

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**СЖАТЫЙ СВЕТ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ***В.П. Быков*

(Институт общей физики РАН, Москва)

(Статья поступила 2.06.92 г., после доработки 28.05.93 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Квантовое описание движения макроскопических тел (90).
 2. Механический осциллятор (90).
 3. Макроскопическое тело в гравитационном поле (91).
 4. Сжатый свет и его наблюдение (92).
 5. Макроскопические тела в распределенных состояниях и невозмущающее измерение их положения (94).
 6. Заключение (96).
- Список литературы (99).

В данной работе мы хотим обратить внимание на те следствия для квантовомеханического описания движения макроскопических тел, которые вытекают из факта наблюдения сжатого света. Это наблюдение явилось, несомненно, одним из важнейших достижений оптики за последние годы, которое будет иметь многочисленные научные продолжения и практические применения. Однако, как нам представляется, наиболее важным следствием наблюдения сжатого света является изменение квантовомеханического описания движения макроскопических тел, требуемое фактом такого наблюдения. По существу, при наблюдении сжатого света произошли радикальные изменения в измерительной процедуре параметров макроскопических квантовых состояний, причем произошли незаметно.

В разделе 1 дается простой пример квантовомеханического описания прямолинейного и равномерного движения макроскопического тела и вводится представление о сосредоточенных и распределенных волновых пакетах таких тел. В разделах 2 и 3 на примерах механического осциллятора и тела, движущегося в гравитационном поле, показывается, что сосредоточенные и распределенные волновые пакеты возникают всегда при переходе к макроскопическим телам. Обращается внимание на то, что распределенные волновые пакеты требуют статистической или ансамблевой ин-

терпретации, в то время как для сосредоточенных волновых пакетов она не обязательна.

В разделе 4 обсуждается сжатый свет. Обращается внимание на нестандартность измерительной процедуры сжатого света и показывается, что его наблюдение есть наблюдение единичного объекта — поля выделенной моды оптического резонатора параметрического генератора, находящегося, в частности, в распределенном состоянии (широкий волновой пакет). Отмечается, что из тождественности описания механического и электромагнитного осцилляторов следует принципиальная возможность наблюдения отдельного механического объекта в распределенном квантовомеханическом состоянии. Поскольку с теоретической точки зрения сосредоточенные и распределенные волновые пакеты равноправны, то ставится вопрос, почему в окружающем нас мире макроскопические тела в распределенном квантовомеханическом состоянии не наблюдаются. В разделе 5 исследуется отражение электромагнитного импульса о макроскопического тела (зеркала), находящегося в распределенном состоянии. Это исследование показывает, что дисперсия квантовомеханического состояния отдельного макроскопического тела может быть невозмущающим образом определена теми же средствами, которые развиты для наблюдения сжатого света.

Таким образом, показано, что наблюдение сжатого света указывает на возможность наблюдения отдельных макроскопических тел в распределенных квантовомеханических состояниях и требует объяснения отсутствия таких тел в окружающем нас мире.

В заключении обращается внимание на существенное расхождение в квантовомеханическом описании макроскопических объектов в оптике и механике и обсуждается возможный способ преодоления этого расхождения.

1. Квантовое описание движения макроскопических тел. Итак, обратимся к квантовомеханическому описанию движения макроскопических тел. Под макроскопическими телами будем иметь в виду тела значительной массы (например, 1 г; далее возможная оценка этой величины будет уточнена). Таким образом, рассматривается квантовомеханическое описание движения тел, которые, как известно, подчиняются законам классической механики.

Рассмотрим сначала простой пример — равномерное и прямолинейное движение макроскопического тела массы m в свободном пространстве со скоростью v . Оно описывается волновым пакетом [1] вида

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{C}{(1 + it\tau^{-1})^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{r}^2 - 2i\mathbf{v}\mathbf{r}t + i\mathbf{v}^2\tau t}{2a^2(1 + it\tau^{-1})}\right] \quad (1.1)$$

с характерным размером a , связанным с временем расплывания пакета τ соотношением

$$\tau = ma^2/\hbar. \quad (1.2)$$

Для макроскопического тела ($m = 1$ г) при характерном размере пакета порядка размера атома ($a = 10^{-8}$ см) пакет (1.1) описывает хорошо определенную прямолинейную траекторию на большом временном интервале $\tau = 10^{11}$ с ($= 3 \cdot 10^3$ лет).

Однако квантовая механика не запрещает больших значений параметра a , сравнимых, скажем, с оптической длиной волны или даже с геометрическими размерами макроскопического тела при любой его массе. Узкие волновые пакеты, много меньшие геометрических размеров тела или меньшие даже характерной оптической длины волны (10^{-6} м), естественно приписать макроскопическим классическим объектам, поскольку в этом случае существованием пакета можно вообще пренебречь, приняв его за точку. Но чему соответствуют широкие волновые пакеты? Никаких макроскопических классических объектов с большой неопределенностью положения в окружающем нас мире пока не замечено. Если бы такие объекты существовали, то не было бы такой науки, как классическая механика с ее строго определенными траекториями. Это обстоятельство, характерное для квантовой механики, было давно замечено и отразилось на принятой интерпретации распределенных решений уравнения Шрёдингера. Эти решения получили ансамблевую, т.е. статистическую, интерпретацию. Было принято, что при измерениях координаты конкретного тела, описывае-

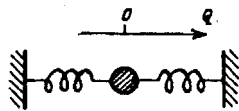


Рис. 1. Механический осциллятор

мого, например, пакетом (1.1), может быть получено любое ее значение, но, если такие измерения произвести над многими телами в одинаково приготовленных состояниях, распределение вероятности получения в эксперименте того или иного значения координаты описывается квадратом модуля волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Так, например, в учебнике А. Мессиа [2] при обсуждении распределенных решений уравнения Шрёдингера говорится: "В классическом приближении функция Ψ описывает "жидкость" из классических невзаимодействующих частиц массы m (статистический ансамбль)...". Аналогичная трактовка распределенного решения дается в учебнике Л. Шиффа [1].

В данной методической заметке обращается внимание на некоторый разрыв в квантовомеханическом описании макроскопических объектов в оптике и механике, выявляющийся при анализе экспериментов со сжатым светом.

