Август 1993 г. Том 163, № 8

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ДЕРЕВО ПАРАДОКСА

В.В. Митюгов

(Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород)

(*Статья поступила 9.03.93 г.*)

СОДЕРЖАНИЕ

...Ученый пронизан ощущением причинной обусловленности всего происходящего. Для него будущее не менее определено и обязательно, чем прошедшее.

...Тот, кто не видит смысла в своей жизни и в жизни себе подобных, тот не только несчастен, но едва ли сможет продолжать жить.

А.Эйнштейн

Приведенные в эпиграфе две фразы выражают, пожалуй, квинтэссенцию душевных томлений великого физика. Противоречие между динамической причинностью и значимостью человеческой воли, проблемы возникновения случайного и обоснования термодинамики беспокоят людей не первое столетие. Между тем, знаменитый парадокс Эйнштейна—Подольского—Розена [1] уже являет собою как бы семя, способное произвести плодоносное дерево ответов на многие мучительные физико-философские вопросы. То обстоятельство, что сам А.Эйнштейн в растерянности отпрянул от этой таинственной бездны, не умаляет его величия и не должно, тем более, останавливать нас. Да и квантовая теория за прошедшее время успела развиться в более зрелый организм.

Логическое основание обсуждаемого парадокса составляет анализ детального квантового описания столкновения двух частиц, исходно находившихся в чистых состояниях (с определенными импульсами). Первый принципиальный вывод состоит в невозможности приписать волновую функцию состоянию каждой из частиц после столкновения. Здесь проявляется весьма специфическая статистичность квантовых законов, классического аналога не имеющая. Второй важный момент возникает при точном измерении наблюдателем импульса одной из частиц, испытавших столкновение. Вытекающая из закона сохранения возможность мгновенной косвенной редукции состояния второй частицы и составляет суть парадокса (как теперь ясно, кажущегося).

Потенциальное богатство описанной физической конструкции заключено в многообразной естественности ее обобщений. Рассмотрение вместо пары частиц двух произвольных физических подсистем в произвольных начальных состояниях инициирует теорию косвенных измерений, заложенную впоследствии Дж. фон Нейманом [2]. Обобщение модели по линии увеличения числа взаимодействующих подсистем проливает свет на многие некогда спорные вопросы обоснования статистической термодинамики. Наконец, анализ этих задач дает надежду на вывод из тупика фундаментальной математической проблемы определения понятия физической вероятности.

Краеугольным камнем стохастики в классической физике служит эргодическая гипотеза и микроканоническое распределение, тесно с ней связанное. Удается показать, что в последовательно квантовой теории фундаментальная эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина или ее аналог не существуют принципиально. Как следствие, в рамках эргодической концепции квантовые вероятности оказываются чисто интуитивным понятием. Но зато взамен фоннеймановская аксиоматическая теория измерений позволяет независимо ввести вероятность как метрическую характеристику в пространстве квантовых состояний физической системы. Как меру сравнения апостериорной физической ситуации с априорной. Детализация последствий от принятия такого определения вероятности составляет предмет второй половины статьи.

Положение дел с понятием вероятности давно не удовлетворяет физиков. Среди обширной литературы по этому поводу отметим лишь одну из недавних публикаций [3], где проанализированы многие наболевшие недоразумения и где можно найти дальнейшие библиографические указания. В том же ключе воспринимается и статья [4] по методологическим проблемам квантовой механики. Историческая ретроспекция помогает уяснить, что по сию пору в науке равноправно присутствуют различные логические конструкции под общим псевдонимом "вероятность". Трудно придумать большего неблагополучия для научной концепции. Автору представляется теперь уже очевидным, что именно квантовая теория несет в себе единственную разгадку случайного — столь необходимого компонента человеческого миросознания.

