вполне оценили это. В любом случае, в предлагаемых заметках речь пойдет только о матричных моделях.

Переходим теперь к рассмотрению ТУ, следуя представленному на рис. 3 плану (реально будет рассмотрена только часть из указанных стрелками связей).

2.2. Условия Вирасоро для дискретной одноматричной модели

Важнейший пример [26,27], иллюстрирующий представленные в предшествующих подразделах соображения, — это одноматричная модель

$$Z_N\{t\} \equiv c_N \int_{N\times N} \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right). \tag{2.1}$$

Этот интеграл инвариантен при любом изменении переменных $H \to f(H)$. Удобно выбрать специальный базис в пространстве таких трансформаций:

$$\delta H = \epsilon_n H^{n+1}. \tag{2.2}$$

Здесь ϵ_n — некоторая бесконечно малая матрица и, разумеется, $n \geq -1$. Значение интеграла не изменяется при изменении переменной интегрирования, и мы получаем тождество

$$\int_{N\times N} \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right) = \\ = \int \mathrm{d}(H + \epsilon_n H^{n+1}) \exp\left[\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr}(H + \epsilon_n H^{n+1})^k\right],$$

т.е.

$$\int \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k t_k \operatorname{Tr} H^{k+n} + \operatorname{Tr}\frac{\delta H^{n+1}}{\delta H}\right) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Для нахождения якобиана $\operatorname{Tr}(\delta H^{n+1}/\delta H)$ восстановим матричные индексы:

$$(\delta H^{n+1})_{ij} = \sum_{k=0}^{n} (H^k \delta H H^{n-k})_{ij} = \sum_{k=0}^{n} (H^k)_{il} (\delta H)_{lm} (H^{n-k})_{mj}.$$

В $\operatorname{Tr}(\delta H^{n+1}/\delta H)$ берем $l = i$, а $m = j$, вследствие чего

$$\operatorname{Tr}\frac{\delta H^{n+1}}{\delta H} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Tr} H^k \operatorname{Tr} H^{n-k}. \tag{2.4}$$

Теперь можно отметить, что, поскольку мы начали с лагранжиана самой общей формы (совместного с симметрией $H \to UHU^\dagger$), любую корреляционную функцию можно получить вариацией констант связи (все возможные *источники* включены в качестве контрчленов). Для нашего частного примера это вполне тривиальное замечание:

$$\langle \operatorname{Tr} H^{a_1} \ldots \operatorname{Tr} H^{a_n} \rangle = \\ = \int \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right) \operatorname{Tr} H^{a_1} \ldots \operatorname{Tr} H^{a_n} = \\ = \frac{\partial^n}{\partial t_{a_1} \ldots \partial t_{a_n}} Z_N\{t\}. \tag{2.5}$$

С помощью (2.4) и (2.5) можно переписать (2.3) как

$$L_n Z_N\{t\} = 0, \quad n \geq -1 \tag{2.6}$$

с

$$L_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{n-k}}. \tag{2.7}$$

Заметьте, что согласно определению (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t_0} Z_N = N Z_N.$$

Теперь уместно сделать несколько замечаний.

Во-первых, выражение в скобках (2.3) представляет не что иное, как уравнения движения для модели (2.1), а (2.6) — это всего лишь еще один способ представить то же множество уравнений. Это пример отождествления УД и ТУ.

Во-вторых, коммутатор любых двух операторов L_n в (2.6) должен также занулять $Z_N\{t\}$. Поэтому L_n образуют замкнутую алгебру (Вирасоро):

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m}, \quad n, m \geq -1. \tag{2.8}$$

Это независимое указание (хотя и неисчерпывающее) на то, что мы уже получили *полное* множество условий.

В-третьих, (2.6) можно рассматривать как инвариантное описание Z_n: это решение данного множества совместных дифференциальных уравнений. С этой точки зрения (2.1) это не более чем специальное представление Z_n, что оправдывает поиск и других представлений (позднее мы обсудим два из них: одно в терминах КТП, а другое в понятиях интегралов Концевича).

В-четвертых, можно попытаться проанализировать вопрос о количестве решений системы (2.6). Если их не слишком много, множество условий можно считать полным. Естественный подход к классификации решений алгебры ограничений предполагает использование орбит соответствующих групп [45]. Рассмотрим сверхупрощенный пример, который, тем не менее, может оказаться полезным для понимания смысла полного множества ТУ и выяснения значения классов универсальности и интегрируемости.

Представим, что вместо (2.6) с L_n, определенными в (2.7), имелась бы система несколько более простых уравнений [5]

$$l_n Z = 0, \quad n \geq 0 \quad \text{с} \quad l_n = \sum_{k=1}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}}.$$

[5] Можно назвать их "классическим" приближением к (2.6), так как они появляются, если при выводе (2.6) не принимается во внимание изменение меры (т.е. "квантовые эффекты"). Несмотря на довольно частое использование этой концепции в физике, она не имеет большого значения в данном случае, поскольку мы анализируем *точные* свойства функциональных (матричных) интегралов.

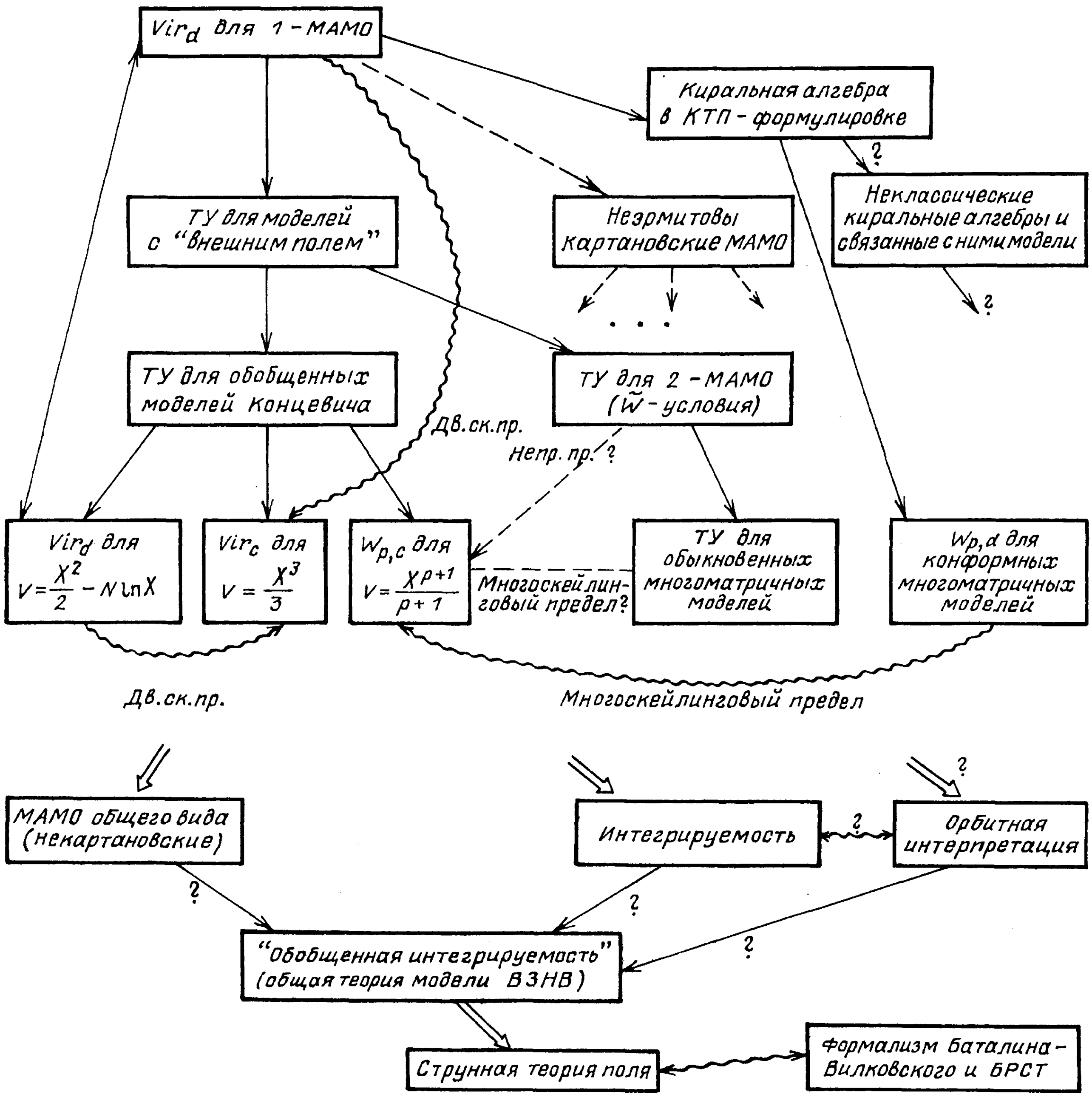

Рис. 3. Тождества Уорда (уравнения движения) для картановских моделей

Оператор l_1 генерирует сдвиги

$$t_2 \longrightarrow t_2 + \epsilon_1 t_1,$$
$$t_3 \longrightarrow t_3 + 2\epsilon_1 t_2,$$
$$\dots$$

Можно использовать его для сдвига t_2 к нулю, тогда уравнение $l_1 Z = 0$ будет подразумевать, что

$$Z(t_1, t_2, t_3, \dots) = Z(t_1, 0, \tilde{t}_3, \dots)$$

$(\tilde{t}_k = t_k - [(k-1)t_2 t_{k-1}/t_1]$,

Далее, оператор l_2 генерирует сдвиги

$$t_3 \longrightarrow t_3 + \epsilon_2 t_1,$$
$$t_4 \longrightarrow t_4 + 2\epsilon_2 t_2,$$
$$\dots$$

и *не* изменяет t_2. Теперь можно использовать уравнение $l_2 Z = 0$, чтобы утверждать, что

$$Z(t_1, t_2, t_3, t_4, \dots) = Z(t_1, 0, \tilde{t}_3, \tilde{t}_4, \dots) = Z(t_1, 0, 0, \tilde{\tilde{t}}_4, \dots)$$

и т.д., предположив что Z не очень сильно зависит от t_k при $t_k \to \infty$ [6], можно заключить, что

$$Z(t_1, t_2, t_3, \dots) = Z(t_1, 0, 0, \dots) = Z(1, 0, 0, \dots)$$

(на последнем этапе также использовано уравнение $l_0 Z = 0$, позволяющее положить $t_1 = 1$).

Все эти соображения правильны при условии, что $t_1 \neq 0$. В иных случаях мы получили бы $Z(0, 1, 0, 0, \dots)$, если $t_1 = 0$, $t_2 \neq 0$ или $Z(0, 0, 1, 0, \dots)$, если $t_1 = t_2 = 0$,

[6] Заметим, что это не вполне естественное предположение в данном конкретном примере, когда группа не имеет компактных орбит.

$t_3 \neq 0$ и т.д. Иными словами, мы получаем классы универсальности (где значения статистической суммы совершенно одинаковы для целого класса), которые в данном сверхупрощенном примере помечены просто номером первой неисчезающей **временно́й** переменной. Анализ структуры орбит для действительно важных случаев реализации групп типа (2.7) в контексте теории матричных моделей никогда не проводился. Следует подчеркнуть, что как мы видели, условия типа Вирасоро могут позволить полностью устранить (точно решить) зависимость от временных переменных. В менее тривиальных примерах они так или иначе влекут появление интегрируемой структуры, что представляет всего лишь несколько усложненный вариант того же феномена решаемости.

2.3. Формулировка матричной модели в понятиях КТП

Располагая полным набором ограничений на статистическую сумму бесконечно многих переменных, образующих некоторую замкнутую алгебру, можно задать обратный вопрос: каким образом решаются эти уравнения или каково интегральное представление статистической суммы? Один из путей получения ответа состоит в анализе орбит, о чем вкратце упоминалось в конце предыдущего раздела. Обратимся теперь к другому методу [39], который основан на аппарате конформной теории поля (КТП). Эти построения могут иметь известный смысл с "физической" точки зрения, устанавливая определенную дуальность между двумерными мировыми поверхностями и спектральными поверхностями, ассоциирующимися с конфигурационным пространством теории струн. Однако сейчас перед нами стоит более формальная задача: использовать средства КТП для решения уравнений типа (2.6).

Это вполне естественно в случае, когда алгебра ограничений является алгеброй Вирасоро, как, например, в одноматричной модели, или какой-либо другой алгеброй, которая, естественно, появляется в некоторых простых конформных моделях в форме киральной алгебры. Подход, который предстоит обсудить, имеет весьма общий характер и может быть применен для конструирования матричных моделей, ассоциирующихся с большим числом различных алгебраических структур.

Начнем с множества уравнения (2.6), которые в последующем будем называть "дискретными условиями Вирасоро". Интересная КТП-формулировка должна обеспечивать решение этих уравнений в форме некоторой корреляционной функции в конформной теории поля. Очевидно, это происходит естественно, если идентифицировать операторы L_n, образующие алгебру Вирасоро с гармониками тензора энергии-импульса T_n, которые удовлетворяют той же алгебре, и связать условие, что L_n зануляет коррелятор, с утверждением, что T_n зануляет вакуумное состояние. Таким образом, процедура, естественно, распадается на две стадии: во-первых, предстоит найти зависимый от t оператор ("гамильтониан") $H(t)$ типа

$$L_n(t)\langle e^{H(t)} \ldots = \langle e^{H(t)} T_n \ldots \tag{2.9}$$

Это свяжет дифференциальные операторы L_n с T_n, выраженными через поля конформационной модели. Во-вторых, необходимо перечислить состояния, которые зануляются операторами T_n с $n \geq -1$, т.е. решить уравнение

$$T_n \mid G\rangle = 0 \tag{2.10}$$

для ket-состояний, что является уже внутренней проблемой КТП. При условии нахождения обоих составляющих $H(t)$ и $\mid G\rangle$ решением (2.6) является

$$\langle e^{H(t)} \mid G\rangle. \tag{2.11}$$

Для большей ясности в случае дискретных условий Вирасоро поиск решений можно проводить в терминах простейшей из возможных конформных моделей: модели голоморфного скалярного поля

$$\phi(z) = \hat{q} + \hat{p}\ln z + \sum_{k\neq 0} \frac{J_{-k}}{k} z^k,$$
$$[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad [\hat{q}, \hat{p}] = 1. \tag{2.12}$$

В этом случае процедура выглядит так. Определяем вакуумные состояния

$$J_k|0\rangle = 0, \qquad \langle N|J_{-k} = 0, \qquad k > 0$$
$$\hat{p}|0\rangle = 0, \qquad \langle N|\hat{p} = N\langle N|, \tag{2.13}$$

тензор энергии-импульса

$$T(z) = \frac{1}{2}[\partial\phi(z)]^2 = \sum T_n z^{-n-2},$$
$$T_n = \sum_{k>0} J_{-k}J_{k+n} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{a+b=n\\ a,b\geq 0}} J_a J_b, \tag{2.14}$$

и гамильтониан

$$H(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k>0} t_k J_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\oint_{C_0} U(z)J(z),$$
$$U(z) = \sum_{k>0} t_k z^k, \qquad J(z) = \partial\phi(z). \tag{2.15}$$

Легко проверить, что

$$L_n\langle N|e^{H(t)} \ldots = \langle N|e^{H(t)} T_n \ldots \tag{2.16}$$

и

$$T_n|0\rangle = 0, \qquad n \geq -1. \tag{2.17}$$

Непосредственным следствием этого будет то, что любой коррелятор вида

$$Z_N\{t \mid G\} = \langle N|e^{H(t)} G|0\rangle \tag{2.18}$$

дает решение (2.6) при условии, что

$$[T_n, G] = 0, \qquad n \geq -1. \tag{2.19}$$

Операторы G, коммутирующие с тензором энергии импульса, хорошо известны: это просто любые функции "экранирующих зарядов" [7]

[7] Для упрощения обозначения мы опускаем знаки нормального упорядочения. На самом деле имеем операторы $:e^H:$ и $:e^{\pm\sqrt{2}\phi}:$

$$Q_{\pm} = \oint J_{\pm} = \oint e^{\pm\sqrt{2}\phi}. \tag{2.20}$$

Коррелятор (2.18) будет неисчезающим, только если удовлетворяются правила отбора на нулевые моды ϕ. Требование, чтобы оператор зависел только от Q_+, будет означать, что только один член разложения по степеням Q_+ внесет вклад в (2.18), причем результат фактически не будет зависеть от выбора функции $G(Q_+)$. Можно, например, взять $G(Q_+) = \exp(Q_+)$ и получить

$$Z_N\{t\} \sim \frac{1}{N!}\langle N|e^{H(t)}(Q_+)^N|0\rangle. \tag{2.21}$$

Этот коррелятор легко оценить, используя теорему Вика и пропагатор $\phi(z)\phi(z') \sim \ln(z-z')$; в конечном счете получим

$$\begin{aligned} Z_N\{t\} &= \frac{1}{N!}\langle N|: \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\oint_{C_0} U(z)\partial\phi(z)\right]: \\ &: \prod_{i=1}^{N}\oint_{C_i} dz_i : \exp\left[\sqrt{2}\phi(z_i)\right] :|0\rangle = \\ &= \frac{1}{N!}\prod_{i=1}^{N}\oint_{C_i} dz_i \exp[U(z_i)]\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

т.е. представление в форме многократного интеграла, который на самом деле может быть непосредственно связан с матричным интегралом в (2.1) (см. [46] и следующий раздел).

Таким образом, в простейшем случае мы решили обратную проблему: реконструировали представление интеграла по множеству условий Вирасоро. Однако полученный ответ выглядит несколько более общим, чем (2.1): правая часть уравнения (2.22) сохраняет зависимость от контуров интегрирования. Более того, можно вспомнить, что обсуждавшийся выше оператор G зависит не только от Q_+, но и от Q_-. Самая общая формула немного сложнее уравнения (2.22):

$$\begin{aligned} Z_N\{t \mid C_i, C_r\} &\sim \frac{1}{(N+M)!M!}\langle N|e^{H(t)}(Q_+)^{N+M}(Q_-)^M|0\rangle = \\ &= \frac{1}{(N+M)!M!}\prod_{i=1}^{N+M}\oint_{C_i} dz_i e^{U(z_i)}\prod_{r=1}^{M}\oint_{C'_r} dz'_r e^{U(z'_r)} \times \\ &\times \frac{\prod_{i<j}^{N+M}(z_i-z_j)^2\prod_{r<s}^{N}(z'_r-z'_s)^2}{\prod_i^{N+M}\prod_r^M(z_i-z_r)^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Проблема зависимости от контура более подробно рассмотрена в [39]. В известном смысле все эти разные интегралы можно рассматривать как ответвления одной **аналитической функции** $Z_N\{t\}$. Зависимость от M в (2.23) эффективно устраняется интегрированием Коши вокруг полюсов знаменателя в (2.23).

Рассмотренные построения могут быть непосредственно применены к другим алгебрам условий при следующих обстоятельствах:

I. Если в рамках КТП известны свободнополевые представления алгебры, причем генераторы являются *полиномами* по полям ϕ (лишь в этом случае просто простроить гамильтониан H, который устанавливает связь между реализацией алгебры в КТП с ее реализацией в терминах дифференциальных операторов, выраженных в t-переменных; фактически при этих условиях H обычно линеен в t и ϕ). Известны случаи (представление Френкеля-Каца алгебр Каца–Муди типа АДЕ) уровня $k=1$ [47] или общего вида редукций модели ВЗНВ [16,48–51], когда генераторы являются *экспонентами* свободных полей; тогда эту конструкцию следует несколько модифицировать.

II. Если несложно найти вакуум, аннигилируемый соответствующими генераторами (в этом месте возникает проблема использования данного подхода для случая "непрерывных" условий Вирасоро и W-условий). Решение этой проблемы требует анализа корреляторов на римановых поверхностях с нетривиальными топологиями, зачастую бесконечного рода.

III. Если в конформной модели известно свободнополевое представление "экранирующих зарядов", т.е. операторов, коммутирующих с генераторами группы.

Эти условия выполняются во многих случаях в рамках КТП, в том числе в случае обычных $\mathbf{W}$-алгебр [52] и $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных моделей[8] [53].

В порядке иллюстрации приводим несколько формул из недавней работы [39] для случая $\mathbf{W}_{r+1}$-условий, ассоциированных с алгебрами $\mathcal{A}$ типа АДЕ и ранга r.

Статистическая сумма в такой "конформной многоматричной модели" представляет собой функцию "времен" $t_k^{(\lambda)}$, $k=0\ldots\infty$, $\lambda=1\ldots r=$ранга $\mathcal{A}$ и, кроме того, зависит от целочисленного r-вектора $\mathbf{N}=\{N_1\ldots n_r\}$. Наложенные на статистическую сумму условия имеют вид

$$W_n^{(a)}(t)Z_N^{\mathcal{A}}\{t\} = 0, \quad n \geq 1-a, \quad a = 2\ldots r+1. \tag{2.24}$$

W-операторы выглядят несколько громоздко, например в случае $r+1=3$ (т.е. $\mathcal{A}=A_2[SL(3)]$)

$$\begin{aligned} W_n^{(2)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(kt_k\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + k\bar{t}_k\frac{\partial}{\partial\bar{t}_{k+n}}\right) + \\ &+ \sum_{a+b=n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_b} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{t}_a\partial\bar{t}_b}\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} W_n^{(3)} &= \sum_{k,l>0}\left(kt_klt_l\frac{\partial}{\partial t_{k+n+l}} - k\bar{t}_kl\bar{t}_l\frac{\partial}{\partial t_{k+n+l}} - 2kt_kl\bar{t}_l\frac{\partial}{\partial\bar{t}_{k+n+l}}\right) + \\ &+ 2\sum_{k>0}\left[\sum_{a+b=n+k}\left(kt_k\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_b} - kt_k\frac{\partial^2}{\partial\bar{t}_a\partial\bar{t}_b} - 2k\bar{t}_k\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial\bar{t}_b}\right)\right] + \\ &+ \frac{4}{3}\sum_{a+b+c=n}\left(\frac{\partial^3}{\partial t_a\partial t_b\partial t_c} - \frac{\partial^3}{\partial t_a\partial\bar{t}_b\partial\bar{t}_c}\right), \end{aligned} \tag{2.26}$$

а два типа временных переменных, обозначаемых через t_k и $\bar{t}_k$, связаны с двумя *ортогональными* направлениями в картановской плоскости A_2:

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\mathbf{e}} = \frac{\sqrt{3}\mathbf{v}_2}{\sqrt{2}}.^{9}$$

---

[8] В случае $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии проблема возникает из-за отсутствия приемлемых экранирующих зарядов. На самом наивном уровне оператор, подлежащий интегрированию по суперпространству (по $dz\,d^{\mathcal{N}}\theta$) для получения экранирующего заряда, имеет размерность $1-\frac{1}{2}\mathcal{N}$, т.е. нулевую при $\mathcal{N}=2$

[9] Такой ортогональный базис особенно удобен для обсуждения интегрируемых свойств модели; эти t и $\bar{t}$ представляют собой линейные комбинации времен t_k^{λ}, появляющихся в уравнениях (2.27) и (2.32).

Однако все другие формулы очень просты. Конформная модель — это обычно модель r-свободных полей, $S \sim \int \bar{\partial}\boldsymbol{\varphi}\,\partial\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}^2 z$, которую используют для описания представления алгебры Каца–Муди уровня один, ассоциированной с $\mathcal{A}$. Гамильтониан

$$H(t^{(1)}\ldots t^{(r+1)}) = \sum_{\lambda=1}^{r+1}\sum_{k>0} t_k^{(\lambda)}\boldsymbol{\mu}_\lambda \boldsymbol{J}_k, \tag{2.27}$$

где $\{\boldsymbol{\mu}_\lambda\}$ связан с векторами "фундаментального веса" $\boldsymbol{\nu}_\lambda$ в картановской суперплоскости и в простейшем случае $\mathcal{A} = A_r(SL(r+1))$ удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{\mu}_\lambda \cdot \boldsymbol{\mu}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} - \frac{1}{r+1}, \qquad \sum_{\lambda=1}^{r+1}\boldsymbol{\mu}_\lambda = 0,$$

Таким образом, только r из временных переменных $t^{(1)},\ldots,t^{(r+1)}$ являются линейно независимыми. Связь между дифференциальными операторами $W_n^{(a)}(t)$ и операторами $\mathrm{W}_n^{(a)}$ в КТП теперь определяется уравнением

$$\begin{aligned} &W_n^{(a)}\langle N|e^{H(t)}\ldots = \langle N|e^{H(t)}\mathrm{W}_i^{(a)}\ldots\,, \\ &a = 2,\ldots,p; \qquad i \geq 1-a, \end{aligned} \tag{2.28}$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_n^{(a)} &= \oint z^{a+n-1}\mathrm{W}^{(a)}(z), \\ \mathrm{W}^{(a)}(z) &= \sum_\lambda [\boldsymbol{\mu}_\lambda \partial\boldsymbol{\varphi}(z)]^a + \ldots \end{aligned} \tag{2.29}$$

являются генераторами $\mathbf{W}_{r+1}^{\mathcal{A}}$ алгебры. Экранирующие заряды, которые коммутируют со всеми $\mathrm{W}^{(a)}(z)$, имеют вид

$$Q^{(\alpha)} = \oint J^{(\alpha)} = \oint e^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varphi}}, \tag{2.30}$$

где $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ — корни конечно-размерной алгебры $\mathcal{A}$ Ли типа АДЕ.

Таким образом, статистическая сумма может быть представлена в виде

$$Z_N^{\mathcal{A}}\{t\} = \langle N|e^{H(t}G\{Q^{(\alpha)}\}|0\rangle, \tag{2.31}$$

где G — экспоненциальная функция экранирующих зарядов. Оценка свободнополевого коррелятора дает

$$\begin{aligned} Z_N^{\mathcal{A}}\{t\} \sim \int \prod_\alpha \left[\prod_{i=1}^{N_\alpha} \mathrm{d}z_i^{(\alpha)} \exp\left(\sum_{\lambda;\,k>0} t_k^{(\lambda)}(\boldsymbol{\mu}_\lambda \boldsymbol{\alpha})(z_i^{(\alpha)})^k\right)\right] \times \\ \times \prod_{(\alpha,\beta)}\prod_{i=1}^{N_\alpha}\prod_{j=1}^{N_\beta}(z_i^{(\alpha)} - z_j^{(\beta)})^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Это выражение можно переписать в терминах r-матричного интеграла — "конформной матричной модели":

$$\begin{aligned} Z_N^{\mathcal{A}}\{t^{(\alpha)}\} &= c_N^{p-1}\int_{N\times N} \mathrm{d}H^{(1)}\ldots \mathrm{d}H^{(p-1)} \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^{p-1}\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k^{(\alpha)}\,\mathrm{Tr}\,H_{(\alpha)}^k\right) \times \\ &\times \prod_{(\alpha,\beta)}\mathrm{Det}\Big(H^{(\alpha)}\otimes I - I\otimes H^{(\alpha+1)}\Big)^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

В простейшем случае алгебры $\mathbf{W}_3$ уравнение (2.32) с вставкой только двух (из шести) экранирующих зарядов Q_{α_1} и Q_{α_2} превращается в

$$\begin{aligned} Z_{N_1,N_2}^{A_2}(t,\bar{t}) &= \frac{1}{N_1!N_2!}\langle N_1,N_2|e^{H(t,\bar{t})}(Q^{(\alpha_1)})^{N_1}(Q^{(\alpha_2)})^{N_2}|0\rangle = \\ &= \frac{1}{N_1!N_2!}\prod_i\int \mathrm{d}x_i e^{U(x_i)}\prod_j\int \mathrm{d}y_j e^{\bar{U}(y_i)}\Delta(x)\Delta(x,y)\Delta(y), \end{aligned} \tag{2.34}$$

где $\Delta(x,y) \equiv \Delta(x)\Delta(y)\prod_{i,j}(x_i - y_j)$. Эта модель ассоциируется с алгеброй $\mathcal{A} = A_2$ $(SL(3))$, тогда как исходная одноматричная модель (2.21)-(2.23) — с $\mathcal{A} = A_1$ $(SL(2))$.

Всю серию моделей (2.32), (2.33) для $\mathcal{A} = A_r$ $(SL(r+1))$ отличает связь с алгебрами Каца-Муди типа АДЕ уровня $k = 1$. В этом частном случае базовая конформная модель имеет целочисленный центральный заряд $c = r = \mathrm{rank}\,\mathcal{A}$ и может быть "ферминизована"[10]. Главной особенностью этой формулировки является квадратичность токов Каца–Муди по фермионным полям (эти токи после интегрирования превращаются в "экранирующие заряды" в вышеприведенной конструкции), тогда как в свободнобозонной формулировке они представлены экспонентами.

Фермионная (спинорная) модель естественно обладает $GL(r+1)$, а не $SL(r+1)$ симметрией (другие алгебры типа АДЕ могут быть вставлены в более обширные GL-алгебры, что обеспечивает для них фермионное описание в случае $k = 1$). Модель содержит $r+1$ полей ψ_i спина 1/2 и сопряженные к ним $\tilde{\psi}_i$ (b,c-системы):

$$S = \sum_{j=1}^{r+1}\int \tilde{\psi}_j\bar{\partial}\psi_j\,\mathrm{d}^2 z,$$

центральный заряд $c = r+1$, а операторная алгебра

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j(z)\psi_k(z') &= \frac{\delta_{jk}}{z-z'} + :\tilde{\psi}_j(z)\psi_k(z'):\,, \\ \psi_j(z)\psi_k(z') &= (z-z')\delta_{jk} :\psi_j(z)\psi_k(z'): + \\ &+ (1-\delta_{jk}) :\psi_j(z)\psi_k(z'):\,, \\ \tilde{\psi}_j(z)\tilde{\psi}_k(z') &= (z-z')\delta_{jk} :\tilde{\psi}_j(z)\tilde{\psi}_k(z'): + \\ &+ (1-\delta_{jk}) :\tilde{\psi}_j(z)\tilde{\psi}_k(z'):\,. \end{aligned}$$

Токи Каца–Муди уровня $k = 1$ $GL(r+1)$ — это $J_{jk} =: \tilde{\psi}_j\psi_k:$ $j,k = 1\ldots r+1$, а экранирующие заряды $Q^{(\alpha)} = \mathrm{i}E_{jk}^{(\alpha)}\oint :\tilde{\psi}_j\psi_k:$, где $E_{jk}^{(\alpha)}$ отвечают корням $\boldsymbol{\alpha}$ в матричном представлении $GL(r+1)$. Картановская подалгебра представлена J_{jj}, а положительные и отрицательные борелевские подалгебры — J_{jk} с $j<k$ и $j>k$ соответственно. В уравнении (2.23)

$$Q_+ = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_1\psi_2, \qquad Q_- = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_2\psi_1,$$

[10] Это возможно только для очень специальных алгебр Каца–Муди; Фермионное представление важно для *обычной* формулировки интегрируемости, обычно подразумевающей *коммутирование* гамильтоновых потоков (а не просто порождение ими замкнутой алгебры) и фермионную реализацию универсального пространства модулей как универсального грассманиана. Эти ограничения довольно произвольны и могут быть устранены (хотя во всех подробностях эта операция не производилась), см. ниже раздел 4, где этот вопрос обсуждается более детально.

а в уравнении (2.34)

$$Q^{(\alpha_1)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_1\psi_2, \qquad Q^{(\alpha_2)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_1\psi_3$$
$$Q^{(\alpha_3)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_2\psi_3, \qquad Q^{(\alpha_4)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_2\psi_1,$$
$$Q^{(\alpha_5)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_3\psi_1, \qquad Q^{(\alpha_6)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_3\psi_2.$$

Подстановка $Q^{(\alpha_6)}$ вместо $Q^{(\alpha_2)}$ в (2.34) не изменяет ответ. Аналогичный выбор "соседних" (не простых!) корней (имеющих скалярные продукты $+1$ или 0) для общего r приводит к отбору следующих экранирующих операторов

$$Q^{(1)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_1\psi_2,\ Q^{(2)} = -\mathrm{i}\oint\psi_2\tilde{\psi}_3,\ Q^{(3)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_3\psi_4, \ldots,$$

т.е. $Q^{(j)} = \mathrm{i}\oint\tilde{\psi}_j\psi_{j+1}$ для нечетных j и $Q^{(j)} = -\mathrm{i}\oint\psi_j\tilde{\psi}_{j+1}$ для четных j.

2.4. Уравнение Гросса–Ньюмана

Рассмотрим теперь ТУ для другого вида матричных моделей, относящихся по меньшей мере к двум важным классам: обычным дискретным двухматричным моделям и моделям Концевича. Как разъяснялось во Введении, теории второго вида возникают при рассмотрении непрерывных матричных моделей типа $(p, 1)$, а также при изучении топологических теорий Ландау–Гинзбурга. Двухматричные модели отличаются богатством непрерывных пределов и могут давать представителей всех классов универсальности (p, q). (Однако этот аспект проблемы не разработан, и мы его здесь не обсуждаем.)

Отправной точкой и исходным примером служит интеграл

$$\mathcal{F}_{V,n}\{L\} \equiv \int_{n\times n} \mathrm{d}X e^{-\operatorname{tr} V(X) + \operatorname{tr} LX} \tag{2.35}$$

по эрмитовой матрице $n \times n$, который в дальнейшем мы будем называть "интегралом Концевича", имея в виду его самое важное приложение (хотя этот очевидный объект, разумеется, рассматривался и многими другими авторами). Может казаться, что действие этого интеграла *не* самого общего типа и что больше нельзя *произвольно* изменять переменные $X \longrightarrow f(X)$, не изменяя функциональную форму интеграла. Но это не так, поскольку "внешнее поле" L имеет значения в матрицах и линейно сопряжено с X; поэтому *любой* коррелятор X-полей можно представить через L-производные. Рассмотрим снова сдвиг $X \to X + \epsilon_n X^{n+1}$, $n \geq -1$. Инвариантность интеграла подразумевает, что

$$\int \mathrm{d}X e^{-\operatorname{tr} V(X) + \operatorname{tr} LX} \operatorname{tr}\, \epsilon_n\big(-X^{n+1}V'(X) + LX^{n+1} + \\ + \sum_{k=0}^{n} X^k \operatorname{tr} X^{n-k}\big) = 0,$$

которое можно переписать в форме [11]

$$\operatorname{tr}\, \epsilon_n\left(\left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{n+1} V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right) + L\left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{n+1} + \\ + \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{k} \operatorname{tr}\left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{n-k}\right)\mathcal{F}_V\{L\} = \\ = \operatorname{tr}\, \epsilon_n\left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{n+1}\left(V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right) - L\right)\mathcal{F}_V\{L\} = 0. \tag{2.36}$$

Эта система фактически эквивалентна единственному матрично-значному уравнению

$$\left(V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right) - L\right)\mathcal{F}_V\{L\} = 0. \tag{2.37}$$

Насколько мне известно, это уравнение было впервые выписано в [54], в связи с нем его можно называть уравнением Гросса–Ньюмана (ГН). Оно было переоткрыто в [24,30,38], где исследовано также его значение для теории матричных моделей.

В следующих двух подразделах будут в основном обсуждаться два вида вопросов. Во-первых, уравнение ГН будет использовано для характеристики самой функции $\mathcal{F}_V\{L\}$. Это позволит рассмотреть модели Концевича. Во-вторых, уравнение ГН будет использовано для выведения уравнений для двухматричной модели, возникающей после дальнейшего интегрирования $\mathcal{F}_V\{L\}$ с некоторым весом по L.

2.5. Тождества Уорда для обобщенной модели Концевича

Уравнение ГН (2.37) в качестве полного набора уравнений движения дает исчерпывающую информацию о функции $\mathcal{F}_V\{L\}$. Однако это утверждение нуждается в более актуальной формулировке. Такая необходимость вытекает, в частности, из того, что операторы

$$\operatorname{tr} L^m\left(V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right) - L\right) \tag{2.28}$$

не образуют замену той алгебры: их коммутаторы имеют несколько иную функциональную форму. Одна из причин этих осложнений заключается в том, что уравнение (2.37) не отражает достаточно явно очень важное свойство $\mathcal{F}_V\{L\}$: эта функция в действительности зависит только от собственных значений L. Эту информацию так или иначе следует добавить к уравнению ГН. Более подробно вопрос о зависимости от собственных значений будет проанализирован в следующих разделах. В данном случае этот аргумент подразумевает необходимость представить уравнение (2.37) в терминах собственных значений. Однако здесь снова следует проявлять осторожность. Очевидно, что $\mathcal{F}_V\{L\}$ зависит не просто от собственных значений — она зависит от их "симметричных" (инвариантных по отношению к группе Вейля) комбинаций, т.е. не столько от конкретных собственных значений, сколько от величин типа $\operatorname{tr} L^a$. Более того, степени a должны быть здесь либо отрицательными, либо дробными.

Интегралы, подобные (2.35), обычно понимают как аналитическое продолжение определенных значений параметров в потенциале V, когда интеграл сходится. Их можно соотнести также с формальным (пертурбативным) рядом, возникающим при разложении подынте-

[11] Здесь использовано очевидное соотношение $X_{\gamma\delta}e^{\operatorname{tr} LX} = \partial/\partial L_{\delta\gamma} e^{\operatorname{tr} LX}$. Заметим, что порядок матричных индексов $\gamma\delta$ в правой части обратен порядку в левой, т.е. это производные по отношению к *транспонированной* матрице L: $f(X)e^{\operatorname{tr} LX} = f(\partial/\partial L_{\mathrm{tr}})e^{\operatorname{tr} LX}$ (по крайней мере для любой функции $f(x)$, которую можно представить как формальный целочисленным степеням X).

грального выражения вокруг стационарной точки. Для начала целесообразно взять $n = 1$, т.е. рассмотреть обычный интеграл. Для простоты принимаем также $V(x) = -[x^{p+1}/(p+1)]$. Тогда стационарная точка находится при $x = \lambda^{1/p}$ и

$$\int \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{x^{p+1}}{p+1} + lx\right) \sim \\ \sim l^{-(p-1)/2} \exp\left(\frac{p}{p+1} l^{(p+1)/p}\right) \sum_{k \geqslant 0} c_k l^{-k/p}. \tag{2.39}$$

Теперь нетрудно понять, что́ следует предпринять в общей ситуации с матрицами и произвольными потенциалами. Прежде всего необходимо решить уравнение для стационарной точки $V'(X) = L$. Для этой цели удобнее всего ввести новую матричную переменную Λ вместо L, которая по определению удовлетворяет $V'(\Lambda) = L$. Тогда стационарная точка просто $X = \Lambda$. После этого отделяют аналог сложного предмножителя (квазиклассического вклада):

$$\mathcal{C}_V\{\Lambda\} = (2\pi)^{n^2/2} \frac{\exp[\operatorname{tr}(\Lambda V'(\Lambda) - V(\Lambda))]}{\sqrt{\det V''(\Lambda)}}. \tag{2.40}$$

Тогда функция, описывающая чистый "квантовый" вклад [12]

$$\mathcal{Z}_V\{T\} \equiv \mathcal{C}_V\{\Lambda\}^{-1} \mathcal{F}_V\{V'(\Lambda)\} \tag{2.41}$$

и называемая статистической функцией обобщенной модели Концевича (ОМК) [30], может быть представлена как формальный (пертурбативный) ряд по степеням переменных

$$T_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \Lambda^{-k}. \tag{2.42}$$

Теперь уравнение ГН (2.37) можно переписать как множество дифференциальных уравнений для $\mathcal{Z}_V\{T\}$. В самом деле, мы уже имеем

$$\mathcal{C}_V^{-1}\left(V'\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right) - L\right)\mathcal{C}_V \mathcal{Z}_V\{T\} = 0, \tag{2.43}$$

однако еще необходимо выразить оператор в левой части в терминах T. Это можно сделать, используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}} \mathcal{Z}_V\{T\} = \sum_k \frac{\partial T_k}{\partial L_{\mathrm{tr}}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial T_k} \tag{2.44}$$

и заменяя следы Λ-матриц, которые возникают в процессе расчета, на T. Важно, что Λ всегда появляется в отрицательных степенях: это достигается выбором подходящего нормирочного фактора $\mathcal{C}_V\{\Lambda\}$, что особенно просто для мономиального потенциала

$$V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}: \qquad L = \Lambda^p \text{ и } \frac{\partial T_k}{\partial L_{\mathrm{tr}}} = -\frac{1}{p} \Lambda^{-p-k}.$$

Эта аргументация позволяет тождественно переписать уравнение (2.43) в форме

$$\sum_l \Lambda^{-l} \mathcal{O}_l(T) \mathcal{Z}_V\{T\} = 0, \tag{2.45}$$

где $\mathcal{O}_l$ — некоторые дифференциальные операторы, зависящие от формы V, но не зависящие от размера n матрицы (поскольку выше мы нигде не ссылались на конкретные значения n, за исключением иллюстративного примера в начале этого раздела). Остается использовать тот факт, что матрица L может быть как угодно велика и иметь произвольно много независимых собственных значений, для того чтобы прийти к заключению, что мы вывели множество связей по $\mathcal{Z}_V$ в форме

$$\mathcal{O}_l(T) \mathcal{Z}_V\{T\} = 0. \tag{2.46}$$

Для потенциала V степени $p+1$ они образуются "непрерывными W_p-условиями". Подробный анализ случая Вирасоро, т.е. $p = 2$ (ассоциирующегося с чистой топологической гравитацией и двойным скейлинговым пределом одноматричной модели) содержится в [24,30], а исчерпывающее представление случая $p = 3$ — в [55].

2.6. Дискретные условия Вирасоро для гауссовой модели Концевича

В качестве простейшей иллюстрации подхода, описанного в предыдущем параграфе, выведем условия для гауссовой модели Концевича [56] с потенциалом $V(X) = \frac{1}{2}X^2$:

$$\mathcal{Z}_{\frac{X^2}{2}}\{N, T\} = \frac{\exp\left[-\operatorname{tr}\frac{L^2}{2}\right]}{(\det L)^N} \times \\ \times \int \mathrm{d}X (\det X)^N \exp\left(-\operatorname{tr}\frac{X^2}{2} + LX\right). \tag{2.47}$$

В этом случае $L = V'(\Lambda) = \Lambda$, а временные переменные

$$T_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \Lambda^{-k} = \frac{1}{k} \operatorname{tr} L^{-k}. \tag{2.48}$$

Чтобы сделать модель нетривиальной, вводится лишняя переменная "нулевого времени" N [36], которая отсутствовала в предыдущем определении (2.41). Заметим теперь, что зависимость интеграла Концевича (2.35) от N можно описать просто как лишний член в потенциале: $V(X) \to \hat{V}(X) = V(X) - N \ln X$ (хотя этого *нельзя* сделать ни в квазиклассическом факторе $\mathcal{C}_V$, ни в определении временных переменных T). Поскольку уравнение ГН зависит только от интеграла Концевича, в нем можно сделать замену V на $\hat{V}$. Тогда вместо (2.43) будем иметь

$$\frac{\exp\left(-\operatorname{tr}\frac{L^2}{2}\right)}{(\det L)^N} \left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{m+1} \left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}} - N\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^{-1} - L\right) \times \\ \times (\det L)^N \exp\left(+\operatorname{tr}\frac{L^2}{2}\right) \mathcal{Z}_{\frac{X^2}{2}}\{N, T\} = 0. \tag{2.49}$$

---

[12] "Классическое действие" в (2.40) можно представить так же, как $\operatorname{tr}(\Lambda V'(\Lambda) - V(\Lambda)) = \operatorname{tr} \int \Lambda \, \mathrm{d}V'(\Lambda)$. Детерминант квадратичных флуктуаций равен

$$(2\pi)^{n^2/2} (\det V''(\Lambda))^{-1/2} \sim \int \mathrm{d}Y e^{-\operatorname{tr} V_2(\Lambda, Y)},$$

где $V_2(\Lambda, Y) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} (1/\epsilon^2)(V(\Lambda + \epsilon Y) - V(\Lambda) - \epsilon V'(\Lambda) Y)$. Для $V(\Lambda) = (\Lambda^{p+1}/(p+1))$ имеем $V''(\Lambda) = (\sum_{k=0}^{p-1} \Lambda^k \otimes \Lambda^{p-k-1})$. Можно было бы выбрать "противоположную" параметризацию в уравнении (2.42): $T_k = -(1/k) \operatorname{tr} \Lambda^{-k}$. Хотя это не вполне очевидно, такое изменение никогда не влияет на результаты (см. пример в разделе 2.10). Наш выбор знаков мотивирован упрощением формул для ОМК, в том числе соотношения между L и Λ. Взамен в формулах, относящихся к тода-подобным представлениям статистических сумм или включающих операторы $\tilde{W}$, появляются некоторые знаковые множители.