2. Механический осциллятор. Напомним основные элементы квантового описания механического осциллятора (рис. 1). Эта простейшая система описывается гамильтонианом [3]

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}\varkappa Q^2, \quad (2.1)$$

где P, Q — канонически сопряженные переменные — операторы импульса и координаты, подчиняющиеся перестановочному соотношению

$$QP - PQ = i\hbar, \quad (2.2)$$

m — масса и \varkappa — жесткость возвращающей силы осциллятора. В переменных $p = Pm^{-1/2}$, $q = Qm^{1/2}$ гамильтониан имеет более общепринятый вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (\omega^2 = \frac{\varkappa}{m}). \quad (2.3)$$

Важную роль играют операторы рождения a^+ и уничтожения a возбуждений осциллятора:

$$a^+ = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}(\omega q - ip),$$

$$a = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}(\omega q + ip). \quad (2.4)$$

Когерентное состояние осциллятора $|z\rangle$ (рис. 2, а) представляет собой собственное состояние оператора уничтожения $a|z\rangle = z|z\rangle$; при $z = z_0 e^{-i\omega t}$ оно является решением временного уравнения Шрёдингера и в координатном представлении описывается волновой функцией

$$\Psi_{\text{coh}}(q) = A \exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\left[q - \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2} z\right]^2\right\}. \quad (2.5)$$

Координатное распределение для этого состояния показано на рис. 2, а; с течением времени оно гармонически перемещается вправо-влево с частотой ω .

Поскольку ширина этого распределения, равная

$$\Delta Q_{\text{coh}} = (\hbar/2m\omega)^{1/2},$$

мала по сравнению с амплитудой колебаний при $|z| \gg 1$ ($Q \approx 1 \text{ см}$, $\Delta Q/Q \approx 10^{-14}$), то это состояние является типичным сосредоточенным состоянием и естественным образом описывает классические колебания механического осциллятора.

Однако существуют также стационарные состояния осциллятора $|n\rangle$ (рис. 2, б; n — целое), представляющие собой собственные состояния оператора числа частиц (числа возбуждений осциллятора) $a^+ a |n\rangle = n |n\rangle$, где n — целое число. Состояние

$$|n(t)\rangle = e^{-in\omega t} |n\rangle$$

также является решением временного уравнения Шрёдингера и в координатном представлении описывается волновой функцией

$$\Psi_{\text{stat}}(q) = A H_n((\omega/\hbar)^{1/2} q) \exp(-\omega q^2/2\hbar), \quad (2.6)$$

где H_n — полином Эрмита n -й степени. Неопределенность координаты в этом состоянии при достаточно большой энергии $E = n\hbar\omega$ ($n \gg 1$) велика $\Delta Q \approx \omega^{-1}(E/m)^{1/2}$, порядка амплитуды колебаний в когерентном состоянии при той же энергии ($n = |z|^2$).

Таким образом, стационарные состояния — это типичные распределенные состояния. Они макроскопичны, поскольку могут обладать большой энергией ($n \gg 1$) и соответствовать осциллятору большой массы m . В классике нет движений отдельных объектов, соответствующих таким состояниям и поэтому они требуют ансамблевой, статистической интерпретации, о которой говорилось выше.

3. Макроскопическое тело в гравитационном поле. Движение материальной точки массы m в гравитационном поле $V(\mathbf{r})$, медленно меняющемся в пространстве, можно описать гауссовым волновым пакетом [4]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = C(t) \exp[-(\vec{\rho}, F\vec{\rho}) + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0(t)\vec{\rho} + E(t))], \quad (3.1)$$

где $\vec{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, и величины $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{p}_0(t)$ подчиняются классическим гамильтоновым уравнениям

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{p}_0/m, \quad \dot{\mathbf{p}}_0 = -\text{grad}_{\mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0); \quad (3.2)$$

величина $F(t)$ представляет собой симметричную матрицу размерности 3×3 с комплексными элементами, зависящими от времени, причем вещественная часть матрицы F определяет геометрические размеры волнового пакета.

Этот волновой пакет удовлетворяет уравнению Шрёдингера в случае, если в разложении потенци-

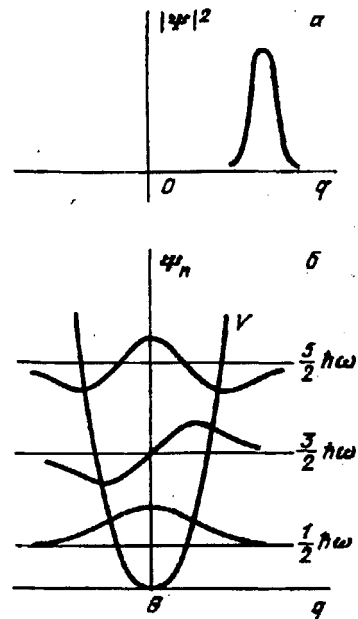


Рис. 2. Квантовомеханические состояния осциллятора. а — Когерентное состояние. б — Стационарные состояния

альной энергии вблизи точки \mathbf{r}_0

$$U(\mathbf{r}_0 + \vec{\rho}) = U(\mathbf{r}_0) + (\vec{\rho}, \text{grad}_{\mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2}(\vec{\rho}, U'' \vec{\rho}) + \dots \quad (3.3)$$

можно пренебречь членами третьей и более степеней по ρ , обозначенными многоточием. Матрица вторых производных U'' размерности 3×3 симметрична; ее вещественные элементы

$$U''_{\alpha\beta}(t) = \left. \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right|_{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)} \quad (3.4)$$

через вектор $\mathbf{r}_0(t)$ зависят от времени.