1. Смешанные состояния. Приступая к анализу логической схемы парадокса в его современной интерпретации, введем необходимые понятия и сделаем некоторые уточнения. Пусть L — $L_1 \otimes L_2$ — прямое (кронекерово; см. [5]) произведение гильбертовых пространств состояний двух невзаимодействующих физических подсистем. Обозначим **X** и **Y** эрмитовы операторы, действующие в L_1 и L_2 соответственно. Обычным образом введем собственные векторы и собственные числа

$$\mathbf{X}|x\rangle = x|x\rangle, \ \mathbf{Y}|y\rangle = y|y\rangle. \tag{1}$$

Если подсистемы не одномерны, под **X** и **Y** будем понимать полные для них наборы операторов физических величин, а под x и y — соответствующие наборы квантовых чисел. В силу аргументации [6] будем считать множества $\{x\}$ и $\{y\}$ дискретными.

Рассмотрим некоторое состояние $|\Psi\rangle \in L$. Если подсистемы в прошлом взаимодействовали, то $|\Psi\rangle$ не факторизуется, вообще говоря, в произведение каких-либо $|\psi_1\rangle \in L_1$ и $|\psi_2\rangle \in L_2$. Скобка $\langle x, y|\Psi\rangle$ в старых "додираковских" обозначениях есть просто функция $\Psi(x, y)$.

Не обладая определенными волновыми функциями, состояния подсистем характеризуются матрицами плотности (являются смешанными):

$$\langle x|\rho|x'\rangle = \sum_y \langle x, y|\Psi\rangle\langle\Psi|x', y\rangle, \tag{2}$$

$$\langle y|\sigma|y'\rangle = \sum_x \langle x, y|\Psi\rangle\langle\Psi|x, y'\rangle. \tag{3}$$

Здесь мы наблюдаем принципиально неклассическую стохастизацию состояний подсистем при том, что система в целом обладает волновой функцией. Можно думать, что своевременное и полноценное осознание этого факта предотвратило бы поиски первичной фундаментальной стохастичности в континуально-классических нелинейных динамических моделях. Другое дело, что прикладное значение этих моделей для макросистем сомнений не вызывает.

Смешанные состояния (2) и (3) провзаимодействовавших подсистем связаны интересными свойствами взаимности, которые обсудим позже. Сосредоточим пока внимание на способах представления матрицы плотности $\langle x|\rho|x'\rangle$. Ее диагональные элементы $\langle x|\rho|x\rangle$ суть вероятности $p(x)$ обнаружить значения (или полные наборы) x при физическом измерении переменной **X**. Удобно записывать эти вероятности инвариантным образом, используя проекционные операторы $\mathbf{P}_x = |x\rangle\langle x|$:

$$P(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\,\mathbf{P}_x = \langle P_x\rangle, \tag{4}$$

где $\hat{\rho}$ — оператор, которому в x-представлении отвечает матрица (2). Обладая очевидным свойством эрмитовости, эта матрица может быть приведена к диагональному виду некоторым унитарным преобразованием

$$\sum_{x, x'} \langle n|V^+|x\rangle\langle x|\rho|x'\rangle\langle x'|V|m\rangle = \\ = \rho_n\delta_{nm}, \tag{5}$$

где $\mathbf{V}^+\mathbf{V} = 1$ в L_1. Значения ρ_n опять представляют собой вероятности $p(n)$ результатов физического измерения величины **N**, собственными векторами которой служат $|n\rangle$ из (5) с очевидными свойствами ортогональности $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ и полноты $\sum |n\rangle\langle n| = 1$ в L_1. Другими словами, $[\hat{\rho}, \mathbf{N}] = 0$.

Диагонализация (5) позволяет представить состояние $\hat{\rho}$ в форме вероятностного ансамбля (смеси)

$$\hat{\rho} = \sum_n p(n)|n\rangle\langle n| \tag{6}$$

и теперь уже трактовать его как случайный набор ортогональных состояний $|n\rangle$, составляемый, например, с помощью игральной кости. Вместе с тем легко показать, что существует бесчисленное множество различных представлений того же оператора как смеси

$$\hat{\rho} = \sum p(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

некоторых состояний $|\alpha\rangle$, неортогональных между собой. Полнота статистического описания, содержащегося в операторе плотности, исключает постановку обратной задачи о восстановлении первородной физико-вероятностной смеси по результатам измерений.