Чтобы освободиться от интегрального оператора $(\partial/\partial L)^{-1}$, следует взять $n \geq 0$, а не $n \geq -1$. Все уравнения с $n > 0$ вытекают из уравнения с $n = 0$, и мы ограничиваемся обсуждением этого последнего уравнения. Для $m=0$ получаем из (2.49)

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}+\frac{N}{L}+L\right)^2-2N-L\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}+\frac{N}{L}+L\right)\right)\mathcal{Z}=0,$$

или

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^2+\left(L+\frac{2N}{L}\right)\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}+\frac{N^2}{L^2}-\frac{N}{L}\mathrm{tr}\frac{1}{L}\right)\mathcal{Z}=0, \qquad (2.50)$$

после чего остается подставить

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L_{\mathrm{tr}}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{L^{k+1}}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial T_k},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial L_{\mathrm{tr}}^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{a=1}^{k+1}\frac{1}{L^{k+2-a}}\mathrm{tr}\frac{1}{L^a}\right)\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial T_k}+\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{1}{L^{k+l+2}}\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial T_k \partial T_l}=$$

$$=\sum_{m=-1}^{\infty}\frac{1}{L^{m+2}}\left(\sum_{k>\max(m,0)}\left(\mathrm{tr}\frac{1}{L^{k-m}}\right)\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial T_k}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial T_k \partial T_{m-k}}\right),$$

получив в результате

$$\sum_{m=-1}^{\infty}\frac{1}{L^{m+2}}\left(\sum_{k=1+\delta_{m,-1}}^{\infty}\left(\mathrm{tr}\frac{1}{L^k}\right)\frac{\partial}{\partial T_{k+m}}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial T_k \partial T_{m+k}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial T_{m+2}}-2N\frac{\partial}{\partial T_m}+N^2\delta_{m,0}-N\left(\mathrm{tr}\frac{1}{L}\right)\delta_{m,-1}\right)\mathcal{Z}=$$

$$=\sum_{m=-1}^{\infty}\frac{1}{L^{m+2}}e^{NT_0}L_m(T+r)e^{-NT_0}\mathcal{Z}=0. \qquad (2.51)$$

Здесь $L_m(t)$ представлены генераторами (2.7) дискретной алгебры Вирасоро (2.6):

$$e^{Nt_0}L_m(t)e^{-Nt_0}=e^{Nt_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}kt_k\frac{\partial}{\partial t_{k+m}}+\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{m-k}}\right)e^{-Nt_0}, \qquad (2.52)$$

а $r_k = -\frac{1}{2}\delta_{k,2}$, в правой части (2.51)[13].

Таким образом, мы установили, что ТУ гауссовой модели Концевича (2.47) совпадают с ТУ обычной одноматричной модели. Более того, размер матрицы N в последней модели ассоциируется с "нулевым временем" в первой. Очевидно, что этот результат [56] подразумевает идентичность обеих моделей:

$$e^{-NT_0}\mathcal{Z}_{\frac{X^2}{2}}\{N,T_1,T_2,\ldots\}\sim Z_N\{T_0,T_1,T_2,\ldots\}. \qquad (2.53)$$

Прямая связь между этими двумя матричными интегралами (2.1) и (2.47) будет обсуждаться в следующем разделе, после того как будут представлены дополнительные сведения о структуре "картановских" матричных моделей.

2.7. Непрерывные условия Вирасоро для модели Концевича $V = \frac{1}{3}X^3$

Этот пример несколько сложнее, чем рассмотренный в предыдущем разделе 2.6, и мы не приводим расчеты во всех деталях (см. [24, 30]). Наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать, что возникающие в этой модели условия на статсумму, хотя они все еще образуют борелевскую подалгебру некоторой алгебры Вирасоро, *отличаются* от (2.6). С точки зрения формулировки в терминах КТП подходящей моделью являются твистованные (в данном конкретном случае — антипериодические) свободные поля. Эти так называемые "непрерывные условия Вирасоро" служат простейшей иллюстрацией различия между "однородным" (Каца-Френкеля) и "главным" (солитонным или вершинно-операторным) представлениями алгебры Каца–Муди уровня $k = 1$. С точки зрения интегрируемых иерархий — это различие между иерархиями, подобными цепочкам Тоды и КП-подобным иерархиям. Мы еще вернемся к более детальному обсуждению этого различия при рассмотрении "мультискейлингового непрерывного предела".

Другой (исторически первый) аспект того же соотношения также заслуживает упоминания, ибо он иллюстрирует взаимосвязь между разными моделями. Дискретная одноматричная модель, естественно, возникает при описании двумерной квантовой гравитации путем суммирования по 2-геометриям в формализме произвольных равносторонних триангуляций. Однако эта модель описывает только решеточную аппроксимацию двумерной гравитации, и для получения реальной (непрерывной) теории двумерной гравитации приходится брать двойной скейлинговый непрерывный предел. Этот предел был первоначально сформулирован в понятиях алгебры связей (уравнений движения или "петлевых" — или "швингер-дайсоновских" уравнений, в данном случае выбор термина — дело вкуса), а вопрос о форме статистической функции $\mathcal{Z}^{\mathrm{cont}}\{T\}$ непрерывной теории оставался открытым. Тот факт, что непрерывным пределом алгебры оказываются в точности ТУ для модели Концевича с $\left(V(X) = \frac{1}{3}X^3\right)$ доказывает, что последняя как раз и является непрерывной теорией чистой двумерной гравитации. В то же время, сама по себе модель Концевича может быть естественно введена в качестве теории *топологической* гравитации (фактически, именно так она и была первоначально открыта в [22]). С этой точки зрения алгебра связей, которая будет описана ниже в этом подразделе, играет ключевую роль в доказательстве эквивалентности чистой двумерной квантовой гравитации и чистой *топологической* гравитации (в обоих случаях определение "чистая" означает отсутствие полей "материи").

[13] Эта небольшая поправка служит проявлением весьма общего феномена: с точки зрения симметрий (тождеств Уорда) более естественно рассматривать Z_v не как функцию T-переменных, а как функцию несколько более сложной комбинации $\hat{T}_k + r_k$, зависящей от формы потенциала V. Если V — полином степени $p+1$, $\hat{T}_k = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\,(V'(\lambda))^{-k/p}$, то

$$r_k = \frac{p}{k(p-k)}\mathrm{Res}(V'(\mu))^{1-k/p}\,d\mu$$

Для мономиальных потенциалов эти выражения приобретают очень простую форму $\hat{T}_k = T_k$ и $r_k = -p/(p+1)\delta_{k,p+1}$. Дополнительные подробности содержатся в [39] и в разделе 4.9. Во многих местах настоящих заметок мы предпочитаем использовать инвариантные, не зависимые от потенциала времена T_k, вместо $\hat{T}_k$, но тогда тождества Уорда приобретают некоторые лишние члены с r_k (которые в наших примерах, связанных исключительно с потенциалами мономиального типа, будут очень простыми).

После этих вступительных замечаний перейдем к расчетам. Они фактически повторяют расчеты для гауссовой модели, приведенные в предыдущем параграфе, хотя теперь сложность формул возрастает. На этот раз мы не включаем нулевое время N, а просто используем уравнение (2.37) с $V(X) = \frac{1}{3}X^3$. Теперь гораздо сложнее (хотя и возможно) работать в матричных значениях (поскольку имеются дробные степени L), и мы переписываем все выражения в терминах собственных значений L.

Подставляем

$$\mathcal{C}_{\frac{X^3}{3}} = \frac{\prod_\delta \exp\left(\frac{2}{3}\lambda_\delta^{3/2}\right)}{\sqrt{\prod_{\gamma,\delta}(\sqrt{\lambda_\delta}+\sqrt{\lambda_\gamma})}},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial L_{\mathrm{tr}}^2}\right)_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_\gamma^2} + \sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}-\frac{\partial}{\partial\lambda_\delta}\right)$$

и вводим специальное обозначение для

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda_\gamma} \equiv \mathcal{C}^{-1}_{\frac{X^3}{3}}\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}\mathcal{C}_{\frac{X^3}{3}} = = \frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma} + \sqrt{\lambda_\gamma} - \frac{1}{4\lambda_\gamma} - \frac{1}{2}\sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma}(\sqrt{\lambda_\delta}+\sqrt{\lambda_\gamma})}.$$

Тогда (2.37) превращается в

$$\left(\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda_\gamma}\right)^2 + \sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda_\gamma}-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda_\delta}\right)\right)\mathcal{Z}_{\frac{X^3}{3}}\{T\} = 0. \tag{2.54}$$

Теперь требуется точное выражение для T:

$$T_k = \frac{1}{k}L^{-k}, \tag{2.55}$$

и, как мы уже знаем из предыдущего подраздела, потребуется также величина

$$r_k = -\frac{2}{3}\delta_{k,3}. \tag{2.56}$$

Объяснение этому будет дано не ранее, чем мы перейдем к обсуждению интегрируемой структуры модели Концевича в следующем разделе, однако сейчас можно отметить, что $\mathcal{Z}_{\frac{1}{3}X^3}\{T\}$ не зависит от всех временных переменных T_k с *четными* индексами k. Поэтому можно взять только $k = 2a+1$ в (2.55) и (2.56):

$$T_{2a+1} = \frac{1}{2a+1}\sum_\delta \lambda_\delta^{-a-1/2},$$
$$r_{2a+1} = -\frac{2}{3}\delta_{a,1} \tag{2.57}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}\mathcal{Z}_{\frac{X^3}{3}}\{T\} = \sum_{a=0}^{\infty}\frac{\partial T_{2a+1}}{\partial\lambda_\gamma}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}} = -\frac{1}{2}\sum_{a=0}^{\infty}\lambda_\gamma^{-a-3/2}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_\gamma^2}\mathcal{Z}_{\frac{X^3}{3}}\{T\} = \frac{1}{4}\sum_{a,b=0}^{\infty}\lambda_\gamma^{-a-b-3}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}\partial T_{2b+1}} + \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{\infty}\left(a+\frac{3}{2}\right)\lambda_\gamma^{-a-5/2}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}}.$$

Теперь эти выражения следует подставить в (2.54), что даст

$$\frac{1}{4}\sum_{a,b=0}^{\infty}\lambda_\gamma^{-a-b-3}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}\partial T_{2b+1}} + \sum_{a=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{a=0}^{\infty}\left(a+\frac{3}{2}\right)\lambda_\gamma^{-a-5/2} - \frac{1}{2}\sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\left(\lambda_\gamma^{-a-3/2}-\lambda_\delta^{-a-3/2}\right) - \left(\sqrt{\lambda_\gamma}-\frac{1}{4\lambda_\gamma}-\frac{1}{2}\sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma}(\sqrt{\lambda_\delta}+\sqrt{\lambda_\gamma})}\right)\lambda_\gamma^{-a-3/2}\right]\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial T_{2a+1}} + [\ldots]\mathcal{Z} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\gamma^{n+2}}\mathcal{L}_{2n}\mathcal{Z} \tag{2.58}$$

с

$$\mathcal{L}_{2n} = \sum_{a=0}^{\infty}\left(a+\frac{1}{2}\right)(T_{2a+1}+r_{2a+1})\frac{\partial}{\partial T_{2a+2n+1}} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{a+b=n-1\\ a,b\geq 0}}\frac{\partial^2}{\partial T_{2a+1}\partial T_{2b+1}} + \frac{1}{16}\delta_{n,0} + \frac{1}{4}T_1^2\delta_{n,-1} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{odd}\ k=1}^{\infty}k(T_k+r_k)\frac{\partial}{\partial T_{k+2n}} + \frac{1}{4}\sum_{\mathrm{odd}\ k=1}^{2n-1}\frac{\partial^2}{\partial T_k\partial T_{2n-k}} + \frac{1}{16}\delta_{n,0} + \frac{1}{4}T_1^2\delta_{n,-1}. \tag{2.59}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ перед первым членом в правой части (2.59) важен по той причине, что $\mathcal{L}_{2n}$ должно удовлетворять правильно нормированной алгебре Вирасоро[14]:

$$[\mathcal{L}_{2n}, \mathcal{L}_{2m}] = (n-m)\mathcal{L}_{2n+2m}.$$

Коэффициент $\frac{1}{4}$ перед вторым членом можно устранить рескейлингом времен: $T \to \frac{1}{2}T$; тогда последний член превращается в $\frac{1}{16}T_1^2\delta_{n,-1}$.

Мы не приводим подробное вычисление коэффициента перед $\mathcal{Z}$ (без производных), который обозначается как [...] в (2.58) (см. [24, 30]). Почти все члены в исходном сложном выражении сокращаются, давая в конечном итоге

$$[\ldots] = \frac{1}{16\lambda_\gamma^2} + \frac{T_1^2}{4\lambda_\gamma},$$

что представлено членами с $\delta_{n,0}$ и $\delta_{n,-1}$ в выражениях (2.59) для генераторов Вирасоро $\mathcal{L}_{2n}$.

Член с двойным T-производным в (2.58) уже имеет необходимую форму. Вычисление коэффициента перед $\partial\mathcal{Z}/\partial T_{2a+1}$ в (2.58) является операцией промежуточной сложности и мы ее кратко опишем. Прежде всего перепишем этот коэффициент, переупорядочивая члены:

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{3}{2}\right)\lambda_\gamma^{-a-5/2} - \sum_{\delta\neq\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\left(\lambda_\gamma^{-a-3/2}-\lambda_\delta^{-a-3/2}\right)\right] + \left[\frac{1}{4}\lambda_\gamma^{-a-5/2} + \frac{1}{2}\sum_{\delta\neq\gamma}\frac{\lambda_\gamma^{-a-2}}{\sqrt{\lambda_\delta}+\sqrt{\lambda_\gamma}}\right] - \lambda_\gamma^{-a-1}. \tag{2.60}$$

[14] Поэтому целесообразно использовать другое обозначение: $\mathcal{L}_n$ вместо $\mathcal{L}_{2n}$. Мы предпочитаем $\mathcal{L}_{2n}$, потому что этим подчеркивается тот факт, что модель описывает 2 редукцию.

Первые два члена вместе равны сумме по *всем* j (включая $j = i$):

$$-\frac{1}{2}\sum_{\delta}\frac{1}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\left(\lambda_\gamma^{-a-3/2}-\lambda_\delta^{-a-3/2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\delta}\frac{\lambda_\gamma^{a+3/2}-\lambda_\delta^{a+3/2}}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\cdot\frac{1}{\lambda_\gamma^{a+3/2}\lambda_\delta^{a+3/2}}=$$
$$=\frac{1}{2\lambda_\gamma^{a+2}}\sum_{\delta}\frac{\lambda_\gamma^{a+2}-\lambda_\gamma^{1/2}\lambda_\delta^{a+3/2}}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\cdot\frac{1}{\lambda_\delta^{a+3/2}}.$$

Сходным образом следующие два члена можно переписать в форме

$$\frac{1}{2}\sum_{\delta}\frac{\lambda_\gamma^{-a-2}}{\sqrt{\lambda_\gamma}+\sqrt{\lambda_\delta}}=\frac{1}{2\lambda_\gamma^{a+2}}\sum_{\delta}\frac{\sqrt{\lambda_\gamma}-\sqrt{\lambda_\delta}}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}=$$
$$=\frac{1}{2\lambda_\gamma^{a+2}}\sum_{\delta}\frac{\lambda_\gamma^{\frac{1}{2}}\lambda_\delta^{a+3/2}-\lambda_\delta^{a+2}}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\cdot\frac{1}{\lambda_\delta^{a+3/2}}.$$

Сумма этих двух выражений равна

$$\frac{1}{2\lambda_\gamma^{a+2}}\sum_{\delta}\frac{\lambda_\gamma^{a+2}-\lambda_\delta^{a+2}}{\lambda_\gamma-\lambda_\delta}\cdot\frac{1}{\lambda_\delta^{a+3/2}}.$$

Заметим теперь, что степени $a+2$ — это уже целые величины и оставшееся отношение можно представить как сумму $a+3$ членов. Добавляя также последний член из левой части уравнения (2.60), получаем в итоге

$$-\frac{1}{\lambda_\gamma^{a+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{a}\frac{1}{\lambda_\gamma^{n+2}}\sum_{\delta}\frac{1}{\lambda_\delta^{a-n+1/2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{a}\frac{1}{\lambda_\gamma^{n+2}}(2a-2n+1)(T+r)_{2a-2n+1}$$

в соответствии с (2.58) и (2.59).

2.8. $\hat{\mathbf{W}}$-условия для асимметричной двухматричной модели

Обратимся теперь к совершенно иному приложению [38] уравнения ГН (2.37). Более конкретно, рассмотрим $\mathcal{F}_{V,n}\{L\}$ как конструкционный элемент дискретной двуматричной модели

$$Z_N\{t,\bar t\}\equiv$$
$$\equiv c_N^2\int dH\,d\bar H\exp\left[\sum_k\left(t_k\operatorname{Tr}H^k+\bar t_k\operatorname{Tr}\bar H^k\right)+\operatorname{Tr}H\bar H\right]=$$
$$=\int dL\exp\left(\sum_k t_k\operatorname{Tr}L^k\right)\mathcal{F}_{\bar U,N}\{L\}. \qquad (2.61)$$

Здесь L играет роль H, а $\bar U(\bar H)=\sum_k\bar t_k\bar H^k$.

Теперь можно использовать уравнение ГН, чтобы вывести соотношение для $Z_N\{t,\bar t\}$. Возьмем (2.37)

$$\left(\bar U\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}+L\right)\mathcal{F}_{\bar U,N}\{L\}=0, \qquad (2.62)$$

умножим его на $\exp\left[\operatorname{Tr}U(L)\right]=\exp\left(\sum_k t_k\operatorname{Tr}L^k\right)$ и проинтегрируем по L. Для того чтобы выразить это соотношение в терминах t-производных от Z, необходимо иметь "скалярные", а не *матричные* уравнения, поэтому нам потребуется взять след (2.62). Во избежание потери информации сначала умножим (2.62) на L^n, а уже *потом* возьмем след. При этом получим

$$\int dL\exp\left(\sum_k t_k\operatorname{Tr}L^k\right)\operatorname{Tr}L^n\left(\bar U\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)+L\mathcal{F}_{\bar U}\{L\}=0.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int dL\mathcal{F}_{\bar U}\{L\}\operatorname{Tr}\left(\bar U-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}+L\right)L^n\exp\left(\sum_k t_k\operatorname{Tr}L^k\right). \qquad (2.63)$$

Теперь необходимо ввести новый класс операторов [38]. Рассмотрим действие $\operatorname{Tr}[\partial^m/\partial L_{\mathrm{tr}}^m]L^n$ на $\exp[\operatorname{Tr}U(L)]=\exp\left(\sum_k t_k\operatorname{Tr}L^k\right)$. Оно дает некоторую линейную комбинацию членов типа

$$\operatorname{tr}L^{a_1}\ldots\operatorname{tr}L^{a_l}e^{\operatorname{tr}U(L)}=\frac{\partial^l}{\partial t_{a_1}\ldots\partial t_{a_l}}e^{-\operatorname{tr}U(L)}$$

т.е. получаем комбинацию дифференциальных операторов с t-производными, которую обозначим $\tilde W(t)$:

$$\tilde W_{n-m}^{(m+1)}(t)e^{\operatorname{tr}U(L)}\equiv\operatorname{Tr}\frac{\partial^m}{\partial L_{\mathrm{tr}}^m}L^ne^{\operatorname{tr}U(L)},\qquad m,n\ge 0. \qquad (2.64)$$

Например,

$$\tilde W_n^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t_n},\quad n\ge 0;$$
$$\tilde W_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{\infty}kt_k\frac{\partial}{\partial t_{k+n}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t_k\partial t_{n-k}},\quad n\ge -1;$$
$$\tilde W_n^{(3)}=\sum_{k,l=1}^{\infty}kt_klt_l\frac{\partial}{\partial t_{k+l+n}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}kt_k\sum_{a+b=k+n}\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_b}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}kt_k\sum_{a+b=n+1}\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_{b+k-1}}+$$
$$+\sum_{a+b+c=n}\frac{\partial^3}{\partial t_a\partial t_b\partial t_c}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{\partial}{\partial t_n}, \qquad (2.65)$$
$$\ldots$$

Отметим, что в то время как $\tilde W_n^{(1)}$ и $\tilde W_n^{(2)}$ — просто обычные операторы Каца–Муди U(1) и Вирасоро, соответственно высшие операторы $\tilde W^{(m)}$ не совпадают с генераторами алгебр $\mathbf{W}$; уже

$$\tilde W_n^{(3)}\ne W^{(3)}=\sum_{k,l=1}^{\infty}kt_klt_l\frac{\partial}{\partial t_{k+l+n}}+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}kt_k\sum_{a+b=k+n}\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_b}+$$
$$+\frac{4}{3}\sum_{a+b+c=n}\frac{\partial^3}{\partial t_a\partial t_b\partial t_c}.$$

$\tilde W$-операторы (в отличие от обычных W-операторов) удовлетворяют рекурсионному уравнению

$$\tilde{W}_n^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \tilde{W}_{n+k}^{(m)} + \\ + \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{\partial}{\partial t_k} \tilde{W}_{n-k}^{(m)}, \qquad n \geq -m. \tag{2.66}$$

Фактически об операторах $\tilde{W}$ и структуре $\tilde{\mathbf{W}}$ алгебр известно немного (остается, в частности, неясно, можно ли сколько-нибудь разумно ввести отрицательные гармоники $\tilde{W}_n^{(m+1)}$ с $n < -m$; см. некоторые предварительные результаты в [38].

Теперь уравнение (2.63) можно представить в терминах $\tilde{W}$-операторов:

$$\int \mathrm{d}L \mathcal{F}_{\bar{U}}\{L\} \left(\sum_{k\geq 1} k\bar{t}_k \left(-\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}} \right)^{k-1} + L \right) L^n e^{\mathrm{Tr}\, U(t)} = \\ = \left(\sum_{k\geq 1} (-)^{k-1} k\bar{t}_k \tilde{W}_{n+1-k}^{(k)} + \tilde{W}_{n+1}^{(1)} \right) Z_N\{t, \bar{t}\} = 0. \tag{2.67}$$

Это соотношение в высшей степени асимметрично в t и $\bar{t}$ и фактически обеспечивает приемлемое описание ТУ только в несколько особом случае, когда потенциал $\bar{U}(\bar{H})$ является полиномом *конечной* степени. Обсуждение таких асимметричных моделей имеется в [38, 57].

2.9. $\tilde{\mathbf{W}}$-условия для двухматричной модели общего вида

Когда оба потенциала U и $\bar{U}$ в (2.61) являются формальными рядами общего вида, уравнение (2.67) представляет только однопараметрическое подмножество двухпараметрического семейства ТУ. Прежде чем описывать полное множество, подчеркнем, что двухматричная модель — это как раз тот случай (2.61), в котором действие имеет *не* самую общую форму, совместную с некоторой симметрией. Поэтому оно не обладает ковариантностью при произвольном изменении переменных $H, \bar{H} \longrightarrow f(H, \bar{H}), \bar{f}(H, \bar{H})$, и обычный метод вывода тождеств Уорда здесь непригоден. Причина, по которой максимально общая двухматричная модель с действием, содержащим все возможные комбинации $\mathrm{Tr}(H^{a_1} \bar{H}^{b_1} H^{a_2} \bar{H}^{b_2} \ldots)$, никогда серьезно не рассматривалась, состоит главным образом в недостаточном понимании унитарно-матричных интегралов для "*не*картановских" теорий, к классу которых относятся такие модели. По причинам, которые будут разъяснены в следующем разделе, эти проблемы не возникают в случае моделей вида (2.61) или (2.33); именно поэтому им до сих пор уделялось так много внимания. Можно надеяться, что затруднения с унитарно-матричными моделями носят временный характер, и этот ограниченный класс многоматричных моделей будет расширен; это особенно легко сделать в той части теории, которая имеет дело с алгебрами связей, однако эта проблема выходит за рамки настоящего обзора.

Для того чтобы вывести полное множество ТУ для модели (2.61), воспользуемся следующим полуискусственным приемом. Заметьте, что экспонента $\exp(\mathrm{Tr}\, H\bar{H})$ удовлетворяет

$$\left(\mathrm{Tr}\, H^n \frac{\partial^m}{\partial \bar{H}_{\mathrm{tr}}^m} - \mathrm{Tr}\, \bar{H}^m \frac{\partial^n}{\partial H_{\mathrm{tr}}^n} \right) e^{\mathrm{Tr}\, H\bar{H}} = 0. \tag{2.68}$$

Проинтегрируем это тождество по H и $\bar{H}$ с весом $\exp\left[\mathrm{Tr}\, U(H) + \mathrm{Tr}\, \bar{U}(\bar{H})\right]$, а потом проинтегрируем по частям. Получим тождество

$$\int \mathrm{d}H \mathrm{d}\bar{H} e^{\mathrm{Tr}\, H\bar{H}} \left(\mathrm{Tr} \left(-\frac{\partial}{\partial H_{\mathrm{tr}}} \right)^m H^n - \\ - \mathrm{Tr} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{H}_{\mathrm{tr}}} \right)^n \bar{H}^m \right) e^{\mathrm{Tr}\, U(H) + \mathrm{Tr}\, \bar{U}(\bar{H})} = 0, \tag{2.69}$$

которое можно представить в терминах $\tilde{W}$-операторов [30]:[15]

$$\tilde{W}_{n-m}^{(m+1)}(t) Z\{t, \bar{t}\} = (-)^{m-n} \tilde{W}_{m-n}^{(n+1)}(\bar{t}) Z\{t, \bar{t}\}, \, . \tag{2.70}$$

для всех $m, n \geq 0$.

Это полное (?) множество ТУ для двухматричной модели. Когда один из потенциалов (скажем, $U(t)$) представлен полиномом конечной степени, большая часть этой симметрии "спонтанно разрушается", а сохраняющаяся часть описывается уравнениями (2.67).

Помимо всего прочего, уравнение (2.70) выявляет любопытный автоморфизм алгебры $\tilde{\mathbf{W}}_\infty$:

$$\tilde{W}_{n-m}^{(m+1)} \longleftrightarrow \tilde{W}_{m-n}^{(n+1)}, \qquad m, n \geq 0, \tag{2.71}$$

В частности, борелевская подалгебра Вирасоро образована не только операторами $\tilde{W}_n^{(2)}$, но и операторами $\tilde{W}_{-n}^{(n+2)}$, $n \geq -1$ (тогда как борелевская подалгебра $\widehat{u(1)}$ — не только операторами $\tilde{W}_n^{(1)} = \partial/\partial t_n$, но также операторами $\tilde{W}_n^{(n+1)}$, $n \geq 0$).

Можно попытаться применить эту же процедуру, чтобы получить тождества $\tilde{W}$ для обычной $(p-1)$-матричной модели с $p - 1 > 2$. В принципе, это возможно, но, к сожалению, получаемые при этом уравнения не имеют изящной формы и их недостаточно много. Тем не менее, в порядке иллюстрации в оставшейся части этого раздела 2.9 мы кратко представим некоторые возможные формулы.

Рассмотрим многоматричный интеграл

$$Z = \int \mathrm{d}H_1 \ldots \mathrm{d}H_{p-1} \exp\left[\mathrm{Tr}\, U_1(H_1) + \ldots \\ + \mathrm{Tr}\, U_{p-1}(H_{p-1})\right] \ldots \times \\ \times \exp\left[\mathrm{Tr}(H_1 H_2 + H_2 H_3 + \ldots + H_{p-2} H_{p-1})\right]. \tag{2.72}$$

Действуя на Z, оператор $\tilde{W}_{n-m}^{(m+1)}(t^{(1)})$ порождает вставку $\mathrm{Tr}\, H_1^n (\partial/\partial H_{1,\mathrm{tr}})^m$ в положении … в (2.72). Интегрирование по частям дает

$$\mathrm{Tr}\, H_1^n \left(-\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{1,\mathrm{tr}}} \right)^m \longrightarrow (-)^m \mathrm{Tr}\, H_1^n H_2^m = (-)^m \mathrm{Tr}\, H_2^m H_1^n.$$

[15] Соотношения (2.68) и, следовательно, (2.70) очевидно связано с $\mathrm{Tr}\, H^n \bar{H}^m$. Разумеется, существуют сходные соотношения, в том же смысле ассоциированные с любым объектом, подобным $\mathrm{Tr}(H^{a_1} \bar{H}^{b_1} H^{a_2} \bar{H}^{b_2} \ldots)$, и с произведениями таких следов: достаточно заменить все $\bar{H} \to \partial/\partial H_{\mathrm{tr}}$, чтобы получить левую и все $H \to \partial/\partial \bar{H}_{\mathrm{tr}}$, чтобы получить правую части уравнения (следует помнить только, что такие подстановки возможны скажем, в левой части, если все $\bar{H}$ находятся справа от H. Чтобы вывести правильную формулу, следует внимательно учитывать все коммутаторы, возникающие при переносе $\partial/\partial H_{\mathrm{tr}}$ назад в исходное положение соответствующего $\bar{H}$). Все такие соотношения могут рассматриваться как следствия уравнения (2.70).

В случае $p - 1 = 2$, который обсуждался выше, это тождество можно переписать, как

$$(-)^m \operatorname{Tr} H_1^m \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{2,\mathrm{tr}}} \right)^n,$$

а интегрирование по частям дает

$$(-)^m \operatorname{Tr} H_2^m \left(-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial H_{2,\mathrm{tr}}} \right)^n,$$

что эквивалентно действию $(-)^{m+n}\tilde{W}_{m-n}^{(n+1)}(t^{(2)})$ на Z; таким образом, мы воспроизводим уравнение (2.70).

Сложнее обстоит дело в случае $p - 1 > 2$. Вставка $\operatorname{Tr} H_2^m H_1^n$ эквивалентна

$$\operatorname{Tr} H_2^m \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{2,\mathrm{tr}}} - H_3 \right)^n,$$

что после интегрирования по частям и действий на $e^{U_2(H_2)}$ дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} H_2^m &\left(-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial H_{2,\mathrm{tr}}} - H_3 \right)^n \sim \\ \sim \operatorname{Tr} H_2^m &\left(\sum_k k t_k^{(2)} H_2^{k-1} - H_3 \right) \times \\ \times &\left(-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial H_{2,\mathrm{tr}}} - H_3 \right)^{n-1} \sim \ldots \end{aligned} \tag{2.73}$$

Производные, оставшиеся в правой части, должны быть пронесены сквозь первую скобку, после чего они действуют на $\exp[U_2(H_2)]$ и т.д. В конце концов, получаем линейную комбинацию членов вида $\operatorname{Tr} H_2^{b_1} H_3^{c_1} H_2^{b_2} H_3^{c_2} \ldots$ с зависимыми от $t^{(2)}$ коэффициентами.

Далее, в случае матричной модели с $p - 1 = 3$, каждое H_2 справа от H_3 может быть сразу заменено на $\partial/\partial H_{3,\mathrm{tr}}$; в остальных случаях необходимо также включать члены с коммутаторами, возникающие при переносе этого $\partial/\partial H_{3,\mathrm{tr}}$ назад, к месту, где стояло H_2. При этом получается комбинация вставок вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} &\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{3,\mathrm{tr}}} \right)^{b_1} H_3^{c_1} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{3,\mathrm{tr}}} \right)^{b_2} H_3^{c_2} \ldots \sim \\ \sim \operatorname{Tr} &\left(-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial H_{3,\mathrm{tr}}} \right)^{b_1} H_3^{c_1} \left(-\frac{\vec{\partial}}{\partial H_{3,\mathrm{tr}}} \right)^{b_2} H_3^{c_2} \ldots \end{aligned} \tag{2.74}$$

Образующийся оператор можно выразить через $\tilde{W}(t^{(3)})$ и получить тождество, утверждающее, что определенная алгебраическая комбинация $\tilde{W}(t^{(1)})$ и $\tilde{W}(t^{(3)})$ с зависимыми от $t^{(2)}$ коэффициентами аннигилирует статистическую сумму.

Для $p - 1 > 3$ вставка H_2 эквивалентна вставке $\partial/\partial H_{3,\mathrm{tr}} - H_4$, а не $\partial/\partial H_{3,\mathrm{tr}}$; и эту процедуру необходимо повторять вновь и вновь. В конце концов получаем связи, в которых операторами служат алгебраические комбинации $\tilde{W}(t^{(1)})$ и $\tilde{W}(t^{(p-1)})$ с коэффициентами, зависящими от $t^{(2)}, \ldots, t^{(p-2)}$ (более того, они содержат бесконечные $\tilde{W}$-операторы, если только все промежуточные потенциалы $U_2, \ldots, U_{p-2}$ не являются полиномами *конечной* степени.

Конечно, эта процедура не сильно облегчает понимание теории и фактически с ее помощью никогда не удавалось получить конкретные тождества в изящной форме. Зато она может служить для иллюстрации проблем, характерных для исследования обычных многоматричных моделей (во всяком случае, для $p - 1 > 2$). Кроме того, она подчеркивает красоту *конформных* многоматричных моделей, которые уже имеют явные преимущества на уровне тождеств Уорда.

2.10. $\tilde{W}$-операторы в модели Концевича

После введения $\tilde{W}$-операторов можно переписать уравнение ГН (2.43) для моделей Концевича в терминах $\tilde{W}$. Докажем следующее тождество [38]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}} \right)^{m+1} &\mathcal{Z}\{T_k\} = \\ &= (\pm)^{m+1} \sum_{l \geq 0} \Lambda^{-l-1} \tilde{W}_{l-m}^{(m+1)}(T) \mathcal{Z}\{T_k\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

для *любой* функции $\mathcal{Z}$, зависящей от $T_k = \mp \frac{1}{k} \operatorname{tr} \Lambda^{-k}$, $k \geq 1$ и $T_0 = \pm \operatorname{tr} \ln \Lambda$ с $n \times n$-матрицей Λ. Применимость тождества (2.75) наиболее очевидна в гауссовой модели (2.47), т.е. для преобразования уравнения (2.50) в уравнение (2.51) (напомним, что в этом случае $L \neq \Lambda$). В других случаях расчеты с использованием тождества (2.75), учитывающие квазиклассический множитель $\mathcal{C}_V\{L\}$ и различие между $L = V'(\Lambda)$ и Λ становятся более сложными, хотя они по-прежнему достаточно прямолинейны. Статистическая сумма $\mathcal{Z}_V\{T\}$ при определенных значениях потенциалов $V(X)$ фактически не зависит от некоторых (комбинаций) времен (например, если $V(X) = X^{p+1}/(p+1)$, она не зависит от всех T_{pk}, $k \in Z_+$), что существенно для появления условий связи в такой стандартной форме, как уравнения (2.58), (2.59), т.е. для определенных *редукций* $\tilde{W}$-условий к обычным W-условиям. Эта связь между операторами $\tilde{W}$ и W заслуживает дальнейшего изучения.

Доказательство уравнения (2.75) осуществляется следующим приемом. Сделаем преобразование Фурье:

$$\mathcal{Z}\{T\} = \int \mathrm{d}H\, \mathcal{G}\{H\} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} T_k \operatorname{Tr} H^k \right), \tag{2.76}$$

где интегрирование осуществляется по эрмитовой матрице H размера $N \times N$.[16] В этом случае понятно, что если тождество (2.75) справедливо, когда вместо $\mathcal{Z}\{T\}$ подставлено $\exp\left[\operatorname{Tr} U(H)\right]$, $U(H) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k \operatorname{Tr} H^k$ из любой матрицы H, оно справедливо также для *любой* **функции** $\mathcal{Z}\{T\}$. Преимущество такой подстановки заключается в возможности использовать определение (2.64) для операторов $\tilde{W}$, чтобы переписать (2.75) в более явной форме:

[16] Здесь мы впервые сталкиваемся с важной мыслью: матричные модели, в данном случае обычная одноматричная модель (2.1), могут рассматриваться как задающие интегральные преобразования. Это наблюдение может оказаться существенным при определении роли матричных моделей в дальнейшем развитии теории струн.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\right)^{m+1} e^{{\rm Tr}\,U(H)} = (\pm)^{m+1} \sum_{l\geq 0}^{\infty} \Lambda^{-l-1} \tilde{W}_{l-m}^{(m+1)}(T) e^{{\rm Tr}\,U(H)} =$$
$$= (\pm)^{m+1} \sum_{l\geq 0}^{\infty} \Lambda^{-l-1} \,{\rm Tr} \left(\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)^m H^l e^{{\rm Tr}\,U(H)} =$$
$$= (\pm)^{m+1}\, {\rm Tr} \left(\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)^m \frac{1}{\Lambda\otimes I - I\otimes H} e^{{\rm Tr}\,U(H)}. \qquad (2.77)$$

Теперь следует использовать выражение для T в терминах Λ. Тогда

$$e^{{\rm Tr}\,U(H)} = Det^{\pm 1}(\Lambda\otimes I - I\otimes H),$$

а подставляя его в (2.77), видим, что (2.75) эквивалентно

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\right)^{m+1} - (\pm)^{m+1} I\cdot {\rm Tr}\left(\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)^m \frac{1}{\Lambda\otimes I - I\otimes H}\right)\times$$
$$\times\, Det^{\pm 1}(\Lambda\otimes I - I\otimes H) = 0.$$

Здесь "Tr" означает след только в пространстве H, тогда как $Det = {\rm Det}\otimes \det$ — детерминант в обоих H и Λ пространствах. Беря явно одну производную по Λ, получаем

$$(I\otimes {\rm Tr})\left(\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\right)^m \otimes I - I\otimes \left(\pm \frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)^m\right)\times$$
$$\times \frac{Det^{\pm 1}(\Lambda\otimes I - I\otimes H)}{\Lambda\otimes I - I\otimes H} = 0. \qquad (2.78)$$

Это уже матричное тождество, справедливое для любых Λ- и H-размеров, соответственно, $n\times n$ и $N\times N$. Например, оно полностью удовлетворяется, если $m=0$ ($\tilde{W}^{(1)}$-случай). Если оба $n=N=1$, оно тоже тривиально истинно, хотя и по разным причинам при разном выборе знаков: для верхних знаков отношение в левой части равно единице и все производные исчезают; для нижних знаков имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m - \left(-\frac{\partial}{\partial h}\right)^m =$$
$$= \left(\sum_{\substack{a+b=m-1\\ a,b\geq 0}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a \left(-\frac{\partial}{\partial h}\right)^b\right)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial h}\right),$$

и это также равно нулю, поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial h}\right) f(\lambda - h) \equiv 0$$

для любых $f(x)$.

Если $m>0$, а Λ и H действительно матрицы, прямая оценка значительно усложняется. Приведем первые два нетривиальных примера: $m=1$ и $m=2$. В этом случае полезны следующие соотношения. Пусть $Q\equiv 1/(\Lambda\otimes I - I\otimes H)$. Тогда

$$Det^{\pm 1} Q \frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}} Det^{\mp 1} Q = \pm[(I\otimes {\rm Tr})Q],$$
$$Det^{\pm 1} Q \frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}} Det^{\mp 1} Q = \mp[({\rm tr}\otimes I)Q],$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\otimes I\right) Q = -[({\rm tr}\otimes I)Q]Q,$$
$$\left(I\otimes \frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right) Q = [(I\otimes {\rm Tr})Q]Q. \qquad (2.79)$$

Этого уже достаточно для доказательства в случае $m=1$. В самом деле:

$$Det^{\pm 1} Q \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\otimes I \mp I\otimes \frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right) Q Det^{\mp 1} Q =$$
$$= \{-[({\rm tr}\otimes I)Q]Q \pm [(I\otimes {\rm Tr})Q]Q\}\mp$$
$$\mp \{[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q \mp [({\rm tr}\otimes I)Q]Q\} = 0.$$

Первые два члена в правой части возникают из Λ-производных, тогда как последние два — из H-производных.

В случае $m=2$ снова надо брать производные. Это несколько сложнее и прежнее компактное обозначение недостаточно. В дополнение к (2.79) необходимо

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\otimes I\right)[({\rm tr}\otimes I)Q]Q = -[({\rm tr}\otimes I)Q]^2 Q - \mathcal{B}. \qquad (2.80)$$

Здесь

$$[({\rm tr}\otimes I)Q]^2 = [({\rm tr}\otimes I)[({\rm tr}\otimes I)Q]Q], \qquad (2.81)$$

тогда как для явной записи $\mathcal{B}$ необходимо восстановить матричные индексы (греческий для сектора Λ и латинский для сектора H), $(\alpha i, \gamma k)$-компонента (2.80) имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\beta\alpha}}\delta^{im}\right) Q^{mj}_{\delta\delta} Q^{jk}_{\beta\gamma} = -Q^{ij}_{\delta\delta} Q^{jl}_{\beta\beta} Q^{lk}_{\alpha\gamma} - Q^{il}_{\delta\beta} Q^{lj}_{\alpha\delta} Q^{jk}_{\beta\gamma}, \quad (2.82)$$

а появление второго члена в правой части подразумевает, что $\mathcal{B}^{ik}_{\alpha\gamma} = Q^{il}_{\delta\beta} Q^{lj}_{\alpha\delta} Q^{jk}_{\beta\gamma}$. Далее,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\otimes I\right)[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q = -[(I\otimes {\rm Tr})[({\rm tr}\otimes I)Q]Q]Q -$$
$$- [(I\otimes {\rm Tr})[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q,$$
$$\left(I\otimes\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)[({\rm tr}\otimes I)Q]Q = +[({\rm tr}\otimes I)[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q +$$
$$+ [(I\otimes {\rm Tr})[({\rm tr}\otimes I)Q]Q]Q,$$
$$\left(I\otimes\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q = +[(I\otimes {\rm Tr})[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q + \mathcal{B}.$$
$$(2.83)$$

Здесь важно, что $\mathcal{B}$, появляющееся в последнем соотношении в форме $\mathcal{B}^{ik}_{\alpha\gamma} = Q^{lj}_{\alpha\delta} Q^{il}_{\delta\beta} Q^{jk}_{\beta\gamma}$, есть точно то же $\mathcal{B}$, что и в уравнении (2.80).

Теперь можно доказать (2.78) для $m=2$:

$$Det^{\pm 1} Q \left(\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\rm tr}}\right)^2 \otimes I - I\otimes\left(\frac{\partial}{\partial H_{\rm tr}}\right)^2\right) Q Det^{\mp 1} Q =$$
$$= \{\pm[(I\otimes {\rm Tr})Q](-[({\rm tr}\otimes I)Q]Q \pm [(I\otimes {\rm Tr})Q]Q) -$$
$$-(-[({\rm tr}\otimes I)[({\rm tr}\otimes I)Q]Q]Q - \mathcal{B})\pm$$
$$\pm(-[(I\otimes {\rm Tr})[({\rm tr}\otimes I)Q]Q]Q - [({\rm tr}\otimes I)[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q)\} -$$
$$- \{\mp[({\rm tr}\otimes I)Q]([(I\otimes {\rm Tr})Q]Q \mp [({\rm tr}\otimes I)Q]Q) +$$
$$+([(I\otimes {\rm Tr})[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q + \mathcal{B})\mp$$
$$\mp([({\rm tr}\otimes I)[(I\otimes {\rm Tr})Q]Q]Q + [(I\otimes {\rm Tr})[({\rm tr}\otimes I)Q]Q]Q)\},$$
$$(2.84)$$

где члены 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в первых скобках сокращают члены 1, 3, 2, 4, 6 и 5 во вторых скобках и используют тождество (2.81) и его аналог с $(\mathrm{tr}\otimes I) \to (I\otimes \mathrm{Tr})$.

Точное доказательство уравнения (2.78) для общего значения m неизвестно.

3. Картановские модели

3.1. Что такое картановские модели

Ввиду нынешнего состояния знаний в большинстве случаев приходится рассматривать лишь узкий класс "картановских моделей". Свойством этих моделей является связь с обычными интегрируемыми иерархиями (многокомпонентного КП или тода-типа), в которых интегрируемые потоки просто коммутируют (а не образуют менее тривиальные замкнутые алгебры) тем самым с алгебрами Каца–Муди уровня 1 (с помощью искусственных приемов, известных из формализма бозонизации в конформной теории поля [58], можно получить обобщения для некоторых других определенных уровней, например, $k = 2$ для отдельных групп). Это означает, что модели скорее ассоциированы с абелевыми картановскими подалгебрами, а не с полными матричными алгебрами.[17] В формулировке КТП (см. ниже) это означает, что картановские модели можно представить в терминах свободных полей, которые бозонизуют картановскую подалгебру полной группы в модели ВЗНВ (тогда как (β,γ)-полями [16] (почти) пренебрегают, и их следы сохраняются лишь в форме "коциклических" факторов в формулах Френкеля-Каца [47] (см. [58]). В матрично-интегральном представлении интегралы для картановских моделей на самом деле приведены к интегралам по диагональным матрицам (состоящим из собственных значений исходных матриц; отсюда название "собственнозначные (или картановские) модели").

Еще более существенно, что с физической точки зрения картановские модели описывают только *топологические* (дискретные) степени свободы, но не какие бы то ни было распространяющиеся *частицы*.[18] Это становится понятно, если помнить, что матричные модели обычно обладают калибровочной симметрией, связанной с унитарным вращением матриц $M_\alpha \longrightarrow U_\alpha^\dagger M_\alpha U_\alpha$, т.е. матричные модели обычно представляют собой калибровочные теории. В случае картановских моделей эта симметрия реализуется без "калибровочных полей" $V_{\alpha\beta}$, которые должны были бы зависеть от пар индексов α, β и преобразовываться как $V_{\alpha\beta} \longrightarrow U_\alpha^\dagger V_{\alpha\beta} U_\beta$. Иными словами, картановские модели — это калибровочные теории без калибровочных полей, т.е. чисто топологические модели. Неудивительно поэтому, что они обычно живут в пространстве-времени размерности $d < 2$),[19] поскольку при $d > 2$ *должны* существовать частицы, ассоциированные с калибровочными полями. На "границе" лежит модель" $d = 2(c = 2)$-струны", которая имеет одну частицеподобную степень свободы (дилатон, становящийся тахионом в моделях $d>2$). Эта очень интересная модель пока понята гораздо хуже, чем модели с $d < 2$; во всяком случае, ее свойства несколько отличаются от свойств других картановских моделей (особенно в наиболее интересном, "компактифицированном" случае). В данном обзоре она не рассматривается. Позднее мы вернемся к вопросу о *не*картановских теориях ($d > 2$), хотя в настоящее время о них известно немного. Сейчас же сосредоточим внимание на картановских моделях.