Пока размеры волнового пакета столь малы, что в потенциальной энергии несущественны члены третьей и более степеней, он движется по классической траектории (3.2). При этом матрица $F(t)$, определяющая, в частности, размеры пакета, должна удовлетворять матричному уравнению

$$i\hbar \dot{F} = \frac{2\hbar^2}{m} F^2 - \frac{1}{2} U'', \quad (3.5)$$

напоминающему уравнение Рикатти, а величины $C(t)$ и $E(t)$ равны

$$C(t) = C_0 \exp \left[-\frac{i\hbar}{m} \int_0^t dt (F_{11} + F_{22} + F_{33}) \right], \quad (3.6)$$

$$E(t) = \int_0^t dt \left(\frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} - U(\mathbf{r}_0) \right).$$

Траектория движения тела в гравитационном поле (3.2) не зависит от массы m , поскольку \mathbf{p}_0 и $U(\mathbf{r}_0)$ пропорциональны m . Выделяя явно пропорциональ-

ность $U(\mathbf{r}_0)$ массе m , из (3.5) получаем уравнение

$$i|\dot{\Phi}| = 2\Phi^2 - \frac{1}{2}V \quad (\Phi = F\hbar m^{-1}, \quad mV = U''), \quad (3.7)$$

в котором все величины не зависят от массы m . Отсюда видно, что с ростом массы m (или с уменьшением \hbar) растет и F , и это означает, что размеры волнового пакета уменьшаются, и он все более сосредотачивается вблизи классической траектории (3.2). Следовательно, волновой пакет (3.1) естественным образом в рамках квантовой механики описывает движение макроскопического тела.

Однако это не единственный способ перехода к описанию классического движения макроскопических тел в рамках квантовой механики. Другой способ связан с широко распространенным методом эйконала [2], или, иными словами, с уравнением Гамильтона—Якоби. При достаточно больших m и, следовательно, при малых длинах волн де Бройля $\lambda = \hbar/(2mE)^{1/2}$ (E — энергия состояния) стационарное решение уравнения Шрёдингера можно искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp [i(S(\mathbf{r})\lambda^{-1} - Et\hbar^{-1})], \quad (3.8)$$

где $S(\mathbf{r})$ — мало меняющаяся на длинах порядка λ функция координат, называемая эйконалом и подчиняющаяся уравнению

$$(\text{grad } S(\mathbf{r}))^2 = 1 - (U/E). \quad (3.9)$$

Функция $A(\mathbf{r})$ также мало меняется на длинах порядка λ и подчиняется уравнению

$$(\text{grad } S(\mathbf{r}) \text{ grad } A(\mathbf{r})) + \frac{1}{2}A\Delta S = 0. \quad (3.10)$$

Нетрудно показать, что для гравитационного поля U и E пропорциональны m , и тогда S не зависит от m . Линии, ортогональные к волновым поверхностям $S(\mathbf{r}) = \text{const}$, представляют собой классические траектории материальной точки. Функция эйконала $S(\mathbf{r})$ является широкой как в продольном, так и в поперечном (по отношению к траекториям) направлениях. В поперечном направлении она может быть ограничена лишь возможными каустическими по-

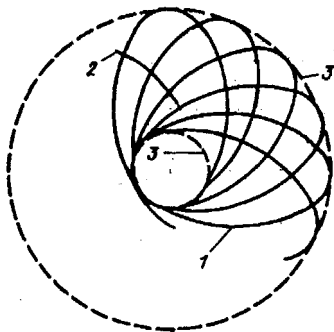


Рис. 3. Система орбит в гравитационном поле, образующая эйкональное решение уравнения Шрёдингера. 1 — траектория, 2 — волновой фронт, 3 — каустические линии

верхностями. На рис. 3 схематически показано эйкональное решение, описывающее движение макроскопического тела в центрально-симметричном гравитационном (ньютоновском) поле. Эйкональная функция занимает область между двумя концентрическими окружностями, и на ширину этой кольцевой области нет, по существу, никаких ограничений. Если подобное распределенное решение рассматривать как относящееся к одному конкретному телу, то в классической механике соответствующих ему движений не существует.

Таким образом, при квантовомеханическом описании движения макроскопического тела в гравитационном поле, как и в предыдущих рассмотренных случаях, возможны как сосредоточенные решения, естественно переходящие в решения классической механики, так и распределенные решения, которые для соответствия с классикой требуют статистической, ансамблевой интерпретации.

В заключение раздела отметим, что переход к классике в квантовой механике не столь автоматичен как, скажем, в теории относительности. Там достаточно отношению скорости тела к скорости света сделаться малым, чтобы из релятивистской механики возникла механика классическая. В квантовой механике только часть состояний (а именно, сосредоточенные волновые пакеты) переходит в классические движения при увеличении массы тела. Другая же часть состояний — распределенные решения — переходит в классические движения только в статистическом, ансамблевом смысле.

4. Сжатый свет и его наблюдение. Обратимся к рассмотрению сжатого света. Подобно лазерному, сжатый свет генерируется в оптическом резонаторе. Поле резонатора представляет собой суперпозицию полей отдельных мод, или резонансов, причем, как показывает практика, в оптическом резонаторе возможно возбуждение отдельной моды. Поскольку пространственное распределение поля моды определено граничными условиями, то моду можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, координатой которой является электрическое поле моды в некоторой избранной точке резонатора. Тогда квантовая теория поля моды совпадает с теорией механического осциллятора — это поле описывается тем же гамильтонианом (2.3), в котором координатой q является электрическое поле в избранной точке резонатора. В частности, возможны разные состояния поля — когерентное и стационарное, — упомянутые выше.

Однако эти два вида состояний не являются единственно возможными как в механическом, так и в

электромагнитном осцилляторе. Сжатые состояния объединяют в себе свойства сосредоточенных и распределенных состояний [5, 6]. Они представляют собой собственные состояния оператора $\mu a + \nu a^\dagger$

$$(\mu a + \nu a^\dagger) | \xi \rangle = \xi | \xi \rangle \quad (|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1), \quad (4.1)$$

где μ, ν, ξ — комплексные параметры, причем первые два из них удовлетворяют соотношению $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. При зависимости $\mu = \mu_0 e^{i\omega t}$, $\nu = \nu_0 e^{-i\omega t}$ они являются решениями временного уравнения Шрёдингера. Среди сжатых состояний наиболее представительно состояние сжатого вакуума, соответствующее $\xi = 0$. В координатном представлении оно описывается гауссовым волновым пакетом

$$\Psi_\xi(q) = A \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar} \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu}\right). \quad (4.2)$$