Указанная неоднозначность имеет исключительно важное принципиальное значение, делая невозможным перенос в квантовую теорию классических понятий и теорем об эргодических ансамблях. Чтобы показать это, напомним нужные сведения из теории стационарных случайных процессов в математической и физической интерпретациях.

Пусть над множеством временных функций $\{F(t)\}$ задана вероятностная мера $W(F(t))$.

Определение 1. Ансамбль называется стационарным, если мера W инвариантна к произвольному временному сдвигу:

$$W(F(t)) = W(F(t+\tau)). \tag{7}$$

Определение 2. Стационарный ансамбль называется эргодическим, если его нельзя представить в виде суммы двух стационарных же подансамблей с мерами, отличными от 0 или 1.

Другими словами, для эргодического ансамбля не существует представления вида

$$W = p_1 W_1 + p_2 W_2,\ p_1 + p_2 = 1 \tag{8}$$

с $p_{1,2} \neq 0, 1$ при условиях стационарности распределений W_1 и W_2.

Согласно теореме Биркгофа—Хинчина (см. [7, 8]) для любой физической величины (трактуемой как одновременная или многовременная комбинации мгновенных значений функции F) среднее по времени в любой реализации $F(t)$ не отличается от среднего по эргодическому ансамблю. Таким образом, каждый из представителей множества $\{F(t)\}$ оказывается типичным и содержит абсолютно все сведения о статистических свойствах ансамбля. В случае многомерного случайного процесса под $\mathrm{F}(t)$ следует понимать вектор в надлежащем пространстве, сказанное выше при этом сохраняется в силе.

В квантовой теории классическим функциям $F(t)$ сопоставляются векторы некоторых нестационарных состояний $|\alpha\rangle$ физической модели случайного процесса, или, в операторном изображении, проекторы $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Набираемый из них с вероятностями $p(\alpha)$ оператор плотности для смеси позволяет вычислять физические средние в процедурном подобии тому, как проводится классическое усреднение по ансамблю W. Одно из принципиальных различий состоит в ненаблюдаемости самих по себе векторов $|\alpha\rangle$, тогда как в классике все без исключения существенные характеристики состояния одновременно наблюдаемы.

Основным объектом приложения эргодической теории в классической физике является система из $\mathcal{N}$ одинаковых частиц. Мгновенное состояние такой системы изображается точкой в $6\mathcal{N}$-мерном фазовом пространстве, соответственно $\mathrm{F}(t)$ представляет собой вектор той же размерности. Для обоснования справедливости микроканонического распределения, лежащего в логическом основании классической статистики Гиббса (см. [9]), требование эргодичности поведения системы частиц крайне существенно. Другими словами, важно, чтобы фазовая траектория системы многократно возвращалась в сколь угодно близкую окрестность каждой из точек с одинаковой энергией. Строгое доказательство эргодичности поведения системы частиц при заданном виде взаимодействия между ними весьма затруднительно. Поэтому в большинстве учебников статистической физики требуемое свойство ансамбля формулируется как эргодическая гипотеза.

Отмеченная нами ранее неоднозначность представления оператора плотности в форме вероятностной смеси чистых состояний меняет ситуацию радикально. Оказывается, что фундаментальная для классической статистики взаимосвязь между структурой стационарного ансамбля и свойствами типичных фазовых траекторий принципиально не существует в квантовой теории. Покажем это.