3.2. Одноматричная модель

Эрмитовы матричные интегралы обычно приводят к картановской форме, разделяя угловые переменные и собственные значения. Как всегда, самым простым является случай одноматричной модели

$$Z_N\{t\} \equiv c_N \int_{N\times N} \mathrm{d}H \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} H^k\right), \tag{3.1}$$

где разделение вообще не требует никакой информации об унитарно-матричных интегралах. Возьмем

$$H = U^\dagger D U, \tag{3.2}$$

где U — унитарная матрица, а диагональная матрица $D = \mathrm{diag}(h_1 \ldots h_N)$ имеет в качестве компонент собственные значения H. Тогда мера интегрирования

$$\mathrm{d}H = \prod_{i,j=1}^{N} \mathrm{d}H_{ij} = \frac{[\mathrm{d}U]}{[\mathrm{d}U_{\mathrm{Cartan}}]} \prod_{i-1}^{N} \mathrm{d}h_i \Delta^2(h), \tag{3.3}$$

где детерминант Ван-дер-Монда $\Delta(h) \equiv \det_{(ij)} h_i^{j-1} = \prod_{i>j}^{N}(h_i - h_j)$, а $[\mathrm{d}U]$ — мера Хаара для интегрирования по унитарным матрицам.

Уравнение (3.3) выводят, рассматривая норму бесконечно малого изменения

$$\begin{aligned} \|\,\delta H\,\|^2 &\equiv \sum_{i,j=1}^{N} |\,\delta H_{ij}\,|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \delta H_{ij}\delta H_{ji} = \operatorname{Tr}(\delta H)^2 = \\ &= \operatorname{Tr}\left(-U^\dagger \delta U U^\dagger D U + U^\dagger D \delta U + U^\dagger \delta D U\right)^2 = \\ &= \operatorname{Tr}(\delta D)^2 + 2i \operatorname{Tr} \delta u[\delta D, D] + \\ &\quad + 2\operatorname{Tr}\left(-\delta u D \delta u D + (\delta u)^2 D^2\right), \end{aligned}$$

где $\delta u \equiv \frac{1}{i}\delta U U^\dagger = \delta u^\dagger$ и $\delta D = \mathrm{diag}(\delta h_1 \ldots \delta h_N)$. Второй член в правой части исчезает, потому что D и δD

[17] Группы, возникающие в теории матричных моделей и интегрируемых иерархий, не те же самые, что появляются в интегральных представлениях: последние в лучшем случае имеют отношение к нулевым модам первых. Более того, даже эту связь обычно нелегко установить. Это замечание важно иметь в виду, чтобы правильно понимать изложенное ниже.

[18] Частицы всегда связаны с "угловыми" (унитарно) матричными интегралами (что общеизвестно на примере вильсоновой решетки КХД), которые значительно менее тривиальны, но также интегрируемы в более широком смысле этого слова — в рамках (еще не существующего) обобщения интегрируемых иерархий от полей к картановской подалгебре до полной модели ВЗНВ.

[19] Вспомним, что в модели Полякова — наименее контр-интуитивной для интерпретации событий в пространстве-времени (пространстве-мишени — target space) струнные модели обычно включают поля Лиувилля, идентифицируемые как временные переменные с точки зрения пространств-мишени. Отметим, что по этой причине в струнной теории всегда есть (по крайней мере одно) *время*, тогда как пространство может быть любой размерности (по крайней мере между 0 и 25), не обязательно даже целочисленной. Благодаря этому лишнему полю Лиувилля пространственно-временная размерность обычно отличается на единицу от центрального заряда модели КТП, которая взаимодействует с двумерной гравитацией, образуя струнную модель: $d = c + 1$, и $d < 2$ это то же, что $c < 1$.

диагональны и коммутируют. Поэтому

$$\| \delta H \|^2 = \sum_{i=1}^{N} (\delta h_i)^2 + \sum_{i,j=1}^{N} (\delta u)_{ij} (\delta u)_{ji} (h_i - h_j)^2.$$

Теперь остается вспомнить фундаментальное соотношение между нормой (в касательном пространстве)и мерой: если $\| \delta l \|^2 = G_{ab} \delta l^a \delta l^b$, то $[\mathrm{d}l] = \sqrt{\det_{ab} G_{ab}} \prod_a \mathrm{d}l^a$, и мы получаем уравнение (3.3) с мерой Хаара $[\mathrm{d}U] = \prod_{ij}^N \mathrm{d}u_{ij}$, ассоциированной с нормой

$$\| \delta u \|^2 = \mathrm{Tr}(\delta u)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \delta u_{ij} \delta u_{ji} = \sum_{i,j=1}^{N} | \delta u_{ij} |^2$$

и $[\mathrm{d}U_{\mathrm{Cartan}}] \equiv \prod_{i=1}^N \mathrm{d}u_{ii}$

Возвращаясь к одноматричной модели, отметим, что "действие" $\mathrm{Tr}\, U(H) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{Tr}\, H^k$ с H, представленном в форме (3.2), не зависит от U:

$$\mathrm{Tr}\, U(H) = \sum_{i=1}^{N} U(h_i).$$

Таким образом,

$$Z_N\{t\} = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^{N} \int \mathrm{d}h_i e^{U(h_i)} \prod_{i>j}^{N} (h_i - h_j)^2 = $$
$$= \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^{N} \int \mathrm{d}h_i e^{U(h_i)} \Delta^2(h), \tag{3.4}$$

при условии, что C_N выбрано как

$$c_N^{-1} = N! \frac{\mathrm{Vol}_{U(N)}}{(\mathrm{Vol}_{U(1)})^N}, \tag{3.5}$$

где объем унитарной группы в мере Хаара равен

$$\mathrm{Vol}_{U(N)} = \frac{(2\pi)^{N(N+1)/2}}{\prod_{k=1}^N k!}. \tag{3.6}$$

Простой способ вывода уравнения (3.6) будет описан в конце этого раздела, как пример применения метода ортогональных полиномов.

3.3. Интегралы Ициксона–Зубера и Концевича

Перейдем теперь к интегралу Концевича

$$\mathcal{F}_{V,n}\{L\} = \int_{n\times n} \mathrm{d}X \exp\left(-\mathrm{tr}\, V(X) + \mathrm{tr}\, LX\right). \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что он фактически зависит только от собственных значений матрицы L (этим мы уже воспользовались в предыдущем разделе), однако на этот раз речь идет о более сложных унитарных матричных интегралах.

Заменим X на $U_X^\dagger D_X U_X$; $L = U_L^\dagger D_L U_L$ в уравнении (3.7) и определяет $U \equiv U_X U_L^\dagger$. Тогда

$$\mathcal{F}_{V,n}\{L\} = \prod_{i=1}^{n} \int \mathrm{d}x_i e^{-V(x_i)} \Delta^2(x) \times$$
$$\times \int_{n\times n} \frac{[\mathrm{d}U]}{[\mathrm{d}U_{\mathrm{Cartan}}]} \exp\left(\sum_{\gamma,\delta=1}^{n} x_\gamma l_\delta \mid U_{\gamma\delta} |^2\right). \tag{3.8}$$

Чтобы двигаться дальше, необходимо оценить интеграл по унитарным матрицам, появляющимся в правой части.

Этот интеграл можно представить двумя разными способами

$$I_n\{X, L\} \equiv \int_{n\times n} \frac{[\mathrm{d}U]}{[\mathrm{d}U_{\mathrm{Cartan}}]} e^{\mathrm{tr}\, XULU^\dagger} = \tag{3.9}$$
$$= \int_{n\times n} \frac{[\mathrm{d}U]}{[\mathrm{d}U_{\mathrm{Cartan}}]} \exp\left(\sum_{\gamma,\delta=1}^{n} x_\gamma l_\delta \mid U_{\gamma\delta} |^2\right) \tag{3.10}$$

(U в этих интегралах связаны трансформацией $U \longrightarrow U_X U U_L^\dagger$, а мера Хаара $[\mathrm{d}U]$ право- и левоинвариантна). Формула (3.9) подразумевает, что $I_n\{X, L\}$ удовлетворяет множеству простых уравнений [59]

$$\left(\mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{tr}}}\right)^k - \mathrm{tr}\, L^k\right) I_n\{X, L\} = 0, \quad k \geq 0,$$
$$\left(\mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)^k - \mathrm{tr}\, X^k\right) I_n\{X, L\} = 0, \quad k \geq 0, \tag{3.11}$$

которые сами по себе не слишком ограничительны. Однако другая формула (3.10) предполагает, что $I_n\{X, L\}$ зависит только от собственных значений Xи L; для *таких* $I_n\{X, L\} = \hat{I}\{x_\gamma, l_\delta\}$ уравнение (3.11) становится очень ограничительным [20] и позволяет однозначно определить $\hat{I}\{x_\gamma, l_\delta\}$ (во всяком случае, если $\hat{I}\{x_\gamma, l_\delta\}$ допускает разложения в формальный ряд по степеням x_γ и l_δ). Окончательное решение имеет вид

$$I_n\{X, L\} = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \frac{\det_{\gamma\delta} e^{x_\gamma l_\delta}}{\Delta(x)\Delta(l)}. \tag{3.12}$$

Нормировочный множитель можно определить, взяв $L = 0$, когда

$$I_n\{X, L = 0\} = \frac{\mathrm{Vol}_{U(n)}}{(\mathrm{Vol}_{U(1)})^n} = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^n k!},$$

и, пользуясь тем, что

$$\left.\frac{\det_{\gamma\delta} f_\gamma(l_\delta)}{\Delta(l)}\right|_{\{l_\delta=0\}} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) \det_{\gamma\delta} \partial^{\delta-1} f_\gamma(0).$$

Уравнение (3.12) обычно называют формулой Ициксона–Зубера [60]. В математической литературе оно еще ранее было выведено Хариш-Чандрой [61], а интеграл (3.9) есть важный пример интегралов по орбитам присоединенных представлений [62–65], который может быть точно вычислен с помощью теоремы Дустермаата–Хекманна [43, 44, 64, 65]. Этот расчет является простым примером весьма важной методики *точной* оценки *негауссовых* унитарно-матричных интегралов, которая в настоящее время делает первые шаги (см. [66–68]).

[20] Действуя на $\hat{I}$, зависящее только от собственных значений, матричные производные превращаются в

$$\mathrm{tr}\frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{tr}}} \hat{I} = \sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \hat{I};$$
$$\mathrm{tr}\frac{\partial^2}{\partial X_{\mathrm{tr}}^2} \hat{I} = \sum_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x_\gamma^2} \hat{I} + \sum_{\gamma\neq\delta} \frac{1}{x_\gamma - x_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\delta}\right) \hat{I}.$$

Вернемся теперь к картановской формулировке КТП. Подстановка (3.12) в (3.8) дает

$$\mathcal{F}_{V,n}\{L\} = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Delta(l)} \prod_{\delta=1}^{n} \int \mathrm{d}x_\delta e^{-V(x_\delta)} \Delta(x) \frac{1}{n!} \det_{\gamma\delta} e^{x_\gamma l_\delta} =$$
$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Delta(l)} \prod_{\delta=1}^{n} \int \mathrm{d}x_\delta e^{-V(x_\delta)+x_\delta l_\delta} \Delta(x), \qquad (3.13)$$

где мы использовали асимметрию $\Delta(x)$ при перестановках x_γ, чтобы заменить $\frac{1}{n!}\det_{\gamma\delta} e^{x_\gamma l_\delta}$ на $\exp\left(\sum_\delta x_\delta l_\delta\right)$ под знаком x_δ интегрирования.

Теперь можно воспользоваться тем, что $\Delta(x) = \det_{\gamma\delta} x_\delta^{\gamma-1}$, и переписать правую часть уравнения (3.13):

$$\mathcal{F}_{V,n}\{L\} = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{{}_{\gamma\delta}\hat{\varphi}_\gamma(l_\delta)}{\Delta(l)}, \qquad (3.14)$$

где

$$\hat{\varphi}_\gamma(l) \equiv \int \mathrm{d}x x^{\gamma-1} e^{-V(x)+lx}, \qquad \gamma \geq 1. \qquad (3.15)$$

Эти функции $\hat{\varphi}(l)$ удовлетворяют простому рекуррентному соотношению

$$\hat{\varphi}_\gamma = \frac{\partial \hat{\varphi}_{\gamma-1}}{\partial l} = \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{\gamma-1} \hat{\Phi} \qquad (3.16)$$

с

$$\hat{\Phi}(l) \equiv \hat{\varphi}_1(l) = \int \mathrm{d}x e^{-V(x)+lx}. \qquad (3.17)$$

Отметим также, что если ввести "нулевое время" N (см. раздел 2.6) и [36], то

$$\mathcal{F}_{V,n}\{N \mid L\} \equiv \mathcal{F}_{V(X)-N\ln X,n}\{L\} =$$
$$= (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\det_{\gamma\delta} \hat{\varphi}_{\gamma+N}(l_\delta)}{\Delta(l)} \qquad (3.18)$$

с *тем же самым* $\hat{\varphi}_\gamma(l)$ и $\gamma, \delta = 1, \ldots, n$. Поделив на квазиклассический фактор $C_V\{\Lambda\}(\det\Lambda)^N$, $L = V'(\Lambda)$ для трансформации интеграла Концевича в модель Концевича (см. раздел 2.5), получим

$$\mathcal{Z}_V\{N, T\} = \frac{1}{(\Lambda)^N} \frac{{}_{\gamma\delta}\varphi_{\gamma+N}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)} \qquad (3.19)$$

Роль $C_V\{\Lambda\}$ состоит в превращении $\hat{\varphi}(l)$ в должным образом нормированные разложения по отрицательным целым степеням λ:

$$\varphi_\gamma(\lambda) = \frac{e^{-\lambda V'(\lambda)+V(\lambda)}\sqrt{V''(\lambda)}}{\sqrt{2\pi}} \hat{\varphi}_\gamma(V'(\lambda)) =$$
$$= \lambda^{\gamma-1}(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})), \qquad (3.20)$$

и замещении $\Delta(l) = \Delta(V'(\lambda))$ в знаменателе (3.18) на $\Delta(\lambda)$ в (3.19). Вместо простых рекуррентных соотношений (3.16) для $\hat{\varphi}$, нормированные функции φ удовлетворяют

$$\varphi_\gamma(\lambda) = \mathcal{A}\varphi_{\gamma-1}(\lambda) = \mathcal{A}^{\gamma-1}\Phi(\lambda), \qquad (3.21)$$

где $\Phi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$, а оператор

$$\mathcal{A} = \frac{1}{V''(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{V'''(\lambda)}{(V''(\lambda))^2} + \lambda \qquad (3.22)$$

зависит теперь от потенциала $V(x)$.

3.4. Стандартные многоматричные модели

Многоматричные интегралы вида

$$Z_N\{t^{(\alpha)}\} \equiv c_N^{p-1} \int_{N\times N} \mathrm{d}H^{(1)} \ldots \mathrm{d}H^{(p-1)} \times$$
$$\times \prod_{\alpha=1}^{p-1} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k^{(\alpha)} \operatorname{Tr} H_{(\alpha)}^k\right) \prod_{\alpha=1}^{p-2} \exp\left(\operatorname{Tr} H^{(\alpha)} H^{(\alpha+1)}\right) \qquad (3.23)$$

можно переписать в картановской форме, используя только что описанную формулу Ициксона–Зубера (3.12). В самом деле, подставляя $H^{(\alpha)} = U^{(\alpha)\dagger} D^{(\alpha)} U^{(\alpha)}$ и определяя затем $U^{(\alpha)} U^{(\alpha+1)\dagger} \equiv \tilde{U}^{(\alpha)}$, получаем

$$Z_N\{t^{(\alpha)}\} =$$
$$= \frac{1}{N!} \prod_{\alpha=1}^{p-1} \prod_{i=1}^{N} \int \mathrm{d}h_i^{(\alpha)} \exp\left[-V(h_i^{(\alpha)})\right] \times$$
$$\times \Delta^2(h^{(\alpha)}) \prod_{\alpha=1}^{p-2} I_N\{H^{(\alpha)}, H^{(\alpha+1)}\} =$$
$$= \frac{1}{N!} \prod_{\alpha=1}^{p-1} \prod_{i=1}^{N} \int \mathrm{d}h_i^{(\alpha)} \exp\left[-V(h_i^{(\alpha)})\right] \times$$
$$\times \prod_{\alpha=1}^{p-2} \exp\left[h_i^{(\alpha)} h_i^{(\alpha+1)}\right] \Delta(h^{(1)}) \Delta(h^{(2)}), \qquad (3.24)$$

где использован тот же прием замены $1/N! \det_{ij} \exp\left[h_i^{(\alpha)} h_j^{(\alpha+1)}\right]$ на $\exp\left[\sum_{i=1}^N h_i^{(\alpha)} h_i^{(\alpha+1)}\right]$ под знаком $h_i^{(\alpha)}$- интегрирования (поэтапно: сначала для $\alpha = 1$, потом для $\alpha = 2$ и т. д.). Заметим, что в правой части уравнения (3.24) из конечной формулы исчезли все вандермондовские детерминанты, за исключением детерминантов на концах матричных цепей (при $\alpha = 1$ и $\alpha = p - 1$).

Если бы цепь была не открытой, а замкнутой, т.е. под интегралом в (3.23) имелся бы дополнительный множитель $\exp[\operatorname{Tr} H^{(p-1)} H^{(1)}]$, то задача отделения всех угловых переменных (унитарно-матричных) интегрирований была бы не столь проста: в дополнение к интегралу Ициксона-Зубера потребовались бы гораздо более сложные величины, подобные

$$I_n\{X_1, X_2; L\} \equiv c_n \int_{n\times n} \frac{[\mathrm{d}U_1]}{[\mathrm{d}U_{1,\mathrm{Cartan}}]} \frac{[\mathrm{d}U_2]}{[\mathrm{d}U_{2,\mathrm{Cartan}}]} \times$$
$$\times \exp\left(\operatorname{tr} X_1 U_1 L U_1^\dagger + \operatorname{tr} X_2 U_2 L U_2^\dagger + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tr} X_1 (U_1 U_2^\dagger) X_2 (U_2 U_1^\dagger)\right). \qquad (3.25)$$

Эта (до сих пор не имеющая решения) цепочечная модель (решеточная модель Поттса) представляет собой пример *не*картановских теорий; в случае $p = \infty$ она превращается в "компактифицированную" модель $c = 1$. Эта теория *сложнее*, чем простейшие из известных в настоящее время *не*картановских моделей "индуцированной теории Янга–Милса", называемые также моделями Казакова–Мигдала.

3.5. Детерминантные формулы для картановских моделей

Теперь мы готовы к решительному шагу на пути понимания математической структуры картановских моделей, которая выделяет их статистические суммы среди множества произвольных N-кратных интегралов. Эта структура выражается в детерминантных формулах, к обсуждению которых мы приступаем. В следующем разделе 4 эти формулы будут рассмотрены в качестве примеров τ-функций иерархий КП и Тоды.

Рассматривая соответствующие интегралы (3.4), (3.24), можно заметить, что интегралы по разным собственным значениям с *не*тривиальными мерами, которые зависят от формы потенциалов U и V, практически разделены, а единственное "взаимодействие" между различными собственными значениями определяется *универсальными* (независимыми от потенциалов) величинами, образованными из детерминантов Ван-дер-Монда. Эта особенность тесно связана с их происхождением (отщеплением угловых переменных в исходном матричном интеграле) и с наиболее важным его следствием (интегрируемостью). Существенное свойство детерминанты Ван-дер-Монда состоит, в том, что он одновременно является пфаффианом (именно в этом качестве он возникает из матричных интегралов) и детерминантом (это свойство предполагает интегрируемость):

$$\prod_{i>j}(h_i - h_j) = \Delta(h) = \det_{ij} h_i^{j-1}. \tag{3.26}$$

Ранее мы уже воспользовались этим свойством, преобразуя уравнение (3.13) в (3.14), что, как станет ясно в дальнейшем, является ключевым моментом в доказательстве интегрируемости модели Концевича. Тогда получение детерминантной формулы (3.14) для статистической суммы было тривиальной задачей, потому что подынтегральное выражение было *линейным* по детерминантам Ван-дер-Монда. Теперь мы имеем дело с несколько более сложными случаями, включающими произведения этих детерминантов.

Рассмотрим картановскую модель вида

$$Z_N = \frac{1}{N!}\prod_{k=1}^{N}\int \mathrm{d}\mu_{h_k,\bar h_k}\Delta(h)\Delta(\bar h), \tag{3.27}$$

которую будем называть моделью "со скалярным произведением". К этому классу принадлежат все стандартные многоматричные модели (3.23). В случае одноматричной модели (3.4)

$$\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \mathrm{d}h\,\mathrm{d}\bar h e^{U(h)}\delta(h-\bar h), \tag{3.28}$$

тогда как для стандартной многоматричной модели (3.24)

$$\mathrm{d}\mu_{h^{(1)},h^{(p-1)}} = \\
= \mathrm{d}h^{(1)}\,\mathrm{d}h^{(p-1)}\prod_{\alpha=2}^{p-2}\int \mathrm{d}h^{(\alpha)}\prod_{\alpha=1}^{p-1}\exp\left[U_\alpha(h^{(\alpha)})\right]\times \\
\times\prod_{\alpha=1}^{p-2}\exp\left[h^{(\alpha)}h^{(\alpha+1)}\right]. \tag{3.29}$$

При $\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \delta(h-\bar h)\,\mathrm{d}\bar h\,\mathrm{d}\mu_h$ мы называем меру локальной. Основное свойство локальной меры состоит в том, что оператор умножения на H (или любую функцию h) является эрмитовым. Таким образом, мера локальна в одноматричной модели, но *не*локальна для всех $p-1>1$. В последнем случае мера зависит только от $h=h^{(1)}$ и $\bar h = h^{(p-1)}$ и задается интегралом по всем другим $h^{(\alpha)}$, $\alpha = 2,\ldots,p-2$, что делает "взаимодействие" между h и $\bar h$ более сложным, нежели просто $\delta(h-\bar h)$ в одноматричном ($p=2$) и $e^{h\bar h}$ двуматричном ($p=3$) случаях. Специфические формулы (3.29) для $p>3$ никаким образом не выделяются среди других моделей со скалярным произведением, поэтому в дальнейшем мы не рассматриваем стандартные многоматричные модели с $p-1>2$ в качестве отдельного класса теорий.

Уравнения (3.27) и (3.26) вместе предполагают, что

$$Z_N = \frac{1}{N!}\prod_{k=1}^{N}\int \mathrm{d}\mu_{h_k,\bar h_k}\mathrm{Det}_{ik}h_k^{i-1}\mathrm{Det}_{jk}\bar h_k^{j-1} = \\
= \mathrm{Det}_{ij}\int \mathrm{d}\mu_{h,\bar h}h^{i-1}\bar h^{j-1} = \mathrm{Det}_{ij}\langle h^{i-1}\mid \bar h^{j-1}\rangle, \tag{3.30}$$

где для скалярного произведения введено очевидное обозначение

$$\langle f(h)\mid g(\bar h)\rangle \equiv \int \mathrm{d}\mu_{h,\bar h}f(h)g(\bar h).$$

Теперь можно быть несколько конкретнее и ввести временные переменные t_k и $\bar t_k$ таким образом, чтобы

$$\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \exp\left[U(h)+\bar U(\bar h)\,\mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h}\right], \\
U(h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k h^k,\quad \bar U(\bar h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar t_k\bar h^k, \tag{3.31}$$

а $\mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h}$ уже независимо от h и $\bar h$. Если теперь определить $\mathcal{H}^f(t,\bar t) \equiv \langle 1\mid 1\rangle$, то

$$\mathcal{H}^f_{ij} \equiv \langle h^i\mid \bar h^j\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_i\partial\bar t_j}\mathcal{H}^f(t,\bar t) = \\
\stackrel{\text{if } i,j\ge 0}{=}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial \bar t_1}\right)^j\mathcal{H}^f(t,\bar t), \tag{3.32}$$

и

$$Z_N = \mathrm{Det}_N\mathcal{H}^f_{ij}, \tag{3.33}$$

где Det_N — детерминант $N\times N$-матрицы $\mathcal{H}_{i-1,j-1}$ (которая определяется для *любых* целых чисел i, j) с $i,j=0,\ldots,N-1$. Характерное свойство матрицы $\mathcal{H}^f_{ij}$ — ее специфическая зависимость от времени:

$$\frac{\mathcal{H}^f_{ij}}{\partial t_k} = \mathcal{H}^f_{i+k,j};\qquad \frac{\mathcal{H}^f_{ij}}{\partial\bar t_k} = \mathcal{H}^f_{i,j+k}. \tag{3.34}$$

Уравнение (3.33) дает детерминантную формулу для всех моделей со скалярным произведением. Случай локальной меры (для одноматричной модели) стоит несколько особняком. В этом случае $U(h)$ содержит полную информацию о мере: $\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \delta(h-\bar h)\,\mathrm{d}\mu_h$, $\mathrm{d}\mu_h = \exp\left[U(h)\,\mathrm{d}h\right]$, тогда как $\bar U(\bar h)$ отсутствует (или $\bar t$ просто совпадает с t). Тогда (3.33) остается в силе, но

$$\mathcal{H}^f_{ij} = \langle h^i \mid \bar{h}^j \rangle \big|_{\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}}} = \langle h^{i+j} \rangle \big|_{\mathrm{d}\mu_h} = \frac{\partial}{\partial t_{i+j}} \mathcal{H}^f(t) \overset{\text{if } i,j\geq 0}{=} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{i+j} \mathcal{H}^f(t). \tag{3.35}$$

Ту же формулу (3.35) можно вывести как предел уравнения (3.14) для интеграла Концевича. В самом деле,

$$\begin{aligned} Z_N\{t\} &= c_N \int_{N\times N} \mathrm{d}He^{\mathrm{Tr}\, U(H)} = \lim_{L\to 0} \mathcal{F}_{U,N}\{L\} = \\ &= \lim_{\{l_j\}\to 0} \frac{\mathrm{Det}_{ij}\hat{\varphi}_i^{\{U\}}(l_j)}{\Delta(l)} = \mathrm{Det}_{ij} \frac{\partial^{j-1}\hat{\varphi}_i^{\{U\}}(l_j)}{\partial l^{j-1}}(0) = \\ &= \mathrm{Det}_{ij}\mathcal{H}^f_{i-1,j-1}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

где на этот раз

$$\mathcal{H}^f_{i-1,j-1} \overset{i,j\geq 0}{=} \frac{\partial^{j-1}\hat{\varphi}_i^{\{U\}}(l_j)}{\partial l^{j-1}}(l=0) \overset{(3.14)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{i+j-2} \hat{\Phi}^{\{U\}}\, |_{l=0}. \tag{3.37}$$

Теперь заметим, что действие $\partial/\partial l$ на $\hat{\Phi}^{\{U\}}(l) = \int \mathrm{d}xe^{U(x)+lx}$ эквивалентно действию $(\partial/\partial t_1)$, поскольку оно более не является матричным интегралом и, следовательно,

$$\mathcal{H}^f_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{i+j} \hat{\Phi}^{\{U\}}(0), \tag{3.38}$$

т.е. $\mathcal{H}^f(t) = \hat{\Phi}^{\{U\}}(0)$.

В разделе 2.3. *конформные* матричные модели были представлены как картановские модели. Статистические суммы для серии A_{p-1} определяются как

$$\begin{aligned} Z^{A_{p-1}}_{N_1\ldots N_{p-1}}\{t^{(1)}\ldots t^{(p-1)}\} &= \\ &= \prod_{\alpha=1}^{p-1} c_{N_\alpha} \int_{N_\alpha\times N_\alpha} \mathrm{d}H^{(\alpha)} \exp\left[\mathrm{Tr}\, U_\alpha\left(H^{(\alpha)}\right)\right] \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^{p-2} \mathrm{Det}\left(H^{(\alpha)}\otimes I - I\otimes H^{(\alpha+1)}\right) = \\ &= \prod_{\alpha=1}^{p-1} \frac{1}{N_\alpha!} \prod_{i=1}^{N_\alpha} \int \mathrm{d}h_i^{(\alpha)} \exp\left[U_\alpha\left(h_i^{(\alpha)}\right)\right] \Delta^2(h^{(\alpha)}) \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^{p-2} \prod_{i,k} \left(h_i^{(\alpha)} - h_k^{(\alpha+1)}\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Это выражение не имеет формы уравнения (3.27), поэтому конформные матричные модели для $p-1>1$ не относятся к типу моделей со "скалярным произведением". Иногда их называют $(p-1)$- компонентными моделями, так как они связаны с многокомпонентными интегрируемыми иерархиями. Самый простой способ их исследования состоит в применении того же подхода к интегралам Концевича, который использовался в случае одноматричной модели.

Начнем с очень простой $(p-1)$-компонентной модели:

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{\alpha=1}^{p-1} \int_{N_\alpha\times N_\alpha} \mathrm{d}H^{(\alpha)} \exp\left[\mathrm{Tr}\, U_\alpha(H^{(\alpha)})\right] \times \\ &\times K(H^{(1)}\ldots H^{(p-1)}). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ее можно представить также в терминах интеграла Концевича:

$$Z = K\left(\frac{\partial}{\partial L^{(1)}_{\mathrm{tr}}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial L^{(p-1)}_{\mathrm{tr}}}\right) \prod_{\alpha=1}^{p-1} \mathcal{F}_{U_\alpha,N_\alpha}\{L^{(\alpha)}\}\bigg|_{L^{(\alpha)}=0}. \tag{3.41}$$

Это представление не очень полезно, так как нелегко взять предел $L\to 0$, если только K не является полиномом от собственных значений всех своих независимых аргументов. Это, правда, как раз случай наших конформных моделей (3.39). В самом деле,

$$K^{A_{p-1}} = \prod_{\alpha=1}^{p-2} \mathrm{Det}\left(\frac{\partial}{\partial L^{(\alpha)}_{\mathrm{tr}}} \otimes I - I\otimes \frac{\partial}{\partial L^{(\alpha+1)}_{\mathrm{tr}}}\right). \tag{3.42}$$

Однако такой путь не слишком удобен, поскольку представление (3.14) для $\mathcal{F}$ содержит в знаменателе детерминант $\Delta(L)$, дифференцировать который не доставляет большого удовольствия. Можно добиться упрощения, если вместо этого переписать исходное выражение в правой части (3.39) следующим образом:

$$\begin{aligned} Z^{A_{p-1}}_{N_1\ldots N_{p-1}}\{t^{(1)}\ldots t^{(p-1)}\} &= \\ &= \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(1)}}\right) \prod_{\alpha=1}^{p-2} \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(\alpha)}}, \frac{\partial}{\partial l^{(\alpha+1)}}\right) \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(p-1)}}\right) \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^{p-1}\left[\frac{1}{N_\alpha!}\prod_{i=1}^{N_\alpha} \int \mathrm{d}h_i^{(\alpha)} \exp\left(U_\alpha\left(h_i^{(\alpha)}\right) + l_i^{(\alpha)}h_i^{(\alpha)}\right)\right]\Bigg|_{l^{(\alpha)}=0}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

где $\Delta(h,h') \equiv \prod_{i>j}^N (h_i - h_j) \prod_{k>l}^{N'}(h'_k - h'_l) \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{N'}(h'_k - h_i)$. Эта формула уже учитывает специфическую форму K. Произведение интегралов в скобках правой части (3.43) равно (при всяком фиксированном α)

$$\frac{1}{N_\alpha!}\prod_{j=1}^{N_\alpha} \hat{\Phi}^{\{U_\alpha\}}(l_j^{(\alpha)}) \tag{3.44}$$

(ср. с уравнением (3.38)).

Для того чтобы упростить формулы, обозначим

$$\hat{\Phi}^{\{U_\alpha\}}(l) \equiv \int \mathrm{d}xe^{U_\alpha(x)+lx} \text{ через } \hat{\Phi}_\alpha(l),$$

а

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1^{(\alpha)}}\right)^k \hat{\Phi}^{\{U_\alpha\}}(l^{(\alpha)}) = \left(\frac{\partial}{\partial l^{(\alpha)}}\right)^k \hat{\Phi}^{\{U_\alpha\}}(l^{(\alpha)})$$

— через $\partial^k\hat{\Phi}_\alpha(l)$. Тогда

$$\begin{aligned} Z^{A_{p-1}}_{N_1\ldots N_{p-1}}\{t^{(1)}\ldots t^{(p-1)}\} &= \\ &= \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(1)}}\right) \prod_{\alpha=1}^{p-2} \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(\alpha)}}, \frac{\partial}{\partial l^{(\alpha+1)}}\right) \Delta\left(\frac{\partial}{\partial l^{(p-1)}}\right) \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^{p-1}\left(\frac{1}{N_\alpha!}\prod_{j=1}^{N_\alpha} \hat{\Phi}_\alpha(l_j^{(\alpha)})\right)\Bigg|_{l^{(\alpha)}=0}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Если $p-1=1$, дифференциальный оператор — квадрат детерминанта $\Delta(\partial/\partial l)$, и можно использовать соотношение

$$
\Delta^2(h) = \sum_P \mathrm{Det}_{ij} h_{P(j)}^{i+j-2} =
$$

$$
= \sum_P \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1 & h_{P(2)} & h_{P(3)}^2 \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1-1} \\ h_{P(1)} & h_{P(2)}^2 & h_{P(3)}^3 \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1} \\ h_{P(1)}^2 & h_{P(2)}^3 & h_{P(3)}^4 \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1+1} \\ & & \ldots & \\ h_{P(1)}^{N_1-1} & h_{P(2)}^{N_1} & h_{P(3)}^{N_1+1} \ldots & h_{P(N_1)}^{2N_1-2} \end{bmatrix}, \quad (3.46)
$$

где суммирование производится по всем $N!$ перестановкам P и N элементов $(1,\ldots,N)$, чтобы убедиться, что (3.45) воспроизводит ранее выведенные формулы (3.33), (3.38): $Z_N = \mathrm{Det}_{ij} \partial^{i+j-2} \hat{\Phi}$.

Для $p - 1 = 2$ приходится использовать более сложный аналог (3.46):

$$
\Delta(h)\Delta(h,h')\Delta(h') =
$$

$$
= \sum_P \sum_{P'} \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1 & h_{P(2)} \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1-1} & 1 & \bar{h}_{\bar{P}(2)} \ldots & \bar{h}_{\bar{P}(N_2)}^{N_2-1} \\ h_{P(1)} & h_{P(2)}^2 \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1} & \bar{h}_{\bar{P}(1)} & \bar{h}_{\bar{P}(2)}^2 \ldots & \bar{h}_{\bar{P}(N_2)}^{N_2} \\ h_{P(1)}^2 & h_{P(2)}^3 \ldots & h_{P(N_1)}^{N_1+1} & \bar{h}_{\bar{P}(1)}^2 & \bar{h}_{\bar{P}(2)}^3 \ldots & \bar{h}_{\bar{P}(N_2)}^{N_2+1} \\ & & \ldots & & & \\ h_{P(1)}^{\mathcal{N}_1-1} & h_{P(2)}^{\mathcal{N}_1} \ldots & h_{P(N_1)}^{\mathcal{N}+N_1-2} & \bar{h}_{\bar{P}(1)}^{\mathcal{N}_2-1} & \bar{h}_{\bar{P}(2)}^{\mathcal{N}_2} \ldots & \bar{h}_{P(N_2)}^{\mathcal{N}+N_2-2} \end{bmatrix} \quad (3.47)
$$

где $\mathcal{N} = \sum_{\alpha=1}^{p-1} N_\alpha$. Воспользовавшись этой формулой, приходим к выводу, что правая часть (3.45) для $p - 1 = 2$ также представима в форме детерминанта:

$$
\mathrm{Det} \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & \partial\hat{\Phi} \ldots & \partial^{N_1-1}\hat{\Phi} & \hat{\bar{\Phi}} & \partial\hat{\bar{\Phi}} \ldots & \partial^{N_2-1}\hat{\bar{\Phi}} \\ \partial\hat{\Phi} & \partial^2\hat{\Phi} \ldots & \partial^{N_1}\hat{\Phi} & \partial\hat{\bar{\Phi}} & \partial^2\hat{\bar{\Phi}} \ldots & \partial^{N_2}\hat{\bar{\Phi}} \\ & & \ldots & & & \\ \partial^{\mathcal{N}-1}\hat{\Phi} & \partial^{\mathcal{N}}\hat{\Phi} \ldots & \partial^{\mathcal{N}+N_1-2}\hat{\Phi} & \partial^{\mathcal{N}-1}\hat{\bar{\Phi}} & \partial^{\mathcal{N}}\hat{\bar{\Phi}} \ldots & \partial^{\mathcal{N}+N_2-2}\hat{\bar{\Phi}} \end{bmatrix}
$$

Здесь $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1$, $\hat{\bar{\Phi}} = \hat{\Phi}_2$, и все аргументы переменные $l^{(\alpha)} = 0$. Формулу (3.47) особенно легко проверить в простейшем случае $N_1 = N_2 = 1$. Она утверждает просто, что

$$
\bar{h} - h = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ h & \bar{h} \end{bmatrix}.
$$

Аналогичные выражения для $p - 1 > 2$ сложнее: они уже больше не детерминанты, что очевидно при рассмотрении простейшего случая $N_1 = \ldots = N_{p-1} = 1$, где произведение $\prod_{\alpha=1}^{p-2}(h^{(\alpha)} - h^{(\alpha+1)})$ больше не является детерминантом какой-либо изящной матрицы.

3.6. Ортогональные полиномы

Формализм ортогональных полиномов очень широко использовался на заре теории матричных моделей. Он применим к картановским моделям со скалярным произведением и позволяет осуществлять дальнейшее преобразование (диагонализацию) остающихся детерминантов в произведения. В отличие от сведения исходных N^2- кратных матричных интегралов к интегралам по собственным значениям, которое (если возможно) отражает физическое явление — отщепление угловых (унитарно-матричных) степеней свободы (ассоциированных с d-мерными калибровочными бозонами), и от появления детерминантных формул, отражающих интегрируемость модели, ортогональные полиномиалы возникают в качестве технического средства. Они особенно полезны, чтобы явно разделить зависимость размера N матрицы в матричном интеграле ("нулевое время") и зависимость от всех других временных переменных и чтобы явно строить переменные, удовлетворяющие уравнениям, подобным уравнениям Тоды. Однако современное описание интегрируемых иерархий в понятиях τ-функций не требует явного отделения нулевого времени и рассматривают его более или менее на равных основаниях со всеми другими переменными, что делает излишним использование ортогональных полиномов. Тем не менее, эта методика остается в арсенале теории матричных моделей[21], и мы переходим к ее краткой характеристике. В конце этого раздела будут обсуждены также два ее простых практических применения: одно для оценки объема унитарной группы, а другое для прямого доказательства эквивалентности обычной одноматричной модели и гауссовой модели Концевича. В обоих случаях используются хорошо известные ортогональные эрмитовы полиномы, и в этом смысле их нельзя считать репрезентативными: обычно нужные ортогональные полиномы *недостаточно* известны. В последующих разделах будут даны примеры применения такой "абстрактной" теории ортогональных полиномиалов для изучения матричных моделей.

В контексте теории матричных моделей со скалярными произведениями ортогональные полиномы возникают вполне естественно, если иметь в виду, что после появления статистических сумм в простой детерминантной форме уравнения (3.30) любое линейное изменение базисов $h^i \to Q_i(h) = \sum_k A_{ik} h_k$, $\bar{h}^j \to \bar{Q}_j(\bar{h}) = \sum_l B_{jl} \bar{h}^l$ легко описывается и $Z \longrightarrow Z \cdot \det A \cdot \det B$. В частности, если A и B — треугольные матрицы с единицами на диагоналях, их детерминанты — также единицы, и Z вообще не изменяется. Этой свободы, однако, достаточно, чтобы диагонализовать скалярное произведение и выбрать полиномы Q_i и $\bar{Q}_i$ так, чтобы

$$
\langle Q_i(h) \mid \bar{Q}_j(\bar{h}) \rangle = e^{\phi_i} \delta_{ij}. \quad (3.48)
$$

Определенные таким образом с точностью до нормировки Q_i и $\bar{Q}_j$ называются ортогональными полиномами. (Заметьте, что $\bar{Q}$ необязательно должно быть комплексным сопряженным Q : "черта" в наших обозначениях не означает комплексное сопряжение. Ввиду указанного ограничения на форму матриц A и B эти полиномы нормированы таким образом, что

$$
Q_i(h) = h^i + \ldots; \quad \bar{Q}_j(\bar{h}) = \bar{h}^j + \ldots,
$$

т.е. старшая степень входит с единичным коэффициентом. Из (3.30) и (3.48) следует, что

$$
Z_N = \prod_{i=1}^{N} e^{\phi_{i-1}}. \quad (3.49)
$$

Эта формула по сути есть главное следствие теории ортогональных полиномов для матричных моделей. Она обеспечивает полное разделение N зависимости Z (от размера матрицы) и зависимости от всех других параметров (которые задают форму потенциала, т.е. меру $d\mu_{h,\bar{h}}$). Эта информация закодирована в ϕ_i весьма сложным способом. Как уже упоминалось, любое свой-

[21] Разумеется, эту связь можно использовать также для обсуждения богатой и красивой математической теории ортогональных полиномов в общем контексте теории струн; при этом одна из интереснейших проблем — матрично-модельное описание q-ортогональных полиномов.

ство матричной модели можно рассматривать уже на уровне уравнения (3.30), которое не имеет отношения к ортогональным полиномам, и потому они не имеют существенного значения для этой цели.

Можно, однако, подойти к проблеме с другого конца и задаться вопросом, что могут дать матричные модели *для* теории ортогональных полиномиалов[22]. Первый вопрос, требующий ответа в теории ортогональных полиномов, состоит в следующем: каковы ортогональные полиномы для данной меры $\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}}$?

Обычно на вопросы такого типа нельзя дать простых ответов. Однако степень их сложности определяется тем, что́ спрашивающий готов признать подходящим ответом. Для нашей цели особый интерес имели бы интегральные представления. Было бы весьма полезно иметь хотя бы интегральное преобразование, переводящее множество ортогональных полиномов для данной меры $\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}}$ в какой-нибудь стандартный набор, например типа $Q_i^{(0)} = x^i$. К сожалению, такое преобразование редко удается получить, хотя есть интересные случаи: классические ортогональные полиномы и их q-аналоги (выраженные через (q)-гипергеометрические функции, обычно имеющие интегральное представление простого вида (см. [69], где приведен вводный обзор таких интегральных формул, в действительности хорошо известных в КТП). Простейший пример этого рода, который будет использован ниже, представлен множеством эрмитовых полиномов:

$$\begin{aligned}\mathrm{He}_k(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{h^2}{2}\right)\int (ix)^k\left(-\frac{x^2}{2} - ixh\right)\mathrm{d}x = \\ &= \left(h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)^k\cdot 1 = \exp\left(\frac{h^2}{2}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)^k\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2^k}\exp\left(\frac{h^2}{4}\right)\left(h - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)^k\exp\left(-\frac{h^2}{4}\right) = h^k + \ldots, \end{aligned}\tag{3.50}$$

ортогональных с локальной мерой $\mathrm{d}\mu_h = \exp\left[-h^2/2\right]$.

Для меры общего вида ответ такого простого типа не существует ни в какой универсальной форме. Тем не менее, матричные модели все же дают некоторое более сложное интегральное представление при *любой* мере, причем число интегрирований зависит от количества полиномов. Для того чтобы получить такое выражение, рассмотрим обобщение формулы (3.27)

$$Z_N\{\lambda_\gamma\} \equiv \frac{1}{N!}\prod_{k=1}^{N}\int \mathrm{d}\mu_{h_k,\bar{h}_k}\Delta(h)\Delta(\bar{h})\prod_{k,\gamma}(\lambda_\gamma - h_k). \tag{3.51}$$

В этом случае $\Delta(h)\prod_{k,\gamma}(\lambda_\gamma - h_k) = \Delta(h,\lambda)/\Delta(\lambda)$, и λ_γ можно принять за $h_{N+\gamma}$, по которым интегрирование в (3.51) *не* производится. Тогда ясно, что

$$\Delta(h,\lambda) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} Q_{i-1}(h_k) & Q_{N+\gamma-1}(h_k) \\ Q_{i-1}(\lambda_\delta) & Q_{N+\gamma-1}(\lambda_\delta)\end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

тогда как $\Delta(\bar{h}) = \mathrm{Det}_{jk}\bar{Q}_{j-1}(\bar{h}_k)$. Поскольку все $Q_{N+\gamma-1}(h_k)$ ортогональны ко всем $\bar{Q}_{j-1}(\bar{h}_k)$ (так как $N+\gamma-1 \neq j-1$) получаем,

$$Z_N\{\lambda_\delta\} = \frac{\det_{\gamma\delta} Q_{N+\gamma-1}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)} Z_N. \tag{3.53}$$

В частности,

$$Q_N(\lambda) = \frac{Z_N\{\lambda\}}{Z_N}, \tag{3.54}$$

где и числитель, и знаменатель могут быть представлены матричными интегралами $N \times N$.

Обратный "основной вопрос" теории ортогональных полиномов можно сформулировать следующим образом. Если дано множество полиномов

$$\begin{aligned} Q_i(h) &= h_i + \ldots, \\ \bar{Q}_j(\bar{h}) &= \bar{h}_j + \ldots, \end{aligned}$$

то какова мера $\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}}$, по отношению к которой они образуют ортогональную систему?