Дисперсия сжатого состояния

$$D^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \left[|\mu|^2 + |\nu|^2 - 2|\mu| \cdot |\nu| \cos(\Psi_0 + 2\omega t) \right] \quad (4.3)$$

изменяется с удвоенной частотой осциллятора и может быть как меньше дисперсии когерентного состояния:

$$D_{\min}^2 = \frac{\hbar}{2\omega} (|\mu| - |\nu|)^2 < D_{\text{coh}}^2 = \frac{\hbar}{2\omega},$$

так и больше ее

$$D_{\max}^2 = \frac{\hbar}{2\omega} (|\mu| + |\nu|)^2 > D_{\text{coh}}^2 = \frac{\hbar}{2\omega}$$

(рис. 4). Моменты, когда дисперсия мала, послужили основанием для названия — сжатые состояния. Сжатые состояния характеризуют коэффициентом сжатия

$$K = D_{\text{coh}}/D_{\min} = (D_{\max}/D_{\min})^{1/2} = |\mu| + |\nu| = (|\mu| - |\nu|)^{-1}. \quad (4.4)$$

На коэффициент сжатия имеются энергетические ограничения; при числе фотонов в осцилляторе, равном N , максимально возможный коэффициент сжатия равен

$$K_{\max} = (N + 1)^{1/2} + N^{1/2}. \quad (4.5)$$

Основные свойства сжатых состояний могут быть качественно поняты из рис. 4, на котором изображены колебания координаты механического осциллятора или поля электромагнитного осциллятора в зависимости от времени. На рис. 4,а колебания соответствуют когерентному состоянию, причем постоянная малая дисперсия состояния передана толщиной линии синусоиды. При обычной лазерной интенсивности, скажем, при запасенной в резонаторе энергии в 1 Дж, отношение дисперсии к амплитуде коле-

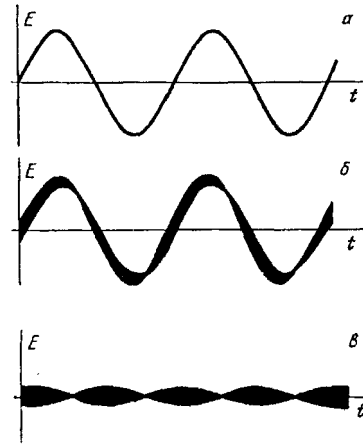


Рис. 4. Зависимость поля и его неопределенности от времени. а — Когерентное состояние. б — Сжатое состояние. в — Сжатый вакуум

баний мало, $= 10^{-9} - 10^{-10}$. На рис. 4,б изображены колебания в сжатом состоянии — здесь дисперсия изменяется со временем и в некоторые моменты сравнима с амплитудой колебаний. Рис. 4,в соответствует состоянию сжатого вакуума — теперь колебаний с основной частотой ω фактически нет, есть только изменения дисперсии с удвоенной частотой. Подчеркнем, что, несмотря на отсутствие колебаний и название сжатый вакуум, это высоковозбужденное, макроскопическое состояние с большой энергией.

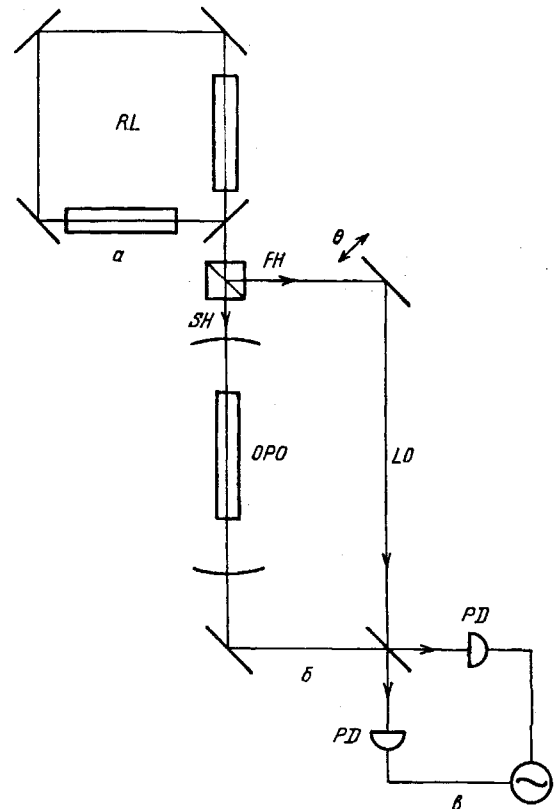


Рис. 5. Лабораторное устройство для наблюдения сжатого света: а — Система накачки. б — Параметрический генератор. в — Приемник-анализатор

Сжатый свет наблюдался в ряде лабораторий [7, 8]. Одна из простейших схем его наблюдения (рис. 5) представляет собой вырожденный параметрический генератор, накачиваемый второй гармоникой неодимового лазера. В параметрическом генераторе первая гармоника возникает вновь, но теперь уже в состоянии сжатого вакуума. От первых схем наблюдения параметрической генерации света [9, 10] данная отличается лишь специальным приемником-анализатором сжатого состояния. Этот приемник сравнивает сигнал параметрического генератора с опорным (лазерным) сигналом и измеряет дисперсию сжатого света. На рис. 6 схематически изображены результаты наблюдений. Как можно видеть, дисперсия сигнала параметрического генератора испытывает два колебания за период высокочастотного поля — период ее изменения π , а не 2π . Видно также, что при некоторых значениях фазы θ дисперсия сжатого света становится меньше дисперсии когерентного состояния (пунктирная линия). Это как раз и говорит о том, что свет находится в сжатом состоянии.

Обратим внимание на нестандартность измерительной процедуры. Измеряется непосредственно параметр состояния — его дисперсия; при этом измерение происходит невозмущающим (или неразрушающим) образом. Действительно, измерения производятся над пучком, выходящим из резонатора параметрического генератора, и этот пучок в резонатор не возвращается независимо от того, производятся над ним измерения или нет. Если такие измерения производятся, то информация об этом никак в резонатор поступить не может и, следовательно, состояние поля в резонаторе измерением не возмущается. Вместе с тем по результатам измерений над выходящим из резонатора пучком можно судить о состоянии поля в этом резонаторе.