Рассмотрим конечномерную физическую систему с гамильтонианом $\mathbf{H}$. Пусть оператор плотности $\hat{\rho}$ описывает некоторое смешанное стационарное состояние этой системы. Стационарность означает $[\hat{\rho}, \mathbf{H}] = 0$. Среднее значение любой физической величины (кроме искусственных конструкций, зависящих от времени явно) в таком состоянии не зависит от времени (см. [10]). Обычным образом определим значения энергии E_n и вектора $|n\rangle$ стационарных чистых состояний

$$\mathbf{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{9}$$

Среди значений E_n могут быть совпадающие. Приписывая им тем не менее различные номера n, мы избавляемся от необходимости отдельно рассматривать энергетическое вырождение и упрощаем обозначения.

Запишем $\langle n|\rho|m\rangle$ и $\langle n|H|m\rangle$ в представлении, в котором они обе диагональны. Тогда $\langle n|\rho|m\rangle = \rho_n\delta_{nm}$, а ρ_n есть вероятность обнаружить значение E_n (редуцировать состояние к $|n\rangle$) при надлежащем измерении. Такой ансамбль может быть представлен как смесь вида (6) из чистых стационарных состояний $|n\rangle$ с вероятностями $p(n) = \rho_n$. В смешанном состоянии ни одно из $\rho_n \neq 1$ (состояние обладает ненулевой энтропией). Поэтому такую вероятностную смесь можно хотя бы одним способом разбить на два подансамбля, каждый из которых стационарен. Следовательно, классическое определение эргодического стационарного ансамбля и теорема Биркгофа—Хинчина в квантовую теорию перенесены быть не могут. Как уже отмечалось, наряду с этим существует бесчисленное множество представлений того же оператора как смеси нестационарных чистых состояний (сопоставимых с классическими траекториями).

Далее, мы увидим, что по названной причине и сами квантовые вероятности $p(x)$ оказываются интуитивным понятием, оставаясь за пределами эргодической концепции. По крайней мере, так дело выглядит с позиций традиционной классической схемы.

2. Квантовые вероятности. Вопрос о логической дилемме теории вероятностей, о причинности и случайности, намного старее идеи волновой функции. В блестящем философско-математическом эссе Дж. Литлвуд [11] обнажил принципиальную неопределимость физической вероятности в рамках теории пределов. Неоднократные попытки выйти из заколдованного круга то на пути пересмотра самого понятия математического предела, то на основе "теории частот" успеха не имели. Альтернативный аксиоматический путь построения теории вероятностей — теории меры — казался более успешным, но это не имеет прямого отношения к естествознанию. Исповедуя догматы веры чистой математики, наиболее последовательные представители этой школы принципиально исключают физическую приложимость своих логических построений. Вынуждены.

В прикладной теории вероятностей положение дел спасает принятая договоренность рассматривать лишь эргодические случайные процессы. Соответственно в теории передачи сигналов фигурируют эргодические источники сообщений. Приняв эргодичность в качестве добавочного постулата, можно записать плотность вероятности мгновенного значения f случайной функции $F(t)$ как среднее от проектора $P_f = \delta(F - f)$. Тогда теорема Биркгофа—Хинчина гарантирует сходимость на бесконечном времени относительных частот событий к вероятностям.

Аналогично решается проблема сходимости и для временных рядов из дискретных символов, если вместо непрерывных случайных функций $F(t)$ рассматривать события дискретного алфавита $\{f\}$ в дискретном времени. Все нужные определения и теоремы остаются при этом в силе. Заметим, что злоупотребление актуальной бесконечностью, связанное с оперированием непрерывными величинами и континуальными множествами, вообще характерно для современной математики. Разумеется, тому есть весьма серьезные логико-исторические причины, но именно это обстоятельство слишком часто вынуждает (оно же и помогает) математиков и еще более физиков "заметать мусор под ковер" (по образному выражению Р.Фейнмана).

Возвращаясь к обсуждению квантовых вероятностей видим, что в силу всего сказанного выше они пока остаются чисто интуитивным понятием, математическими определениями не подкрепленным. С другой стороны, аксиоматика Дж. фон Неймана уже содержит в себе возможность дать независимое определение физической вероятности, не опирающееся на эргодическую теорему.