Мы не станем обсуждать полный ответ на этот вопрос и рассмотрим только случай локальной меры при $\bar{Q}_i = Q_i$. При этом ответ обычно вообще отсутствует: не *всякая* система полиномов ортогональна по отношению к некоторой локальной мере. Легко найти требуемое (и по сути, достаточное) условие. Как говорилось выше, локальную меру отличает свойство, благодаря которому умножение на любую функцию h является эрмитовым оператором:

$$\langle hf(h) \mid g(\bar{h})\rangle = \langle f(h) \mid \bar{h}g(\bar{h})\rangle, \quad \text{если} \quad \mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}} \sim \delta(h - \bar{h}). \tag{3.55}$$

Это свойство предполагает, что почти все коэффициенты c_{ij} в рекуррентном соотношении

$$hQ_i(h) = Q_{i+1}(h) + \sum_{j=0}^{i} c_{ij}Q_j(h) \tag{3.56}$$

равны нулю. В самом деле, для $j < i$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{\langle hQ_i(h) \mid Q_j(\bar{h})\rangle}{\langle Q_j(h) \mid Q_j(\bar{h})\rangle} = \frac{\langle Q_i(h) \mid \bar{h}Q_j(\bar{h})\rangle}{\langle Q_j(h) \mid Q_j(\bar{h})\rangle} = \\ &= \delta_{i,j+1}\frac{\langle Q_i(h) \mid Q_i(\bar{h})\rangle}{\langle Q_j(h) \mid Q_j(\bar{h})\rangle} = \delta_{j,i-1}\exp\left(\phi_i - \phi_{i-1}\right). \end{aligned}\tag{3.57}$$

Иными словами, полиномы ортогональные по отношению к локальной мере, должны удовлетворять "*трех*членному рекуррентному соотношению":

$$hQ_i(h) = Q_{i+1}(h) + C_iQ_i(h) + R_iQ_{i-1}(h) \tag{3.58}$$

(коэффициент перед Q_{i+1} можно, разумеется, изменить, изменив нормировку). Параметр C_i исчезает, если мера является четной функцией h (симметрична при изменении $h \to -h$); тогда полиномы расщепляются на два ортогональных подмножества: четные и нечетные по h. Статистическую сумму (3.49) *одно*компонентной модели можно выразить через параметры $R_i = \exp\left[\phi_i - \phi_{i-1}\right]$ трехчленного соотношения:

$$Z_N = Z_1\prod_{i=1}^{N-1} R_i^{N-i}, \tag{3.59}$$

определив, таким образом, однокомпонентную матричную модель (т.е. особую форму потенциала), ассоцииро-

[22] Конечно, вряд ли можно получить что-то *новое* для этой теории, но наша задача состоит в том, чтобы разобраться, какие свойства являются непосредственным следствием "физического" подхода. Как обычно, это может помочь в какой-то мере организовать существующие знания в приемлемую систему. Однако эта цель не ставится в данном обзоре: будет рассмотрен лишь очень простой пример, который зато пригодится нам в дальнейшем обсуждении.

ванную с любой системой ортогональных полиномов.

Наш "обратный основной вопрос" в случае локальной меры теперь можно сформулировать следующим образом. Если дан набор полиномов $Q_i(h) = h^i + \ldots$, *удовлетворяющих трехчленному соотношению* (3.58), что является мерой $\mathrm{d}\mu_h$ (с которой они ортогональны).

Как всякая полная ортогональная система функций, ортогональные полиномы удовлетворяют условию полноты

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\phi_i}\bar{Q}_i(\bar{h})Q_i(h) = \delta^{\{\mathrm{d}\mu\}}(\bar{h}, h), \tag{3.60}$$

где δ-функция, ассоциированная с мерой $\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}}$, **определяется** таким образом, что

$$\int\!\!\int f(h)\delta^{\{\mathrm{d}\mu\}}(\bar{h}, h')\,\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}} = f(h') \tag{3.61}$$

для любой функции $f(h)$. Поскольку *локальная* мера $\mathrm{d}\mu_h = \exp\left[U(h)\,\mathrm{d}h\right]$ **δ-функция**: $\delta^{\{\mathrm{d}\mu\}}(\bar{h}, h) = \exp\left[-U(h)\times \times\delta(\bar{h} - h)\right]$. В качестве ответа на наш вопрос можно принять представление $U(h)$ в терминах соответствующих ортогональных полиномиалов:

$$e^{-U(h)}\delta(\bar{h} - h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k(\bar{h})Q_k(h)}{\langle Q_k \mid Q_k\rangle}. \tag{3.62}$$

Как обычно, это соотношение следует понимать в смысле аналитического продолжения. Квадраты норм $\| Q_k \|^2$ в знаменателе выражены через коэффициенты R_i трехчленного соотношения с точностью до общей **константы** $\| Q_k \|^2 = \prod_{i=1}^{k} R_i \| Q_0 \|^2$.

Например, для эрмитовых полиномов (3.50) имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{He}_{k+1}(h) &= \left(h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)\mathrm{He}_k(h) = h\mathrm{He}_k(h) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\mathrm{He}_k(h) = \\ &= h\mathrm{He}_k(h) - k\mathrm{He}_{k-1}(h)\end{aligned} \tag{3.63}$$

(последнее равенство выполняется благодаря тому, что $\mathrm{d}/\mathrm{d}h$ и $(h - \mathrm{d})/\mathrm{d}h$ играют роль операторов уничтожения и рождения, соответственно). Это означает, что трехчленное соотношение удовлетворяется при $R_k = k$ и, таким образом, $\| \mathrm{He}_k \|^2 = \| \mathrm{He}_0 \|^2\, k!$. Используем условие нормировки $\| \mathrm{He}_0 \|^2 = \sqrt{2\pi}$. Тогда для $\exp[-U(h)]$ имеем

$$\begin{aligned}&\exp[-U(h)]\delta(\bar{h} - h) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{He}_k(\bar{h})\mathrm{He}_k(h)}{\| \mathrm{He}_k \|^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)^k\left(\bar{h} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{h}}\right)^k \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{h^2}{2} + \frac{\bar{h}^2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\bar{h}}\right)^k \exp\left(-\frac{h^2}{2} - \frac{\bar{h}^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{h^2}{2} + \frac{\bar{h}^2}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\bar{h}}\right)\exp\left(-\frac{h^2}{2} - \frac{\bar{h}^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\int\!\!\int\frac{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}}{2\pi}\exp\left(-\alpha\bar{\alpha}\right)\exp\left(\frac{h^2}{2} + \frac{\bar{h}^2}{2}\right)\times \\ &\times\exp\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} + \bar{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{h}}\right)\exp\left(-\frac{h^2}{2} - \frac{\bar{h}^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\int\!\!\int\frac{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})^2\right]\times \\ &\times\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})(h + \bar{h})\right]\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha - \bar{\alpha})(h - \bar{h})\right] = \\ &= \exp\left(\frac{h^2}{2}\right)\delta(h - \bar{h}).\end{aligned}$$

3.7 Модели со скалярным произведением в параметризации Мивы

Теперь сделаем первый шаг на пути выяснения взаимоотношения между моделями со скалярным произведением и моделями Концевича. Мы уже знаем, что в последнем случае важную роль играет представление временных переменных в форме

$$T_k = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\,\Lambda^{-k}, \tag{3.64}$$

с $n \times n$-матрицей Λ, которое в дальнейшем будем называть параметризацией Мивы (выражения похожего типа были впервые рассмотрены в [70]). Сделаем такую замену переменных в модели со скалярным произведением. Используем уравнение (3.31) для определения **временно́й** зависимости меры, игнорируя лишь $\bar{t}$ **-пере**менные. Иными словами, введем $\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}} = \exp\left[U(h)\right]\mathrm{d}\hat{v}_{h,\bar{h}}$ (т.е. $\mathrm{d}\hat{v}_{h,\bar{h}} = \exp\left[\bar{U}(\bar{h})\right]\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}}$). Подставим

$$t_k = \mp\left(\frac{1}{k}\mathrm{tr}\,\Lambda^{-k} + r_k\right) \tag{3.65}$$

и получим

$$\begin{aligned}\exp\left(U(h)\right) &= \exp\left(-\hat{V}(h)\right)\exp\left[\mp\mathrm{tr}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{h}{\Lambda}\right)^k\right] = \\ &= \exp\left[-\hat{V}(h)\right]\frac{\det^{\pm 1}(\Lambda - h\cdot I)}{\det\Lambda} = \\ &= \frac{\exp\left[-\hat{V}(h)\right]}{\det\Lambda}\prod_{\gamma=1}^{n}(\lambda_\gamma - h)^{\pm 1},\end{aligned} \tag{3.66}$$

где $\hat{V}(h) \equiv \pm\sum_k r_k h^k$. Выберем *верхние* знаки в этих формулах. Тогда, используя уравнения (3.51) и (3.53), можно заключить, что в параметризации Мивы

$$Z_N^{\{\mathrm{d}\mu\}} = \frac{1}{(\det\Lambda)^N}Z_N^{\{\mathrm{d}\hat{v}\}}\{\lambda_\delta\} = Z_N^{\{\mathrm{d}\hat{v}\}}\frac{\det_{\gamma\delta}\hat{Q}_{N+\gamma-1}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)(\det\Lambda)^N},$$

где $\mathrm{d}\hat{v}_{h,\bar{h}} \equiv \exp\left[-\hat{V}(\bar{h})\right]\mathrm{d}v_{h,\bar{h}}$, а $\hat{Q}_k$ — соответствующие ортогональные полиномиалы. Таким образом, мы привели модель с потенциалом $U(h)$ к другой модели с потенциалом $-\hat{V}(h)$ и выразили различие в терминах ортогональных полиномов $\hat{Q}_k$:

$$\frac{Z_N^{\{\mathrm{d}\mu\}}}{Z_N^{\{\mathrm{d}\hat{v}\}}} = \frac{1}{(\det\Lambda)^N}\cdot\frac{\det_{\gamma\delta}\hat{Q}_{N+\gamma-1}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)}. \tag{3.67}$$

Если выбор $\hat{V}(h)$ обеспечивает получение простых ортогональных полиномов (т.е. если новая модель $Z_N^{\{\mathrm{d}\hat{v}\}}$ легко решаема), это представление может значительно упростить исходную модель.

Другая интерпретация этой формулы состоит в том, что мы получили подобное КТП-представление типа ОМК в форме (3.19) для *дискретной* модели со скалярным произведением. Единственное различие состоит в том, что $\varphi_\gamma^{\{V\}}$ в (3.19) заменено на $\hat{Q}_{\gamma-1}$ (3.67). Это важное отличие, потому что $\varphi_\gamma^{\{V\}}$ в обобщенной модели

Концевича определяется интегральными формулами типа (3.15), $\varphi_\gamma^{\{V\}} = \langle\langle x^{\gamma-1}\rangle\rangle$ или, в альтернативном случае, удовлетворяет рекурсионному соотношению типа (3.21). Более того, в общем случае $\varphi_\gamma^{\{V\}}$ представляют собой бесконечные формальные ряды по λ^{-1}, тогда как $Q_{\gamma-1}$ — ортогональные *полиномы*. Это несоответствие служит одним из важных стимулов дальнейшей разработки обобщенной модели Концевича, а также поиска удобных интегральных представлений для ортогональных полиномов.

Однако имеется по меньшей мере одна интересная ситуация, когда обе формулы дословно совпадают. Это случай гауссовых потенциалов V и $\hat{V}$, когда и $\varphi_\gamma^{\{V\}}$, и $Q_{\gamma-1}$ представлены ортогональными эрмитовыми полиномами, для которых существует интегральное представление, причем ровно такое, как требуется в контексте гауссовой модели Концевича. Это будет предметом анализа в следующем разделе 3.8.

3.8. Эквивалентность дискретной одноматричной модели и гауссовой модели Концевича

Возьмем обычную одноматричную модель с *локальной* мерой $\mathrm{d}\mu_h = \exp\left[U(h)\right]\mathrm{d}h$ в качестве модели со скалярным произведением, рассмотренной в предыдущем подразделе, и параметризацию Мивы с верхними знаками и с $r_k = -\frac{1}{2}\delta_{k,2}$ (как мы уже делали в разделе 2.6). Тогда $\hat{V}(h) = \sum_k r_k h^k = -(h^2/2) = (\mathrm{i}h)^2/2$. Соответствующие ортогональные полиномы Q являются эрмитовыми полиномами от мнимого аргумента[23]: $Q_k^{\{-(h^2/2)\,\mathrm{d}h\}} = i^{-k}\mathrm{He}_k(\mathrm{i}h) = h^k + \ldots$. Эти полиномы допускают интегральное представление (3.50):

$$i^{1-k}\mathrm{He}_{k-1}(\mathrm{i}h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\times$$
$$\times\int x^{k-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+xh\right)\mathrm{d}x \overset{(3.20)}{=} \varphi_k^{\{\frac{1}{2}x^2\}}(h). \tag{3.68}$$

Используя (3.67) и (3.19), получаем замечательное соотношение между двумя матричными моделями

$$\frac{Z_N\{t_0=0;\, t_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}\Lambda^{-k}+\frac{1}{2}\delta_{k,2}\}}{Z_N\{t_k=\frac{1}{2}\delta_{k,2}\}} =$$
$$= \frac{\int_{N\times N}\mathrm{d}H\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}t_k\operatorname{Tr}H^k\right)}{\int_{N\times N}\mathrm{d}H\exp\left(\frac{1}{2}H^2\right)} =$$
$$= \frac{\exp\left(-\operatorname{tr}\frac{\Lambda^2}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{n^2}{2}}(\det\Lambda)^N}\int_{n\times n}\mathrm{d}X(\det X)^N\exp\left(-\operatorname{tr}\frac{X^2}{2}\right)+\Lambda X =$$
$$= \mathcal{Z}_{\frac{X^2}{2}}\{N,t\}, \tag{3.69}$$

где $Z_N\{t_k=\frac{1}{2}\delta_{k,2}\} = (-2\pi)^{N^2/2}c_N$. Это соотношение можно также рассматривать как тождество

$$\frac{\int_{N\times N}\mathrm{d}H\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}H^2\right)Det(\Lambda\otimes I - I\otimes H)}{\int_{N\times N}\mathrm{d}H\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}H^2\right)} =$$
$$= \frac{\int_{n\times n}\mathrm{d}X\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}X^2\right)\det^N(X+\Lambda)}{\int_{n\times n}\mathrm{d}X\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}X^2\right)}, \tag{3.70}$$

справедливое для любой Λ. Обратим внимание на разный размер матриц, по которым производится интегрирование $N\times N$ в левой части и $n\times n$ в правой части. Обе стороны уравнения явно зависят от N, тогда как зависимость от n в левой его части входит не вполне явно — только через посредство разрешенную область изменения переменных $t_k = -(1/k)\operatorname{tr}\Lambda^{-k}+(1/2)\delta_{k,2}$. (Это может служить иллюстрацией общего утверждения, что форма статистической суммы Концевича $\mathcal{Z}_V$, рассматриваемой как функция T, а не L или Λ, не зависит от размера матрицы n). Тождество (3.69) ожидалось уже в результате исследования тождества Уорда для гауссовой модели Концевича в [56] (см. уравнение (2.53) в разделе 2.6), а описанный только что вывод заимствован из [36].

Уравнение (3.69) можно использовать для аналитического продолжения по N и определения Z_N для N, которые не являются положительными целыми величинами. Поскольку $c_N = 0$ для всех *отрицательных* целых N (см. ниже уравнение (3.77)), это же самое относится к $Z_N : Z_N = 0$ для всех целых $N<0$. В следующем разделе 4 мы покажем, что это характерное свойство **τ-функций** форсированных (forced) иерархий.

3.9. Объем унитарной группы

Формализм ортогональных полиномов дает также простой способ вывода уравнения (3.6) для объема унитарной группы. Рассмотрим уравнение (3.4) с $U(H)=H^2$. Тогда нетрудно оценить гауссов матричный интеграл:

$$c_N\int_{N\times N}\mathrm{d}H\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}H^2\right) =$$
$$= c_N\prod_{i=1}^{N}\int\mathrm{d}H_{ii}\exp\left(-\frac{1}{2}H_{ii}^2\right)\times$$
$$\times\prod_{i<j}\int\mathrm{d}^2H_{ij}\exp\left(-\mid H_{ij}\mid^2\right) = (2\pi)^{N^2/2},$$

тогда как в соответствии с уравнениями (3.48) и (3.49) тот же интеграл равен

$$\frac{1}{N!}\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}h_i^2\right)\prod_{i>j}^{N}(h_i-h_j)^2 = \prod_{j=1}^{N}\|\,\mathrm{He}_{j-1}\,\|^2.$$

Здесь $\|\,\mathrm{He}_{j-1}\,\|$ обозначает нормы ортогональных эрмитовых полиномов (3.50), $\|\mathrm{He}_k\|^2 = \sqrt{2\pi}k!$. Сравнивая оба выражения для одного интеграла, получаем

$$c_N^{-1} = (2\pi)^{\frac{1}{2}N^2}\prod_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}k!} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}N(N-1)}}{\prod_{k=0}^{N-1}k!}. \tag{3.71}$$

В соответствии с (3.5)

$$c_N^{-1} = N!\frac{\mathrm{Vol}_{U(N)}}{(\mathrm{Vol}_{U(1)})^N},$$

а $\mathrm{Vol}_{U(1)} = 2\pi$. Таким образом, получаем уравнение (3.6):

$$\mathrm{Vol}_{U(N)} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}N(N+1)}}{\prod_{k=0}^{N}k!}.$$

[23] Отметим, что эта система функций $\varphi_k = \mathrm{i}^{-k}\mathrm{He}_k(\mathrm{i}h)$: $\varphi_0=1$, $\varphi_1=h$, $\varphi_2=h^2+1,\ldots$ и не похожа ни на какую систему ортогональных полиномиалов с локальной мерой (например, произведение $\varphi_0\cdot\varphi_2 = h^2+1$ может показаться положительно определенным, что не соответствует требованию ортогональности $\langle\varphi_0\mid\varphi_2\rangle = 0$. Дело в том, что интегрирование в левой части уравнения (3.69) хорошо определено только вдоль мнимой оси, тогда как интегралы вдоль действительной оси понимаются как аналитическое продолжение.

Примером несколько более сложной теоретико-(квантово) групповой величиной (квантовой) группой, возникающей из гауссовых матричных моделей, служит следующая формула для q-факториала [71] (см. также [72]):

$$\frac{1}{(q,q)_N} \equiv \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-q^n} = \\ = \frac{\int\int_{N\times N} \mathrm{d}H[\mathrm{d}U] \exp\left(-m^2 \operatorname{Tr} H^2 + \operatorname{Tr} HUHU^\dagger\right)}{\mathrm{Vol}_{U(N)} \int_{N\times N} \mathrm{d}H \exp\left(-m^2 \operatorname{Tr} H^2\right)}. \tag{3.72}$$

Интеграл в числителе по эрмитовым (H) и унитарным (U) $N \times N$-матрицам, а $q \equiv m^2 - \sqrt{m^4 - 1}$.

Явное выражение (3.71) можно использовать, чтобы доказать равенство $c_N = 0$ для всех *отрицательных* целых величин N [36]. Уравнение (3.71) определяет c_N в форме конечного произведения только для положительного целого N. Существует простой способ аналитического продолжения таких произведений при условии, что известно аналитическое продолжение сомножителей (можно считать, что это вытекает из аналогичной формулы для интегралов с изменяющимся верхним пределом): Пусть

$$F(N) = \sum_{k=-\infty}^{N} f(k). \tag{3.73}$$

Тогда

$$S(N) \equiv \sum_{k=1}^{N} f(k) = F(N) - F(0) \tag{3.74}$$

и, очевидно, $F(0) - F(-N) = \sum_{k=1-N}^{0} f(k)$, так что

$$S(-N) \equiv F(-N) - F(0) = -\sum_{k=0}^{N-1} f(-k). \tag{3.75}$$

Экспоненцирование этой формулы дает правило для произведений. В случае c_N факториалы в (3.71) можно рассматривать как гамма-функции

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}N(N-1)} c_N = \prod_{k=1}^{N} \Gamma(k), \tag{3.76}$$

и тогда

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N(N+1)} c_{-N} = \left(\prod_{k=0}^{N-1} \Gamma(-k)\right)^{-1} = 0, \tag{3.77}$$

из-за полюсов Γ-функций.

4. Интегрируемая структура картановских моделей

4.1. Концепция интегрируемости

Интегрируемая структура динамической системы подразумевает возможность "точного" нахождения всех динамических характеристик: решений уравнений движения для классической системы и функциональных интегралов для квантовой системы. В соответствии с этим определением понятие интегрируемости не очень конкретно и, действительно, оно изменяется со временем, включая все новые классы теорий в класс интегрируемых систем. В настоящее время не вызывает сомнения принадлежность к этому классу следующих типов теорий:

— Свободное *движение* (классическое или квантовое) на групповых многообразиях и однородных пространствах.

— Двумерные конформные теории и их "интегрируемые массивные деформации".

— Интегрируемые иерархии типа (многокомпонентных) КП и Тоды и их редукции.

— Функциональные интегралы, удовлетворяющие подчиняющимся условиям применимости (обобщенной) теоремы Дустермаата–Хекмана.

— (Картановские) матричные модели.

— Топологические теории.

— Многие суперсимметричные модели (по крайней мере допускающие преобразование Николаи и/или описание в контексте теоремы Дустермаата–Хекмана).

— Системы с (бесконечно) многими локальными интегралами движения.

Этот перечень довольно условен, не говоря уже о порядке перечисления. Кроме того, разные его пункты в действительности не столь уж различны и (как и до́лжно) могут рассматриваться, как разные описания одного явления. Рассмотрим вкратце, хотя бы самые важные подходы к концепции интегрируемости.

Понятие интегрируемости зачастую относят к наличию "достаточно большого числа" интегралов движения (выражение "достаточно большое число" означает равное "числу степеней свободы"). Это не столь жесткое определение, как может показаться. Как известно, в классической механике обычно имеется полный набор интегралов движения: просто начальные условия в фазовом пространстве (или, в более сложном описании, переменные углового действия). Проблема, однако, заключается в том, что: а) эти явные интегралы представляют собой очень сложные (нелокальные и многозначные) функционалы *текущих* координат, б) в общем случае они весьма (чаще всего — экспоненциально) "нестабильны" при небольших изменениях действующих координат ("расхождение траекторий").

Чтобы избежать эти трудности, на уравнения движения обычно накладывают условие "локальности". Это разумный подход к некоторым классам теорий (например, обладающим четко определенным кинетическим членом, квадратичным по импульсам, но *не* может служить изящным описанием общей ситуации, так как свойство "локальности" не инвариантно при произвольном (в том числе *не*локальном) изменении переменных. На практике при таком подходе интегрируемость предполагает нечто вроде "правильного" поведения траекторий и более или менее изящное определение преобразования "естественных" (лучше сказать, "исходных") координат к переменным действие — угол.

Еще менее ясна ситуация в случае квантовой теории, поскольку "хаотичное поведение" уже больше не подразумевает ничего действительно "хаотичного" для квантовой системы. И снова очень многое зависит от типа рассматриваемых наблюдаемых, и никакое понятие "регулярности" не достаточно при произвольном изменении переменных.

Проблема станет еще яснее, если вспомнить о классах универсальности — столь важном компоненте современной теории. Это понятие подразумевает, что даже в случаях, когда поведение системы выглядит абсолютно хаотичным с любой наивной точки зрения (как в случаях турбулентности или квантовой гравитации), можно и вводить новые переменные (которые могут быть очень сложными функциями исходных величин) с гладкими и хорошо определенными корреляционными функциями. В большинстве случаев никто не пытается найти *полный* набор таких переменных (что приводит к потере части информации), но это лишь отражает нынешнее состояние знаний; более того, в исследованиях двумерной квантовой гравитации цель *полного* описания уже четко сформулирована.

Вопреки всем этим замечаниям, "определение" интегрируемости в понятиях "достаточно большого числа" *локальных* интегралов движения займет первое место в нашем обсуждении, потому что в этот класс более или менее естественно попадает большинство систем, которые до сих пор рассматривались как интегрируемые, что позволяет отбирать предпочтительные динамические переменные ("более или менее" приходится говорить потому, что во всех интересных примерах, где переменные действие-угол не очевидны с самого начала, обычно присутствует "небольшая" *не*локальность).

Это "определение" столь нечетко из-за того, что мы пытались отыскать всеобщее описание интегрируемости. Однако наиболее интересны подходы с другого направления. Можно начать с какой-нибудь простой системы и затем произвести замену переменных, вследствие чего она станет выглядеть гораздо сложнее (хотя по существу останется простой). Это, по-видимому, более плодотворный подход к проблеме, и все остальные пункты нашего перечня могут быть описаны в подобных же терминах.

Тривиальный, но на удивление репрезентативный пример такого подхода дает свободная частица, двигающаяся в плоском D-мерном пространстве. Собственные функции оператора Лапласа представляют собой плоские волны или, что эквивалентно, сферические гармоники. Радиальная часть j-й гармоники — уже не столь простая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{D-1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{C_2(j)}{r^2}\right)\psi(r)=E\psi(r). \tag{4.1}$$

Это уравнение, конечно, менее тривиально, чем исходное уравнение Лапласа, но их решения соотносятся очень простым способом. Чтобы найти решение (4.1), скажем, для $j=0$, следует всего лишь взять угловое среднее плоской волны:

$$\phi_k(r)=\int\exp\left(\mathrm{i}k\vec{r}\vec{v}\right)\mathrm{d}^{D-1}\vec{v},\qquad |\,\vec{v}\,|=1. \tag{4.2}$$

Это интегральное представление выражает решение (4.1) через бесселевы функции, что является вполне подходящим способом выведения хорошо известной формулы

$$\phi_k(r)=2^{\frac{1}{2}D-1}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(kr)^{1-\frac{1}{2}D}J_{\frac{1}{2}D-1}(kr). \tag{4.3}$$

Если разложить экспоненту под интегралом в ряд, получим стандартное разложение для функции Бесселя.

Несколько более сложным примером является квантовомеханическая модель частицы в потенциале e^{-q}, т.е. теория уравнения

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}+e^{-q}\right)\psi(q)=0 \tag{4.4}$$

(в нем, конечно, нетрудно узнать упрощенный вариант моделей Тоды). Это уравнение можно решить проекцией простого уравнения Шрёдингера для частицы, движущейся по верхней части гиперболоида $x_0^2-x_1^2-x_2^2=1;\ \ x_0>0$ [73]. Если

$$x_0=\mathrm{ch}\frac{q}{2}+\frac{1}{2}z^2\exp\frac{q}{2},$$
$$x_1=\mathrm{sh}\frac{q}{2}-\frac{1}{2}z^2\exp\frac{q}{2},$$
$$x_2=z\exp\frac{q}{2},$$

то $q=\ln(x_0+x_1)$. Оператор Лапласа на гиперболоиде:

$$L=\frac{\partial^2}{\partial q^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{1}{4}e^{-q}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.5}$$

и среднее от **волновой функции** $\psi_\lambda(q,z)$ дает следующее выражение для решения уравнения (1.4):

$$\psi_\lambda(q)=e^{\mathrm{i}\lambda q}\int_0^\infty t^{2\mathrm{i}\lambda-1}\exp\left(-\left(t+\frac{e^q}{t}\right)\right)\mathrm{d}t. \tag{4.6}$$

Этот подход, который иногда называют "методом проекции" (см. более пространный обзор в [73]), выявляет скрытые симметрии некоторых сложных систем (которые вообще не обладают симметрией в обычном нётеровском смысле слова), рассматривая их как погруженные в более широкие теории с **бóльшим количеством** степеней свободы. Квантовомеханические примеры применения метода ни в коей мере не исчерпываются двумя рассмотренными выше системами: можно рассматривать разные проекции, начиная от (точно решаемой проблемы) свободного движения на любом групповом многообразии. В общей ситуации это дает начало очень важной теории "зональных сферических функций", которая сейчас привлекает все больше внимания благодаря явной связи с теорией интегрируемости и квантовой геометрией (обсуждение последнего соотношения см. в [74], а также в [75], где частично выявлена связь с ортогональными полиномами и обобщенной моделью Концевича). Чрезвычайно важный пример свободного движения на групповом многообразии (в бесконечномерном — Каца–Муди — случае) дает двумерная модель ВЗНВ, а соответствующий вариант метода проекции в конформной теории поля известен как гамильтонова редукция. И в этом случае образующиеся теории (подобные минимальным конформным моделям) не обладают какой-либо симметрией в обычном смысле этого слова; тем не менее они очень просты и точно решаемы, если помнить об их происхождении из теории свободных полей.

В принципе, редуцированная, т.е. дополненная связями (начальными условиями), теория не должна быть абсолютно симметрична, т.е. иметь в качестве гамильтониана оператор Казимира или даже ноль (как в модели ВЗНВ). Метод проекции можно использовать, чтобы получить обильную информацию о редукции теорий с более сложными гамильтонианами, являющимися *не*тривиальными функциями групповых генераторов. Простейший пример дают теория квантовомеханических "квазиточнорешаемых моделей" [76,77] и ее обобщения в рамках КТП [77, 78]. Более сложная методика известна под названием "теория локализации" [24] (ее называют также геометрическим квантованием, анализом Фурье на групповых многообразиях и теорией Дустермаата–Хекмана). Она дает возможность очень широко обобщать вышеописанную процедуру усреднения, с помощью которой плоские волны переводят в функции Бесселя. Классическая простая система, на примере которой можно иллюстрировать все аспекты интегрируемости, начиная со свободного движения и кончая анионной статистикой, W_∞-алгебрами и двумерной теорией Янга–Милса, — это система Калоджеро–Сазерленда, которая систематическим образом строится по любой простой алгебре Ли и в "умеренно сложной форме" выглядит как многочастичная теория в размерности $1+1$ с потенциалом взаимодействия $g^2 \sin^{-2} \epsilon(x_i - x_j)$. (Введение в теорию моделей типа Калоджеро можно найти в [73], а новейшие результаты содержатся в [80, 81]).

Все вышеизложенное было необходимо для иллюстрации очень простой мысли: теория свободных частиц при всей ее тривиальности на самом деле неисчерпаемо глубока. Достаточно наложить сложные начальные условия или сделать сложную замену переменных, чтобы получить очень сложные динамические системы, которые после изучения *per se* оказываются удивительно простыми по причине тривиальности лежащей в их основе динамики (динамики свободных частиц), хотя для заданной системы выявление ее простоты может оказаться очень трудной задачей. Преимущество *общей* теории состоит в том, что к ней можно приступить с нужной стороны, сразу начав с теории свободных частиц, которую затем все более усложняют введением различных переменных, анализом корреляторов сложных операторов и т.д. Все, что получается при таком подходе, по определению тривиально интегрируемо, хотя об этом не просто догадаться, если не знать, как конкретная система возникла в результате этой процедуры.

Теперь переходим к обсуждению особенно важной реализации рассмотренной идеи: теории $\bar\partial$-операторов в размерности 1_C (т.е. теории голоморфных полей в двух действительных измерениях). При анализе в качестве функций модулей расслоений над римановыми поверхностями (т.е. граничных условий, наложенных на двумерные свободные поля) сечения детерминантных расслоений (известные как τ-функции) начинают выглядеть довольно сложно и в конце концов выявляется их связь со сложными нелинейными уравнениями (разумеется, интегрируемыми) в двух и трех измерениях (подобных уравнениям КдФ или Кадомцева–Петвиашвили (КП)). Мы не пытаемся представить здесь сколько-нибудь исчерпывающую теорию τ-функций и интегрируемых иерархий (это не только не разработанная до конца, но и очень обширная тема) и сконцентрируем все внимание лишь на ее стержневом компоненте: детерминантных формулах для простейших τ-функций, а именно, ассоциированных с теорией свободных фермионов и алгебрами Каца–Муди уровня $k = 1$. Этот вопрос будет обсужден достаточно подробно, поскольку он не только лежит в основе теории интегрируемых иерархий, но и является связующим звеном между этой теорией и матричными моделями.

[24] Различные точки зрения на эту теорию и подходы к ее исследованию изложены в [5,43,44,61–65,79] (пока что никакой связи с андерсоновской локализацией в физике твердого тела не установлено).

4.2. Понятие τ-функции

Имеется несколько отличающихся определений τ-функций, но все они служат реализациями следующей мысли: τ-функция — это производящий функционал для всех корреляционных функций в теории свободных частиц в размерности $1+1$. Эта фундаментальная величина является разновидностью "*det D*", где "*D*" — оператор эволюции во времени (непрерывный или дискретный), а "*det*" — нечто типа произведения по собственным значениям "*D*", которое обычно выражено в форме функционального интеграла, связанного со свободными частицами (оно не априорно гауссово в исходных переменных). Эта величина служит самым общим определением τ-функции.

На практике оно более конкретно. Наиболее изученный вариант τ-функции возникает в случае особого типа свободных частиц: свободных фермионов с квадратичным гамильтонианом и непрерывной эволюции во времени, т.е. при анализе теории (фермионной) b, c-системы $\tilde\psi(\bar z, z), \psi(\bar z, z)$, со спином $1/2$, которая описывается функциональным интегралом

$$\tau\{A\} \sim Det(\bar\partial + \mathcal{A}) \sim$$
$$\sim \int D\tilde\psi D\psi \exp\Big(\int_{d^2z} \tilde\psi\bar\partial\psi\Big) \times$$
$$\times \exp\Big(\int_{d^2z}\int_{d^2\tilde z} A(z,\bar z)\delta(\bar{\tilde z} - \bar z)\psi(z)\tilde\psi(\tilde z)\Big),$$

где $\bar z$ играет роль времени, а $\mathcal{A} = A(z,\bar z)\delta(\bar{\tilde z} - \bar z)\, d\bar{\tilde z}\, d\bar z$ есть некий ((1/2,1; 1/2,1)-бидифференциал (т.е. содержит $d\tilde z^{1/2}\, d\bar{\tilde z}\, dz^{1/2}\, d\bar z$).

Разумеется, можно рассмотреть и более общие τ-функции с бо́льшим числом фермионов (что нередко и делают), а также более общие b, c и β, γ-системы, в частности, возникающие в контексте модели ВЗНВ, ассоциированной с любой алгеброй Каца–Муди любого уровня.[25] Интересно также рассмотреть *дискретную* эволюцию во времени (которая описывается разностными, а не дифференциальными уравнениями), хотя, как обычно в двумерных теориях, эта проблема не вполне самостоятельна.

На языке матричных моделей это ограничение *свободнофермионными* τ-функциями фактически эквивалентно ограничению *картановскими* моделями. Серьезный анализ *не*картановских моделей с целью выявления их интегрируемой (решаемой) структуры непременно потребует анализа общих τ-функций, однако обе эти

[25] Главное техническое отличие общего случая от "свободнофермионного" состоит в том, что лагранжиан теории свободных частиц общего вида не квадратичен по скалярным полям ϕ, но может содержать также специфические сочетания экспонент e^ϕ. Кроме того, заслуживает упоминания, что многие из выражений, *квадратичных* в *скалярных* полях, после переписывания в терминах фермионов становятся *четвертичными* (разумеется, таким образом *не* возникает четвертичное взаимодействие общего вида). Интегрируемая природа некоторых четвертичных фермионных взаимодействий хорошо известна из теории моделей Тирринга (в этом классе моделей взаимодействия обычно имеют локальный характер).

темы — предмет будущих исследований, и в данном сообщении мы не будем касаться их подробно.

4.3. τ-функция, ассоциированная со свободными фермионами

Ввиду специфической формы лагранжиана в (4.7) функциональный интеграл можно легко представить в терминах гамильтониана при условии тривиальности топологии 2-поверхности с координатами $\bar{z}, z$ (род 0: сфера или цилиндр). Рассмотрим, в частности, $\tilde{\psi}$ и ψ в качестве операторно-значных функций только z (но не времени $\bar{z}$). Тогда единственным воспоминанием о кинетическом члене $\int_{d^2z}\tilde{\psi}\bar{\partial}\psi$ будет каноническое коммутационное соотношение

$$[\tilde{\psi}(\bar{z}), \psi(z)]_+ = \delta(\bar{z} - z)\, d\bar{z}^{1/2}\, dz^{1/2}. \qquad (4.7)$$

Отсюда

$$\tau\{A\} \sim \langle 0 \mid \exp\left(\oint_{d\bar{z}}\oint_{dz} A(z,\bar{z})\psi(z)\tilde{\psi}(\bar{z})\right) \mid 0\rangle. \qquad (4.8)$$

Обычно производят разложение вокруг $z = 0$:

$$\psi(z) = \sum\nolimits_{n\in Z}\psi_n z^n\, dz^{1/2}; \qquad \tilde{\psi}(z) = \sum\nolimits_{n\in Z}\tilde{\psi}_n z^{-n-1}\, dz^{1/2},$$
$$[\tilde{\psi}_m, \psi_n]_+ = \delta_{m,n},$$
$$\psi_m \mid 0\rangle = 0 \ \text{для}\ m < 0, \qquad \tilde{\psi}_m \mid 0\rangle = 0 \ \text{для}\ m \ge 0;$$
$$A(z,\bar{z}) = \sum\nolimits_{m,n\in Z} z^{-m-1}\bar{z}^n A_{mn}\, dz^{1/2}\, d\bar{z}^{1/2},$$

так что

$$\oint_{d\bar{z}}\oint_{dz} A(z,\bar{z})\psi(z)\tilde{\psi}(\bar{z}) = \sum_{m,n\in Z} A_{mn}\psi_m\tilde{\psi}_n.$$

Такое разложение возможно вокруг *любой* точки z_0 и на двумерной поверхности любой топологии: топологические эффекты можно легко включить в качестве специфических сдвигов функционала $A(z,\bar{z})$ путем комбинаций "операторов приклеивания ручки". Аналогичные сдвиги могут имитировать замены базисных функций z^n на $z^{n+\alpha}$ и на более сложные выражения (голоморфные полудифференциалы с различными граничными условиями на поверхностях разной топологии).

Может возникнуть вопрос, играют ли *локальные* функции $A(z,\bar{z}) = U(z)\delta(\bar{z} - z)\, dz^{1/2}\, d\bar{z}^{1/2}$ какую-либо специальную роль?

Отвечающий им вклад в гамильтониан выглядит, как [26]

$$H_{\text{Cartan}} = \oint_{dz} U(z)\psi(z)\tilde{\psi}(z) = \oint_{dz} U(z)J(z), \qquad (4.9)$$

где

$$J(z) = \psi(z)\tilde{\psi}(z) = \sum_{n\in Z} J_n z^{-n-1}\, dz \qquad (4.10)$$

является током Каца–Муди $U(1)_{k=1}$,

$$J_n = \sum_{m\in Z}\psi_m\tilde{\psi}_{m+n}; \qquad [J_m, J_n] = m\delta_{m+n,0}. \qquad (4.11)$$

Если скалярную функцию (потенциал) $U(z)$ представить как $U(z) = \sum_{k\in Z} t_k z^k$, то

$$H_{\text{Cartan}} = \sum_{n\in Z} t_k J_k. \qquad (4.12)$$

Особое значение этого вклада в полный гамильтониан обусловлено следующей причиной. Вернемся к первоначальному выражению (4.8) и попытаемся интерпретировать его, как производящий функционал для всех корреляционных функций $\tilde{\psi}$ и ψ. На первый взгляд, вариация $A(z,\bar{z})$ должна порождать билинейную комбинацию $\psi(z)\tilde{\psi}(\bar{z})$, что решало бы задачу. Однако вопрос не столь тривиален, потому что рассматриваемые операторы не коммутируют (и, в частности, экспоненциальный оператор в (4.8) все еще нуждается в менее символическом определении, см. следующий раздел 4.4). Дело обстояло бы гораздо проще, если бы можно было рассмотреть *коммутирующее* множество операторов: здесь в игру вступает абелева подгруппа $\widehat{U(1)}_{k=1}$ полной $GL(\infty)_{k=1}$ (и даже ее чисто коммутативная подалгебра Бореля). Примечательно, что для воспроизведения всех корреляционных функций достаточно этой абелевой подгруппы[27]. Ключевым моментом является тождество для свободных фермионов (обобщаемое на случай любых b, c-систем):

$$:\psi(\lambda)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}): \; = \; :\exp\left(\int_{\lambda}^{\tilde{\lambda}} J\right):, \qquad (4.13)$$

которое хорошо известно в форме формул бозонизации[28]: если $J(z) = \partial\phi(z)$, то

$$\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}) \sim \; :e^{\phi(\tilde{\lambda})}: \qquad \left(:\psi(\infty)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}): \; = \; :e^{(\phi(\tilde{\lambda})-\phi(\infty))}: \right),$$
$$\psi(\lambda) \sim \; :e^{-\phi(\lambda)}: \qquad \left(:\psi(\lambda)\tilde{\psi}(\infty): \; = \; :e^{(\phi(\infty)-\phi(\lambda))}: \right).$$

Эти тождества предлагают возможность генерирования любых билинейных комбинаций ψ-операторов посредством варьирования только потенциала $U(z)$. Более того,

[26] Отметим, что нормировочный множитель отличается здесь на фактор $1/\sqrt{2}$ от случая дискретных моделей в разделах 2.3, 2.7 и 2.8. Это не просто изменение *обозначений*, поскольку преобразование Мивы может привести к другим результатам при изменении этого множителя. См. сноску в разделе 4.6, где этот вопрос обсуждается подробнее.

[27] Снова подчеркнем, что этот прием специфичен для свободных фермионов и алгебр Каца–Муди уровня $k = 1$, которые можно выразить целиком в терминах свободных полей, ассоциированных с картановскими генераторами (с точностью до некоторых неприятных деталей, относящихся к "коциклическим факторам" в представлениях Френкеля–Каца [47], в действительности напоминающих о существовании свободных полей, связанных с *не*картановскими генераторами (парафермионами) [58]; но их можно "замести под ковер" или/и учесть явно как "неприятные", но несущественные (?) усложнения).

[28] В скобках приведены точные формулы; перед ними записаны обычные символические соотношения. Используя эти формулы, получаем

$$:\psi(\lambda)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}): \; = \; :\exp\left[\phi(\tilde{\lambda}) - \phi(\lambda)\right]: \; =$$
$$= \; :\exp\left(\int_{\lambda}^{\tilde{\lambda}}\partial\phi\right): \; = \; :\exp\left(\int_{\lambda}^{\tilde{\lambda}} J\right):$$

Разумеется, это тождество можно получить и не выходя за рамки фермионной теории — следует только учитывать, что ψ-операторы нильпотентны, так что экспонента от ψ-оператора является просто суммой двух членов (полиномом).

это изменение может иметь специфическую форму:

$$\Delta\oint UJ = \Delta\left(\sum_{k\in Z} t_k J_k\right) = \int_z^{\tilde z} J = \sum_{k\in Z}\int_z^{\tilde z} z^{-k-1}\,\mathrm{d}z = \\ = \sum_{k\in Z}\frac{1}{k}J_k\left(\frac{1}{z^k}-\frac{1}{\tilde z^k}\right),$$

$$\Delta t_k = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{z^k}-\frac{1}{\tilde z^k}\right). \quad (4.14)$$

Подчеркнем, что это *не* бесконечно малая вариация и что она имеет форму, точно соответствующую параметризации Мивы, которая использовалась в разделе 3.

Поскольку из $U(z)$ таким способом можно генерировать любую билинейную комбинацию, очевидно, что полный гамильтониан $\sum A_{mn}\tilde\psi_m\psi_n$ также можно рассматривать, как результат трансформации V(т.е. "временных переменных" t_k). Иными словами, $\tau\{A\} = \mathcal{O}_A[t]\tau\{A = U\}$.

Эти операторы $\mathcal{O}_A$, естественно, интерпретируются как элементы группы $GL(\infty)$, действующие на "Универсальном грассманиане" [82–84], параметризованном матрицами A_{mn} с точностью до замен координат $z \to f(z)$. Это представление для $\tau\{A\}$, однако, не очень удобно, поэтому обычно рассматривают *инфинитезимальный* вариант трансформации, при котором происходит сдвиг A

$$\tau\{t \mid A + \delta A\} = \hat{\mathcal{O}}_{\delta A}[t]\tau\{t \mid A\}. \quad (4.15)$$

Отметим, что эта трансформация четко различает зависимость τ от t и от всех других компонент A. Возможность такого представления при привилегированной роли картановских генераторов служит источником всех упрощений, возникающих в случае свободнофермионных τ-функций[29].

Соотношение (4.15) составляет основу для "орбитной" интерпретации τ-функций [83]. Важно также понять с этой точки зрения смысл "струнного уравнения" и других условий, налагаемых на τ-функции в теории матричных моделей. Они возникают, как конкретные подалгебры в множестве $\hat{\mathcal{O}}$-операторов, и их роль состоит в спецификации отдельных точек A в грассманиане, для которых эта подалгебра служит стабилизатором[30]. Простейшим примером могут служить формулы из раздела 2.3, в которых комбинации экранирующих зарядов описывают A, являющиеся стабильными точками *дискретных* условий Вирасоро и W (в последнем случае используют *много*фермионную систему).