Отметим, что вследствие динамического равновесия между накачкой и потерями поле в резонаторе

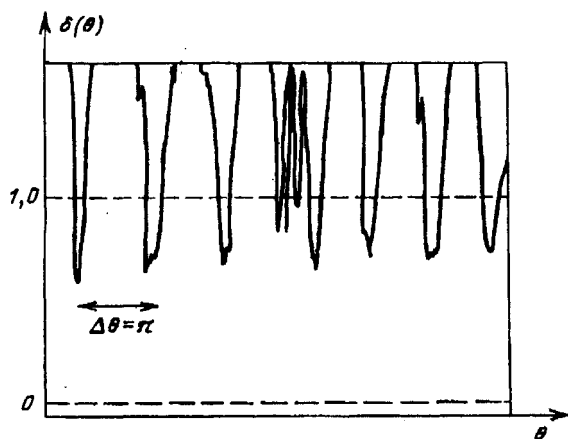


Рис. 6. Дисперсия сжатого света как функция фазы опорного сигнала

параметрического генератора стационарно. Следовательно, сделав один раз измерение, можно быть уверенным, что поле в резонаторе находится в состоянии, скажем, сжатого вакуума и час, и два спустя после измерения. Итак, наблюдение сжатого света показывает, что имеется макроскопический (число фотонов велико) квантовомеханический объект — электромагнитное поле выделенной моды резонатора, дисперсию состояния которого можно измерить, оставив сам объект в том же состоянии, в котором он был до измерения.

Наибольшее внимание исследователей сжатого света привлекли моменты времени, когда его дисперсия меньше Дисперсии когерентного состояния. Это естественно, так как квантовомеханические неопределенности, подобно шумам, мешают точным измерениям соответствующих величин. Чем эти неопределенности меньше, тем точнее может быть измерена соответствующая величина, и в этом достоинство состояний с малой дисперсией в сжатом свете. Однако с исследовательской точки зрения наиболее интересны состояния с большой дисперсией; они менее "классичны" и более "квантовомеханичны". Для предмета данной статьи они важны, поскольку их наблюдение, учитывая сказанное выше об измерениях сжатого света, свидетельствует о возможности измерения дисперсии распределенного состояния отдельного объекта без разрушения этого распределенного состояния.

Естественно, если подобные измерения возможны над электромагнитным осциллятором, они возможны и над механическим осциллятором;

эту мысль мы прокомментируем в следующем разделе.

5. Макроскопические тела в распределенных состояниях и невозмущающее измерение их положения. Таким образом, в экспериментах со сжатым светом показано нечто большее, чем просто возможность их генерирования. Показано также, что квантовомеханическое состояние одного конкретного макроскопического объекта (поля некоторой выделенной моды резонатора) может быть определено невозмущающим образом. В частности, может быть выяснено, что этот объект находится в распределенном состоянии с большой, макроскопической, неопределенностью координаты, равной примерно амплитуде колебаний в когерентном состоянии при равных энергиях обоих состояний.

Если подобное невозмущающее определение состояния возможно по отношению к электромагнитному осциллятору, то оно возможно, конечно, и по отношению к механическому осциллятору и даже по

отношению к свободно движущемуся в пространстве телу, поскольку оно есть частный случай осциллятора, соответствующий его нулевой частоте. Подобное заключение, естественно, следует из одинаковости теоретического описания электромагнитного и механического осцилляторов, однако ниже возможность невозможности определения состояния механического осциллятора будет продемонстрирована более прямо. Можно спросить, почему макроскопические тела в распределенных состояниях не наблюдаются в окружающем нас мире. Квантовая механика не запрещает таких состояний (см. раздел 1), а в некоторых случаях они даже более предпочтительны.

Одно из возможных и распространенных объяснений этого заключается в утверждении, что при каждом наблюдении тела в таком состоянии происходит его локализация, т.е. переход из распределенного состояния в сосредоточенное (редукция волнового пакета). Как мы увидим, рассмотренная ниже задача об отражении электромагнитного сигнала от зеркала с большой квантовомеханической неопределенностью его координаты не подтверждает этого утверждения [11] и сводит задачу исследования состояния макроскопического тела к тем же измерениям, которые делаются со сжатым светом.

В полном объеме теоретическое описание отражения довольно сложно, и мы рассмотрим простейший вариант, когда предполагается, что зеркало обладает лишь двумя степенями свободы (рис. 7). Одна — поперечный осциллятор — описывает движение отрицательных зарядов (связанных электронов) вдоль зеркала (смещение Q , сопряженный импульс P , поверхностная плотность массы ρ , поверхностная плотность заряда σ). Движение отрицательных зарядов вдоль зеркала и приводит, собственно, к отражению электромагнитного сигнала. Вторая степень свободы — продольный осциллятор — описывает движение зеркала вдоль направления распространения излучения (координата q , сопряженный импульс p , поверхностная плотность массы μ). Предполагается также, что имеются только волны нормального падения на зеркало. Зеркало считается бесконечно тонким и ориентированным перпендикулярно оси z , вдоль которой распространяются электромагнитные волны. Электрическое поле и смещение зарядов Q направлены вдоль оси x . Область пространства, занятая полем, имеет такую же форму, что и зеркало; площадь зеркала равна s . Тогда квантовая система зеркало + поле описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\rho s} \left(P - \frac{\sigma s}{c} A(q) \right)^2 + \frac{1}{2} s K Q^2 + \frac{1}{2} s \int dz \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + 4\pi c^2 \vec{\Pi}^2 \right] + \frac{1}{2\mu s} p^2 + \frac{1}{2} s \kappa q^2, \quad (5.1)$$

где K и κ — жесткости, соответственно, поперечного и продольного осцилляторов, $A(z)$ — векторный потенциал электромагнитного поля и $\vec{\Pi}(z)$ — канонически сопряженный ему импульс.