Согласно [2] всякое полное прямое измерение есть некоторое ортогональное разложение единицы $1 = \sum |x\rangle\langle x|$ в гильбертовом пространстве состояний физической системы. Вероятность результата x при измерении над состоянием $|\psi\rangle$ есть $|\langle x|\psi\rangle|^2$.

Состояния $|x\rangle$ и $|\psi\rangle$ логически равноправны. Действительно, вектор $|\psi\rangle$ с необходимостью нормирован условием $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ и к нему всегда можно построить набор ортогональных дополнений, обладающих вместе с исходным $|\psi\rangle$ свойством взаимной полноты по отношению к базису $\{|x\rangle\}$. Учитывая сказанное, сформулируем

Определение 3. Квадрат модуля от скалярного произведения векторов состояний в унитарном уни-модулярном гильбертовом пространстве есть вероятность редуктивного перехода из одного состояния в другое при надлежащем измерении.

Термин "редуктивный" означает, что трансформация $|\psi\rangle \to |x\rangle$ происходит именно в процессе измерения (редукции волнового вектора; см. [2]).

Обсудим формальные и гносеологические последствия от принятия такого определения вероятности, Прежде всего отметим, что само понятие "вероятность" теперь выступает как необязательная тавтология метрических отношений в унитарном пространстве, С другой стороны, физическое описание ситуации является в аксиоматическом смысле исчерпывающим. С процедурной точки зрения принятое определение означает, что все операции физического предсказания следует строить по тем же формулам, что и с вероятностью в прежнем эвристическом смысле.

По существу, речь идет о постулировании спектральной меры [12], органически согласованной с формализованными процедурами физических измерений. На любом заданном ортогональном базисе указанная величина обладает всеми нужными свойствами вероятностной меры: аддитивностью, положительной определенностью и нормировкой. Далее мы покажем, что в ряде принципиально значимых задач физической кинетики и статистической термодинамики допущение такой меры приводит к общепринятым результатам и дает им естественное формальное обоснование.

На этом пути возникает множество конкретных задач, диктуемых приложением сформулированной схемы к моделям последовательных измерений над физическими подсистемами, испытавшими взаимодействие. В частности, при выводе соотношений взаимности мы рассмотрим и проблему косвенных измерений, порождаемую обозначенной в самом начале задачей о взаимодействии двух подсистем. Попутно здесь открывается возможность поставить задачу о параметризации собственного времени наблюдателя как некоторой метрической характеристики для цепочки последовательных квантовых измерений.

Сакраментальный прежде вопрос о сходимости относительных частот к вероятностям утрачивает свою принципиальную остроту. Сам по себе вопрос не снимается вовсе, но становится принадлежностью весьма специфического класса однородных бесконечных моделей последовательных измерений. Вполне логично ожидать, что для таких моделей свойства сходимости могут и должны быть доказаны на основе теоретико-групповой классификации квантовых состояний или комбинаторных асимптотических соотношений в духе предельных теорем. Однако для оснований самой теории этот вопрос второстепенен.

В других случаях ничего похожего на такую сходимость требовать невозможно и не нужно, если речь идет о неоднородных моделях или, тем более, об однократных событиях, обычно и составляющих исторический процесс в макро- и микромире. В поведенческом плане не следует вообще полагать, что какая-то формальная структура примет за вас автоматическое решение в поворотный момент судьбы. Речь о том, что именно вероятностный подход применяется обычно при построении компьютерных алгоритмов поиска оптимального поступка. Но едва ли концепция оптимального решения сколько-нибудь содержательна для уникальных ситуаций как чисто логическое построение. К тому же за свободной человеческой волей всегда остается право поступить неоптимально. Впрочем, отдать себя всецело во власть автоматики — тоже вольное решение.

Признание того факта, что метрические отношения в гильбертовом пространстве есть единственная реальность прогностического знания, ни к каким логически абсурдным последствиям не ведет и хорошо согласуется с уже известными законами квантовой и статистической физики. Расхождение же предлагаемой схемы с ныне принятой парадигмой касается лишь умозрительных вопросов, не предполагающих экспериментальной проверки.