Тот факт, что τ-функцию во всех точках грассманиана можно получить групповым действием из $\tau\{0\}$, приводит к уравнению Хироты. Идея состоит в том [83], что в группе имеются операторы Казимира, которые коммутируют с групповым действием, и поэтому собственные значения оператора Казимира одинаково у $\tau\{0\}$ при всех A. В свободнофермионном случае простейшим примером оператора Казимира может служить

$$J_0 = \oint J = \oint \psi\tilde\psi = \sum_{n\in Z}\psi_n\tilde\psi_n. \quad (4.16)$$

Собственное значение этого оператора для вакуумного состояния $|0\rangle$ есть бесконечная константа вычитания, что делает уравнение $J_0\mathcal{O}_A \mid 0\rangle = \mathcal{O}_A J_0 \mid 0\rangle = \mathrm{const}\cdot\mathcal{O}_A \mid 0\rangle$ или $J_0\tau\{A\} = \mathrm{const}\cdot\tau\{A\}$, не очень интересным. Тем не менее этот оператор представлен в билинейной форме; в таких случаях обычно полезен следующий прием.

Если оператор, би линейный по генераторам алгебры T^aT^a, коммутирует с действием группы, то $T^a\otimes T^a$ также коммутирует, если групповое действие на произведение тензорных представлений определяется как $|\,\rangle\otimes|\,\rangle \to \mathcal{O}_A|\,\rangle\otimes\mathcal{O}_A|\,\rangle$. В самом деле, тогда $(T^a\otimes I + I\otimes T^a)^2$ коммутирует с групповым действием, так же как $T^a\otimes T^a = 1/2\big((T^a\otimes I + I\otimes T^a)^2 - T^aT^a\otimes I - I\otimes T^aT^a\big)$. Если, далее, $T^a\otimes T^a$ аннигилирует произведение двух вакуумных состояний

$$(T^a\otimes T^a)\ \mid 0\rangle\otimes\mid 0\rangle = 0, \quad (4.17)$$

то это же справедливо для всех A;

$$(T^a\otimes T^a)\ \mid \mathcal{O}_A\rangle\otimes\mid\mathcal{O}_A\rangle = 0. \quad (4.18)$$

Условие (4.17) в нашем случае тривиально справедливо:

$$\sum_{n\in Z}\psi_n\mid 0\rangle\otimes\tilde\psi_n\mid 0\rangle = 0, \quad (4.19)$$

поскольку в каждом члене суммы аннигилируется одно из вакуумных состояний: первое, если $n \geq 0$, и второе, если $n<0$[31]. Таким образом, получаем соотношение

$$\sum_{n\in Z}\psi_n\mid\mathcal{O}_A\rangle\otimes\tilde\psi_n\mid\mathcal{O}_A\rangle = 0, \quad (4.20)$$

которое теперь можно умножить слева на

[29] По этой же причине именно такие свободнофермионные τ-функции и появляются при изучении обычных интегрируемых иерархий: гамильтоновы потоки, которые описывают эволюцию в различных t-направлениях, коммутируют, потому что t связаны с коммутирующими картановскими генераторами алгебры $GL(\infty)$. В более общем случае потоки образуют замкнутую, но *неабелеву* алгебру.

[30] Это соотношение особенно просто в случае условий Вирасоро, так как алгебра Вирасоро — это всего лишь подалгебра $GL(\infty)$, действующей на τ-функции, и потому является симметрией (ковариантностью) соответствующих интегрируемых иерархий [84]. Старшие W-условия не образуют подалгебру Ли этой $GL(\infty)$, а возникают после определенной редукции, которая в свою очередь существует в простой форме *не* всюду на грассманиане (в частности, W не является симметрией иерархии КП [85]): здесь мы имеем дело с более сложным самосогласованным соотношением, которое еще предстоит понять во всех подробностях (неизвестно, например, существует ли необходимая редукция, хотя бы во *всех точках,* стабильных по отношению к условиям Вирасоро, что значительно упростило бы такой анализ). На самом деле, полное соотношение между W-условиями и τ-функциями исчерпывающим образом не выяснено: например, до сих пор нет четкого и удовлетворительного доказательства того, что полная система условий Вирасоро и/или W наложенных на статистическую сумму подразумевает, что она является τ-функцией, которое было бы чисто алгебраическим доказательством и не апеллировало бы к единственности: решений этой системы. В литературе широко обсуждается (см. [29]) несколько иной результат. Если струнное уравнение (низшее условие Вирасоро $L_{-1}Z = 0$) наложено на Z (являющуюся должным образом редуцированной τ-функцией, то оно подразумевает полное множество условий Вирасоро и W (хотя даже в этом случае доказательство все еще имеет уязвимые места).

$$\langle 0 \mid \psi(\infty) \exp\left[H_{\text{Cartan}}(t)\right] \otimes \langle 0 \mid \tilde{\psi}(\infty)\left[H_{\text{Cartan}}(t')\right]$$

(t'_k не обязательно должно совпадать с t_k) и после вставки ψ операторов, выраженных как сдвиги времени, получаем

$$\sum_{n\in Z} D_n^- \tau\{t \mid A\} \otimes D_n^+ \tau\{t' \mid A\} = 0, \tag{4.21}$$

где

$$\sum_{n\geq 0} D_n^{\pm} z^{-n} = \exp\left(\pm \sum_{k>0} \frac{1}{kz^k}\frac{\partial}{\partial t_k}\right).$$

Это одна из форм уравнения Хироты [86], которое часто используют, чтобы *определить* τ-функции, ассоциированные с интегрируемыми иерархиями. Если взять за определение (4.8), то, как естественнее всего поступить в общей "теории всего", и как мы делали выше, уравнение (4.21) послужит отправной точкой на пути, ведущему к иерархиям в стандартной форме дифференциальных уравнений, причем на этом пути *естественно* появятся и псевдодифференциальные представления. Мы, однако, воздержимся здесь от разработки этого направления.

Последнее замечание, которое необходимо сделать, прежде чем перейти к более подробным формулам, касается возможности рассматривать τ-функции как детерминанты $Det\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}$-операторов, действующих на поля с нетривиальными граничными условиями (типа $\psi(z) \sim \exp\left(\sum_{k>0} t_k z^{-k}\right)$ в простейшем случае зависимостей от t). Полную зависимость от A обычно описывают в этом контексте, как зависимость от точки "универсального пространства модулей", которое в свое время появилось при изучении струнных моделей на римановых поверхностях произвольного рода [87]. С этой точки зрения, общие τ-функции являются сечениями расслоений над универсальным пространством модулей, связанными с конформными моделями, более сложными, чем теория свободных фермионов (и b, c-систем). Наиболее важным объектом исследования в этом контексте является, конечно, модель ВЗНВ.

Важнейшим свойством всех величин, которые таким образом ассоциированы с конформными моделями, является применимость теоремы Вика, сводящей многоточечные корреляционные функции к парам корреляторов. В случае свободных фермионов — это является простым следствием квадратичности лагранжиана, в общей же ситуации это следует из существования голоморфной операторной алгебры, которая позволяет определять корреляторы, задавая лишь свойства, монодромии при попарном сближении выколотых точек. Теорема Вика служит конкретным источником детерминантных формул для τ-функций, которые используются для выявления их связи с матричными моделями и другими разделами теории струн.

Обсудив контекст, в котором могут появляться и действительно появляются свободнофермионные τ-функции, перейдем теперь к более подробным и точным формулам, относящимся к этому свободнофермионному случаю. Единственная сложность при работе с этими формулами заключается в точном определении процедуры нормального упорядочения. В основном, эти формулы выводились представителями японской школы [88], хотя после возникновения этого направления в его развитие внесли вклад и другие исследования. Мы основываемся прежде всего на работах [30, 36, 89].

4.4. Основная детерминантная формула для коррелятора свободных фермионов

Рассмотрим следующий матричный элемент:

$$\tau_N\{t, \bar{t} \mid G\} = \langle N \mid e^H \, G \, e^{\bar{H}} \mid N\rangle, \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \sum_{n\in Z} \psi_n z^n dz^{1/2}; \quad \tilde{\psi}(z) = \sum_{n\in Z} \tilde{\psi}_n z^{-n-1}\, dz^{1/2},\\
G &= \exp\left(\sum_{m,n\in Z} A_{mn}\psi_m\tilde{\psi}_n\right),\\
H &= \sum_{k>0} t_k J_k, \quad \bar{H} = \sum_{k>0} \bar{t}_k J_{-k}\\
J(z) &= \psi(z)\tilde{\psi}(z) = \sum_{n\in Z} J_n z^{-n-1}\, dz,\\
J_n &= \sum_k \psi_k \tilde{\psi}_{k+n};
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$[\tilde{\psi}_m, \psi_n]_+ = \delta_{m,n}, \qquad [J_m, J_n] = m\delta_{m+n,0},$$

$$\begin{aligned}
\psi_m \mid N\rangle &= 0, \quad m < N, \quad \langle N \mid \tilde{\psi}_m = 0, \quad m \geq N,\\
\tilde{\psi}_m \mid N\rangle &= 0, \quad m \geq N, \quad \langle N \mid \psi_m = 0, \quad m < N,\\
J_m \mid N\rangle &= 0, \quad m > 0, \quad \langle N \mid J_m = 0, \quad m < 0\,.
\end{aligned}$$

"N-вакуум" $|N\rangle$ определяется, как море Дирака, заполненное до уровня N:

$$\begin{aligned}
|N\rangle &= \prod_{i=N}^{\infty} \tilde{\psi}_i \mid \infty\rangle = \prod_{i=-\infty}^{N-1} \psi_i \mid -\infty\rangle\,,\\
\langle N| &= \langle\infty \mid \prod_{i=N}^{\infty} \psi_i = \langle -\infty \mid \prod_{i=-\infty}^{N-1} \tilde{\psi}_i,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

где "пустой" и "полностью заполненный" вакуумы определяются как

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_m \mid -\infty\rangle = 0, &\quad \langle -\infty \mid \psi_m = 0,\\
\psi_m \mid \infty\rangle = 0, &\quad \langle \infty \mid \tilde{\psi}_m = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

для *любого* $m \in Z$. По той единственной причине, что операторы J, H, $\bar{H}$ и G определены таким образом, что справа во всех из них стоит $\tilde{\psi}$, а слева имеем также

$$\begin{aligned}
J_m \mid -\infty\rangle = 0, &\quad \langle -\infty \mid J_m = 0,\\
G^{\pm 1} \mid -\infty\rangle = \mid -\infty\rangle, &\quad \langle -\infty \mid G^{\pm 1} = \langle -\infty \mid,\\
e^{\pm \bar{H}} \mid -\infty\rangle = \mid -\infty\rangle, &\quad \langle -\infty \mid e^{\pm H} = \langle -\infty \mid.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

---

[31] Нетрудно осуществить непосредственную проверку того, что $\sum_n \psi_n \otimes \tilde{\psi}_n$ на самом деле является оператором Казимира в тензорном произведении:

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_n \psi_n \otimes \tilde{\psi}_n,\ I \otimes \sum_{l,m} A_{lm}\psi_l\tilde{\psi}_m + \sum_{l,m} A_{lm}\psi_l\tilde{\psi}_m \otimes I\right] =\\
&= \sum_n \left(\psi_n \otimes \sum_m A_{nm}\tilde{\psi}_m - \sum_l A_{ln}\psi_l \otimes \tilde{\psi}_n\right) =\\
&= \sum_l \sum_m A_{lm}(\psi_l \otimes \tilde{\psi}_m - \psi_l \otimes \tilde{\psi}_m) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь все эти формулы можно использовать, чтобы переписать исходный коррелятор (4.22) в виде

$$\begin{aligned}
&\langle N \mid e^{H}\, G\, e^{\bar{H}} \mid N\rangle = \\
&= \langle -\infty \mid \left(\prod_{i=-\infty}^{N-1}\tilde{\psi}_i\right) e^{H}\, G\, e^{\bar{H}} \left(\prod_{i=-\infty}^{N-1}\psi_i\right) \mid -\infty\rangle = \\
&= \langle -\infty \mid e^{-H}\left(\prod_{i=-\infty}^{N-1}\tilde{\psi}_i\right) e^{H}\, G\, e^{\bar{H}} \left(\prod_{i=-\infty}^{N-1}\psi_i\right) e^{-\bar{H}} \mid -\infty\rangle = \\
&= \langle -\infty \mid \prod_{i=-\infty}^{N-1}\tilde{\Psi}_i[t] \prod_{j=-\infty}^{N-1}\Psi_j^G[\bar{t}] \mid -\infty\rangle = \\
&= \mathrm{Det}_{-\infty<i,j<N}\langle -\infty \mid \tilde{\Psi}_i[t]\Psi_j^G[\bar{t}] \mid -\infty\rangle = \\
&= \mathrm{Det}_{i,j<0}\mathcal{H}_{i+N,j+N}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Две последние операции представляют собой введение "$GL(\infty)$ повернутых" фермионов

$$\tilde{\Psi}_i[t] \equiv e^{-H}\psi_i e^{H}, \qquad \Psi_j[\bar{t}] \equiv e^{\bar{H}}\psi_j e^{-\bar{H}}, \qquad \Psi_j^G[\bar{t}] \equiv G\Psi_j[\bar{t}]G^{-1}, \tag{4.28}$$

и применение теоремы Вика для выражения многофермионной корреляционной функции через парные корреляторы

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ij}(t,\bar{t}) &\equiv \langle -\infty \mid \tilde{\Psi}_i[t]\Psi_j^G[\bar{t}] \mid -\infty\rangle = \\
&= \langle -\infty \mid \tilde{\Psi}_i[t]\; G\; \Psi_j[\bar{t}] \mid -\infty\rangle
\end{aligned} \tag{4.29}$$

(снова использован тот факт, что $G^{-1}|-\infty\rangle = |-\infty\rangle$). Единственная *не*тривиальная динамическая информация введена через посредство теоремы Вика, поэтому важное значение имело то обстоятельство, что все операторы e^H, $e^{\bar{H}}$, G являются квадратичными экспонентами, т.е. могут модифицировать только форму пропагатора, но не нарушают квадратичную форму действия (поля остаются *свободными*). Это полностью эквивалентно утверждению, что "гейзенберговские" операторы $\Psi[t]$ представляют собой не что иное, как "вращения" полей ψ, т.е. преобразования (4.28) *линейны*.

Теперь опишем эти преобразования несколько подробнее. Их полная временна́я зависимость может быть закодирована в терминах "полиномов Шура" $P_n(t)$. Последние по определению имеют очень простую производящую функцию (с которой мы уже неоднократно встречались в теории матричных моделей):

$$\sum_{n\geq 0} P_n(t)z^n = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right) \tag{4.30}$$

(т.е. $P_0 = 1$, $P_1 = t_1$, $P_2 = t_1^2/2 + t^2$ и т. д.) и удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial P_n}{\partial t_k} = P_{n-k}. \tag{4.31}$$

Поскольку

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right) = \prod_{k>0}\left(\sum_{n_k\geq 0}\frac{1}{n_k!}\, t_k^{n_k} z^{kn_k}\right),$$

полиномы Шура можно представить так же, как

$$P_n(t) = \sum_{\substack{\{n_k\}\\ \sum_{k>0} kn_k = n}} \left(\prod_{k>0}\frac{1}{n_k!}\, t_k^{n_k}\right). \tag{4.32}$$

Теперь, поскольку

$$e^{-B}Ae^{B} = A + [A,B] + \frac{1}{2!}[[A,B],B] + \frac{1}{3!}\Big[[[A,B],B],B\Big] + \ldots$$

и

$$[\tilde{\psi}_i, J_k] = \tilde{\psi}_{i+k}, \quad [[\tilde{\psi}_i, J_{k_1}], J_{k_2}] = \tilde{\psi}_{i+k_1+k_2}, \; \ldots,$$

для каждого фиксированного k имеем

$$e^{-t_kJ_k}\tilde{\psi}_i e^{t_kJ_k} = \sum_{n_k\geq 0}\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}\,\tilde{\psi}_{i+kn_k}.$$

Остается заметить, что все гармоники J в $H = \sum_{k>0} t_kJ_k$ коммутируют между собой, давая

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_i(t) &= e^{-H}\tilde{\psi}_i e^{H} = \left(\prod_{k>0} e^{-t_kJ_k}\right)\tilde{\psi}_i\left(\prod_{k>0} e^{t_kJ_k}\right) = \\
&= \sum_{n\geq 0}\tilde{\psi}_{i+n}\left(\sum_{\substack{\{n_k\}\\ \sum_{k>0} kn_k = n}}\left(\prod_{k>0}\frac{1}{n_k!}\, t_k^{n_k}\right)\right) \overset{(4.32)}{=} \\
&= \sum_{n\geq 0}\tilde{\psi}_{i+n}P_n(t) = \sum_{l\geq i}\tilde{\psi}_l P_{l-i}(t).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Сходным образом, соотношение $[J_k, \psi_j] = \psi_{k+j}$ подразумевает, что

$$\Psi_j(\bar{t}) = e^{\bar{H}}\psi_j e^{-\bar{H}} = \sum_{n\geq 0}\psi_{j+n}P_n(\bar{t}) = \sum_{m\geq j}\psi_m P_{m-j}(\bar{t}) \tag{4.34}$$

и, наконец,[32]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ij} &= \sum_{\substack{l\geq i\\ m\geq j}}\langle -\infty \mid \tilde{\psi}_l\; G\; \psi_m \mid -\infty\rangle\; P_{l-i}(t)P_{m-j}(\bar{t}) = \\
&= \sum_{\substack{l\geq i\\ m\geq j}} T_{lm}P_{l-i}(t)P_{m-j}(\bar{t}),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

что предполагает

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{H}_{ij}}{\partial t_k} &= \mathcal{H}_{i+k,j}, \\
\frac{\partial\mathcal{H}_{ij}}{\partial \bar{t}_k} &= \mathcal{H}_{i,j+k}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Матрица

$$T_{lm} \equiv \langle -\infty \mid \tilde{\psi}_l\; G\; \psi_m \mid -\infty\rangle \tag{4.37}$$

[32] Уравнение (4.34) можно также интерпретировать как представление полиномов Шура в терминах фермионных корреляторов в пустом вакууме:

$$\begin{aligned}
P_m(\bar{t}) &= \langle -\infty \mid \tilde{\psi}_{j+m}e^{\bar{H}}\psi_j \mid -\infty\rangle, \\
P_m(t) &= \langle -\infty \mid \tilde{\psi}_i e^{H}\psi_{i+m} \mid -\infty\rangle.
\end{aligned}$$

определяет вращение фермионов под действием $GL(\infty)$ - группового элемента:

$$\begin{aligned} G\psi_m G^{-1} &= \sum_{l\in Z}\psi_l T_{lm}, \\ G^{-1}\tilde{\psi}_l G &= \sum_{m\in Z} T_{lm}\tilde{\psi}_m, \text{ или} \\ G\tilde{\psi}_l G^{-1} &= \sum_{m\in Z}(T^{-1})_{lm}\tilde{\psi}_m. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Если $G = 1$, то $T_{lm} = \delta_{lm}$. Если все $t_k = \bar{t}_k = 0$, то $\mathcal{H}_{ij} = T_{ij}$

4.5. τ-функция для двумеризованной иерархии Тоды и линейные редукции двумеризованной иерархии Тоды

В предыдущем разделе 4.4 мы вывели формулу

$$\tau_N\{t,\bar{t}\mid G\} = \mathrm{Det}_{i,j<0}\mathcal{H}_{i+N,j+N} \tag{4.39}$$

для базового коррелятора, определяющего τ-функцию для двумеризованной системы Тоды. По очевидным причинам $\bar{t}$ нередко называют отрицательными временами. τ-функцию можно нормировать, разделив на ее значение при нулевых временах, хотя это и не всегда удобно. Формула (4.39) имеет обобщения, когда рассматриваются сходные матричные элементы многофермионной системы, что приводит к τ-функциям для "многокомпонентной иерархии Тоды" (**или** τ). Следует рассмотреть также обобщения, связанные с произвольными конформными моделями. (4.39) имеет также ряд "редукций", из которых особенно важны τ -функции для иерархий КП (Кадомцева–Петвиашвили), форсированных (полубесконечных) и цепочки Тоды. Вопрос о редукциях и будет обсуждаться в данном разделе 4.5.

Суть линейной редукции состоит в том, что форма оператора G или, что то же самое, матрицы T_{lm} в уравнении (4.35) может быть подобрана таким образом, что $\tau_N\{t,\bar{t}\mid G\}$ оказывается независимой от некоторых переменных, т.е. уравнение

$$\left(\sum_k \alpha\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_k \bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} + \right.$$
$$\left. + \sum_k \beta_k D_N(k) + \gamma\right)\tau_N\{t,\bar{t}\mid G\} = 0. \tag{4.40}$$

рассматриваемое как уравнение на G имеет решение сразу для всех значений $t, \bar{t}$ и N.

(В (4.40) $D_N(k) f_N \equiv f_{N+k} - f_N$). При таком G система интегрируемых уравнений (иерархия), возникающих из уравнения Хироты для τ, оказывается приводимой и тогда обычно говорят о "редуцированной иерархии". Обычно уравнение (4.40) непосредственно налагается на матрицу $\mathcal{H}_{ij}$; тогда, разумеется, (4.40) является просто следствием.

Будем называть ситуацию, в которой (4.40) выполняется для *любых* $t, \bar{t}, N$, "сильной редукцией". Нередко встречаются также "слабые редукции", когда (4.40) удовлетворяется на определенных бесконечномерных гиперплоскостях в пространстве временных переменных. Обычно слабая редукция тоже есть свойство τ-функций, как целого, но его нельзя выразить в форме локального линейного уравнения, тождественно выполненного для *всех* значений $t, \bar{t}, N$. Перейдем теперь к конкретным примерам.

Иерархия цепочки Тоды. Это *сильная* редукция. Соответствующее условие (4.40):

$$\frac{\partial\mathcal{H}_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial\mathcal{H}_{ij}}{\partial\bar{t}_k} \tag{4.41}$$

или, из-за (4.36). $\mathcal{H}_{i+k,j} = \mathcal{H}_{i,j+k}$. Имеется очевидное решение:

$$\mathcal{H}_{i,j} = \hat{\mathcal{H}}_{i+j}, \tag{4.42}$$

т.е. выражается через *одно*индексную величину $\hat{\mathcal{H}}_i$. Однако недостаточно указать ограничения на $\mathcal{H}_i$— они должны быть выполнены для всех t и $\bar{t}$, т.е. должны быть разрешимы как уравнения для T_{lm}. В рассматриваемом случае это просто: T_{lm} должна быть такой, чтобы

$$T_{lm} = \hat{T}_{l+m}. \tag{4.43}$$

В самом деле, тогда

$$\mathcal{H}_{ij} = \sum_{l,m} T_{lm}P_{l-i}(t)P_{m-j}(\bar{t}) = \sum_{l,m}\hat{T}_{l+m}P_{l-i}(t)P_{m-j}(\bar{t}) =$$
$$= \sum_{n\geq 0}\hat{T}_{n+i+j}\left(\sum_{k=0}^{n} P_k(t)P_{n-k}(\bar{t})\right)$$

и

$$\hat{\mathcal{H}}_i = \sum_{n\geq 0}\hat{T}_{n+i}\left(\sum_{k=0}^{n} P_k(t)P_{n-k}(\bar{t})\right). \tag{4.44}$$

Иерархия Вольтерры. τ-функция для цепочки Тоды может быть далее *слабо* редуцирована так, чтобы удовлетворять тождеству

$$\left.\frac{\partial\tau_{2N}}{\partial t_{2k+1}}\right|_{\{t_{2l+1}=0\}} = 0, \quad \text{для всех } k, \tag{4.45}$$

т.е. τ_{2N} должна быть четной функцией всех нечетных времен t_{2l+1} (это пример "глобальной характеристики" слабого приведения). Заметьте, что (4.45) накладывается на τ-функцию для цепочки Тоды только с *четными* значениями нулевого времени. Тогда (4.45) будет справедливо во всех случаях, когда $\hat{\mathcal{H}}_i$ в (4.44) — четные (нечетные) функции t_{odd} для четных (нечетных) значений i. Поскольку полиномы Шура $P_k(t)$ являются четными (нечетными) функциями нечетных времен для четных (нечетных) k, этого достаточно, чтобы суммирование в (4.44) проводилось по четным (нечетным) n, когда i четное (нечетное). Иными словами, ограничение на T_{lm} имеет вид

$$T_{lm} = \hat{T}_{l+m}, \quad \text{и} \quad \hat{T}_{2k+1} = 0 \quad \text{для всех } k. \tag{4.46}$$

Форсированные иерархии. Это еще один важный пример сильной редукции. Это одновременно и пример *сингулярных* τ-функций, возникающих, когда $G = \exp\left(\sum_{m,n} A_{mn}\psi_m\tilde{\psi}_n\right)$ обращается в бесконечность и для определения регуляризованных τ-функций приходится использовать нормально упорядоченные операторы. Форсированные иерархии возникают, когда G представим в виде [89] $G = G_0 P_+$, где оператор проекции P_+ таков, что

$$\begin{aligned} P_+ \mid N\rangle &= \mid N\rangle \quad \text{для} \quad N \geq N_0, \\ P_+ \mid N\rangle &= 0 \quad \text{для} \quad N < N_0. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Явное выражение для этого оператора имеет вид [32a]

$$P_+ = :\exp\left(-\sum_{l<N_0} \tilde{\psi}_l \psi_l\right): = \prod_{l<N_0}(1-\tilde{\psi}_l\psi_l) = \prod_{l<N_0} \psi_l \tilde{\psi}_l.$$

Из-за (4.47), $P_+ \mid -\infty\rangle = 0$, и тождество $G \mid -\infty\rangle = \mid -\infty\rangle$, существенно использовавшееся при выводе (4.27), может удовлетворяться, только если G_0 сингулярно, а $T_{lm} = \infty$. Во избежание этой проблемы в окрестности таких сингулярных точек в универсальном пространстве модулей вводится нечто типа нормированной (форсированной) τ-функции $\tau^f_N \equiv \tau_N/\tau_{N_0}$. Можно убедиться теперь, что $T^f_{lm} = \infty$ для всех $l, m < N_0$, и τ^f может быть представлена детерминантом конечномерной матрицы [89, 90]:

$$\begin{aligned} &\tau^f_N = \mathrm{Det}_{N_0 \leq i,j<N} \mathcal{H}^f_{ij} \quad \text{при} \quad N > N_0, \\ &\tau^f_{N_0} = 1, \\ &\tau^f_N = 0 \quad \text{при} \quad N < N_0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Для $N > N_0$ мы получили детерминант матрицы $(N-N_0)\times(N-N_0)$. Выбор N_0 на самом деле не существен, и удобнее положить $N_0 = 0$ для упрощения формул, формулировок и соотношения с дискретными матричными моделями (N_0 легко восстановить, если всюду заменить N на $N - N_0$). Для форсированных иерархий $\hat{\tau}$ может быть также представлена в виде

$$\tau^f_N = \mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} \partial_1^i \bar{\partial}_1^j \mathcal{H}^f, \tag{4.49}$$

где $\mathcal{H}^f = \mathcal{H}^f_{00}$, а $\partial_1 = \partial/\partial t_1, \bar{\partial}_1 = \partial/\partial \bar{t}_1$. Для *форсированной иерархии цепочки Тоды* эта формула еще более упрощается:

$$\tau^f_N = \mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} \partial_1^{i+j} \hat{\mathcal{H}}^f, \tag{4.50}$$

в то время как в случае *форсированной иерархии Вольтерры* получаем произведение двух τ-функций для цепочки Тоды с уменьшенной вдвое величиной N [91]:

$$\begin{aligned} \tau^f_{2N} &= \left(\mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} \partial_2^{i+j} \hat{\mathcal{H}}^f\right)\cdot\left(\mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} \partial_2^{i+j}(\partial_2 \hat{\mathcal{H}}^f)\right) = \\ &= \tau^f_N[\hat{\mathcal{H}}^f]\cdot\tau^f_N[\partial_2\hat{\mathcal{H}}^f]. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Форсированная τ^f_N *всегда* может быть представлена в форме модели со скалярным произведением. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ij} &= \sum T_{lm} P_{l-i}(t) P_{m-j}(\bar{t}) = \\ &= \oint\oint \exp\left[U(h) + \bar{U}(\bar{h})\right] h^i \bar{h}^j T(h,\bar{h})\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}\bar{h}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

где $T(h,\bar{h}) \equiv \sum_{lm} T_{lm} h^{-l-1} \bar{h}^{-m-1}$, а

$$e^{U(h)} = \exp\left(\sum_{k>n} t_k h^k\right) = \sum_{l\geqslant 0} h^l P_l(t).$$

[32a] Знак нормального упорядочения : : подразумевает, что все операторы $\tilde{\psi}$ стоят *слева* от всех ψ. Произведение в правой части с очевидностью обладает и свойством (4.47), и свойством проектора $P_+^2 = P_+$.

Далее, поскольку

$$\mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} h_j^i = \Delta_N(h),$$

именно в этом месте существенно, что иерархия форсированная

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}_{0\leq i,j<N} \mathcal{H}_{ij} = \prod_i \oint\oint \exp\left[U(h_i) + \bar{U}(\bar{h}_i)\right] \times \\ \times T(h_i,\bar{h}_i)\, \mathrm{d}h_i\, \mathrm{d}\bar{h}_i \cdot \Delta_N(h)\Delta_N(\bar{h}), \end{aligned} \tag{4.53}$$

т.е. получаем модель со скалярным произведением и мерой

$$\mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}} = \exp\left[U(h) + \bar{U}(\bar{h})\right] T(h,\bar{h})\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}\bar{h}. \tag{4.54}$$

Справедливо и обратное: статистическая сумма любой модели со скалярным произведением является форсированной τ^f-функцией иерархии двумеризованной Тоды; см. более подробное обсуждение в разделе 4.7.

Иерархия КП. В этом случае игнорируется зависимость τ-функции от времен $\bar{t}$. Любую τ-функцию для двумеризованной системы Тоды можно рассматривать также в качестве τ-функции КП: тогда оператор $G^{\mathrm{KP}} \equiv G e^{\bar{H}}$ (точка грассманиана) становится зависящим от $\bar{t}$. Обычно исключается из рассмотрения также зависимость от N, что можно интерпретировать как несколько более сложное изменение G. Фиксация N все еще оставляет некоторую свободу в выборе полей, в том числе, например, переход из сектора Рамонда в сектор Невье–Шварца и т.п. Нередко иерархия КП с самого начала сформулирована в терминах (антипериодических) фермионных полей Невье–Шварца (ассоциированных с главными (principal) представлениями алгебр Каца–Муди); иными словами, разложения в первой строке (4.23) осуществляются по полуцелым степеням z: $\psi_{NS}(z) = \sum_{n\in Z} \psi_n z^{n-1/2}\, \mathrm{d}z^{1/2}$.

Если дана τ-функция КП, всегда можно построить τ-функцию для двумеризованной Тоды с *тем же* G, вводя правильным образом зависимости от $\bar{t}$ и N. Для этого τ^{KP} необходимо представить в форме (4.39):

$$\tau^{KP}\{t \mid G\} = \mathrm{Det}_{i,j<0} \mathcal{H}^{\mathrm{KP}}_{ij}, \tag{4.55}$$

где $\mathcal{H}^{\mathrm{KP}}_{ij} = \sum_l T_{lj} P_{l-i}(t)$. Поскольку T_{lm} есть функция только G, она не изменяется при переходе к τ-функции двумеризованной Тоды:

$$\begin{aligned} &\tau_N\{t,\bar{t} \mid G\} = \mathrm{Det}_{i,j<0} \mathcal{H}_{i+N,j+N}, \\ &\mathcal{H}_{ij} = \sum_{l,m} T_{lm} P_{l-i}(t) P_{m-j}(\bar{t}) = \sum_m \mathcal{H}^{\mathrm{KP}}_{im} P_{m-j}(\bar{t}). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Тогда

$$\tau^{KP}\{t \mid G\} = \tau_0\{t, 0 \mid G\}. \tag{4.57}$$

Если двигаться в противоположном направлении, рассматривая τ-функцию двумеризованной Тоды, рассматриваются в качестве τ-функции КП, то

$$\begin{aligned} &\tau_0\{t,\bar{t} \mid G\} = \tau^{KP}\{t \mid \tilde{G}(\bar{t})\}, \\ &\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{KP}}_{ij} = \sum_m \mathcal{H}_{im} P_{m-j}(\bar{t}) \\ &\tilde{T}_{lj}\{\tilde{G}(\bar{t})\} = \sum_m T_{lm}\{G\} P_{m-j}(\bar{t}). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Редукция КП в свою очередь имеет множество более слабых редукций, простейшими примерами которых служат иерархии КдФ и Буссинеска. Мы вернемся к ним еще раз в разделе 4.9, рассмотрев сначала преобразование в следующем разделе 4.6 Мивы представления (4.9).

4.6. Фермионный коррелятор в координатах Мивы

Вернемся теперь к исходному коррелятору (4.22) и обсудим несколько подробнее следствия тождества бозонизации (4.13). Для того чтобы заиметь явное представление для интегралов от J, введем скалярное поле [33]

$$\phi(z) = \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in Z-0}} \frac{J_{-k}}{k} z^k + \phi_0 + J_0 \ln z, \tag{4.59}$$

так что $\partial\phi(z) = J(z)$. Тогда согласно (4.13):

$$:\psi(\lambda)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}): \; = \; :\exp\left[\phi(\tilde{\lambda}) - \phi(\lambda)\right]: \tag{4.60}$$

"Нормальное упорядочение" означает здесь не что иное, как требование пренебречь всеми свертками (или корреляторами) операторов, стоящих между : : при вычислении для оценки корреляционных функций по теореме Вика. Если не ставить знак нормального упорядочения в левой части (4.60), то имеем

$$\psi(\lambda)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}) = :\exp\left[\phi(\tilde{\lambda})\right]: :\exp\left[-\phi(\lambda)\right]: \tag{4.61}$$

В выделенных координатах на сфере, когда пропагатор свободных полей является просто $\ln(z-\tilde{z})$, имеем также

$$\psi(z)\tilde{\psi}(\tilde{z}) = \frac{1}{z-\tilde{z}} :\psi(z)\tilde{\psi}(\tilde{z}):$$

Теперь задача состоит в том, чтобы выразить операторы e^H и $e^{\tilde{H}}$ через поле ϕ. Это просто:

$$H = \oint_0 U(z)J(z) = \oint_0 U(z)\partial\phi(z) = -\oint_0 \phi(z)\partial U(z). \tag{4.62}$$

Как обычно, здесь $U(z) = \sum_{k>0} t_k z^k$, а интеграл берется по контуру вокруг $z=0$. Это очень напоминает линейный функционал общего вида $\phi_-(\lambda) \equiv -\sum_{k>0}\frac{1}{k}J_k\lambda^{-k}$,

$$H = \int \phi_-(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \tag{4.63}$$

требуется только, чтобы [34]

$$\partial U(z) = \int \frac{f(\lambda)}{z-\lambda}\, d\lambda,$$

т.е.

$$U(z) = \int \ln\left(1-\frac{z}{\lambda}\right) f(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.64}$$

В терминах временных переменных это означает, что

$$t_k = -\frac{1}{k}\int \lambda^{-k} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.65}$$

Здесь мы потребовали, чтобы $U(z=0)=0$; иногда более естественно ввести также

$$t_0 = \int \ln\lambda\, f(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.66}$$

Этот переход от временных переменных к **"временнóй** плотности" $f(\lambda)$ известен как преобразование Мивы. Для установления связи с фермионным представлением, а также с матричными моделями, необходима его "дискретизированная" форма

$$t_k = \frac{\xi}{k}\left(\sum_\gamma \lambda_\gamma^{-k} - \sum_\gamma \tilde{\lambda}_\gamma^{-k}\right),$$
$$t_0 = -\xi\left(\sum_\gamma \ln\lambda_\gamma - \sum_\gamma \ln\tilde{\lambda}_\gamma\right). \tag{4.67}$$

Мы заменили интеграл по λ на дискретную сумму (т.е. функция плотности $f(\lambda)$ стала комбинацией δ-функций в некоторых точках λ_γ, $\tilde{\lambda}_\gamma$). Это, конечно, не более чем еще один базис в пространстве линейных функционалов, но переход от одного базиса к другому в высшей степени *не*тривиален. Дело в том, что мы выбрали базис так, что разные δ-функции имеют *одинаковые* амплитуды: параметр ξ в (4.67) *не зависит* от γ. Таким образом, реальными параметрами являются только положения точек λ_γ, $\tilde{\lambda}_\gamma$, тогда как амплитуда определяется плотностью этих точек в области интегрирования (суммирования). Выбор этой области ничем *a priori* не ограничен: она может быть вещественной осью, любым другим контуром или, лучше всего, некоторой римановой поверхностью. Также необязательно вводить параметр ξ, потому что базисы с разными ξ по сути дела эквивалентны. Мы скоро положим ξ равным *единице*, но прежде несколько подробнее рассмотрим трансформацию Мивы.

Наши следующие шаги таковы: подставим (4.63) в (4.67), что дает

$$H = -\xi\sum_\gamma \phi_-(\lambda_\gamma) + \xi\sum_\gamma \phi_-(\tilde{\lambda}_\gamma). \tag{4.68}$$

Фактически нам нужен не сам оператор H, а состояние, порождаемое действием e^H на вакуумное состояние $\langle N|$. Тогда, поскольку $\langle N|J_m = 0$ для $m<0$, $\langle N|\exp\left[-\xi\phi_-(\lambda)\right]$ совпадает с $\langle N|\exp\left[-\xi\phi(\lambda)\right]$, где вместо $\phi_-(\lambda)$ подставлено полное $\phi(\lambda)$. Если $\xi=1$, то $\exp\left[-\phi(\lambda)\right]$ можно заменить на $\psi(\lambda)$, что даст выражение для коррелятора (4.22), в котором e^H заменено произведением операторов $\psi(\lambda_\gamma)$. Разумеется, то же самое относится и к $e^{\tilde{H}}$. Теперь можно применить теорему Вика и получить новый тип детерминантных формул, например, вида

$$\tau \sim \frac{\Delta(\lambda,\tilde{\lambda})}{\Delta^2(\lambda)\Delta^2(\tilde{\lambda})} \det_{\gamma\delta}\langle N|\,\psi(\lambda_\gamma)\tilde{\psi}(\tilde{\lambda}_\delta)\; G\;|N\rangle \tag{4.69}$$

Его равным образом можно получить непосредственно из (4.27), (4.29) и (4.35) с помощью преобразования Мивы. Более подробному обсуждению этой процедуры

---

[33] Можно считать, что ϕ введено для упрощения обозначений, однако следует иметь в виду, что скалярно-полевое представление на самом деле более фундаментально для τ-функций *общего* вида, не связанных с алгебрами Каца–Муди уровня $k=1$ (этот феномен хорошо известен в конформной теории поля, подробности см. в [16]).

[34] Как это часто делается, множитель $2\pi i$ включен в определение контурного интеграла $\oint$.

посвящена остальная часть данного раздела 4.6.

Сначала необходимо заменить ϕ_- на ϕ. Для этого вводим оператор

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k J_k = H_+ + H_-, \tag{4.70}$$

где $H_+ = \sum_{k>0} t_k J_k$ — это наш старый H, $H_- = \sum_{k\geq 0} t_{-k} J_k$, а "отрицательные времена" t_{-k} определяются "аналитическим продолжением" тех же формул (4.65) и (4.67):

$$t_{-k} = \frac{1}{k}\int \lambda^k f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = -\frac{\xi}{k}\left(\sum_\gamma \lambda_\gamma^k - \sum_\gamma \tilde{\lambda}_\gamma^k\right). \tag{4.71}$$

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k J_k = H_+ + H_- = \\ = -\xi\left(\sum_\gamma \phi(\lambda_\gamma) - \sum_\gamma \phi(\tilde{\lambda}_\gamma)\right). \tag{4.72}$$

Далее,

$$e^{H_+ + H_-} = e^{-\frac{1}{2}s(t)} e^{H_+} e^{H_-} = e^{\frac{1}{2}s(t)} e^{H_-} e^{H_+}, \tag{4.73}$$

где

$$s(t) \equiv \sum_{k>0} k t_k t_{-k} = \\ = -\xi^2 \sum_{k>0}\frac{1}{k}\left(\sum_\gamma\left(\lambda_\gamma^{-k} - \tilde{\lambda}_\gamma^{-k}\right)\sum_\delta\left(\lambda_\delta^k - \tilde{\lambda}_\delta^k\right)\right) = \\ = \xi^2 \ln\left(\prod_{\gamma,\delta}{}' \frac{\left(1 - \frac{\lambda_\delta}{\lambda_\gamma}\right)\left(1 - \frac{\tilde{\lambda}_\delta}{\tilde{\lambda}_\gamma}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{\lambda}_\delta}{\lambda_\gamma}\right)\left(1 - \frac{\lambda_\delta}{\tilde{\lambda}_\gamma}\right)}\right) + \mathrm{const}, \tag{4.74}$$

где штрих означает, что члены с $\gamma = \delta$ исключены из произведения в числителе и учтены в бесконечной "константе", добавленной к правой части уравнения. Иными словами,

$$\exp\left[\frac{1}{2}s(t)\right] = \mathrm{const}\cdot\left(\frac{\prod_{\gamma>\delta}(\lambda_\gamma - \lambda_\delta)(\tilde{\lambda}_\gamma - \tilde{\lambda}_\delta)}{\prod_\gamma\prod_\delta(\lambda_\gamma - \tilde{\lambda}_\delta)}\right)^{\xi^2} = \\ = \mathrm{const}\cdot\left(\frac{\Delta^2(\lambda)\Delta^2(\tilde{\lambda})}{\Delta(\lambda,\tilde{\lambda})}\right)^{\xi^2}. \tag{4.75}$$

Поскольку $\langle N \mid J_m = 0$ для всех $m < 0$, имеем $\langle N \mid e^{H_-} = \langle N \mid$ и, таким образом,

$$\langle N \mid e^H \equiv \langle N \mid e^{H_+} = \\ = \langle N \mid e^{H_-} e^{H_+} = \exp\left(-\frac{1}{2}s(t)\right)\langle N \mid e^{H_+ + H_-}. \tag{4.76}$$

Из уравнения (4.72) следует, что

$$e^{H_+ + H_-} = \mathrm{const}\cdot\prod_\gamma\ : e^{-\xi\phi(\lambda_\gamma)} : : e^{\xi\phi(\tilde{\lambda}_\gamma)} :, \tag{4.77}$$

где "константа" точно та же, что в (4.75). Если $\xi = 1$, можно использовать уравнение (4.61) и записать [35]

$$\langle N \mid e^H = \frac{\Delta(\lambda,\tilde{\lambda})}{\Delta^2(\lambda)\Delta^2(\tilde{\lambda})}\langle N \mid \prod_\gamma \psi(\lambda_\gamma)\prod_\gamma \tilde{\psi}(\tilde{\lambda}_\gamma), \tag{4.78}$$

и точно так же

$$e^{\bar{H}} \mid N\rangle = \prod_\delta \psi(\bar{\lambda}_\delta)\prod_\delta \tilde{\psi}(\tilde{\bar{\lambda}}_\delta) \mid N\rangle \frac{\Delta(\bar{\lambda},\tilde{\bar{\lambda}})}{\Delta^2(\bar{\lambda})\Delta^2(\tilde{\bar{\lambda}})}, \tag{4.79}$$

где

$$\bar{t}_k = -\frac{1}{k}\sum\left(\bar{\lambda}_\delta^k - \tilde{\bar{\lambda}}_\delta^k\right), \tag{4.80}$$

и мы использовали тот факт, что $J_m \mid N\rangle = 0$ для всех $m>0$. Наконец,

$$\tau_N\{t,\bar{t} \mid G\} = \langle N \mid e^H\, G\, e^{\bar{H}} \mid N\rangle = \\ = \frac{\Delta(\lambda,\tilde{\lambda})}{\Delta^2(\lambda)\Delta^2(\tilde{\lambda})}\frac{\Delta(\bar{\lambda},\tilde{\bar{\lambda}})}{\Delta^2(\bar{\lambda})\Delta^2(\tilde{\bar{\lambda}})}\times \\ \times\langle N \mid \prod_\gamma \psi(\lambda_\gamma)\prod_\gamma \tilde{\psi}(\tilde{\lambda}_\gamma)\times \\ \times G\prod_\delta \psi(\bar{\lambda}_\delta)\prod_\delta \tilde{\psi}(\tilde{\bar{\lambda}}_\delta) \mid N\rangle. \tag{4.81}$$

Это выражение не сингулярно в совпадающих точках, поскольку полюса и нули коррелятора сокращаются полюсами и нулями детерминантов Ван-дер-Монда.