Осцилляторы поля (плоские волны) в начальный момент находятся в когерентных состояниях, сфазированных так, что поле образует прямоугольный импульс, заполненный высокой частотой:

$$\langle E_{in}(z, t) \rangle = E_0 \sin \omega_0 t \tilde{\Pi}(\tau_0, \tilde{t}), \quad (5.2)$$

где $\tilde{\Pi}(z)$ — функций, описывающая прямоугольную форму импульса длительностью $2\tau_0 = 4\pi n_0/\omega_0$ ($2n_0$ — число периодов в импульсе), $\tilde{t} = t - \bar{t} - (z/c)$ и \bar{t} — момент прибытия импульса в начало координат. Поперечный осциллятор в начальный момент находится в основном вакуумном состоянии, а продольный осциллятор — в сжатом состоянии, описываемом волновой функцией

$$\Psi(q) = (2\pi \bar{q}^2)^{-1/4} \exp(-q^2/4\bar{q}^2), \quad (5.3)$$

где $\bar{q}^2 = \hbar/(2s\mu\nu K^{1/2})$; K — коэффициент сжатия. Дополнительный параметр в волновой функции (5.3) — коэффициент сжатия — позволит в дальнейшем изменять параметры μ , ν продольного осциллятора без изменения его распределения (5.3); в частности, станет возможным переход к движению в свободном пространстве ($\nu \rightarrow 0$).

Исследование этой задачи полностью в рамках квантовой механики показывает, что среднее значение поля отраженного сигнала в стационарном режиме и при резонансе ($\Omega = \omega_0$) равно

$$\langle E_R(z, t) \rangle = E_0 e^{-2\bar{q}^2/\lambda^2} \sin [\Omega(\tau - \bar{t})], \quad (5.4)$$

где $\lambda = 2\pi/\Omega = c/\Omega$ и $\tau = t + (z/c)$, в то время как среднее значение квадрата поля отраженного сигнала, пропорциональное плотности энергии электрического поля в нем, равно

$$\langle E_R^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \left\{ 1 - e^{-8\bar{q}^2/\lambda^2} \cos [2\Omega(\tau - \bar{t})] \right\}. \quad (5.5)$$

Как можно видеть, при малой неопределенности положения зеркала ($\bar{q} \ll \lambda$) отраженный сигнал сохраняет свойства когерентного света; в частности, $\langle E_R^2 \rangle \approx \langle E_R \rangle^2$. Когда же неопределенность положения зеркала велика ($\bar{q} \gg \lambda$), среднее значение поля близ-

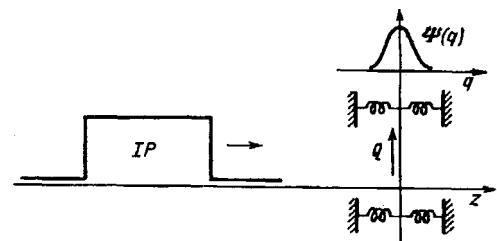


Рис. 7. Отражение света от зеркала с большой квантовомеханической неопределенностью

ко к нулю, в то время как среднее значение квадрата поля сохраняет конечное значение; только осцилляции плотности энергии поля удвоенной частоты близки к нулю. Можно сказать, что амплитудный коэффициент отражения стремится к нулю по мере роста неопределенности положения зеркала, в то время как коэффициент отражения по мощности сохраняет конечное значение. Это означает, что отраженный сигнал находится в существенно квантовом состоянии, хотя и является макроскопическим, так как только в таком состоянии возможно неравенство $\langle (E)^2 \rangle \ll \langle (E^2) \rangle$.

Можно показать также, что длина отраженного сигнала примерно на \bar{q} больше длины падающего сигнала.

Следствием этого исследования является вывод, что имеется экспериментальная возможность наблюдать распределенное квантовомеханическое состояние макроскопического тела (зеркала) посредством зондирования этого тела электромагнитным импульсом без существенного изменения состояния этого тела. Действительно, как мы видели, отраженный импульс несет информацию о распределенности состояния зеркала и, будучи макроскопическим, может быть проанализирован существующими экспериментальными средствами, подобными тем, которые используются для анализа сжатого света [7, 8]. Вместе с тем можно показать [11], что процесс отражения не приводит к существенному изменению квантовомеханического состояния зеркала. Действительно, явление отдачи, сопровождающее отражение импульса от зеркала, приводит к небольшому смещению продольного распределения как целого, но в первом порядке теории возмущений не сказывается на его ширине, т.е. дисперсии. Следовательно, если повторно зондировать зеркало световым импульсом, то измеренное значение дисперсии окажется таким же, как и при первом зондировании. Это более всего убеждает, что никакой редукции волнового пакета при зондировании зеркала не происходит. Возможность же наблюдать единичный объект (зеркало) в распределенном состоянии противоречит обычной интерпретации такого состояния, как описывающего ансамбль объектов [1, 2].

Следует обратить также внимание на удлинение отраженного импульса $\langle E_R^2 \rangle$ по сравнению с падающим, обусловленное частичным отражением падающего импульса от различных слоев распределения продольной координаты зеркала. Человеческий глаз с его небольшим временным разрешением не может, конечно, заметить такое удлинение (примерно на \bar{q}) импульса. Однако при наклонном падении света от точечного источника на зеркало частичное отраже-

ние от различных слоев продольного распределения перейдет в угловое распределение лучей. Поскольку угловое разрешение человеческого глаза достаточно высоко, то тело с большой квантовомеханической неопределенностью будет выглядеть просто как несколько расплывшееся. Следовательно, если бы тела с большой квантовомеханической неопределенностью существовали в окружающем нас мире, то они были бы видны буквально невооруженным глазом.

6. Заключение. Итак, с одной стороны, квантовая механика не запрещает макроскопическим телам находиться в широко распределенных состояниях, а изложенное в последнем разделе указывает на возможность неразрушающего наблюдения отдельных, единичных макроскопических тел в подобных состояниях, например, теми же средствами, которые используются в экспериментах со сжатым светом, или даже просто невооруженным глазом. С другой стороны, макроскопические тела в широко распределенных состояниях никогда никем не наблюдались, и из-за этого широко распределенные решения уравнения Шрёдингера истолковывались как описывающие ансамбль тел, а не отдельные, единичные их экземпляры. Главная цель данной методической заметки заключается в том, чтобы привлечь внимание к этому разрыву в описаниях макроскопических объектов в оптике и механике. Вопрос этот не только умозрительный; для его прояснения очень полезны могли бы быть экспериментальные попытки возбуждения механических осцилляторов в неклассическое, широко распределенное состояние. Как ясно из изложенного, наиболее перспективный способ такого возбуждения — параметрический резонанс. В качестве механического осциллятора в подобных экспериментах можно было бы использовать, например, микрочастицу, левитирующую в полях, образованных осцилляционным потенциалом.

Отсутствие макроскопических тел в широко распределенных состояниях можно было бы попытаться объяснить тем, что они в какой-то начальный момент образовались в сосредоточенном состоянии и с тех пор постепенно расплываются. Однако не видно причин, по которым они в начальный момент могли образоваться именно в сосредоточенном состоянии.

Объяснить сосредоточенность волновых пакетов макроскопических тел не может и учет их взаимодействия с теми или иными полями. Действительно, поскольку тела состоят из заряженных частиц, они должны взаимодействовать с электромагнитным полем. Однако такое взаимодействие приведет лишь к образованию сопровождающего (неизлучаемого) поля, так как такие поля имеются у всех частиц при

равномерном прямолинейном движении. Аналогичные соображения относятся и к другим полям. Во всех случаях волновой пакет (1.1) будет описывать движение центра инерции макроскопического тела и сопровождающих его полей, и, следовательно, вопрос о больших значениях параметра a в (1.1) и о возможности распределенных состояний макроскопических тел не может быть снят таким образом.

Не претендуя на окончательность суждения, опишем один из возможных способов разрешения этого вопроса. Он основан на простых физических соображениях. Выше уже говорилось о взаимодействии тела с различными окружающими и сопровождающими его полями. В этом отношении гравитационное поле составляет исключение [12, 13]. Действительно, согласно общей теории относительности гравитационное поле, создаваемое телом, можно рассматривать как деформацию пространства, его отклонение от евклидовости, причем такая деформация имеет место как в области, занятой телом, так и в его окрестности. Если масса, связанная с какой-то частью волнового пакета, деформирует пространство, то остальные части пакета движутся в этом деформированном пространстве. Вообще любая часть волнового пакета движется в пространстве, деформированном как самой этой частью, так и всеми остальными его частями. Следовательно, имеет место действие волнового пакета самого на себя, или самовоздействие волнового пакета, обусловленное его взаимодействием с гравитационным полем. Как показано ниже, это самовоздействие приводит к образованию потенциальной ямы, находясь в которой, волновой пакет стационарно сохраняет свой сосредоточенный вид. Более того, образование такой потенциальной ямы, очевидно, энергетически выгодно, и это объясняет сосредоточенность волновых пакетов макроскопических тел.

Поскольку в данном случае речь идет о макроскопических телах обычной плотности (порядка 1 г/см^3), то гравитационный потенциал является слабым, и, следовательно, при вычислениях достаточно пользоваться ньютоновским выражением для потенциала.

Рассмотрим однородное шарообразное тело радиуса R с плотностью ν . Так как далее вычисляется гравитационное действие одной части волнового пакета на другую, а размеры волнового пакета много меньше геометрических размеров тела, то предварительно мы рассмотрим притяжение двух взаимопроникающих массивных шаров, центры которых смещены на расстояние s много меньшее R . Как видно из рис. 8, для вычисления силы притяжения между шарами достаточно учесть притяжение к первому шару

слоя толщиной $2s$, покрывающего половину поверхности первого шара. Учитывая лишь проекцию сил притяжения элементарных масс на линию, соединяющую центры шаров, получаем для силы притяжения шаров следующее выражение:

$$F = \frac{16\pi^2}{3} G\nu^2 R^3 s \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta = \frac{8\pi^2}{3} G\nu^2 R^3 s. \quad (6.1)$$

Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия двух шаров равна

$$U_s = \beta s^2, \quad \beta = \frac{4}{3} \pi^2 G\nu^2 R^3. \quad (6.2)$$

Учитывая это выражение, приходим к следующему уравнению Шрёдингера, описывающему волновые пакеты макроскопических тел:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (6.3)$$

где

$$U(\mathbf{r}) = \beta \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2. \quad (6.4)$$

Из этого уравнения видно, что эффект гравитационного самовоздействия волнового пакета макроскопического тела аналогичен оптическому эффекту самофокусировки. Разница состоит только в том, что самофокусировка происходит в двух направлениях, перпендикулярных направлению распространения волн, в то время как гравитационное самовоздействие происходит во всех трех направлениях.

Найдем стационарное и сферически-симметричное решение уравнения (6.3). При $\Psi = \Psi(r)$ и $\text{Im} \Psi = 0$ согласно (6.4) имеем

$$U(r) = \alpha + \beta r^2, \quad (6.5)$$

где $\alpha = \beta \int dr'^2 |\Psi(r')|^2$ — некоторая несущественная константа. Таким образом, для определения $\Psi(r)$ имеем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \beta r^2 \Psi = E \Psi. \quad (6.6)$$

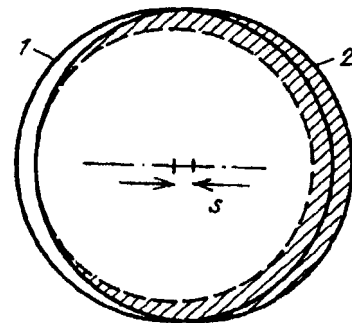


Рис. 8. Притяжение двух взаимопроникающих шаров

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi^3} r_0^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad (6.7)$$

где

$$r_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2\beta m}\right)^{1/4} = \left(\frac{2\hbar^2 R^3}{3Gm^3}\right)^{1/4} \quad (6.8)$$

есть характерный размер волнового пакета, обусловленный гравитационным самовоздействием. Подобный сосредоточенный волновой пакет может рассматриваться как солитонное решение уравнения Шрёдингера (6.3). В нижеследующей таблице приведены некоторые оценки.