Теперь положим $N = 0$ и определим нормированную τ-функцию

$$\hat{\tau}_0\{t,\bar{t} \mid G\} \equiv \frac{\tau_0\{t,\bar{t} \mid G\}}{\tau_0\{0,0 \mid G\}}, \tag{4.82}$$

т.е. поделим правую часть (4.81) на $\langle 0 \mid G \mid 0\rangle$. Теорема Вика позволяет переписать коррелятор в правой части как детерминант блочной матрицы:

[35] Выбор ξ может быть продиктован конкретными целями. В данном случае на преобразование Мивы накладывается требование представить $\exp(H) = \exp(H_{\mathrm{Cartan}})$ как произведение операторов размерности 1/2; это наиболее естественно с точки зрения уравнений Хироты и упрощает соотношение с интегрируемыми иерархиями. Однако в разделах 2.7 и 2.8 началось другое требование (там $\xi = 1/\sqrt{2}$, а не $\xi = 1$). Там рассматривалась одноматричная модель, для которой характерна особенно простая форма *полного* гамильтониана (произведения операторов нулевой размерности), и было важнее подобрать операторы, возникающие из $\exp(H_{\mathrm{Cartan}})$ после преобразования Мивы так, чтобы у них были простые корреляторы с $\exp(A\phi\bar{\phi})$. Анализируя одноматричную модель с этой точки зрения, следует иметь в виду, что в разделе 2.3 она фактически описана в терминах *двух* комплексных фермионов. Экранирующие заряды:

$$Q^{(+)} = \oint \exp\left(\sqrt{2}\phi\right) = \oint \tilde{\psi}_1\psi_2 = \oint \exp(\phi_1 - \phi_2),$$

$$Q^{(-)} = \oint \exp\left(-\sqrt{2}\phi\right) = \oint \tilde{\psi}_2\psi_1 = \oint \exp(\phi_2 - \phi_1),$$

тогда как $\phi = 1/\sqrt{2}(\phi_1 - \phi_2)$. Гамильтониан имеет вид

$$H_{\mathrm{Cartan}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k t_k J_k = \frac{1}{2}\sum_k t_k(J_k^1 - J_k^2),$$

а преобразование Мивы порождает вставки операторов $\chi_1\tilde{\chi}_2$, где χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ имеют размерность 1/8 (а не 1/2, как в однофермионной (комплексной) системе, рассматривавшейся в *настоящем* разделе 4.6).

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\langle 0|\psi(\lambda_\gamma)\tilde\psi(\tilde\lambda_\delta)\, G\,|0\rangle}{\langle 0|\, G\,|0\rangle} & \frac{\langle 0|\psi(\lambda_\gamma)\, G\,\tilde\psi(\tilde{\bar\lambda}_\delta)|0\rangle}{\langle 0|\, G\,|0\rangle} \\ -\frac{\langle 0|\tilde\psi(\tilde\lambda_\delta)\, G\,\psi(\bar\lambda_\gamma)|0\rangle}{\langle 0|\, G\,|0\rangle} & \frac{\langle 0|\, G\,\psi(\bar\lambda_\gamma)\tilde\psi(\tilde{\bar\lambda}_\delta)|0\rangle}{\langle 0|\, G\,|0\rangle}\end{pmatrix}. \tag{4.83}$$

При специальном выборе точек $\lambda_\gamma, \ldots, \tilde{\bar\lambda}_\delta$ **формулы могут быть далее упрощены. Если** $\bar\lambda_\gamma \to \lambda_\gamma$, **так что** $\bar t_k \to 0$, то матричные элементы в нижнем правом блоке (4.83) неограниченно возрастают и внедиагональными блоками можно пренебречь. Тогда

$$\tau_0\{t,\bar t\mid G\} \to \tau^{KP}\{t\mid G\} = \frac{\langle 0\mid e^H\, G\ \mid 0\rangle}{\langle 0\mid\ G\ \mid 0\rangle} = \\ = \frac{\Delta(\lambda,\tilde\lambda)}{\Delta^2(\lambda)\Delta^2(\tilde\lambda)}\det_{\gamma\delta}\frac{\langle 0\mid \psi(\lambda_\gamma)\tilde\psi(\tilde\lambda_\delta)\ G\ \mid 0\rangle}{\langle 0\mid\ G\ \mid 0\rangle} \tag{4.84}$$

Эта функция больше не зависит от времен $\bar t$ и является просто τ-функцией КП.

Матричный элемент

$$\varphi(\lambda,\tilde\lambda) = \frac{\langle 0\mid\psi(\lambda)\tilde\psi(\tilde\lambda)\ G\ \mid 0\rangle}{\langle 0\mid G\mid 0\rangle} \tag{4.85}$$

сингулярен, когда $\lambda \to \tilde\lambda$: $\varphi(\lambda,\tilde\lambda) \to 1/(\lambda-\tilde\lambda)$. Если теперь в (4.84) все $\tilde\lambda \to \infty$, то

$$\tau^{KP}\{t\mid G\} = \frac{{}_{\gamma\delta}\varphi_\delta(\lambda_\gamma)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.86}$$

где

$$\varphi_\delta(\lambda) \equiv \langle 0\mid\psi(\lambda)\left(\partial^{\delta-1}\tilde\psi\right)(\infty)\ G\ \mid 0\rangle \sim \\ \sim \lambda^{\delta-1}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \tag{4.87}$$

Это основное детерминантное представление **τ-функции** КП в параметризации Мивы.

Начав с представления (4.86), можно восстановить соответствующую матрицу $\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}$ в уравнении (4.55) [36]

$$\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}\{t\} = \oint z^i\varphi_{-j}(z)\exp\left(\sum_k t_k z^k\right)\mathrm{d}z, \tag{4.88}$$

т.е.

$$T_{lj}^{KP} = \oint z^l\varphi_{-j}(z). \tag{4.89}$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}}{\partial t_k} = \mathcal{H}_{i+k,j}^{\mathrm{KP}}.$$

Теперь необходимо доказать, что τ-функция задана сразу $\det\varphi_\gamma(\lambda_\delta)/\Delta(\lambda)$ и $\mathrm{Det}\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}\{t\}$. Чтобы сравнить два эти выражения, следует взять $t_k = \frac{1}{k}\sum_\gamma^n\lambda_\gamma^{-k}$ и получить

$$\exp\left(\sum_{k>0}t_kz^k\right) = \prod_{\gamma=1}^n\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\gamma - z} = \\ = \left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)\sum_\gamma\frac{(-)^\gamma}{z-\lambda_\gamma}\frac{\Delta_\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.90}$$

где

$$\Delta_\gamma(\lambda) = \prod_{\substack{\alpha>\beta\\ \alpha,\beta\neq\gamma}}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta) = \frac{\Delta(\lambda)}{\prod_{\alpha\neq\gamma}(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)} \tag{4.91}$$

и

$$\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}\Big|_{t_k=\frac{1}{k}\sum_\gamma^n\lambda_\gamma^{-k}} = \\ = \left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)\sum_\gamma\frac{(-)^{\gamma+1}\Delta_\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\lambda_\gamma^i\varphi_{-j}(\lambda_\gamma). \tag{4.92}$$

Пока n остается конечным, детерминант бесконечномерной матрицы (4.92)

$$\mathrm{Det}_{i,j<0}\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}\Big|_{t_k=\frac{1}{k}\sum_\gamma^n\lambda_\gamma^{-k}} = 0,$$

так как из (4.92) очевидно, что ранг матрицы равен n. Рассмотрим поэтому максимальный ненулевой детерминант

$$\mathrm{Det}_{-N\le i,j<0}\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}\Big|_{t_k=\frac{1}{k}\sum_\gamma^n\lambda_\gamma^{-k}} = \\ = \left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)^n\det_{i\gamma}\left(\frac{(-)^{\gamma+1}\Delta_\gamma(\lambda)}{\lambda_\gamma^i\Delta(\lambda)}\right)\cdot\det_{\gamma j}\varphi_j(\lambda_\gamma) = \\ = \frac{\det_{\gamma j}\varphi_j(\lambda_\gamma)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.93}$$

Здесь использован тот факт, что детерминант произведения матриц является произведением детерминантов сомножителей, а знаки i,j изменены на противоположные. Кроме того, использован ряд простых соотношений

$$\prod_{\gamma=1}^n\frac{\Delta_\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{\Delta^2(\lambda)},$$

$$\det_{i\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma^i} = \left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)^{-1}\Delta(1/\lambda),$$

$$\Delta(1/\lambda) = \prod_{\alpha>\beta}\left(\frac{1}{\lambda_\alpha}-\frac{1}{\lambda_\beta}\right) = (-)^{n(n-1)/2}\Delta(\lambda)\left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)^{-(n-1)}.$$

Таким образом,

$$\left(\prod_\gamma^n\lambda_\gamma\right)(-)^{n(n-1)/2}\prod_{\gamma=1}^n\frac{\Delta_\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\det_{i\gamma}\frac{1}{\lambda_\gamma^i} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}.$$

Поскольку (4.93) справедливо для любых n, можно потребовать, чтобы в пределе $n\to\infty$ восстанавливалось **утверждение** $\tau^{\mathrm{KP}}\{t\} = \mathrm{Det}_{i,j<0}\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}$ с $\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}$, задаваемым уравнением (4.92) (эта формула не имеет непосредственного отношения к параметризации Мивы и определяется для любых t и любых $j<0$ и i). Теперь соотношение **между** φ_γ **и** $\mathcal{H}_{ij}^{\mathrm{KP}}$ можно использовать для введения отрицательных времен $\bar t_k$ согласно правилу (4.58). Особенно проста прескрипция для введения нулевого времени: $\mathcal{H}_{ij}\to\mathcal{H}_{i+N,j+N}$, или в терминах φ,

$$\frac{\det\ \varphi_\gamma(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)} \to \frac{\det\ \varphi_{\gamma+N}(\lambda_\delta)}{(\det A)^N\Delta(\lambda)}. \tag{4.94}$$

Можно рассматривать также обобщения (4.88) типа

$$\mathcal{H}_{ij}\{t,\bar t\} = \oint\oint z^i \bar z^j \langle 0 \mid \psi(z)\; G\; \tilde\psi(\bar z) \mid 0\rangle \times$$
$$\times \exp\left[\sum_k (t_k z^k + \bar t_k \bar z^k)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar z\right]. \qquad (4.95)$$

4.7. Матричные модели и τ-функции

Теперь мы готовы к тому, чтобы вернуться к нашей главной теме и обсудить свойства интегрируемости картановских матричных моделей. Утверждение состоит в том, что статистические суммы всех этих моделей, рассматриваемые в качестве функций временных переменных (параметризующих форму потенциалов), на самом деле являются τ-функциями (возможно, многокомпонентными) для двумеризованной системы Тоды и/или КП. (По-видимому, интересные *не*картановские модели связаны с интегрируемыми системами более общего типа, не ограниченными алгебрами Каца–Муди уровня $k = 1$.)

Однако статистические суммы не являются τ-функциями Тоды или КП общего вида. Во-первых, они обычно принадлежат к тем или иным редуцированным иерархиям, во-вторых, соответствующие операторы G (точки грассманиана) лежат, не где угодно в универсальном пространстве модулей, а лишь в областях, ограниченных "струнными уравнениями". Струнные уравнения — это не что иное, как множество тождеств Уорда (в рассматриваемых нами примерах — условий Вирасоро и W), которые интерпретируются как уравнения на G. Сама возможность такой интерпретации в высшей степени нетривиальна и отражает глубокие связи между W-условиями и интегрируемой структурой. В случае условий Вирасоро в этом нет ничего загадочного, потому что алгебра Вирасоро — это симметрия (ковариантность) иерархии Тоды, но положение с другими условиями менее определенно (см. сноску в разделе 4.3). Фактически при наложении на τ-функции должным образом редуцированной иерархии, бесконечно много условий обычно оказываются взаимно зависимыми, и для того чтобы получить их полное множество, достаточно наложить лишь низшее условие Вирасоро $L_{-1}\tau = 0$ (или $\mathcal{L}_{-p}\tau = 0$, где p—степень редукции) [29]. Именно это низшее условие (точнее, его t_1-производное, $\partial/\partial t_1(L_{-1}\tau) = 0$) по традиции называют "струнным уравнением". Часто его гораздо проще вывести, чем полный набор связей, что важно с точки зрения практических применений (здесь существенно, что детерминантные формулы, подразумевающие интегрируемость, в ряде случаев также проще найти, чем все тождества Уорда).

Чтобы дать полное описание какого-то типа (матричных) [36] моделей с точки зрения теории интегрируемости, достаточно указать иерархию, к которой он принадлежит, если статистическая сумма интерпретируется как τ-функция,

$$Z_{\mathrm{model}}\{t\} = \tau\{t \mid G_{\mathrm{model}}\}, \qquad (4.96)$$

и струнное уравнение, задающее конкретный вид оператора G— точку в универсальном пространстве модулей. После этого внутренняя (еще не решенная) проблема теории интегрируемости состоит в том, чтобы объяснить, чем замечательно множество точек $\{G_{\mathrm{model}}\}$ в этом пространстве. (Мы коснемся этой проблемы в следующем разделе 4.8, посвященном операторам Каца–Шварца.) Если же никакой выделенности нет, то (нерешенная) задача встает уже перед теорией матричных моделей: найти модели, ассоциированные с *любыми* точками G в универсальном пространстве модулей (или объяснить препятствие, если таковое имеется).

Перейдем теперь к описанию с этой точки зрения конкретных матричных моделей. Как и в других частях настоящего обзора мы рассматриваем только самые важные классы: конформные (многокомпонентные) модели со скалярным произведением и обобщенную модель Концевича. Все другие примеры (такие, как комплексные, ортогональные, унитарные и прочие матрицы) можно без труда включить в наш анализ (см. случаи комплексных и унитарных моделей соответственно в [28] и [91]), однако это не добавит ничего нового для общей теории, которую мы сейчас рассматриваем. Струнные уравнения будут обсуждаться в следующем разделе 4.8.

Модели со скалярным произведением. Эти модели исчерпывающе разобраны в разделах 3.5–3.7. Напомним, что к этому классу относятся все стандартные многоматричные модели (с межматричным взаимодействием вида $\exp(\mathrm{Tr}\, H^{(\alpha)} H^{(\alpha+1)})$. Наиболее важные формулы для моделей со скалярным произведением:

$$Z_N = \mathrm{Det}_N \mathcal{H}^f_{ij} = \mathrm{Det}_{0\le i,j\le N-1} \mathcal{H}^f_{ij} =$$
$$= \mathrm{Det}_{-N\le i,j<0} \mathcal{H}^f_{i+N,j+N},$$
$$\mathcal{H}^f_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial \bar t_j} \mathcal{H}^f = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial \bar t_1}\right)^j \mathcal{H}^f. \qquad (4.97)$$

Здесь

$$\mathcal{H}^f_{ij} = \langle h^i \mid \bar h^j\rangle = \int \mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h} \exp\left[U(h) + \bar U(\bar h)\right] h^i \bar h^j. \qquad (4.98)$$

Далее,

$$\exp[U(h)] = \exp\left(\sum_{k\ge 0} t_k h^k\right) = \sum_l h^l P_l(t),$$
$$\exp[\bar U(\bar h)] = \exp\left(\sum_{k\ge 0} \bar t_k \bar h^k\right) = \sum_m \bar h^m P_m(\bar t) \qquad (4.99)$$

и таким образом,

$$\mathcal{H}^f_{ij} = \sum_{l,m} \langle\langle h^{i+l} \mid \bar h^{j+m}\rangle\rangle P_l(t) P_m(\bar t) = \sum_{l,m} T^f_{lm} P_{l-i}(t) P_{m-j}(\bar t),$$
$$T^f_{lm} = \langle\langle h^l \mid \bar h^m\rangle\rangle, \qquad (4.100)$$

где скалярное произведение $\langle\langle\ \mid\ \rangle\rangle$ — по отношению к мере $\mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h}$, тогда как $\langle\ \mid\ \rangle$ — по отношению

[36] Как указывалось во Введении и в разделе 2.1, слово "матричных", вероятно, можно опустить, если при анализе других моделей квантовой теории поля допустить к рассмотрению лагранжианы общего вида. Универсальное пространство модулей (где модули — это модули расслоений над *спектральными* римановыми поверхностями) можно рассматривать как "пространство теорий". Появление римановых поверхностей сразу и в качестве мировых листов и в спектральных "измерениях" придает теории струн особую загадочность (и красоту). Более подробное обсуждение этого вопроса содержится в [6].

$\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \exp\left[U(h) + \bar U(\bar h)\right]\mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h}$.

В этих формулах можно было бы сразу узнать представление (4.39) τ-функции для двумеризованной Тоды, не будь в них дополнительного ограничения, согласно которому детерминант в (4.97) — это детерминант конечномерной $N\times N$-матрицы (индексы ограничены: $i,j\geq -N$). Это можно автоматически учесть, потребовав, чтобы

$$T^f_{lm} = \infty \quad \text{для всех} \quad l,m<0, \tag{4.101}$$

и тогда Z_N оказывается нормированной τ-функцией *форсированной* иерархии двумеризованной Тоды (с этим связан значок f у $\mathcal{H}$ и T). Можно сделать вывод, что статистические суммы любых моделей со скалярным произведением являются τ^f-функциями формированной иерархии двумеризованной системы Тоды.

Рассмотрим их теперь как τ-функции КП. В этом случае $\bar t$-зависимость попросту игнорируется. Однако N будет сохранен в явном виде как параметр, маркирующий τ-функцию КП. После преобразования Мивы $t_k = -(1/k)\sum_\gamma \lambda_\gamma^{-k} - r_k$, описанного в разделе 3.7, получаем

$$Z_N = \hat Z_N \frac{\det_{\gamma\delta}\hat Q_{N+\gamma-1}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.102}$$

где $\hat Q$ — ортогональные полиномы по отношению к мере $\mathrm{d}\hat\nu_{h,\bar h} = \exp\left(-\sum_k r_k h^k\right)\mathrm{d}\hat\mu_{h,\bar h}$

Таким образом, в контексте КП иерархии модели со скалярным произведением выделены тем, что соответствующие $\varphi_\gamma(\lambda)$ в (4.86) являются *полиномами*, а не общего вида бесконечными рядами по степеням λ^{-1}.

Одноматричная модель. Это особый случай модели со скалярным произведением и *локальной* мерой $\mathrm{d}\mu_{h,\bar h} = \exp\left[U(h) + \bar U(\bar h)\right]\delta(h-\bar h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\bar h$. В этом случае

$$\mathcal{H}^f_{ij} = \langle h^i \mid \bar h^j\rangle = \langle h^{i+j}\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{i+j}}\mathcal{H}^f = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{i+j}\mathcal{H}^f. \tag{4.103}$$

Таким образом, здесь мы имеем дело с редукцией (форсированной) иерархии двумеризованной системы Тоды до цепочки Тоды. В конце этого раздела мы используем ортогональные полиномы, чтобы получить явное описание одноматричных моделей в терминах τ-функций цепочки Тоды.

Одноматричную модель можно иначе представить как гауссову модель Концевича (см. раздел 3.8). Тот факт, что статистическая сумма является τ-функцией, вытекает из общих свойств обобщенной модели Концевича (см. ниже). А то обстоятельство, что это *форсированная* τ-функция, обусловлено свойством $c_{-N}=0$, упоминавшимся в разделе 3.8 (и доказанным в разделе 3.9). Редукцию до цепочки Тоды можно обнаружить и непосредственно в понятиях обобщенной модели Концевича (более подробно об этом см. в [36]).

Многокомпонентные (*конформные*) *матричные модели.* Эти модели относятся к многокомпонентным иерархиям, в которых τ-функции представляются в виде корреляторов многофермионных систем. Пример детерминантной формулы, которая заменяет (4.39) в двухкомпонентном случае, был приведен в конце раздела 3.5, где он естественно возник при анализе соответствующей матричной модели [39]. Вывод той же детерминантной формулы в рамках теории τ-функций описан в [92]. Общая теория многокомпонентных иерархий делает лишь первые шаги и мы не рассматриваем ее в данном обзоре. Подход к проблеме с позиций теории групп представлен в [93].

Обобщенная модель Концевича. Детерминантные формулы для этого случая выведены в разделе 3.3. Наиболее важно выражение

$$Z_V\{N,T\} = \frac{1}{(\det\Lambda)^N}\frac{\det_{\gamma\delta}\varphi_{\gamma+N}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.104}$$

где

$$\varphi_\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\lambda V'(\lambda)+V(\lambda)}\sqrt{V''(\lambda)}\int x^{\gamma-1}e^{-V(x)+V'(\lambda)x}\,\mathrm{d}x = \\ = \lambda^{\gamma-1}(1+\mathcal{O}(\lambda^{-1})) \tag{4.105}$$

и

$$\varphi_\gamma(\lambda) = \mathcal{A}\varphi_{\gamma-1}(\lambda) = \mathcal{A}^{\gamma-1}\Phi(\lambda). \tag{4.106}$$

При $N=0$ — это представление для τ-функции КП в координатах Мивы $T_k = (1/k)\,\mathrm{tr}\Lambda^{-k}$ (см. уравнение (4.86)). Таким образом,

$$Z_V\{T\} = \tau^{KP}\{T \mid G_V\}, \tag{4.107}$$

где от формы потенциала $V(X)$ зависит оператор G_V (точка в грассманиане). Напомним также, что Z может зависеть от размера матрицы n исключительно через посредство *области изменения* временных переменных T. Можно обобщить (4.104) до полной τ-функции для двумеризованной Тоды, введя отрицательные времена. Тогда [36]

$$Z_V\{T,N,\bar T\} = \frac{C_V^{-1}(\Lambda)}{(\det\Lambda)^N}\exp\left(-\sum_{k>0}\bar T_k\,\mathrm{tr}\,\Lambda^{-k}\right)\times \\ \times\int_{n\times n}\mathrm{d}X(\det X)^N\times \\ \times\exp\left(-\mathrm{tr}\,V(X) + \mathrm{tr}\,\Lambda X + \sum_{k>0}\bar T_k\,\mathrm{tr}\,X^{-k}\right). \tag{4.108}$$

Если *эта* обобщенная статистическая сумма рассматривается как τ-функция КП, то вместо (4.104) будем иметь

$$Z_V\{T,N,\bar T\} = \frac{1}{(\det\Lambda)^N}\frac{\det_{\gamma\delta}\varphi^{\{\hat V\}}_{\gamma+N}(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.109}$$

а соответствующими φ-функциями будут

$$\varphi^{\{\hat V\}}_{\gamma+N}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\lambda V'(\lambda) + \hat V(\lambda)\right]\sqrt{V''(\lambda)}\times \\ \times\int x^{\gamma-1}\exp\left[-\hat V(x) + V'(\lambda)x\right]\mathrm{d}x = \\ = \lambda^{N+\gamma-1}(1+\mathcal{O}(\lambda^{-1})) \tag{4.110}$$

с

$$\hat V(x) \equiv V(x) - N\ln x - \sum_{k>0}\bar T_k x^{-k}, \\ V(x) = \hat V_+(x) \tag{4.111}$$

(где $\hat{V}_+(x)$ — положительно-степенно́й фрагмент ряда Лорана $\hat{V}(x)$). Функции $\varphi_\gamma(\lambda)$ в (4.105) в точности равны

$$\varphi_\gamma^{\{\hat{V}\}}(\lambda)\Big|_{\bar{T}=0}.$$

4.8. Струнные уравнения и общая концепция редукции

Назначение струнных уравнений состоит в фиксации точки G в универсальном пространстве модулей (УПМ), связанной с определенной матричной моделью, таким образом, чтобы статистическая сумма, рассматриваемая как функция временных переменных, была τ-функцией заданной формы. В этом смысле в основе интерпретации струнных уравнений лежит совершенно тот же принцип, что и в случае редукции интегрируемых иерархий. Различие состоит в том, что *линейные* редукции, определенные в разделе 4.5, недостаточны для однозначной фиксации G: они лишь выделяют некие множества в грассманиане, которые все еще бесконечномерны. Причина, по которой именно линейные редукции обычно рассматриваются в стандартной теории интегрируемых иерархий в том, что они связаны с наиболее простыми из всех возможных (Каца–Муди) подалгебрами во всей $GL(\infty)$. Струнные уравнения, даже их простейшие примеры, обычно представляют собой фрагменты более сложных W и вирасоро-алгебр, но зато они гораздо более ограничительны. Кроме того, струнное уравнение — это обычно выделенный фрагмент большой алгебры, так как обычно сводится к одной из вирасоровских компонент в тождествах Уорда, а алгебра Вирасоро — это все еще подалгебра *Ли* в $GL(\infty)$. Это и обусловливает сходство задачи о струнных уравнениях "классической" задачей о линейной редукции.

Говоря более конкретно, для того чтобы включить струнные уравнения (или даже все множество условий Вирасоро, но не W-условий) в анализ редукции, достаточно сделать коэффициенты уравнения (4.40) зависящими от t и $\bar{t}$, не изменяя порядок временных производных. Разумеется, нет никаких явных причин полагать, что *любая* точка G в УПМ может быть выбрана наложением подобного рода линейных (по производным) условий на τ-функцию; дальнейшие исследования могут потребовать существенного обобщения такого ограниченного понимания струнного уравнения. Однако уже известны некоторые картановские матричные модели, имеющие струнные уравнения указанного простого типа, ассоциированные с подалгебрами Вирасоро в $GL(\infty)$. Мы не будем вдаваться в подробности общей теории, до завершения которой еще далеко, а представим несколько примеров возникновения струнных уравнений в определенных матричных моделях. Эти примеры могут также служить иллюстрацией упрощений, возникающих в случаях, когда необходимо вывести только струнные уравнения, а не все множество тождеств Уорда. Понятно, в частности, что если τ представлена как $\mathrm{Det}_{ij}\mathcal{H}_{ij}$, линейное дифференциальное уравнение, наложенное на $\mathcal{H}_{ij}$, даст сходное уравнение на саму τ. С помощью этого приема можно вывести большинство известных струнных уравнений. Обычно они связаны с инвариантностью интегралов по отношению к *постоянным* переменным интегрирования $\delta h = \mathrm{const}$ в моделях со скалярным произведением и других дискретных моделях, а также с действием оператора $\mathrm{tr}\,\partial/\partial L_{\mathrm{tr}}$ в обобщенной модели Концевича. Несколько более сложные идеи, касающиеся струнных уравнений, изложены в [94].

Модели со скалярным произведением. Струнное уравнение легко вывести для очень специфического типа меры $\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}}$. Поскольку интеграл

$$\mathcal{H}_{ij} = \int h^i \bar{h}^j \exp\left[U(h) + \bar{U}(\bar{h})\right] \mathrm{d}\mu_{h,\bar{h}} \qquad (4.112)$$

инвариантен при сдвиге переменной интегрирования $\delta h = \mathrm{const}$, то

$$\int h^i \bar{h}^j \exp\left[U(h) + \bar{U}(\bar{h})\right] \mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}} \times \\ \times \left[ih^{-1} + \frac{\partial U(h)}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial h}\ln(\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}})\right] = 0, \qquad (4.113)$$

или

$$\mathrm{i}\mathcal{H}_{i-1,j} + \sum_{k>0} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}}\mathcal{H}_{ij} + \left[S\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right)\right]_{ij} = 0. \qquad (4.114)$$

Это соотношение может рассматриваться как струнное уравнение, если оператор S линеен. Для этого надо, чтобы $\ln(\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}}) \sim hf(\hat{h})$ с какой-нибудь функцией $f(h)$. Если потребовать вдобавок симметричности меры $\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}}$ по h и $\bar{h}$, то получим в качестве единственного примера стандартную двухматричную модель:

$$\mathrm{d}\hat{\mu}_{h,\bar{h}} = e^{ch\bar{h}}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\bar{h}. \qquad (4.115)$$

Соответствующее уравнение на $\mathcal{H}_{ij}$:

$$\left(\sum_{k>0} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} + c\frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}\right)\mathcal{H}_{ij} = -i\mathcal{H}_{i-1,j}. \qquad (4.116)$$

Для $\hat{\tau}_N$ оно подразумевает

$$\left(\sum_{k>0} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} + c\frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}\right)\hat{\tau}_N = 0, \qquad (4.117)$$

так как правая часть (4.116) не вносит вклад в детерминант (поправка к i-й строке пропорциональна (i — 1)-й).

В частном случае *одноматричной модели* $c = 0$ и в (4.116) легко узнать низшее условие Вирасоро $L_{-1}\hat{\tau}_N = 0$. По традиции наименование "струнное уравнение" присваивается не самому условию L_{-1}, а его t_1-производной $\partial/\partial t_1(L_{-1}\hat{\tau}_N) = 0$. Для двухматричной модели (4.117) является низшей ($m = 1, n = 0$) компонентой тождества Уорда

$$\left(\tilde{W}_{n-m}^{(m+1)}(t) - (-)^{m+n}c^{n+1}\tilde{W}_{m-n}^{(n+1)}(\bar{t})\right)\hat{\tau}_N = 0.$$

Разумеется, имеется такое же уравнение с $t \leftrightarrow \bar{t}$.

Многокомпонентные (конформные) модели. Ключевым свойством этих моделей является то, что межматричное взаимодействие, будучи после переписанным в терминах собственных значений, содержит только разности $h_i^{(\alpha)} - h_j^{(\beta)}$. Поэтому имеется ковариантность при *одновременном* сдвиге всех собственных значений $\delta h_i^{(\alpha)} = \mathrm{const}$ на одну и *ту же* константу. В результате струнное уравнение возникает в форме

$$\left(\sum_\alpha L_{-1}^{(\alpha)}\right)\tau_N = 0 \qquad (4.118)$$

(более подробно об этом см. [39].)

Обобщенная модель Концевича. Чтобы вывести струнное уравнение, следует подействовать на статистическую сумму $Z_V\{T_k = (1/k)\operatorname{tr}\Lambda^{-k}\} = \mathcal{C}_V^{-1}\mathcal{F}_V\{L = V'(\Lambda)\}$ оператором

$$\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}} = \operatorname{tr}\frac{1}{V''(\Lambda)}\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}}.$$

Результат этого действия можно переписать через временные производящие:

$$\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\ln Z_V\{T\} = \\ = -\sum_{k>0}\left(\operatorname{tr}\frac{1}{V''(\Lambda)\Lambda^{k+1}}\right)\frac{\partial}{\partial T_k}\ln Z_V\{T\}. \tag{4.119}$$

С другой стороны, можно использовать тот факт, что

$$\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}} = \sum_\gamma \frac{1}{V''(\lambda_\gamma)}\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}, \quad l = V'(\lambda),$$

и явное выражение для Z_V в терминах собственных значений (координат Мивы)

$$Z_V \sim \exp\left[\operatorname{tr} V(\Lambda) - \operatorname{tr}\Lambda V'(\Lambda)\right]\sqrt{\prod_\gamma V''(\lambda_\gamma)}\,\frac{\det\,\hat\varphi_\gamma(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)} \sim \\ \sim\frac{\det\,\varphi_\gamma(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.120}$$

чтобы получить

$$\left(\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial L_{\mathrm{tr}}}\right)\ln Z_V\{T\} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{V'''(\Lambda)}{(V''(\lambda))^2} + \frac{1}{2}\sum_{\gamma>\delta}\frac{V''(\lambda_\gamma) - V''(\lambda_\delta)}{\lambda_\gamma - \lambda_\delta}\times \\ \times\frac{1}{V''(\lambda_\gamma)V''(\lambda_\delta)} - \operatorname{tr}\Lambda + \sum_\beta\frac{\partial}{\partial l_\beta}\ln\det_{\gamma\delta}\hat\varphi_\gamma(l_\delta). \tag{4.121}$$

Сравнение этих двух выражений дает

$$\frac{\mathcal{L}_{-1}^{(V)}Z_V}{Z_V} \equiv \frac{1}{Z_V}\left[\sum_{k>0}\left(\operatorname{tr}\frac{1}{V''(\Lambda)\Lambda^{k+1}}\right)\frac{\partial}{\partial T_k} + \right. \\ \left. +\frac{1}{2}\sum_{\gamma>\delta}\frac{V''(\lambda_\gamma) - V''(\lambda_\delta)}{\lambda_\gamma - \lambda_\delta}\cdot\frac{1}{V''(\lambda_\gamma)V''(\lambda_\delta)} - \frac{\partial}{\partial T_1}\right]Z_V = \\ = -\frac{\partial}{\partial T_1}\ln Z_V + \operatorname{tr}\Lambda - \\ - \sum_\beta\frac{\partial}{\partial l_\beta}\ln\det_{\gamma\delta}\hat\varphi_\gamma(l_\delta). \tag{4.122}$$

Можно показать, что правая часть равна нулю, поэтому струнное уравнение имеет вид

$$\mathcal{L}_{-1}^{(V)}Z_V = 0. \tag{4.123}$$

Если потенциал представлен мономом $V_p = X^{p+1}/(p+1)$, то $r_k = -p/(p+1)\delta_{k,p+1}$ и

$$\mathcal{L}_{-1}^{V_p} \to \mathcal{L}_{-p} \equiv \frac{1}{p}\left[\sum_{k>0}(k+p)(T_{k+p} + r_{k+p})\frac{\partial}{\partial T_k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}k(p-k)T_kT_{p-k}\right]. \tag{4.124}$$

Идея доказательства [30] состоит в том, чтобы представить

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\ln Z_V = \operatorname{Res}\frac{Z_V\{T_k + \frac{1}{k\lambda^k}\}\,d\lambda}{Z_V\{T_k\}}, \tag{4.125}$$

и использовать второе детерминантное представление в (4.120) и в числителе, и в знаменателе:

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\ln Z_V = \operatorname{Res}\frac{d\lambda}{\prod_{\gamma=1}^n(\lambda - \lambda_\gamma)}\times \\ \times\frac{\det\begin{pmatrix}\varphi_\delta(\lambda_\gamma) & \varphi_{n+1}(\lambda_\gamma)\\ \varphi_\delta(\lambda) & \varphi_{n+1}(\lambda)\end{pmatrix}}{\det\,\varphi_\delta(\lambda_\gamma)}. \tag{4.126}$$

Вспомним теперь, что

$$\varphi_\gamma(\lambda) \sim \lambda^{\gamma-1}\left(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\right). \tag{4.127}$$

В какой-то момент нам потребуется даже большее; на самом деле

$$\varphi_\gamma(\lambda) \sim \lambda^{\gamma-1}\left(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2})\right),$$

т.е.

$$\varphi_\gamma(\lambda) = \lambda^{\gamma-1} + c_\gamma\lambda^{\gamma-2} + \ldots, \quad \text{и} \quad c_\gamma = 0 \text{ для любого } \gamma. \tag{4.128}$$

Это весьма тонкое свойство обобщенной модели Концевича, вытекающее из двух обстоятельств: во-первых,

$$\varphi_1 = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{V''''}{(V'')^2}, \frac{(V''')^2}{(V'')^3}\right),$$

поэтому $c_1 = 0$; во-вторых оператор Каца–Шварца $\mathcal{A}$, представленный в уравнении (4.106), не имеет вкладов с нулевой степенью λ, поэтому $c_{\gamma+1} = c_\gamma$. (Например, если

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + ax, \\ \varphi_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x^{\gamma-1}e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2}\,dx = \lambda^{\gamma-1} + 0\cdot\lambda^{\gamma-2} + \ldots,$$

опасные члены с a просто не появляются в выражении для φ_γ.)

Сделав это замечание, вернемся к оценке (4.126). Произведение в знаменателе, возникающее из детерминанта Ван-дер-Монда, уже пропорционально λ^n: $\prod_{\gamma=1}^n(\lambda - \lambda_\gamma) = \lambda^n\left(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\right)$. Благодаря этому и асимптотическим формулам (4.127) понятно, что когда детерминант в числителе (4.126) переписан как линейная комбинация $n\times n$ детерминантов, с коэффициентами $\varphi_\gamma(\lambda)$ из последнего столбца, то ненулевой вклад в вычет будут давать только слагаемые с $\gamma \geq n$. Имеется два таких слагаемых: с $\gamma = n$ и $\gamma = n+1$. При разложении $(n+1)\times(n+1)$ детерминанта $\varphi_{n+1}(\lambda)$ умножается на $\det\,\varphi_\gamma(\lambda_\delta)$, что тут же сокращает детерминант в знаменателе, а нужным подходящим вкладом будет

$$\operatorname{Res}\frac{\varphi_{n+1}(\lambda)\,d\lambda}{\prod_{\gamma=1}^n(\lambda - \lambda_\gamma)} = c_{n+1} + \sum_\gamma\lambda_\gamma = \\ = c_{n+1} + \operatorname{tr}\Lambda. \tag{4.129}$$

Вклад с $\varphi_n(\lambda)$ равен

$$\frac{\det(\varphi_1(\lambda_\gamma)\ldots\varphi_{n-1}(\lambda_\gamma)\ \varphi_{n+1}(\lambda_\gamma))}{\det(\varphi_1(\lambda_\gamma)\ldots\varphi_{n-1}(\lambda_\gamma)\ \varphi_n(\lambda_\gamma))}\operatorname{Res}\ \frac{\varphi_n(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\prod_{\gamma=1}^{n}(\lambda-\lambda_\gamma)}. \quad (4.130)$$

причем вычет в (4.130) — единица. Детерминант в числителе отличается от детерминанта в знаменателе замещением столбца с $\varphi_n(\lambda_\gamma)$ на столбец с $\varphi_{n+1}(\lambda_\gamma)$.

Наконец, можно вернуться к уравнению (4.122) и вспомнить, что $\partial/\partial l\hat{\varphi}_\gamma(l) = \hat{\varphi}_{\gamma+1}(l)$; поэтому

$$\sum_\beta \frac{\partial}{\partial l_\beta}\ln\det_{\gamma\delta}\hat{\varphi}_\delta(l_\gamma) = \frac{\det(\hat{\varphi}_1(l_\gamma)\ldots\hat{\varphi}_{n-1}(l_\gamma)\ \hat{\varphi}_{n+1}(l_\gamma))}{\det(\hat{\varphi}_1(l_\gamma)\ldots\hat{\varphi}_{n-1}(l_\gamma)\ \hat{\varphi}_n(l_\gamma))}, \quad (4.131)$$

что совпадает с (4.130), поскольку $\hat{\varphi}_\delta(\lambda)$ отличается от φ_δ не зависящим от δ множителем $\exp[V(\lambda)-\lambda V'(\lambda)]\times\times\sqrt{V''(\lambda)}$. Таким образом, можно сделать вывод, что правая часть (4.122) равна $-c_{n+1}$, т.е. нулю; см. (4.128).

В описанной процедуре заслуживают внимания два обстоятельства. Во-первых, было абсолютно необходимо иметь $\partial/\partial T_1 \ln Z_V$ в правой части (4.122), чтобы она обратилась в нуль. Поэтому $\partial/\partial T_1$ обязано присутствовать в левой части выражения для оператора $\mathcal{L}_{-1}^{(V)}$ (это служит источником r_k поправок в (4.124)). Во-вторых, результат столь же прост, сколь естествен, но доказательство перенасыщено методическими деталями и выглядит несколько искусственным. Оно еще более усложняется при выводе общей формулы (4.136) для производных Z_V по T_k с $1 \le k \le p$ [40], которые играют важную роль в теории обобщенной модели Концевича и ее приложениях к теории квантовой гравитации. При доказательстве струнного уравнения используется частный случай (4.136), так как с помощью интегрального представления для $\hat{\varphi}(l)$ можно представить правую часть (4.131) как $1/Z_V\langle\operatorname{tr}X\rangle$, где $\langle\ \rangle$ обозначает среднее, определяемое интегралом Концевича. Таким образом,

$$\mathcal{L}_{-1}^{(V)}Z_V \overset{(4.122)}{=} -\frac{\partial}{\partial T_1}Z_V + \langle\operatorname{tr}\Lambda - \operatorname{tr}X\rangle \overset{(4.136)}{=} 0. \quad (4.132)$$

4.9. О теории обобщенной модели Концевича (ОМК)

Напомним, что ОМК — это сокращенное обозначение обобщенной модели Концевича. Этой обширной теории следовало бы посвятить отдельный большой раздел в данном обзоре. Однако мы решили этого не делать, поскольку разработка теории ОМК еще не вполне завершена. Во-первых, на наш взгляд, у ОМК все еще нет естественной инвариантной формулировки, а существующий матричный интеграл является лишь ее специфической реализацией. Во-вторых, ОМК еще не достаточно обобщена, чтобы выполнить свое основное назначение: объединить информацию обо *всех* моделях двумерной гравитации (на самом деле, она должна включить даже больше: полную теорию интегрируемых иерархий и геометрического квантования). В-третьих, несмотря на несомненное концептуальное богатство и глубину подхода в целом, многие доступные в настоящее время *доказательства* грешат избытком технических деталей и недостаточно лаконичны. Все это свидетельствует, что адекватную точку зрения на ОМК еще предстоит найти. В данный момент можно описать два взаимодополняющих подхода: один, исходящий из интегральных представлений, а другой — из теории (локализации) Дустермаата–Хекмана и анализа Фурье на групповых многообразиях. Несмотря на тесную связь обоих подходов, методически они во многом отличаются. Последний из них более фундаментален (поскольку обычные интегралы возникают из дискретных сумм либо в специальных пределах, либо в случаях бесконечномерных алгебр и, что еще более важно, поскольку интегральное представление является лишь одним из множества возможных способов определять интересные величины). Тем не менее большинство важных результатов, полученных с помощью первого подхода, еще не получили соответствующих наименований и не имеют точных аналогов во втором подходе. Мы убеждены, что вся эта проблема в целом в ближайшем будущем будет разработана гораздо полнее, поэтому решили до времени отложить ее более подробный анализ. Но вряд ли можно обойтись без того, чтобы по крайней мере представить здесь *перечень* тем, которые уже включены в теорию ОМК, что и является целью этого раздела 4.9.

Модель Концевича с $V = \frac{1}{3}X^3$ была получена Максимом Концевичем [22] из оригинального определения топологической двумерной гравитации, данного Е.Э. Виттеном [9] в терминах производящего функционала для классов Черна некоторых расслоений над римановыми поверхностями. Обобщение этого рассуждения (когда допускается к рассмотрению большое число расслоений) приводит к теории гравитации Ландау–Гинзбурга (ГЛГ), которую считают аналогом ОМК, хотя получены еще не все доказательства.[37]

Важнейшим признаком *не*пертурбативных статистических сумм, как указывалось в начале раздела 2, является их интегрируемая структура. В случае двумерной гравитации это общее положение приобретает вполне конкретную формулировку: статистические суммы — это, как правило, просто τ-функции стандартных интегрируемых иерархий; более того, для ГЛГ, ассоциированных с минимальными конформными моделями, они являются обычными многокомпонентными иерархиями Тоды.[38]

М. Концевич нашел представление для производящего функционала в виде матричного интеграла, т.е. сформулировал матричную модель, которая позднее позволила доказать гипотезу Виттена о том, что функционал на самом деле является τ-функцией. Концепция ОМК как *универсальной* матричной модели, включающей всю информацию от общего вида (картановских) матричных моделях и, следовательно, обо всех моделях двумерной (?) гравитации, была предложена в [30], а аналог модели Концевича с произвольным потенциалом $V(X)$, т.е. выражение

[37] К числу промежуточных результатов относится исследование сферического приближения к ГЛГ, в котором возникают структуры, характерные для "квазиклассических интегрируемых иерархий" (примером их служит иерархия Бейтмана, кратко упоминаемая в разделе 5.2) и появляющиеся также в "квазиклассическом" приближении к ОМК. Некоторые из этих результатов приведены в [17,40,41,95–97], а также в работах, которые цитируются в указанных публикациях.

[38] Можно сказать, что это вполне естественно: и эти модели, и иерархии Тоды связаны с алгебрами Каца–Муди уровня $k = 1$ и соответствующими упрощенными вариантами модели ВЗНВ. Однако, предстоит еще многое выяснить в отношении этой "очевидной" связи.

$$Z_V\{T\}|_{T_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}\Lambda^{-k}} = \mathcal{C}_V(\Lambda)^{-1}\mathcal{F}_V(V'(\Lambda)) \sim \sim \frac{\sqrt{\det V''(\Lambda)}}{(2\pi)^{n^2/2}\exp\left[\operatorname{tr}(\Lambda V'(\Lambda)-V(\Lambda))\right]}\times \times \int_{n\times n} \mathrm{d}X \exp\left[-\operatorname{tr} V(X)+\operatorname{tr} V'(\Lambda)X\right] \qquad (4.133)$$

было введено в качестве промежуточного этапа в этом направлении.[39] Эта (все еще ограниченная) модификация модели Концевича уже достаточна для объединения всех $(p, 1)$-моделей двумерной гравитации. В известном смысле она включает также (p, q)-модели с $q \neq 1$, но весьма неочевидным образом (с использованием аналитической непрерывности), которая не уважает явно даже $p \leftrightarrow q$ симметрию. Статистическая сумма такой ОМК $Z_V\{T\}$ зависит от двух типов переменных: временных переменных $\hat{T}_k$ и потенциала V. Формально эти два типа совершенно различны, поскольку V отвечает за выбор конкретной модели ГЛГ (или, что то же самое, *конкретной редукции двумеризованной системы* Тоды или иерархии КП), тогда как $\hat{T}_k$ представляют собой параметры производящего функционала для всех корреляционных функций в данной модели. Но, разумеется, реальное различие между обоими типами зависимости: от модели (вакуумного состояния) и от $\hat{T}$ практически отсутствуют, так как мы имеем дело с точным (непертурбативным) подходом; модель можно изменить посредством конечного *не*индифинитезимального сдвига $\hat{T}$ -переменных. Методически это отражено в теории ОМК тождеством [140]

$$Z_{V_p}\{T\} = f_p(r \mid \hat{T}_k + r_k)\cdot \tau\{\hat{T}_k + r_k \mid G_p\}, \qquad (4.134)$$

где

$$r_k = \frac{p}{k(p-k)}\operatorname{Res}(V'(\mu))^{1-\frac{k}{p}}\mathrm{d}\mu$$

обеспечивает специфическую параметризацию потенциала V, в качестве которого здесь можно взять любой полином степени p, а

$$f_p(r \mid \hat{T}_k + r_k) = \exp -\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}(r)(\hat{T}_i + r_i)(\hat{T}_j + r_j),$$
$$A_{ij} = \operatorname{Res}(V'(\mu))^{i/p}\,\mathrm{d}(V'(\mu))^{j/p} = \frac{\partial^2 \ln \tau_0^{(p)}}{\partial t_i \partial t_j}, \qquad (4.135)$$

тогда как $\tau_0^{(p)}$ является τ-функцией "квазиклассической иерархии". Важно, что точка грассманиана G_p (определяющая форму τ-функции **как функции** $\hat{T}+r$) и f_p зависят только от степени p, но не от других характеристик потенциала. Это глубокая формула. Она объясняет сразу два явления: во-первых, говорит, что Z зависит от *суммы* $\hat{T}$ и r,[40] а во-вторых, зависимость от V не *совсем* гладкая — с изменением степени потенциала форма **функций** $f(\hat{T})$ и $\tau(\hat{T})$ также резко изменяется. Другая сторона того же явления состоит в том, что статистическая сумма $Z_V\{T\}$, которая, в принципе, хорошо определена как матричный интеграл для любого выбора V и L (и, следовательно, $\hat{T}$) на самом деле сингулярна в нескольких точках: имеют место фазовые переходы, проявляющиеся в переключении с одной модели ГЛГ на другую. После фазового перехода формула для исходного интеграла становится несколько символической: она определяет статистическую сумму только в смысле аналитического продолжения, и поиски интегрального представления, адекватного в новых фазах, представляют собой отдельную задачу. На практике интегральным представлением ОМК в форме (4.133) изящно описаны $(p, 1)$-модели, где $p+1$ — просто степень потенциала $V(x)$. Однако аналогичное представление для (p, q)-моделей с $q \neq 1$ пока не найдено (оно может включать многократные матричные интегралы, а универсальная модель, как предполагается, представляет собой "матричную квантовую механику во внешних полях").