$m, \text{г}$	$R, \text{см}$	$r_0, \text{см}$
10^{28}	$1,3 \cdot 10^9$	$1,25 \cdot 10^{-26}$
10^{12}	$6,2 \cdot 10^3$	$1,25 \cdot 10^{-18}$
1	0,62	$1,25 \cdot 10^{-12}$
10^{-12}	$6,2 \cdot 10^{-5}$	$1,25 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	$6,2 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$

В колонках даны соответственно масса, геометрический размер макроскопического тела при плотности $\nu = 1 \text{ г/см}^3$ и размер его волнового пакета. В третьей строке таблицы приведены данные для типичного макроскопического тела ($m = 1 \text{ г}$). В первой строке приведены данные для тела с массой порядка массы земного шара. В последней строке — данные для массы 10^{-15} г , для которой геометрические размеры примерно сравниваются с размерами волнового пакета. Размер, соответствующий условию $r_{\text{cr}} = r_0 = R$, можно определить из (6.8):

$$r_{\text{cr}} = \left(\frac{9\hbar^2}{32G\pi^3\nu^3}\right)^{1/10} \quad (6.9)$$

Условие (6.9) дает количественный критерий для разделения тел по их размерам на макроскопические и микроскопические. Из (6.9) можно получить также критерий подобного разделения по массам. Тела с массой больше

$$m_{\text{cr}} = \left(\frac{32\pi\nu\hbar^6}{81G^3}\right)^{1/10} \quad (6.10)$$

следует считать макроскопическими.

Таким образом, для масс, больших 10^{-12} г , размеры волнового пакета пренебрежимо малы не только по сравнению с геометрическими размерами этих масс, но и по сравнению с типичной оптической длиной волны ($10^{-4} - 10^{-5}$). Приведенные соображения объясняют отсутствие в окружающем нас мире макроскопических тел, находящихся в состояниях с большой квантовомеханической неопределенностью их центра масс. Однако это объяснение получено дорогой ценой, а именно, посредством отказа от

принципа суперпозиции и линейности уравнения Шрёдингера [13], что можно видеть из уравнения (6.3). Следует, правда, отметить, что нарушение принципа суперпозиции не является очень сильным. В частности, оно совершенно не затрагивает области микроскопических, атомных явлений — главной области применения квантовой механики.

Кроме того, отказ от принципа суперпозиции может оказаться временным. После того, как квантовая теория будет объединена с гравитацией, приведенные в этом разделе соображения могут оказаться чем-то вроде полуклассической теории в квантовой электродинамике, когда среда описывается квантовомеханически, а поле — классически. При квантовомеханическом описании как гравитации, так и вещества принцип суперпозиции может восстановиться.

Отметим также, что потенциальная яма, о которой говорилось выше, не является очень глубокой. Поэтому, затратив некоторую энергию, макроскопическое тело можно перевести в распределенное состояние с большим размером волнового пакета. Наблюдение и исследование распределенных состояний макроскопических тел имело бы первостепенное научное значение.

Итак, наблюдение сжатого света ясно показало, что имеется практическая возможность установить распределенность квантовомеханического состояния отдельного макроскопического объекта. В сжатом свете таким объектом является поле избранной моды оптического резонатора. Однако тождество теоретических описаний электромагнитного и механического осцилляторов, а также описанная выше конкретная схема зондирования распределенного зеркала показывают, что распределенность квантовомеханического состояния отдельного макроскопического тела также может быть установлена. По нашему мнению этот вывод является главным следствием экспериментального наблюдения сжатого света.

Этот вывод приводит к вопросу: почему макроскопические тела не наблюдаются в окружающем нас мире в распределенных состояниях, но только в сосредоточенных, волновые пакеты которых движутся по законам классической механики? В заключении мы предложили возможное объяснение этого факта, из которого следует важная роль гравитации при переходе от квантовомеханического описания движения макроскопических тел к классическому.

Изложенные соображения показывают также, что макроскопические тела могут быть переведены в распределенное состояние, и важно было бы наблюдать подобные состояния экспериментально. Макроскопические тела в таких состояниях представляют

собой новый объект физического исследования. Естественным способом получения таких состояний является параметрическое возбуждение механического осциллятора.

Нетрудно понять, почему распределенные состояния впервые наблюдались для электромагнитного поля, а не в механических системах. Масса электромагнитного поля невелика при обычных интенсивностях и не может заметно деформировать пространство, не говоря уже о том, что пространство состояний поля есть не обычное трехмерное пространство, а абстрактное гильбертово пространство. Поэтому сосредоточенное состояние поля не имеет никаких преимуществ перед распределенным.

В связи со всем вышеизложенным справедливо упомянуть статью А. Эйнштейна [14], в которой впервые был поставлен вопрос о правильном квантовомеханическом описании движения макроскопических тел.

Автор признателен А.М. Прохорову, Ю.В. Гуляеву, Ф.В. Бункину, А.А. Рухадзе, В.А. Щеглову, А.В. Масалову за поддержку и содействие в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schiff L.I.* Quantum Mechanics. New York, McGraw-Hill, 1955
2. *Messiah A.* Mecanique quantique. Т. 1, 2. Paris, Dunod, 1959.
3. *Louisell W.H.* Radiation and Noise in Quantum Electronics. New York, McGraw-Hill, 1964.
4. *Bykov V.P.* Sov. Phys. — Uspekhi. October, 1989, **34**, 910.
5. *Husimi K.* Prog. Theor. Phys. 1953, **9**, 381.
6. *Stoler D.* Phys. Rev. 1970, **D1**, 3217; 1971, **D4**, 1925.
7. *Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke V., Mertz C., Valley J.F.* Phys. Rev. Lett. 1985, **55**, 2409.
8. *Ling-An Wu, Kimble H.J., Hall J.L., Huifa Wu.* Phys. Rev. Lett. 1986, **57**, 2520.
9. *Akhmanov S.A., Khohlov R.V.,* Sov. Phys.— JETP. 1962, **16**, 252.
10. *Giordmaine J.A., Miller R.C.,* Phys. Rev. Lett. 1965, **14**, 973.
11. *Bykov V.P.,* Bull. Acad. Sci. USSR, Phys. Ser. 1991, **55**: 2, 15; OPAC Rev. 1990—1991, **1**:2, 173.
12. *Bytov K.P.,* Sov. Phys. Dokl. 1989, **34**: 10, 911.
13. *Bykov V.P.,* J. Sov. Laser Res. 1991, **12**: 1, 35.
14. *Einstein A.* Scientific Papers presented to Max Born. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1953. P. 33.