Вывод ключевой формулы (4.134) при любом подходе, начиная с ОМК в форме ГЛГ или с матричных интегралов, остается весьма трудоемким. В матрично-модельном представлении он базируется на тождестве [40]:

$$\frac{\partial Z_V}{\partial T_k} = \langle \operatorname{tr}\Lambda^k - \operatorname{tr}X^k\rangle \equiv \mathcal{C}_V^{-1}\int (\operatorname{tr}\Lambda^k - \operatorname{tr}X^k)\times \times \exp\left[-\operatorname{tr}V_p(X) + \operatorname{tr}V_p'(\Lambda)X\right]\mathrm{d}X \quad \text{для} \quad 1 \le k \le p, \qquad (4.136)$$

которое выглядит тривиальным, но выводится с большим трудом (простейший пример упражнений такого рода представлен в конце предыдущего раздела 4.9 при доказательстве струнного уравнения в ОМК). Разумеется, должна существовать какая-то простая процедура "в две строчки", но она еще не найдена. Формулы этого рода имеют очень большое значение для всех аспектов теории ОМК. Помимо прочего, они совершенно необходимы для реального вычисления корреляционных функций в $(p, 1)$-моделях двумерной гравитации, для которых $Z_V\{T\}$ служит производящим функционалом. Если вместо этих "физических" вопросов изучать теорию интегрируемости, тождества такого рода также могут оказаться полезными. Например, рассмотрев (4.136) при специальном значении $k=p$ и специальном выборе потенциала в виде монома $V_p(X) = X^{p+1}/(p+1)$, можно увидеть, что правая часть обращается в нуль, что приводит к тождеству Уорда, отражающему инвариантность под сдвигом переменной интегрирования $\delta X = \text{const}$. Это простейший вариант

[39] Напомним, что определение $\det V''(\Lambda)$ довольно сложно (см. раздел 2.5). Тот же матричный интеграл (4.133) рассматривается в [31-33,98].

[40] В параметризации Мивы $\hat{T}_k = (1/k)\operatorname{tr}[V_p'(\Lambda)]^{-k/p}$. В этом обзоре мы используем иные временные переменные $T_k = (1/k)\operatorname{tr}\Lambda^{-k}$, которые не зависят от выбора потенциала V, при этом зависимость $Z_V\{T\}$ от V, которую мы практически не изучали, достаточно нетривиальна. Будучи же выраженной в терминах $\hat{T}$, статистическая сумма $\hat{Z}_V\{\hat{T}+r\} = Z_V\{T\}$ становится более независимой от V: она изменяется скачком *только* с изменением степени p потенциала. Этот второй тип описания, конечно, больше соответствует симметриям конкретной модели, которые отличаются в разных "вакуумах" (для разных p). Поэтому в тождествах Уорда более естественно возникают переменные $\hat{T}+r$, а не T, что мы и видели в параграфах 2.5 и 2.6. T и $\hat{T}$ полезны для разных целей: T нужны при анализе *универсальности* ОМК, тогда как $\hat{T}$ появляются при обсуждении специфических характеристик конкретных моделей (орбит, вакуумов).

более общего утверждения:[41]

$$\text{если} \quad V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}, \text{ то}$$

$$\frac{\partial Z_V}{\partial T_{pk}} = 0 \text{ для всех } n \in Z_+. \qquad (4.137)$$

В рамках теории интегрируемости в (4.137) сразу же узнаем пример условия редукции (4.40). Оно соответствует так называемой p-редукции иерархии КП, наиболее замечательными примерами которой служат иерархии КдФ ($p = 2$) и Буссинеска ($p = 3$). Все подробности и необходимые ссылки можно найти в [30]. Здесь отметим только, что несколько более слабый вариант условия (4.137)

$$\frac{\partial Z_V}{\partial T_{pn}} = a_n = \text{const}, \qquad (4.138)$$

где a_n не зависит ни от каких временных переменных, может быть просто выражен в параметризации Мивы: это не что иное, как утверждение, что φ-функции в

$$Z_V = \frac{\det_{\gamma\delta} \varphi_\gamma(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)}$$

удовлетворяют условию p-редукции

$$\lambda^p \varphi_\gamma(\lambda) = \sum_{\delta=1}^{\gamma+p} \hat{V}_{\gamma\delta} \varphi_\delta(\lambda). \qquad (4.139)$$

Это — ограничительное соотношение, так как φ представляют собой бесконечный ряд в $1/\lambda$, тогда как в правой части (4.139) имеется только конечное число слагаемых. В ОМК оно удовлетворяется для мономиального потенциала как следствие уравнения Гросса–Ньюмена или, точнее, тождества Уорда для интеграла

$$\varphi_\gamma(\lambda) \sim \int x^{\gamma-1} \exp\left[-V(x) + V'(\lambda)x\right] \mathrm{d}x.$$

В самом деле, интеграл не изменяется при сдвиге $\delta x = \text{const}$, что подразумевает

$$\int x^{\gamma-1} \left(V'(x) - V'(\lambda) - \frac{\gamma - 1}{x} \right) \exp\left[-V(x) + V'(\lambda)x\right] \mathrm{d}x = 0$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{p+1} k v_k \Big(\varphi_{\gamma+k-1}(\lambda) - \lambda^{k-1} \varphi_\gamma(\lambda) \Big) - (\gamma - 1)\varphi_{\gamma-1} = 0. \qquad (4.140)$$

Если только $v_{p+1} \neq 0$, получаем тождество требуемой формы (4.139). Такое описание редукции можно модифицировать, чтобы получить *не*мономиальные потенциалы, исходя из концепции "эквивалентных иерархий" [см. 40, 100]; в ее рамках условие редукции выглядит

$$V'(\lambda)\varphi_\gamma(\lambda) = \sum_\delta \mathcal{V}_{\gamma\delta} \varphi_\delta, (\lambda), \qquad (4.141)$$

но классы отличающихся редукций существенно характеризуются только степенью потенциала.

Как уже говорилось в предыдущем разделе 4.8, линейные условия, подобные (4.139), не достаточно ограничительны, чтобы однозначно задать форму τ-функции (точку G в универсальном пространстве модулей) — необходимо еще наложить струнное уравнение. Будучи выраженным в терминах φ, струнное уравнение — это просто соотношение (4.106):

$$\varphi_{\gamma+1} = \mathcal{A}\varphi_\gamma, \qquad (4.142)$$

где оператор Каца–Шварца

$$\mathcal{A} = \frac{1}{V''(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{1}{2} \frac{V'''(\lambda)}{(V''(\lambda))^2} + \lambda. \qquad (4.143)$$

Его очевидное обобщение —

$$\mathcal{A}_{p,q} = \frac{\partial}{\partial V'_p(\lambda)} - \frac{1}{2} \frac{V'''_p(\lambda)}{(V''_p(\lambda))^2} + Q'_q(\lambda), \qquad (4.144)$$

где $Q_q(\lambda)$ — полином степени $q + 1$, а (4.142) заменено на

$$\varphi_{\gamma+q} = \mathcal{A}_{p,q}\varphi_\gamma \qquad (4.145)$$

Это обобщение, естественно, связано со струнным уравнением в (p, q)-моделях (см. [41] и список литературы в этой работе). Общего вида (p, q)-модель ГЛГ может быть описана системой условий

$$\begin{aligned} (\lambda^p - \mathcal{V}_p)\{\varphi\} &= 0, \\ \mathcal{A}_{p,q}\{\varphi\} &= 0, \end{aligned} \qquad (4.146)$$

где оба оператора $\mathcal{V}_p$ и $\mathcal{A}_{p,q}$ неоднозначно заданы выбором p и q, но зато существует свобода замены переменных $\lambda \to f(\lambda)$ и треугольных преобразований базиса $\varphi_\gamma \to \varphi_\gamma + \sum_{\delta<\gamma} C_{\gamma\delta}\varphi_\delta$.

Множество уравнений (4.146), взятое по модулю этих разрешенных преобразований, конечно — $(p - 1)(q - 1)$-мерно, это размерность пространства модулей моделей ГЛГ с данными p и q. Интеграл Концевича задает дуальное преобразование от (p, q)- к (q,p)-модели [41]:

$$\begin{aligned} Z_{V,Q}(\Lambda) &= C^{-1}_{V,Q}(\Lambda) \times \\ &\times \int_{n\times n} \mathrm{d}X \exp\left[-\operatorname{tr} S_{V,Q}(X, \Lambda) + \right. \\ &\left. + \operatorname{tr} V'(\Lambda) Q'(X)\right] Z_{Q,V}(X). \end{aligned} \qquad (4.147)$$

Здесь

$$S_{V,Q}(x, \lambda) = \int^x V'(y) Q''(y) dy = \int^x V'(y)\, \mathrm{d}Q'(y) \qquad (4.148)$$

Как обычно, $C_{V,Q}(\Lambda)$ представляет собой квазиклассическое приближение к интегралу, а

$$Z_{V,Q}(\Lambda) \equiv \frac{\det_{\gamma\delta} \varphi_\gamma(\lambda_\delta)}{\Delta(\lambda)},$$

[41] С технической точки зрения это утверждение содержалось в оригинальной работе Концевича [22] для $p + 1 = 3$, где оно связывалось с некоторыми комбинаторными тождествами. Сложное доказательство, основанное на свойствах τ-функций, было дано для любого p в [30]. Пример простого доказательства (снова для $p + 1 = 3$) в терминах матричных интегралов Концевича можно найти в [99].

где φ — решения (4.146) с $\mathcal{V}_p$ и $\mathcal{A}_{p,q}$, определяемыми уравнениями (4.141) и (4.144) соответственно.[42] Это соотношение *не* дает никакой формулы для самой $Z_{V_p,Q_q}(\Lambda)$, если q не равно единице. Случай $q=1$ выделен благодаря тривиальности Z_{Q_1,V_p}. В самом деле, условие 1-редукции $\lambda\varphi_\gamma = \varphi_{\gamma+1} + \sum_{\delta\le\gamma} \mathcal{V}_{\gamma\delta}\varphi_\delta$ предполагает, что $\det_{\gamma\delta}\varphi_\gamma(\lambda_\delta) = \Delta(\lambda)\prod_\delta \varphi_1(\lambda_\delta)$, поэтому $Z_{Q_1,V_p}=\exp\sum_k a_k T_k$. Это или практически то же самое, что $Z_{Q_1,V_p}=1$,[43] и тогда (4.147) превращается в нашу старую формулу (4.133) для $(p,1)$-варианта ОМК. ($Q_1(X)\sim X^2$ и Z_{Q_1,V_p} — это не что иное, как гауссова модель Концевича. Она тривиальна при "нулевом времени" $N=0$, как предполагается в данном случае.) Матричная реализация Z_{V_p,Q_q} при $q\ne 1$ пока неизвестна.

Это не единственное важное дальнейшее обобщение ОМК (4.133). Другое подразумевается формулой для $\mathcal{F}_V$ в терминах собственных значений из раздела 3.3:

$$\mathcal{F}_V \sim \prod_{\gamma=1}^{n}\int \mathrm{d}x_\gamma \exp\left[-V(x_\gamma)\right]\Delta^2(x) I(x,l). \qquad (4.149)$$

В разделе 3.3 уже упоминалось, что интеграл Ициксона-Зубера

$$I(x,l)\sim\int [DU] e^{\operatorname{tr} UXU^\dagger L}\sim \frac{\det_{\gamma\delta} e^{x_\gamma l_\delta}}{\Delta(x)\Delta(l)} \qquad (4.150)$$

представляет собой фактически интеграл по коприсоединенной орбите и имеет теоретико-групповую интерпретацию: при определенных условиях он совпадает с характером $\chi_R(g)=\mathrm{Tr}_R\, g$ (унитарного представления) группы $GL(n)$. Здесь $g\equiv\exp(L)$ рассматривается как групповой элемент, а представление R параметризовано целыми числами $m_1,\ldots,m_n$ — фактически длинами строк в диаграмме Юнга. Точное выражение:

$$I(m,l)\cdot\frac{\Delta(l)}{\Delta(g)} = \frac{\det_{\gamma\delta} g_\gamma^{m_\delta}}{\Delta(m)\Delta(g)} = \frac{\chi_R(g)}{d_R}. \qquad (4.151)$$

Отсюда видно, что для получения характеров нужно, чтобы матрицы X имели целые собственные значения.[44]

[42] Модифицируется также и выражение для r_k-переменных:

$$r_k = \frac{p}{k(p-k)}\mathrm{Res}\big(V_p'(\mu)\big)^{1-k/p}\mathrm{d}Q_p'(\mu).$$

Для мономиальных V_p и Q_q

$$r_k = -\frac{p}{p+q}\delta_{k,p+q}.$$

[43] Поскольку $\varphi_1(\lambda) = 1+\sum_{k>0} b_k\lambda^{-k}$, $\ln\varphi_1(\lambda) = \sum_{k>0}(a_k/k)\lambda^{-k}$, а сумма $\sum_\delta \ln\varphi_1(\lambda_\delta) = \sum_{k>0}(a_k/k)\sum_\delta \lambda_\delta^{-k}) = \sum_{k>0} a_k T_k$. Добавление любой *линейной* комбинации временных переменных к $\ln\tau$ существенно не изменяет τ-функцию. Например, обычные интегрируемые уравнения (типа КдФ или КП), как правило, записывают в терминах таких переменных, как $u=(\partial^2/\partial T_1^2)\ln\tau$, которые являются *вторыми* производными $\ln\tau$.

[44] Отношение

$$\frac{\Delta(l)}{\Delta(g)} = \prod_{\gamma>\delta}\frac{l_\gamma - l_\delta}{\exp(l_\gamma)-\exp(l_\delta)}$$

представляет собой обычный поправочный фактор — это та цена, которую приходится платить за сведение квантовомеханической проблемы движения по орбите к единственному матричному интегралу. Полную задачу матричной квантовой механики можно и должно рассматривать как многоматричное (фактически бесконечно-матричное) обобщение ОМК (4.133), включающее все (p,q)-модели ГЛГ.

Размерность $d_R R(I)$ представления можно выразить также в терминах m-переменных: $d_R=\Delta(m)$. Что же до следов $\operatorname{tr} X^k = \sum_\gamma x_\gamma^k \to \sum_\gamma m_\gamma^k$, которые появляются в действии ОМК, они весьма сходны с собственными значениями k-го оператора казимира $C_k(R)$, (точнее, являются алгебраическими комбинациями казимиров). Таким образом, видим, что интеграл в (4.149) на самом деле очень похож на

$$\mathcal{F}_V^{\mathrm{qu}}\{g,\bar g\}\equiv\sum_R \chi_R(\bar g)\chi_R(g)\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k C_k(R)\right), \qquad (4.152)$$

в точке $\bar g = I$. Единственное реальное различие состоит в том, что вместо интеграла мы имеем сумму по дискретным значениям (сумму по всем представлениям или *модель* $GL(n)$). Эта дискретизированная (квантовая?) ОМК имеет более общий характер, чем непрерывная модель, которую можно получить с помощью различных предельных процедур. Теория дискретизированной ОМК в большой степени перекрывается с двумерной теорией Янга-Миллса. Простейшим составляющим этой теории является классический результат [101], утверждающий, что характеры $GL(N)$ являются сингулярными τ-функциями двумеризованной системы Тоды и иерархии КП. Более того, и вся сумма в правой части (4.152), если рассматривать ее, как функцию $T_k=(1/k)\operatorname{tr} g^k$, $\bar T_k = (1/k)\operatorname{tr}\bar g^k$, оказывается τ-функцией двумеризованной Тоды. Имеются также соотношения, аналогичные (4.134). Несколько более подробно задача о дискретизированной ОМК рассмотрена в [102] (см. также недавнюю публикацию [81]). Разработка этой проблемы — еще одно важное направление дальнейших исследований ОМК.

4.10. Одноматричная модель и иерархия цепочки Тоды

В конце настоящего раздела мы используем простейший пример дискретной матричной модели, чтобы продемонстрировать, как из детерминантных формул возникает более привычное лаксово описание интегрируемых иерархий. Этот пример пригодится нам и в разделе 5.3 при обсуждении одного из способов взятия двойного непрерывного скейлингового предела одноматричной модели. Лаксово представление обычно возникает после выбора некоторой системы координат в грассманиане. В примере, который мы собираемся рассмотреть, эта система вводится с помощью ортогональных полиномов.

Мы уже знаем из раздела 3.6, что статистическая сумма одноматричной модели (которая представляет собой однокомпонентную модель) задается выражением

$$Z_N = \mathrm{Det}_{0<i,j\le N}\langle h^i\mid h^j\rangle = \prod_{i=0}^{N-1} e^{\phi_i} = Z_1\prod_{i=1}^{N-1} R_i^{N-i}, \qquad (4.153)$$

где два последних представления — в терминах норм ортогональных полиномов

$$\langle Q_n\mid Q_m\rangle = e^{\phi_n}\delta_{nn} \qquad (4.154)$$

и параметр трехчленного соотношения

$$hQ_n(h) = Q_{n+1}(h) + c_n Q_n(h) + R_n Q_{n-1}(h),$$
$$Z_1 = \exp(\phi_0) = \langle 1\mid 1\rangle,\quad R_n = \exp(\phi_n - \phi_{n-1}).$$

Разумеется, вся информация содержится в детерминантной формуле вместе с правилом, которое определяет зависимость от времени $\mathcal{H}^f_{ij} = \langle h^i \mid h^j \rangle = \hat{\mathcal{H}}^f_{i+j}$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}^f_{ij}}{\partial t_k} = \mathcal{H}^f_{i+k,j} = \mathcal{H}^f_{i,j+k}, \quad \text{или}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}^f_i}{\partial t_k} = \hat{\mathcal{H}}^f_{i+k}. \tag{4.155}$$

(Возможность выразить все в понятиях $\mathcal{H}^f_i$ с единственным матричным индексом i есть свойство редукции цепочки Тоды общей иерархии двумеризованной Тоды.)

Однако, для того чтобы получить стандартное лаксово представление, необходимо провести несколько более сложный анализ, а именно, рассмотреть представление двух операторов в базисе ортогональных полиномов. Во-первых,

$$h^k Q_n(h) = \sum_{m=0}^{n+k} \frac{\langle n \mid h^k \mid m \rangle}{\langle m \mid m \rangle} Q_m(h) = \sum_{m=0}^{n+k} \gamma^{(k)}_{nm} Q_m(h) \tag{4.156}$$

(здесь введено упрощенное обозначение для

$$\langle n \mid f(h) \mid m \rangle \equiv \langle Q_n \mid f(h) \mid Q_m \rangle \quad \text{и} \quad \gamma^{(k)}_{nm} \equiv \frac{\langle n \mid h^k \mid m \rangle}{\langle m \mid m \rangle}.)$$

Во-вторых,

$$\frac{\partial Q_n(h)}{\partial t_k} = -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\langle n \mid h^k \mid m \rangle}{\langle m \mid m \rangle} Q_m(h) = -\sum_{m=0}^{n-1} \gamma^{(k)}_{nm} Q_m(h),$$
$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t_k} = \frac{\langle n \mid h^k \mid n \rangle}{\langle n \mid n \rangle} = \gamma^{(k)}_{nn}. \tag{4.157}$$

(Последние соотношения возникают из дифференцирования условия ортогональности (4.154):

$$e^{\phi_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k} \delta_{nm} = \frac{\partial \langle Q_n \mid Q_m \rangle}{\partial t_k} =$$
$$= \left\langle \frac{\partial Q_n}{\partial t_k} \middle| Q_m \right\rangle + \left\langle Q_n \middle| \frac{\partial Q_m}{\partial t_k} \right\rangle + \langle Q_n \mid h^k \mid Q_m \rangle$$

при анализе соответственно случаев $m < n$ и $m = n$.)

Из этих соотношений сразу же выводится лаксова формула:

$$\frac{\partial \gamma^{(k)}_{nm}}{\partial t_q} = -\sum_{l=m-k}^{n-1} \gamma^{(q)}_{nl} \gamma^{(k)}_{lm} + \sum_{l=m+1}^{n+k} \gamma^{(k)}_{nl} \gamma^{(q)}_{lm} \tag{4.158}$$

или, в матричной форме,

$$\frac{\partial \gamma^{(k)}}{\partial t_q} = [R\gamma^{(q)}, \gamma^{(k)}], \tag{4.159}$$

где

$$R\gamma^{(k)}_{mn} \equiv \begin{cases} -\gamma^{(k)}_{mn}, & \text{если} \quad m > n, \\ \gamma^{(k)}_{mn}, & \text{если} \quad m < n \end{cases}. \tag{4.160}$$

(напомним, что обычно R-матрица действует на функцию

$$f(h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n h^n$$

по правилу

$$Rf(h) = \sum_{n \geq l} f_n h^n - \sum_{n < l} f_n h^n$$

с некоторым "уровнем" l). Эти $\gamma^{(k)}$ — не симметричные матрицы, однако все вышеприведенные формулы можно переписать в терминах их симметричных аналогов:

$$\mathcal{L}^{(k)}_{mn} \equiv \exp\left[\frac{1}{2}(\phi_n - \phi_m)\right] \gamma^{(k)}_{mn} = \frac{\langle m \mid h^k \mid n \rangle}{\sqrt{\langle m \mid m \rangle \langle n \mid n \rangle}}. \tag{4.161}$$

Из уравнения (4.158) легко выводятся уравнения Тоды для ϕ_n:

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t_k \partial t_l} = \frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\langle n \mid h^l \mid n \rangle}{\langle n \mid n \rangle} =$$
$$= \left(\sum_{m>n} - \sum_{m<n} \right) \frac{\langle n \mid h^k \mid m \rangle \langle m \mid h^l \mid n \rangle}{\langle m \mid m \rangle \langle n \mid n \rangle}, \tag{4.162}$$

в которых правую часть можно выразить в терминах $R_m = \exp(\phi_m - \phi_{m-1})$. В частности,

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t_1 \partial t_1} = R_{n+1} - R_n = \exp(\phi_{n+1} - \phi_n) -$$
$$- \exp(\phi_n - \phi_{n-1}). \tag{4.163}$$

Упомянем также, что в этом формализме тождества Уорда (условия Вирасоро) возникают главным образом из соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\dagger = -\frac{\partial}{\partial h} - \sum_{k>0} k t_k h^{k-1}, \tag{4.164}$$

где эрмитово сопряжение определено по отношению к скалярному произведению $\langle \mid \rangle$. Например, это соотношение подразумевает, что

$$\left\langle Q_n \middle| \frac{\partial Q_n}{\partial h} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial Q_n}{\partial h} \middle| Q_n \right\rangle -$$
$$- \sum_{k>0} k t_k \langle Q_n \mid h^{k-1} \mid Q_n \rangle. \tag{4.165}$$

Теперь заметим, что $\partial Q_n / \partial h$ — это полином степени $n-1$, т.е. $\langle Q_n \mid \partial Q_n / \partial h \rangle = 0$. (Фактически

$$\frac{\partial Q_n}{\partial h} = -\sum_{k>0} k t_k \left(\sum_{m=0}^{n-1} \gamma^{(k-1)}_{nm} Q_m \right) = -\sum_{k>0} k t_k \frac{\partial Q_n}{\partial t_{k-1}}.)$$

Вспомним также, что

$$\langle Q_n \mid h^{k-1} \mid Q_n \rangle = \langle Q_n \mid Q_n \rangle \frac{\partial \phi_n}{\partial t_{k-1}},$$

и получим

$$\sum_{k>0} k t_k \frac{\partial \phi_n}{\partial t_{k-1}} = 0 \tag{4.166}$$

для любого n. Это выражение следует дополнить соотношением $\partial \phi_n / \partial t_0 = \phi_n$. Чтобы получить низшее условие Вирасоро (струнное уравнение) $L_{-1} Z_N = 0$ или $L_{-1} \ln Z_N = 0$, достаточно просто просуммировать по n

от 0 до $N - 1$.

Более подробно проблемы одноматричных моделей, иерархии цепочки Тоды и применения формализма ортогональных полиномов в этом контексте рассматриваются в [26].

5. Непрерывные пределы дискретных матричных моделей.

5.1. Что такое непрерывный предел

Непрерывный предел матричных моделей, безусловно, является важнейшим вопросом для изучения их физических приложений во всех случаях, когда эти модели интерпретируются как дискретные (решеточные) приближения к непрерывной теории. Самое первое, что следует иметь в виду, это то, что такой подход к матричным моделям *не* единственно возможный. При другом подходе они рассматриваются как описание *топологических* (и, следовательно, в определенном смысле "дискретных") свойств теории. Такие модели, применяемые, скажем, при описании квантовой гравитации (которая, в принципе, является разновидностью чистой топологической теории) *не* требуют взятия непрерывного предела: их дискретная природа (наличие *цело*численных матричных индексов) отражает *не* дискретную аппроксимацию пространства–времени (которое в действительности не существует в квантовой гравитации), а скорее существенную дискретность, лежащих в их основе структур — топологических свойств пространства модулей различных геометрий. Примерами матричных моделей, поддающихся такой интерпретации в терминах топологии пространств модулей расслоений над римановыми поверхностями, могут служить модели Концевича, поэтому они обычно не требуют никакого непрерывного предела и поэтому во Введении к настоящему обзору мы однажды назвали их "непрерывными матричными моделями". Модели, которые обычно интерпретируются более традиционным образом, такие как решеточные теории, представлены нашими "дискретными" моделями, к классу которых относятся одноматричные, обычные и "конформные" многоматричные модели. Более сложные примеры даются "$c = 1$"-теориями, моделью Казакова–Мигдала и, скажем, вильсоновской КХД (а также бесконечным множеством других решеточных теорий). Неудивительно, что непрерывные пределы некоторых дискретных моделей приводят к теориям типа моделей Концевича: это случается всякий раз, когда непрерывная теория имеет ту или иную топологическую природу. Обычно с этим сталкиваются в случае квантовой гравитации (которая, как мы отмечали, концептуально является топологической теорией в "пространстве модулей геометрий" — понятие, которое более или менее четко разработано для двумерного случая), но, в принципе, это может быть справедливо и для многих других теорий, в том числе исчерпывающей квантовой теории полей Янга–Милса (здесь уже тоже достигнут значительный прогресс, особенно в том, что касается двумерной модели Янга–Милса). Не следует смущаться наличием калибровочных частиц при числе измерений более 2 (для модели Янга–Милса) и 3 (для гравитации): нет никаких причин думать, что общего вида топологическая теория не может обладать непрерывным спектром возбуждений, хотя точный аналог описания таких ситуаций, подобного описанию Концевича, еще отсутствует (как мы уже неоднократно отмечали, оно, вероятно, должно основываться на *не*картановских моделях).

Мы не станем углубляться в нетривиальную историю открытия и изучения всех этих понятий (и таких ключевых стадий, как открытие "многоскейлинговых непрерывных пределов" [19, 20], сохраняющих интегрируемую структуру дискретных моделей в непрерывном случае; гипотеза эквивалентности квантовой и топологической двумерных гравитаций [9] и ее доказательства [23, 24], даваемые моделями Концевича [22] как конкретным мощным инструментом для описания топологии пространств модулей). Вместо этого, придерживаясь центральной линии наших заметок, сконцентрируем внимание на взаимосвязи между (многоскейлинговыми) непрерывными пределами и интегрируемостью: понятие непрерывных пределов фактически встроено в теорию интегрируемых иерархий и лежащую в ее основе теорию представлений алгебр Каца–Муди. В случае картановских моделей ключевым элементом является взаимосвязь между иерархиями двумеризованной Тоды и КП, даже ее более узкий аспект: исключение нулевого времени N, присутствующего в случае двумеризованной Тоды. С точки зрения теории представлений (или конформной теории поля, что практически одно и то же) нулевое время (которое задает уровень наполнения моря Дирака в фермионной картине) связано с нулевыми моделями *скалярного* поля, а его устранение — это простое изменение граничных условий, которое запрещает нулевые моды. Простейший пример такой "подкрутки" дает переход от периодических к антипериодическим скалярам — при этом сохраняется возможность фермионного описания (в котором тот же переход выглядит как переключение из сектора Рамона в сектор Невье–Шварца) и не требуется выходить из области стандартных интегрируемых иерархий. В теории представлений эта же операция интерпретируется как переход от однородного представления к главному (principal), которые, в свою очередь, связаны соответственно с двумеризованной системой Тоды и с КП.

Это замечательно простое описание, конечно, далеко не очевидно, если исследовать непрерывный предел наивным путем, не принимая явно во внимание интегрируемую структуру, а просто устремляя число степеней свободы в дискретной теории (т.е. размер матрицы N) к бесконечности (вместе с обратным шагом решетки, если таковая имеется). Обсуждение наивных непрерывных пределов в двумеризованных калибровочных теориях, т.е. условий для получения фазовых переходов второго порядка, где вблизи критической точки возможно непрерывно-подобное скейлинговое поведение с критическими экспонентами, определяющими всю непрерывную физику, от квантовой размерности пространства-времени до спектра частиц, можно найти в классическом обзоре [18]. Проблема с наивными непрерывными пределами состоит в том, что они легко разрушают интегрируемую структуру теории (лежащие в ее основе скрытые симметрии), если не принять соответствующих мер предосторожности: к критической "точке" (которая фактически представляет собой гиперповерхность низкой коразмерности в бесконечномерном пространстве параметров) следует подходить с определенных направлений, чтобы не вызвать явного нарушения тождеств

Уорда.

Произнеся слова "тождества Уорда", мы тут же оказываемся в области интегрируемых систем, и этот вопрос следует рассматривать именно в границах этой области. Вышеупомянутое переключение с периодических на антипериодические поля, возникает само собой, если сравниваются дискретные и непрерывные условия Вирасоро (представленные во Введении формулами (1.2) и (1.3)), но это информация *aposteriori*, потому что до сих пор мы интерпретировали "непрерывные условия Вирасоро" как тождества Уорда для модели Концевича $V = X^3$; и еще предстоит объяснить, почему именно модель Концевича возникает после взятия непрерывного предела. Простейший подход к *этой* проблеме состоит в использовании тождества между дискретной одноматричной моделью и гауссовой моделью Концевича [56], которое установлено в разделе 3.8. Тогда при оценке матричного интеграла методом перевала [36] в пределе больших N возникает модель X^3. Мы представим этот простой расчет в последней части настоящего раздела, но прежде используем более прямой (и сложный) подход, чтобы выявить хотя бы некоторые положения, лежащие в основе общей теории непрерывных пределов.

5.2. От цепочки Тоды к КдФ

Начнем с простейшего из имеющихся примеров: непрерывного предела, в котором низшее уравнение "иерархии Вольтерры"

$$\frac{\partial R_n}{\partial t} = -R_n(R_{n+1} - R_{n-1}), \tag{5.1}$$

превращается в низшее уравнение КдФ:

$$\frac{\partial r}{\partial T_3} = -\frac{1}{3}r''' - 2rr'. \tag{5.2}$$

Иерархия Вольтерры — это редукция иерархии цепочки Тоды с $R_n = \exp(\phi_n - \phi_{n-1})$, возникающая, когда все нечетные времена $t_{2k+1} = 0$ **и все** ϕ_n полагаются независимыми от них, точнее,

$$\left.\frac{\partial \phi_n}{\partial t_{2k+1}}\right|_{t_{\rm odd}=0} = 0.$$

Поэтому такая иерархия явно связана с дискретной одноматричной моделью. Мы вернемся к анализу одноматричной модели в следующем разделе 5.3, а пока обратимся к соотношению между (5.1) и (5.2) [26, 103].

Смысл взятия непрерывного предела состоит в замене "нулевого времени" n на *непрерывную* переменную x (которую в конце интерпретируют как T_1 **непрерывной** иерархии). Иными словами, идея состоит в анализе подмножества функций R_n, которые удовлетворяют уравнению Вольтерры и очень плавно зависят от n, так что фактически их можно заменить гладкой функцией $R(x)$. Такая замена выглядит, конечно, очень естественно, если нас интересует предел уравнения при большой n. В результате (5.1) превращается в

$$\frac{\partial R(x)}{\partial t} = -R(x)(R(x+\epsilon) - R(x-\epsilon)), \tag{5.3}$$

и теперь остается взять предел $\epsilon \to 0$, который после **рескейлинга** $x \to \epsilon x$ дает "уравнение Бейтмана" (или Хопфа):

$$\frac{\partial R(x)}{\partial t} = -R(x)R'(x). \tag{5.4}$$

Это очень интересное уравнение (см. [104], где описаны забавные стороны соответствующей теории, которая на самом деле имеет самое непосредственное отношение к теории струн). Тем не менее, оно гораздо проще уравнения КдФ (в частности, оно полностью интегрируемо в самом тривиальном смысле слова: немедленно предъявляется *полный набор* решений, удовлетворяющих *любым* граничным условиям; см. [104]. Уравнение КдФ можно рассматривать в качестве варианта "квантования" (5.4) (к сожалению, этот очень интересный вопрос пока еще не привлекает должного внимания и изучен недостаточно).

Замечательно, что уравнение Бейтмана не является *единственным* возможным пределом уравнения Вольтерры. Существует тонкая процедура настройки ("двойной скейлинговой предел"), которая позволяет получить в пределе менее тривиальное уравнение КдФ [103]: в самом деле, представим, что в непрерывном пределе R_n стремится к константе R_0, а функция $r(x)$ возникает только как скейлинговое приближение к этой константе: $R(x) = R_0(1 + \epsilon^s r(x))$.

Тогда лидирующим членом в правой части уравнения (5.4) будет $\epsilon RR'(x) = -2\epsilon^s r(x)(1 + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^s))$ и вместо (5.4) имеем

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -2\epsilon R_0 r'(x)((1 + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^s)). \tag{5.5}$$

Это уравнение даже проще, чем (5.4), оно линейно, но именно эта простота[45] не позволяет ему остаться в такой форме. Простой заменой переменных

$$\tilde{x} = x - 2\epsilon R_0 t, \tag{5.6}$$

$$\tilde{t} = \epsilon^3 R_0 t \tag{5.7}$$

его можно превратить в

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}} = \epsilon^{-2}\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^s),$$

и, следовательно, необходимо принимать в расчет члены в правой части уравнения. Тогда имеем

$$\frac{\partial r(x)}{\partial t} = -2\epsilon R_0\Big(1 + \epsilon^s r(x)\Big)\Big(r'(x) + \frac{1}{6}\epsilon^2 r'''(x) + \mathcal{O}(\epsilon^4)\Big) =$$
$$= -2\epsilon R_0\Big(r'(x) + \frac{1}{6}\epsilon^2 r'''(x) + \epsilon^s rr'(x) + \epsilon^2\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^s)\Big)$$

и после замены переменных (5.7)

$$\frac{\partial r(\tilde{x})}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{3}r'''(\tilde{x}) - 2\epsilon^{s-2}rr'(\tilde{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^s).$$

Теперь ясно, что выбор $s = 2$ предпочтителен (критическая точка) и в этой точке получаем

$$\frac{\partial r}{\partial T_3} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 r}{\partial T_1^3} - 2r\frac{\partial r}{\partial T_1}, \tag{5.8}$$

[45] Эта замена переменных подразумевается соотношением

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2\epsilon^s R_0\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + 2\epsilon^s R_0\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + 2\epsilon^s R_0\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}.$$

где введены новые обозначения T_1 и T_3 соответственно для $\tilde{x}$ и $\tilde{t}$. Это уже уравнение КдФ (5.2) и мы приходим к следующему заключению.

В то время, как наивный непрерывный предел уравнения Вольтерры представляет собой простое уравнение Бейтмана, скейлинговый предел поддается тонкой настройке, после которой возникает уравнение КдФ. Ключевым ингредиентом такого подбора служит изменение временных переменных $\{t\}\longrightarrow\{T\}$, в котором участвует сингулярный параметр ϵ. Эту процедуру легко распространить на всю иерархию Вольтерры, а тонкая настройка позволяет получить полную иерархию КдФ в пределе $\epsilon \to 0$. Обычно преобразование к "переменным Казакова" $\{T\}$ (они несколько отличаются от первоначально введенных В. Казаковым в [19]) от исходных $\{t\}$ является линейной *треугольной* заменой.

Важная подробность: эта процедура требует ограничения только *четными* временными переменными t_{2m}, $m \geq 0$. (Если включаются также нечетные времена, то возникает пара иерархий КдФ в непрерывном пределе — это не "минимальный" случай.) Таким образом, "неприводимая" реализация непрерывного предела требует *редукции* исходной иерархии. Это вытекает также из того, что низшее уравнение КдФ возникает из низшего уравнения Вольтерры, которое родственно *второму* уравнению иерархии цепочечной Тоды.

К сожалению, этот небольшой фрагмент теории (непрерывный предел в понятиях иерархий) так и не был разработан во всех подробностях (для всех двумеризованных иерархий Тоды, ее многокомпонентных обобщений и их редукций). Как уже упоминалось, эта теория включает общее соотношение между однородными и главными представлениями алгебр Каца–Муди (уровня k=1).

5.3. Двойной скейлинговый предел одноматричной модели

Переходим теперь к обсуждению несколько иного подхода к непрерывным пределам, который непосредственно приспособлен к нуждам матричных моделей. Наивная идея [20, 29] состоит в том, чтобы забыть об интегрируемом и просто рассмотреть тождества Уорда (в одноматричном случае — условия Вирасоро), чтобы взять их непрерывный предел. Этот подход близко соприкасается со стандартной методикой "петлевых уравнений" (уравнений Макеенко–Мигдала [105]) в теории матричных моделей, частными примерами которых являются условия W и Вирасоро.[46]

Тем не менее, внимательный анализ непрерывного предела дискретных условий Вирасоро [28] со всей очевидностью показывает, что эта процедура далеко не так проста, как может показаться заранее ("простые" выводы весьма неаккуратны, а "лишние" подробности просто "заметают под ковер"). Суть проблемы в том, что мы хотим получить конкретный (двойной скейлинговый), а не наивный предел (как упоминалось в предшествующем подразделе); а это требует известной редукции (исключения нечетных времен t_{2m+1}). Если принять во внимание симметрию четности (по отношению к замене $H \to -H$ в исходном матричном интеграле), то легко отбросить *первые* производные по отношению к нечетным временам t_{2m+1} просто потому, что

$$\left.\frac{\partial Z_N}{\partial t_{2m+1}}\right|_{t_{2k+1}=0} = 0,$$

но это равенство больше не выдерживается в случае *вторых* производных

$$\left.\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t_{2m+1}\partial t_{2l-1}}\right|_{t_{2k+1}=0},$$

которые появляются в ("квантовом фрагменте") условий Вирасоро (1.2). Возможность аккуратного исключения этих членов в непрерывном пределе является в высшей степени *не*тривиальной особенностью петлевых уравнений (берущей свое начало в их интегрируемой структуре!) Дело в том, что вторые производные $\ln Z_N$ оказываются *локальными* объектами в том смысле, что они зависят только от $Z_{\tilde{N}}$ с разностью $|\tilde{N} - N| \leq m + l$, которая не растет подобно $N \to \infty$ в непрерывном пределе. Кроме того, разности

$$\frac{\partial^2 \ln Z_N}{\partial t_{2m+1}\partial t_{2l-1}} - \frac{\partial^2 \ln Z_N}{\partial t_{2m}\partial t_{2l}}$$

почти стремятся к нулю, оставляя некоторые простые (но жизненно важные) поправки к возникающим непрерывным петлевым уравнениям. Это свойство локальности позволяет освободиться от указанных опасных нечетно-временных производных, заменив их вторыми производными по отношению к четным временам. Поскольку такая замена возможна только для *логарифмов* Z_N, непрерывные условия в конце концов оказываются наложенными на *квадратный корень* первоначальной статистической суммы (или на $1/p$-ю степень в случае $(p - 1)$-компонентных конформных моделей). Другое следствие такого приема обращения с нечетно-временными производными состоит в том, что весь вывод оказывается в явной зависимости от факта интегрируемости теории, которая гарантирует вышеупомянутую локальность. Поскольку способ выявления интегрируемости посредством анализа самих петлевых уравнений пока понятен не до конца, весь подход становится не вполне самостоятельным (разумеется, если об интегрируемой структуре модели все известно, это не является большим недостатком, а лишь ограничением конкретного подхода, начинающегося с петлевых уравнений). В частности, это единственный пробел, еще не заполненный в описании непрерывного предела конформных (многокомпонентных) матричных моделей, которое во всех остальных отношениях совершенно параллельно

[46] Одна из загадок в теории некартановских моделей — выяснение теоретико-группового смысла общих уравнений: их обычно вводят как уравнения движения, а не тождества Уорда (см. обсуждение в начале раздела 2), в связи с чем их следствия менее очевидны, а технические средства для этой цели гораздо более ограничены. Если будет найдено групповое описание, будет открыт путь к пониманию (обобщенной) интегрируемой структуры некартановских моделей, что станет важным шагом на пути разработки полной теории.

случаю однокомпонентных (одноматричных) моделей. [47]

Теперь кратко опишем последовательные стадии расчета для одноматричной модели, отсылая за подробностями к [28, 45]. В предшествующем обсуждении уже говорилось о мотивации главных шагов, поэтому сейчас нет нужды в детальных разъяснениях. Описанные ниже манипуляции с переменными Казакова, возможно, выглядят несколько искусственными, но повторяем, что их можно интерпретировать как переход от тода-подобных иерархий к КП-подобным, который, как мы уже видели в предыдущем подразделе, естественно ассоциируется с двойным скейлинговым непрерывным пределом.

Начнем с дискретных условий Вирасоро (1.2), переписанных в терминах производящего функционала ("тензора" энергии-импульса на спектральной плоскости):

$$L_-(z)Z_N = 0, \tag{5.9}$$

где

$$L_-(z) = \sum_{n\geq -1}^{\infty} L_n z^{-n-2} = \frac{1}{2}\left(J^2(z)\right)_-, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} &J(z) = \partial\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n z^{-n-1}, \\ &\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0} t_k z^k - \sqrt{2}\sum_{k>0}\frac{z^{-k}}{k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \\ &J_{-k} = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad J_k = \frac{1}{\sqrt{2}}k t_k, \quad k\geq 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t_0}Z_N = N Z_N. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Теперь надо редуцировать исходную статистическую сумму

$$Z_N\{t\} \longrightarrow Z_N^{\mathrm{red}}\{t_{\mathrm{even}}\} \equiv Z_N\{t_{\mathrm{odd}} = 0, t_{\mathrm{even}}\}. \tag{5.12}$$

Все нечетные генераторы Вирасоро L_{2n+1} действуют на Z_N^{red} тривиально, поскольку

$$\left.\frac{\partial Z_N}{\partial t_{2k+1}}\right|_{t_{\mathrm{odd}}=0} = 0$$

и необходимо рассматривать только L_{2n}. Введем также [48]

$$\begin{aligned} &\phi^{\mathrm{red}}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0} t_{2k} z^{2k} - \sqrt{2}\sum_{k>0}\frac{z^{-2k}}{k}\frac{\partial}{\partial t_{2k}}, \\ &L^{\mathrm{red}}(z) = \frac{1}{2}\left(\partial\phi^{\mathrm{red}}(z)\right)^2, \\ &L_{2n}^{\mathrm{red}} \equiv \sum_{k>0} k t_{2k}\frac{\partial}{\partial t_{2k+2n}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t_{2k}\partial t_{2n-2k}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Теперь имеем два сюжета, которые следует обсудить по отдельности. Первый — это переход от t_{2k} к переменным Казакова T_{2m+1}, а второй — различие между условиями, наложенными на Z^{red} и Z.

Простейший способ *описать* переменные Казакова состоит во введении еще одного антипериодического скалярного поля

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0} T_{2k+1} u^{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\sum_{k\geq 0}\frac{u^{-k-\frac{1}{2}}}{k+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_{2k+1}}. \tag{5.14}$$

Здесь $\tilde{T}$ и T связаны преобразованием

$$T_{2k+1} = \tilde{T}_{2k+1} + \epsilon^2\frac{k}{k+\frac{1}{2}}\tilde{T}_{2k-1} + 2\epsilon N\delta_{k,0}. \tag{5.15}$$

Теперь наложим соотношение

$$\begin{aligned} &\partial\phi^{\mathrm{red}}(z) = \frac{1}{\epsilon^2}U^{-1}\partial\Phi(u)U; \\ &z^2 = 1 + \epsilon^2 u, \end{aligned} \tag{5.16}$$

В непрерывном пределе $\epsilon \to 0$. Это соотношение отображает однородные представления в главные, однако его инвариантное значение (особенно с точки зрения конформной теории поля) недостаточно понято. Как бы то ни было, это соотношение устанавливает связь между t_{even} и T. В частности, сравнивая коэффициенты перед положительными степенями u в обеих частях этого уравнения получаем

$$\begin{aligned} &T_{2k+1} = \frac{1}{2}\epsilon^{2k+1}\sum_{m\geq k}^{\infty}\frac{g_m\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(m-k)!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}, \quad k\geq 0, \\ &g_m = m t_{2m}, \quad m\geq 1, \qquad g_0 = 2N. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Обратное преобразование выглядит как

$$g_m = 2\sum_{k\geq m}(-)^{k-m}\frac{T_{2k+1}\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\epsilon^{2k+1}(k-m)!\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}. \tag{5.18}$$

Теперь

$$\frac{\partial}{\partial t_{2k}} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\epsilon^{2k+1}}{(k-m-1)!\,\Gamma(m+\frac{3}{2})}\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_{2m+1}}, \tag{5.19}$$

Используя эту формулу при сопоставлении отрицательных степеней u в (5.16), находим

$$\begin{aligned} &U = \exp\left(\sum_{m,n} A_{mn}\tilde{T}_{2m+1}\tilde{T}_{2n+1}\right), \\ &A_{mn} = 2\frac{(-)^{m+n}}{\epsilon^{2(m+n+1)}}\cdot\frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})}{m!\,n!\,(m+n+1)(m+n+2)}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

---

[47] Непрерывный предел превращает дискретные W-условия в непрерывные W-условия, которые в свою очередь возникают из ОМК с соответствующим потенциалом [30,55]. К сожалению, интерпретация *дискретных* многокомпонентных моделей в рамках теории ОМК (подобная существующей для одноматричного случая; см. раздел 3.8) еще неизвестна, поэтому способ непосредственного взятия их непрерывного предела, подобный описанному в следующем разделе 5.4 для одноматричного варианта, также отсутствует. Конформные матричные модели, их интегрируемая структура и непрерывные пределы более подробно рассмотрены в [39].

[48] Отметим, что $\phi^{\mathrm{red}}(z) \neq \phi(z)|_{t_{\mathrm{odd}}=0}$ и подобным же образом $L_{2n}^{\mathrm{red}}(z) \neq L_{2n}|_{t_{\mathrm{odd}}} = 0$: это расхождение обусловлено лишними двойками в (5.13). На самом деле, L^{red} связаны с генераторами условий Вирасоро в *комплексно*-матричной модели [28] $Z_N^C = \int \mathrm{d}M\exp\left(\sum_{k\geq 0} t_{2k}\,\mathrm{Tr}(MM^{\dagger})^k\right)$, а непрерывный предел $Z_N^C \sim \left(Z_{2N}^{\mathrm{red}}\right)^{1/2}$.

Квадрат (5.16) равен

$$\left(\partial\phi^{\rm red}\right)^2(z)=\frac{1}{\epsilon^4}U^{-1}(\partial\Phi)^2(u)U, \tag{5.21}$$

или

$$\sum_{p\geq 0}L_{2p}^{\rm red}z^{-2p-2}=\frac{1}{\epsilon^4}U^{-1}\left(\sum_{n\geq -1}\tilde{\mathcal{L}}_{2n}u^{-n-2}\right)U. \tag{5.22}$$

Это равенство означает, что

$$\begin{aligned}U^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_{2n}U&=\epsilon^4\sum_{p\geq 0}L_{2p}^{\rm red}\oint_\infty\frac{u^{n+1}\,{\rm d}u}{z^{2p+2}}=\\&=\epsilon^{-2n}\sum_{p=0}^{n+1}(-)^{n+1-p}C_{n+1}^pL_{2p}^{\rm red},\end{aligned} \tag{5.23}$$

поскольку

$$\begin{aligned}\epsilon^4\oint_\infty\frac{u^{n+1}du}{z^{2p+2}}&=\oint_\infty\frac{u^{n+1}\,{\rm d}u}{(1+\epsilon^2u)^{p+1}}=\\&=\frac{1}{\epsilon^{2n}}\frac{\Gamma(-p)}{(n+1-p)!\Gamma(-n-1)}=\\&=\frac{(-)^{n+p+1}}{\epsilon^{2n}}\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}=\\&=\frac{(-)^{n+1-p}}{\epsilon^{2n}}C_{n+1}^p.\end{aligned}$$

Для генераторов $\tilde{\mathcal{L}}_{2n}$ (гармоник тензора энергии-импульса $\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2(u)$ антипериодического поля $\Phi(u)$) имеем явные выражения

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{-2}&=\sum_{k\geq 1}(k+\frac{1}{2})T_{2k+1}\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_{2(k-1)+1}}+\frac{T_1^2}{4},\\ \tilde{\mathcal{L}}_0&=\sum_{k\geq 0}(k+\frac{1}{2})T_{2k+1}\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_{2k+1}},\\ \tilde{\mathcal{L}}_{2n}&=\sum_{k\geq 0}(k+\frac{1}{2})T_{2k+1}\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_{2(k+n)+1}}+\\&+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{T}_{2k+1}\partial\tilde{T}_{2(n-k-1)+1}}-\frac{(-)^n}{16\epsilon^{2n}},\quad n>0.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Все, что мы делали до сих пор, состояло в простой замене переменных и все соотношения были точны для любых ϵ; никакие пределы пока не брались.

Операторы (5.24) весьма сходны с $\mathcal{L}_{2n}$, возникающими в "непрерывных условиях Вирасоро" (1.3), наложенных на статистическую сумму модели X^3 Концевича. Между ними, однако, имеются два отличия.

Во-первых, $\partial/\partial\tilde{T}$ появляется в (5.24) вместо $\partial/\partial T$ в генераторах (1.3). Можно считать, что это различие не имеет существенного значения, так как $\tilde{T}_{2k+1}$ и T_{2k+1} отличаются членами, которые пропорциональны ϵ^2 и, следовательно, исчезают в непрерывном пределе $\epsilon\to 0$. (Заметьте, однако, что это рассуждение пригодно только для каждого конкретного условия $\tilde{\mathcal{L}}_{2n}Z=0$, $n\geq -1$, а не для всего производящего функционала, содержащего суммы всех условий, умноженных на разные степени ϵ.)

Второе расхождение более серьезно и состоит в наличии лишнего члена $(-)^{n+1}/16\epsilon^{2n}$ для всех $n\geq 0$ (это различие имеет место также при $n=0$, потому что $\mathcal{L}_0$ содержит слагаемое $\frac{1}{16}$, отсутствующее в (5.24). Этот лишний член не устраняется простым взятием непрерывного предела: более того, он бесконечно возрастает, вместо того чтобы исчезать при $\epsilon\to 0$. Замечательным образом этот опасный член исчезает при обращении к анализу реальных условий Вирасоро, а не просто к формальным заменам временных переменных. Он полностью сокращает другой потенциальный источник проблем при оде непрерывных тождеств Вирасоро. Переходим теперь к этому наиболее сложному вопросу всего данного раздела 5.3.

Дело в том, что, как упоминалось ранее, редукция дискретного условия Вирасоро $L_{2n}Z_N=0$ содержит определенные ненулевые члены с нечетно-временными производными

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k>0}2kt_{2k}\frac{\partial}{\partial t_{2k+2n}}+2\sum_{k=0}^n\frac{\partial^2}{\partial t_{2k}\partial t_{2n-2k}}\right)Z_N^{\rm red}=\\&=\left(\sum_{k=0}^n\frac{\partial^2}{\partial t_{2k}\partial t_{2n-2k}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t_{2k+1}\partial t_{2n-2k-1}}\right)Z_N^{\rm red}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Мы добавили лишний член со вторыми четно-временными производными к обеим частям тождества, чтобы получить в правой части комбинацию, имеющую шанс исчезать в непрерывном пределе (эта формула еще нуждается в коррекции, см. уравнение (5.29) ниже).

Чтобы найти строгое основание для исключения этих членов в правой части, необходимо обратиться к точным формулам из раздела 4.10 (более простой путь в настоящее время неизвестен). Необходимая нам ключевая формула:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t_k\partial t_l}&=\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{\langle n\mid h^l\mid n\rangle}{\langle n\mid n\rangle}=\\&=\left(\sum_{m>n}-\sum_{m<n}\right)\frac{\langle n\mid h^k\mid m\rangle\langle m\mid h^l\mid n\rangle}{\langle m\mid m\rangle\langle n\mid n\rangle},\end{aligned} \tag{5.26}$$

а ее наиболее важным свойством является R-матричная структура (факт наличия *разности* в правой части). Эта структура предполагает почти полное сокращение членов при суммировании по n для получения $\ln Z_N=\sum_0^{N-1}\phi_n$, оставляя лишь конечную сумму с числом слагаемых, *не зависящим* от N:

$$\frac{\partial^2\ln Z_N}{\partial t_k\partial t_l}=\sum_{0<j<\min(k,l)}\left(\sum_{n=N-j}^{N-1}\frac{\langle n\mid h^k\mid n+j\rangle\langle n+j\mid h^l\mid n\rangle}{\langle n\mid n\rangle\langle n+j\mid n+j\rangle}\right). \tag{5.27}$$

Конечную сумму в правой части можно выразить в терминах $R_n=\exp\left(\phi_n-\phi_{n-1}\right)$, т.е. величин, удовлетворяющих уравнениям иерархии Вольтерры и стремящихся к *константе* (обозначенной как R_0в предшествующем разделе 5.2) в нетривиальном непрерывном пределе. Свойство локальности — конечность суммы в правой части (5.26) — предполагает, что эта правая часть стремится к постоянной величине при $N\to\infty$. Эта константа не сокращается полностью в разности

$$\left(\sum_{k=0}^n\frac{\partial^2}{\partial t_{2k}\partial t_{2n-2k}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t_{2k+1}\partial t_{2n-2k-1}}\right)\ln Z_N^{\rm red}, \tag{5.28}$$

и остаток является именно тем, что необходимо для сокращения опасного члена $(-)^{n+1}/16\epsilon^{2n}$, отличающего

$\tilde{\mathcal{L}}_n$ от $\mathcal{L}_n$. Эти сокращения более подробно описаны в [28], а в оставшейся части раздела 5.3. мы обсудим только разницу между правыми частями (5.25) и (5.28). В (5.28) вторые производные берутся от $\ln Z$, тогда как в (5.25) они берутся от самой Z. Разумеется,

$$\frac{\partial^2 \ln Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2k+1}\partial t_{2n-2k-1}} = \frac{1}{Z_N^{\rm red}}\frac{\partial^2 Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2k+1}\partial t_{2n-2k-1}}\bigg|_{t_{\rm odd}=0},$$

но это *не* верно для четных производных. Поэтому тождество (5.25) еще нуждается в дополнительном преобразовании, чтобы в его правой части содержалось в точности (5.26). В результате в левой стороне равенства возникает дополнительный вклад, и (5.25) превращается в

$$\sum_{k>0} 2kt_{2k}\frac{\partial Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2k+2n}} + \\ +\sum_{k=0}^{n}\left(2\frac{\partial^2 Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2k}\partial t_{2n-2k}} - \frac{1}{Z_N^{\rm red}}\frac{\partial Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2k}}\frac{\partial Z_N^{\rm red}}{\partial t_{2n-2k}}\right) = \\ = 4\sqrt{Z_N^{\rm red}}L_{2n}^{\rm red}\sqrt{Z_N^{\rm red}}. \tag{5.29}$$

На основании всех этих рассуждений заключаем, что двойной скейлинговый непрерывный предел редуцированной одноматричной модели можно описать следующим соотношением:

$$\lim_{\text{d.s. } \epsilon\to 0,\ N\to\infty} \sqrt{Z_N^{\rm red}\{t_{\rm even}\}} = U^{-1} Z_{V=\frac{1}{3}X^3}\{T\}, \tag{5.30}$$

где множитель U определен в (5.20), соотношение между t и T-переменными дается (5.17), а $Z_{V=\frac{1}{3}X^3}\{T\}$ является X^3-моделью Концевича. Такой вывод следует из того, что обе стороны уравнения удовлетворяют одним и тем же непрерывным условиям Вирасоро (1.3).

Все это рассуждение может быть непосредственно обобщено на случай многократного скейлингового предела в конформных матричных моделях, и аналогичное соотношение содержит корни p-степени (см. подробное обсуждение в [39]).

5.4. От гауссовой к X^3-модели Концевича

Теперь оставим эти сложные вопросы и дадим простую иллюстрацию тому, как пойдут дела, если все выражения будут представлены в адекватных терминах. В частности, в качестве альтернативы сложной процедуре с явным преобразованием к переменным Казакова и исследованием пределов тождеств Уорда (петлевых уравнений) воспользуемся эквивалентностью дискретной одноматричной модели и гауссовой модели Концевича, доказанной в разделе 3.8, чтобы получить непрерывный предел простейшей модели Концевича. Эта процедура, предложенная в [36], сводится к стандартной оценке интеграла в пределе больших N методом перевала. Здесь важно, что ОМК нечувствительна к размеру матрицы n в интеграле Концевича; поэтому такой предел, выраженный в понятиях ОМК, не имеет ничего общего с бесконечно большими матрицами.

Мы докажем следующее соотношение:

$$\lim_{d.s.\ N\to\infty} \mathcal{F}_{\{\hat V\}} = \mathcal{F}^2_{\{V\}}, \tag{5.31}$$

где $\hat V(X) = \frac{1}{2}X^2 - N\ln X$ и $V(X) = \frac{1}{3}X^3$.

Рассуждая наивно, видим, что в случае $N\to\infty$, стационарная точка в интеграле Концевича

$$\int {\rm d}X \exp {\rm tr}\left(-\frac{1}{2}X^2 + N\ln X + \Lambda X\right) \tag{5.32}$$

появляется при $X = X_0$, так что

$$X_0 = \frac{N}{X_0} + \Lambda. \tag{5.33}$$

Разложение этого действия по степеням $\tilde X = \gamma^{-1}(X - X_0)$ целиком возникает из логарифмического фрагмента в

$$S - S_0 = \frac{\gamma^2}{2}\tilde X^2 - N\left(\ln\left(1+\frac{\gamma\tilde X}{X_0}\right) - \frac{\tilde X}{X_0}\right) = \\ = \frac{\gamma^2}{2}\left(1+\frac{N}{X_0^2}\right)\tilde X^2 + \sum_{k\ge 3}\frac{N}{k}\left(-\gamma\frac{\tilde X}{X_0}\right)^k. \tag{5.34}$$

В непрерывном пределе γ должно быть подобрано таким образом, чтобы квадратичный член был конечным, т.е.

$$\gamma \sim \left(1+\frac{N}{X_0^2}\right)^{-1/2}.$$

Если Λ остается конечным при $N\to\infty$, то $X_0\sim\sqrt{N}, \gamma\sim 1$ и все члены с $k\ge 3$ в сумме подавлены как $\gamma^k N X_0^{-k} \sim N^{1-k/2}$. Это наивный бесконечный предел. Ясно, однако, что можно потребовать более адекватного поведения Λ: чтобы Λ росло вместе с ростом N, и подобрать его способ стремления к бесконечности, таким образом, чтобы обеспечить также выживание в сумме члена с $k = 3$. С этой целью Λ и, следовательно, X_0 должны изменяться таким образом, чтобы обе величины: $\gamma^2(1 + N/X_0^2)$ и $N\gamma^3/X_0^3$ оставались конечными. Для последнего выражения это требование означает, что $\gamma\sim X_0 N^{-1/3}$, тогда

$$\gamma^2\left(1+\frac{N}{X_0^2}\right) \sim \frac{N+X_0^2}{N^{2/3}}.$$

Это выражение может быть конечным, только если $N + X_0^2 \to 0$ как $N\to\infty$. В свою очередь, это подразумевает, что $X_0 \sim {\rm i}\sqrt{N}$ и $\Lambda\to 2X_0 \sim 2{\rm i}\sqrt{N}$ должно быть чисто мнимым. Можно также проверить, что все члены с $k\ge 3$ в сумме (5.34) стремятся к нулю в этом специфическом пределе. В результате имеем модель только с кубическим и квадратичным членами в действии. Посредством простого сдвига переменных квадратичный член можно заменить линейным, что даст описание теории вблизи стационарной точки в терминах модели X^3 Концевича.

На практике дело обстоит несколько сложнее, потому что приходится учитывать также редукцию к четным временам. Тем не менее, это не добавляет новых проблем. Необходимо лишь, чтобы четные времена $t_{2k} = (1/2k)\,{\rm tr}(1/\Lambda^{2k})$ оставались ненулевыми в то время как нечетные времена

$$t_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}{\rm tr}\frac{1}{\Lambda^{2k+1}} = 0.$$

Это, очевидно, предполагает, что матрица Λ **должна** иметь блочную форму

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

и поэтому переменная матричного интегрирования также естественно представляется в блочной форме

$$X = \begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Y} \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\{\hat{V}=\frac{1}{2}X^2-N\ln X\}} = \int \mathrm{d}\mathcal{X}\,\mathrm{d}\mathcal{Y}\,\mathrm{d}^2\mathcal{Z}, \\ &\det(\mathcal{X}\mathcal{Y} - \bar{\mathcal{Z}}\frac{1}{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathcal{Y})^N \exp\left(-\operatorname{tr}\{|\mathcal{Z}|^2 + \right. \\ &\left. + \mathcal{X}^2/2 + \mathcal{Y}^2/2 - \mathcal{M}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y}\}\right). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Для того чтобы взять предел $N \to \infty$, надо принять некоторое **скейлинговое поведение** $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Более того, наш предшествующий наивный анализ дал некоторое представление о том, как должно выглядеть *тонко настроенное* скейлинговое поведение. Поэтому берем

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} = \gamma(\mathrm{i}\beta I + x), \\ &\mathcal{Y} = \gamma(-\mathrm{i}\beta I + y), \\ &\mathcal{Z} = \gamma\zeta, \\ &\mathcal{M} = \gamma^{-1}(\mathrm{i}\alpha I + m) \end{aligned} \tag{5.38}$$

с некоторыми большими реальными α, β и γ. Будучи выраженным через эти переменные, действие приобретает вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left[|\mathcal{Z}|^2 + \mathcal{X}^2/2 + \mathcal{Y}^2/2 - \mathcal{M}\mathcal{X} + \right. \\ &\left. + \mathcal{M}\mathcal{Y} - N\ln\left(\mathcal{X}\mathcal{Y} - \bar{\mathcal{Z}}\frac{1}{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathcal{Y}\right)\right] = \\ &= \gamma^2 \operatorname{tr}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{i}\beta I + x)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{i}\beta I - y)^2 + |z|^2\right] - \\ &- \operatorname{tr}(\mathrm{i}\alpha I + m)(2\mathrm{i}\beta I + x - y) - \\ &- N \operatorname{tr}\ln\ \beta^2\gamma^2\left[1 - \mathrm{i}\frac{x-y}{\beta} + \frac{xy}{\beta^2} - \right. \\ &\left. - \frac{|\zeta|^2}{\beta^2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)\right] = \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned} &= [2\alpha\beta - \beta^2\gamma^2 - 2N\ \ln\ \beta\gamma] \operatorname{tr}\ I - 2\mathrm{i}\beta\ \operatorname{tr} m + && \text{(A)} \\ &+ \mathrm{i}\left(\beta\gamma^2 - \alpha + \frac{N}{\beta}\right)(\operatorname{tr} x - \operatorname{tr} y) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{N}{\beta^2}\right)(\operatorname{tr} x^2 + \operatorname{tr} y^2) + && \text{(B)} \\ &+ \left(\gamma^2 + \frac{N}{\beta^2}\right)\operatorname{tr}|\zeta|^2 - && \text{(C)} \\ &- \operatorname{tr} mx + \operatorname{tr} my + \frac{\mathrm{i}N}{3\beta^3}\operatorname{tr}(x^3 - y^3) + && \text{(D)} \\ &+ \mathcal{O}(N/\beta^4) + \mathcal{O}\left(|\zeta|^2\frac{N}{\beta^3}\right). && \text{(E)} \end{aligned}$$

Мы хотим подобрать скейлинговое поведение α, β **и** γ таким образом, чтобы выжили только члены в строке (D). Эта цель достигается в несколько приемов.

Строка (A) описывает нормировку функционального интеграла и не содержит x или y. Поэтому в данный момент она нас не интересует.

Подбором α **и** γ устраняем два члена в строке (B)

$$\gamma^2 = \frac{N}{\beta^2}\ ,\ \alpha = \frac{2N}{\beta}\ . \tag{5.40}$$

Как мы скоро увидим, $\gamma^2 = N/\beta^2$ велико в пределе $N \to \infty$. Следовательно, член (C) подразумевает, что флуктуации ζ -поля в значительной степени подавлены, что позволяет пренебречь членами второго типа в строке (E). В более общем плане, это является основанием для расщепления интеграла $Z_{\{\hat{V}\}}$ на произведение двух независимых интегралов, что и приводит к появлению квадрата статистической суммы в пределе $N \to \infty$ **(это** расщепление очевидно, так как единственный смешанный член

$$\ln\det\begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Y} \end{pmatrix}$$

превращается в $\ln\mathcal{X}\mathcal{Y} = \ln\mathcal{X} + \ln\mathcal{Y}$, если только можно пренебречь Z.

Таким образом, остается единственный свободный **параметр** β, который можно подобрать, чтобы

$$\begin{aligned} &\frac{\beta^3}{N} \to \text{const как} \quad N \to \infty \\ &(\text{т.е.}\beta \sim N^{1/3},\ \gamma^2\ \sim N^{1/3},\ \alpha \sim N^{2/3}). \end{aligned} \tag{5.41}$$

При этом члены в последней строке (E) исчезают, а третий член в строке (D) является конечным.

Это служит непосредственным доказательством утверждения (5.31). К сожалению, до сих пор не найдено обобщения этой процедуры на другие дискретные модели, причем главной проблемой является исхождение реализаций ОМК-типа для других (например, конформных) дискретных матричных моделей.

6. Заключение

Мы подошли к концу нашего короткого обзора известных в настоящее время фактов о взаимосвязи между матричными моделями и интегрируемыми иерархиями. За пределами обзора все же осталось несколько тем, которые уже обсуждаются в литературе.

Во-первых, мы не касались связи матричных моделей с теориями топологической (Ландау–Гинзбурга) гравитации (ГЛГ). Это направление интенсивно развивалось в последние месяцы и вскоре его обсуждение уже будет можно включать в обзоры подобные нашему. К числу достаточно полно выясненных проблем относится реализация тождеств Уорда в форме "рекурсионных соотношений" для топологической гравитации [9]. Более или менее понятна также связь между квазиклассическими иерархиями, возникающими в сферической аппроксимации к топологическим теориям [96] и интегрируемой структурой обобщенной модели Концевича [40]. Особое значение имеет раздел этой теории, дающий матрично-модельное описание пространств модулей, ассоциированных с римановыми поверхностями [22, 106]. Однако еще предстоит лучше понять аксиоматическую конструкцию топологических моделей ЛГ (до подключения двумерной гравитации) в терминах вычетов Гротендика и киральных колец [107]; весьма изящное описание последнего случая дано в [108], а в [17] описаны первые серьезные шаги на пути к аналогичной конструкции для первого случая. Заслуживает более пристального внимания и связь с теорией неконформных моделей ЛГ [109]. До сих пор, по существу, отсутствует четкое описание минимальных (p, q)-моделей, связанных с двумерной гравитацией в случае $p \neq 1$. Известно, что в этой ситуации обобщенная модель Концевича описывает всего лишь преобразование дуальности между (p, q) и (q, p) моделями [41], а не сами модели. Этот вопрос касается также теории оператора Каца–Шварца [110]. Работы в этом направлении весьма важны для понимания объединения различных струнных моделей и существенных симметрий будущей струнной теории поля (в частности, общие БРСТ-симметрии и симметрии Баталина–Вилковиского являются очень близкими аналогами полного множества тождеств Уорда, как в общем плане отмечалось в начале раздела 2). Все эти вопросы должны были бы естественно составить еще один раздел данного обзора, однако мы сочли целесообразным несколько помедлить с их обсуждением до более полной разработки соответствующих фрагментов теории.

Во-вторых, мы не затрагивали всех физических интерпретаций матричных моделей, которые включают квантовую гравитацию, теорию Янга-Миллса и многие другие возможные приложения. Они должны стать темами совершенно других обзоров, по отношению к которым данные заметки служат лишь описанием методических подходов к изучению физических явлений.

В-третьих, обширная *terra incognita* в рассматриваемой области науки, которая осталась за пределами обзора, — это теория некартановских матричных моделей, имеющих отношение к физическим теориям в пространстве времени размерности $d \geq 2$. Это действительно *terra incognita*, во всяком случае с точки зрения *полу*строгого анализа, являющегося предметом обсуждения в данном обзоре. Недавний прорыв в этой области стал возможным благодаря появлению модели Казакова–Мигдала [25] (см. также недавний обзор [111] и содержащийся в нем перечень литературы), которая впервые предоставила возможность анализировать обширный класс некартановских моделей точными методами теории локализации (другие наименования этой области, которая фактически перерастает в общую теорию интегрируемости, — теорема Дустермаата–Хекмана или анализ Фурье на групповых многообразиях). Однако исследования в этом направлении делают лишь самые первые шаги, поэтому мы решили не представлять в нашем обзоре первые, еще не систематизированные результаты. Часть из них уже сейчас выглядит достаточно ясно — это "граничная модель" струны $c = 1$ ("d=2 дилатонной гравитации"), которая очень важна с точки зрения общей теории струн. О современном состоянии знаний в этой области можно судить по материалам, представленным в [112], а вопросы отношения этой модели к теории интегрируемости частично рассматриваются в [41, 113].

Наиболее слабыми местами той области, которая *отражена* в данном обзоре, являются теории непрерывных пределов и многокомпонентных иерархий. После соответствующей доработки эти теории могут также оказаться полезными в продвижении по наиболее важному пути, о котором неоднократно упоминалось выше: по пути создания более общей теории интегрируемости. При таком подходе, следующим естественным шагом стало бы обобщение стандартных интегрируемых иерархий, которое бы сняло ограничение алгебрами Каца–Муди уровня $k = 1$ и унитарными АДЕ-представлениями. Возникающая при этом теория, разумеется, имеет самое непосредственное отношение как к теории локализации, так и к некартановским матричным моделям; после ее создания мы придем к новому уровню понимания, еще на шаг приблизимся к цели: построению общего здания теории струн (математической физики), что, возможно, даст неожиданные новые средства для исследования свойств окружающего нас реального физического мира.

Благодарности

В предложенных заметках отражено содержание лекций, прочитанных в Амстердамском университете и в Институте физики высоких энергий Нидерландов (NIKHEF) в феврале–марте 1993 г. Я признателен коллегам из Амстердама за терпение и внимание, особенно Сандеру Байсу за его гостеприимство.

Пользуясь случаем, с удовольствием благодарю моих друзей и соавторов, названных в конце Введения, за уроки, преподанные во время совместной работы над матричными моделями.

Список литературы

1. Морозов А. *УФН* **162**(8), (1992) 84 [*Sov. Phys. — Usp.* **35**, 671 (1992)].
2. Klebanov I., Polyakov A. *Mod.Phys.Lett. A* **6**, 3273(1991).
3. Witten E. *Nucl.Phys. B* **373**, 187 (1992).
4. Marshakov A., Mironov A., Olshanetsky M. et al. *$c = r_G$ Theories of W_G — Gravity: the Set of Observables as a Model of Simply-Laced G.* Preprint ITEP-M2/92, hep-th/9203043, to appear in *Nucl. Phys. B.*
5. Alekseev A., Shatshvili S. *Nucl.Phys.B* **329** 719 (1989).
6. Gerasimov A., Lebedev D. et al. *Int.J.Mod.Phys.* A **6**, 977 (1991). Morozov A. *Mod.Phys.Lett. A* **6**, 1525 (1991).
7. Its A., Izergin A., Korepin V., Slavnov N. et al. HEPTH. Dec. 1992.
8. Witten E. *Comm.Math.Phys.* **117**, 353 (1988); **118**, 411 (1988).
9. Witten E. *Nucl.Phys. B* 340, 281 (1990); *Surveys Diff.Geom.* **1**, 243 (1991).
10. Dijkgraaf R., Witten E. *Nucl.Phys. B* **342**, 486 (1990).
11. Birmingham D., Blau M., Rakowski M., Thompson G. *Phys.Rept.* **209**, 129 (1991).
12. Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A. *Nucl.Phys. B* **241**, 333 (1984).
13. Книжник В. *УФН* **159** (3), 401 (1989) [*Sov. Phys.Usp.* **32**, 945 (1989)].
14. Переломов А. и др. (1990) *Комплексная геометрия и теория струн* (Москва, ВИНИТИ) [English transl.: Springer-Verlag, 1991].
15. Фейгин Б., Фукс Д. *Функц. анализ и его прилож.* **16** (2), 247 (1982); **17**(3), 91 (1983). Dotsenko V., Fateev V. *Nucl.Phys. B* **240**, 312 (1984). Feigin B., Frenkel E. *Comm.Math.Phys.* **128**, 161 (1990).
16. Gerasimov A., Marshakov A., Olshanetsky M., Shatashvili S. et al. *Int.J.Mod.Phys.* A **5**, 2495 (1990).
17. Losev A. *Descendants Constructed from Matter Fields and K. Saito Higher Residue Pairing in Topological L-G Theories Coupled to*

Topological Gravity. Preprint TPI-MINN, May 1992.
Losev A., Polyubin I. *On Connection between Topological Landau-Ginzburg Gravity and Integrable Systems.* Preprint ITEP/UU-ITP. Dec. 1992.

18. Migdal A. *Phys. Rept.* **102**, 199 (1983).
19. Kazakov V. *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2125 (1989).
20. Brezin E., Kazakov V. *Phys. Lett. B* **236**, 144 (1990). Douglas M., Shenker S. *Nucl. Phys. B* **335**, 635 (1990. Gross D., Migdal A. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 127 (1990).
21. Shabat G., Voevodski V. *Sov. Math.* — Dokl. **39**, 38 (1989). Levin A. et al. *Phys. Lett. B* **243**, 207 (1990). Smit D.-J. *Comm. Math. Phys.* **143**, 253 (1992).
22. Концевич М. *Функц. анализ и его прилож.* **25** (2), 50 (1991).
23. Witten E., in *Proc. ofthe NYC Conference.* June 1991.
24. Marshakov A., Mironov A. et al. *Phys. Lett. B* **274**, 280 (1992).
25. Kazakov V., Migdal A. *Induced QCD at Large N.* Preprint PUPT-1322. 1992.
26. Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A, Orlov A et al. *Nucl. Phys. B* **357**, 565 (1991).
27. Mironov A. et al. Phys. Lett. *B* **252 B**, 47 (1990). Ambjorn J., Jurkiewicz, Makeenko Yu. *Phys. Lett. B* **251**, 517 (1990). Itoyama H., Matsuo Y. *Phys. Lett. B* **255**, 202 (1991).
28. Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A. et al. *Nucl. Phys. B* **356**, 574 (1991).
29. Fukuma M., Kawai H., Nakayama R. *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 1385 (1991). Dijkgraat R., Verlinde E., Nerlinde H. *Nucl. Phys. B* **348**, 565 (1991).
30. Kharchev S., Marskov A., Mironov A., Zabrodin A. et al. *Phys. Lett. B* **275**, 311 (1992); *Nucl. Phys. B* **380**, 181 (1992).
31. Dijkgraaf R. *Intersection Theory, Integrable Hierarchies and Topological Gield Theory.* Preprint IASSNA-HEP-91/91, hep-th 9201003.
32. Kontsevich M. *Comm. Math. Phys.* **147** (1), 1 (1992).
33. Adler M., van Moerbeke P. *Comm. Math. Phys.* **147** (1), 25 (1992). ItzyksonC., Zuber J.-B. *Combinatorics ofthe Modular Group II. The Kontsevich Integrals.* Preprint SPhT/92-001, to appear in *Int.J. Mod. Phys.A.*
34. Crnkovic C., Ginsparg P., Moore G. *Phys. Lett. B* **237**, 196 (1990). Gross D., Migdal A. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 717 (1990). Brezin E., Douglas M., Kazakov V., Shenker S. *Phys. Lett. B* **237**, 43 (1990).
35. Chekhov L., Makeenko Yu. *Phys. Lett. B* **278**, 271 (1992).
36. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. *Generalized Kontsevich Model versus Toda Hierarchy and Discrete Matrix Models.* Preprint ITEP-M3/92, hep-th/9203043, to appear in *Nucl. Phys. B.*
37. Douglas M. *Phys. Lett. B* **238**, 176 (1990).
38. Marshakov A., Mironov A. et al. *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 1345 (1992).
39. Marshakov A., Mironov A. et al. *Phys. Lett. B* **265**, 99 (1991). Mironov A., Pakuliak S. *Double-Scaling Limit in the Matrix Models ofa New Type.* Preprint FIAN/TD/05-92. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Pakuliak S. et al. *Conformal Matrix Models as an Alternative to Conventional Multimatrix Models.* Preprint ITEP-M4/92, hep-th/9208044, to appear in *Nucl. Phys. B.*
40. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. *Landau-Ginzburg Topological Theories in the Framework of GRM and Equivalent Hierarchies.* Preprint ITEP-M5/92, hep-th/9208046.
41. Kharchev S., Marshakov A. *Topological versus Non-Topological Theories.* Preprint FIAN/TD-15/92.
42. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. *Transformation Groups for Solution Eqiations.* RIMS-394, February 1982.
43. Witten E. *Two-Dimensional Gauge Theories Revisited.* Preprint IASSNS-HEP 92/15.
44. Niemi A., Tirkkonen O. *On Exact Evaluation of Path Integrals.* Preprint UU-ITP, 3/93.
45. Gerasimov A., Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A., Orlov A. et al. *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 3079 (1991).
46. Brezin E., Itzykson C., Parisi G., Zuber J.-B. *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).
47. Frenkel I., Kac V. *Invent Math.* **62**, 23 (1980). Segal G. *Comm. Math. Phys.* **80**, 301 (1981).
48. Bershadsky M., Ooguri H. *Comm. Math. Phys.* **126**, 49 (1989).
49. Bershadsky M. *Comm. Math'. Phys.* **139**, 71 (1991).
50. Bais F.A., Tjin T., van Driel P. *Nucl. Phys. B* **357**, 632 (1991).
51. Feher L., O'Raifeartaigh L., Ruelle O., Tsutsui I., Wipf A. *On the General Structure of Hamiltonian Reductions of WZW Theory.* Preprint DIAS-STP-91, UdeM-LPN-TH-71/91.
52. Замолодчиков А. *Теор. и мат. физика.* **63**, 1205 (1985). Lukianov S., Fateev V. *Int. J. Mod. Phys. A* **3**, 507 (1988).
53. Alvarez-Gaume L. et al., Preprint CERN.1991.
54. Gross D., Newman M. *Phys. Lett. B* **266**, 291 (1991).
55. Mikhailov A., Preprint ITEP-UU. March 1993.
56. Chekhov L., Makeenko Yu. *Phys. Lett. B* **278**, 271 (1992).
57. Gava E., Narain K. *Phys. Lett. B* **263**, 213 (1991)
58. Shifman M., Turbiner A. et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 2953 (1990).
59. Migdal A. Exact Solution of Induced Lattice Gauge Theory at Large N Preprint PUPT-1323. June, 1992.
60. Itzykson C., Zuber J.B. *J. Math. Phys.* **21**, 411 (1980).
61. Harish-Chandra. *Am. J. Math.* **79**, 87 (1957)
62. Семенов-Тян-Шанский М. *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **40**, 562 (1976).
63. Alekseev A., Faddeev L., Shatashvili S. *J. Geom. and Phys.* **3** (1989).
64. Duistermaat J., Heckman G. *Invent. Math.* **69**, 259 (1982).
65. Blau M., Keski-Vakkuri E., Niemi A. *Phys. Lett. B* **246**, 92 (1990). Keski-Vakkuri E., Niemi A., Semenoff G., Tirkkonen O. *Phys. Rev. D* **44**, 3899 (1991). Hietamaki A., Niemi A., Palo K. et al. *Phys. Lett. B* **263**, 417 (1991). Niemi A., Palo K. et al. *Phys. Lett. B* **271**, 365 (1991); *Nucl. Phys. B* **377**, 295 (1992).
66. Kogan I., Semenoff G., Weiss N. et al. *Area Law and Continuum Limit in "Induced QCD".* Preprint UBCTP 92-26/ITEP M6/92, hep-th/9208012, to appear in *Nucl. Phys. B.*
67. Morozov A. *Pair Correlator in the Itzykson-Zuber Integral,* Preprint ITEP-M10/92, September 1992; hep-th/9209074, to appear in *Mod. Phys. Lett. A.*
68. Shatashvili S. *Correlation Functions in the Itzykson-Zuber Model.* Preprint IASSNS-HEP-92/61, September 1992.
69. Vinet L. et al. *q-Hypergeometric Functions in the Free Field Formalism.* Preprint ITEP-M9/92, August 1992.
70. Miwa T. *Proc. Japan. Acad.* **58**, 9 (1982). Saito S. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1798 (1987); *Phys. Rev. D* **36**, 1819 (1987).
71. Caselle M., D'Adda A., Panzer S. *Exact Solution of D = 1 Kazakov-Migdal Induced Gauge Theory,* Preprint DFTT-38/92, July, 1992.
72. Kogan I., Semenoff G., Weiss N. et al. *Continuum Limits of "Induced QCD": Lessons ofthe Gaussian Model at d= 1 and Beyond.* Preprint ITEP-M7/92, UBCTP 92-27, August 1992, to appear in *Int. J. Mod. Phys. A.*
73. Olshanetsky M., Perelomov A. *Phys. Rept.* **71** (5) (1981).
74. Freund P., Zabrodin A. *Phys. Lett. B* **284**, 283 (1992); *Comm. Math. Phys.* **147**, 277 (1992). Zabrodin A. *Mod. Phys. Lett.* A **7**, 441 (1992).
75. Freund P., Zabrodin A. *Excitation Scattering in Integrable Models and Hall-Littlewood-Kerov Polinomials,* Preprint hep-th/-9208063.
76. Turbiner A. *Функц. анализ и его прилож.* **22**, 33 (1988); *Comm. Math. Phys.* **118**, 467 (1988). Shifman M., Turbiner A. *Comm. Math. Phys.* **120**, 347 (1989).
77. Perelomov A., Rosly A., Shifman M., Turbiner A. et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 803 (1990).
78. Halpern M., Kiritsis E. *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 1973 (1989). Halpern M., Kiritsis E., Obers N., Porrati M., Yamron J. *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 2275 (1990).
79. Niemi A., Pasanen P. *Phys. Lett. B* **253**, 349 (1991).
80. Polychronakos A. *Nucl. Phys. B* **324**, 597 (1989). Leinaas J., Myrheim J. *Phys. Rev. B* **37**, 9286 (1988). Brink K., Hansson T., Konstein S., Vasiliev M. *The Calogeno Model-Anyonic Representation, Fermionic Extension and Supersymmetry.* Preprint USITP-92-14/Goteborg ITP-92-53, January 1993.
81. Gorsky A., Nekrasov N. *Hamiltonian Systems of Calogero Type and Two-Dimensional Yang-Mills Theory.* Preprint ITEP-20/93, UUITP-6/93. March 1993.
82. Sato M. *RIMS Kokyuroku* **439**, 30 (1981). Sato M., Sato Ya. *Lect. Not. Num. and Appl. Anal.* **5**, 259 (1982). Segal G., Wilson G. *Publ. I. H. E. S.* **61**, 1 (1985).
83. Kac V. (1985) *Infinite Dimensional Lie Algebras.* (Cambridge, University Press).
84. Orlov A., Shulman E. *Lett. Math. Phys.* **12**, 171 (1986). Grinevich P., Orlov A. (1989) in *Problems of Modern Quantum Field Theory,*

Proceedings of Kiev Conference (Eds. Belavin A. et al.) (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag).
85. De Voos K. *Nucl. Phys. B* **375**, 478 (1992).
86. Hirota R. Direct Methods in Solit on Theory, in *Topics in Current Physics* **17,** 157 (1980) (Eds. Bullough R., Caudrey P.) (New York, Springer).
87. Friedan D., Shenker S. *Phys. Lett. B* **175**, 287 (1986). Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H. *Mod. Phys. Lett. A* **2**, 119 (1987). Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C. *Phys. Lett. B* **190**, 55 (1987). Witten E. *Comm. Math. Phys.* **113**, 529 (1988). Morozov A. *Phys. Lett. B* **196**, 325 (1987).
88. Jimbo M., Miwa T., Sato M. *Holonomic Quantum Fields,* I-V: Published in RIMS, Kyoto Univ. **14**, 223 (1978); **15**, 201, 577, 871, 1531 (1979).
89. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Orlov A., Zabrodin A. *Nucl. Phys. B* **366**, 569 (1991).
90. Ueno K., Takasaki K. *Adv. Studies in Pure Math.* **4**, 1 (1984).
91. Bowick M., Shewitz D. et al. *Nucl. Phys. B* **354**, 496 (1991).
92. Hirota R., Ohta Y., Satsuma J. *J. Phys. Soc. Japan* **57**, 1901 (1988).
93. Kac V., van de Leur J. *The n-Component KP Hierarchy and Representation Theory.* Preprint, January, 1993.
94. Moore G. *Comm. Math. Phys.* **133**, 261 (1990).
95. Witten E. *The N Matrix Model and Gauged WZW models,* Preprint IAS-HEP-91/26, to appear in *Nucl. Phys. B.*
96. Krichever I. *Comm. Math. Phys.* **143**, 415 (1992). Dubrovin B. *Nucl. Phys. B* **379**, 627 (1992).
97. Takasaki K., Takebe K. *SDiff(2) KP Hierarchy.* Preprint RIMS-814. October, 1991.
98. Makeenko Yu., Semenoff G. *Int. J. Mod. Phys. A* **6,** 3455 (1991). Gross D., Newman M. *Phys. Lett. B* **266**, 291 (1991).
99. Di Francesco P., Itzykson C., Zuber J.-B. *Comm. Math. Phys.* **151**, 193 (1993).
100. Takebe T. *From General Zakharov-Shabat Equations to the KP and the Toda-Lattice Hierarchies,* Preprint RIMS-779. 1991.
101. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. *Transformation Groups for Solit on Equations* RIMS-394. February 1982.
102. Kharchev S. et al., Preprint ITEP-M12/92.
103. Novikov S., Manakov S., Pitaevski L., Zakharov V. (1984) *Theory of Solitons* (New York, Plenum Press).
104. Fairlie D., Govaerts J. et al. *Nucl. Phys. B* **373**, 214 (1992). Fairlie D., Govaerts J. *Phys. Lett. B* **281**, 49 (1992); *J. Math. Phys.* **33**, 3542 (1992).
105. Makeenko Yu., Migdal A. *Phys. Lett. B* **88,** 135 (1979).
106. Penner R. *Comm. Math. Phys.* **113**, 299 (1987); *J. Diff. Geom.* **27**, 35 (1988).
107. Martinec E. *Phys. Lett. B* **217**, 431 (1989); *Criticalities, Catastrophe and Compactigications,* in *V. Knizhnik Memorial Volume,* 1980. Vafa C., Warner N. *Phys. Lett. B* **218**, 51 (1989). Greene B., Vafa C., Warner N. *Nucl. Phys. B* **324**, 371 (1989). Lerche W., Vafa C., Warner N. *Nucl. Phys. B* **324**, 427 (1989). Vafa C. *Mod. Phys. Lett.* A **6**, 337 (1990). Dijkraaf R., Verlinde E., Verlinde H. *Nucl. Phys. B* **352**, 59 (1991). Li K. *Nucl. Phys. B* **354**, 711 (1991).
108. Elitzur S., Forge A., Rabinovici E. *Nucl. Phys. B* **388**, 131 (1992).
109. Cecotti S., Vafa C. *Nucl. Phys. B* **367**, 359 (1991).
110. Kac V., Schwarz A. *Phys. Lett. B* **257**, 329 (1991).
111. Semenoff G., Weiss N. *Symmetry and Observables in Induced QCD,* Preprint UBC, March, 1993, to appear in *Proceedings of Rakhov School on Mathematical Physics, String Theory and Quantum Gravity.* Rakhov, Ukraine, October 1992.
112. Klebanov I. (1991) in *Proc. of 1991 Trieste Spring School on Strings and Quantum Gravity* (Eds. J. Harvey et al.). (Singapore, World Scientific). Verlinde E., Verlinde H. *A Unitary S-Matrix for 2d Black Hole Formation and Evaporation,* Preprint PUPT-1380, IASSNS-HEP-93/8. February 1993.
113. Dijkgraaf R., Moore G., Plesser R. *The Partition Function of 2D String Theory,* Preprint IASSNS-HEP-92/48, YCTP-P22-92, hep-th/9208031, to appear in *Nucl. Phys. B.*