Бессодержательными оказываются и представления квантового ансамбля в форме вероятностных смесей. Остается лишь полнота физического описания, заключенного в операторе плотности и реализуемого через его проекции $\langle x|\rho|x\rangle$ на определенные ортогональные базисы. Отказ от придания указанным представлениям онтологического смысла опять же никаких наблюдаемых следствий за собой не влечет.

3. Соотношения взаимности. Вернемся к обсуждению первоначальной модели двух подсистем. Проследим соответствие между квантовой стохастичностью, возникающей при взаимодействии, и *определением 3.* Рассмотрим некоторые чистые начальные состояния $|k\rangle \in L_1$ и $|\chi\rangle \in L_2$. Взаимодействие (столкновение) подсистем подвергает состояние $|k,\chi\rangle$ составленной из них полной системы унитарному преобразованию: $\mathbf{U}|k,\chi\rangle = |\Psi\rangle$. Поясним в духе принятого определения вероятностный смысл описания результирующих состояний с помощью матриц плотности (2) и (3).

Запишем совместную вероятность $p(x, y)$ результата одновременного измерения **X** и **Y** в полной системе (очевидно, что $[X,Y] = 0$):

$$p(x, y) = |\langle x, y|\Psi\rangle|^2 = \\ = |\langle x, y|U|k,\chi\rangle|^2. \tag{10}$$

Поскольку здесь **X** и **Y** суть произвольные физические переменные подсистем (или полные наборы переменных) , формула (10) уже содержит все необходимое для дальнейшего.

Обычным образом [13] введем безусловные и условные вероятности

$$p(x) = \sum_y p(x, y) = \langle x|\rho|x\rangle, \tag{11}$$

$$p(y) = \sum_x p(x, y) = \langle y|\sigma|y\rangle, \tag{12}$$

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}, \quad p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}, \tag{13}$$

а также энтропии

$$S(x) = -\sum_x p(x) \ln p(x), \tag{14}$$

$$S(y) = -\sum_{y} p(y) \ln p(y), \tag{15}$$

$$S(x, y) = -\sum_{x, y} p(x, y) \ln p(x, y). \tag{16}$$

Справедливо неравенство Шеннона

$$S(x) + S(y) \geq S(x, y). \tag{17}$$

Безусловные вероятности $p(x)$ и $p(y)$ задаются диагональными элементами матриц (2) и (3) при любом выборе переменных в L_1 и L_2 соответственно. Выберем базисы $\{|n\rangle\} \in L_1$ и $\{|\nu\rangle\} \in L_2$, на которых эти матрицы диагональны $\langle n|\rho|m\rangle = \rho_n \delta_{nm}$, $\langle \mu|\sigma|\nu\rangle = \sigma_\nu \delta_{\mu\nu}$. Функционалы

$$S_1 = -\sum_{n} \rho_n \ln \rho_n = -\operatorname{Sp} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}, \tag{18}$$

$$S_2 = -\sum_{\nu} \sigma_\nu \ln \sigma_\nu = -\operatorname{Sp} \hat{\sigma} \ln \hat{\sigma} \tag{19}$$

называются квантовыми энтропиями подсистем в состояниях (2) и (3). Согласно лемме О. Клейна (см. [15,16])

$$S(x) \geq S_1,\ S(y) \geq S_2. \tag{20}$$

Первоначально полная система находилась в чистом квантовом состоянии, которое характеризуется оператором плотности $\mathbf{R} = |k, \chi\rangle\langle k, \chi|$ и нулевой квантовой энтропией $S = 0$. Последнее обстоятельство не изменилось, естественно, и после взаимодействия (квантовая энтропия полной системы есть инвариант любого унитарного преобразования в L), тогда как S_1 и S_2 возросли.

Отметим особо, что возникающее здесь положение уникально не только для современной физики с ее недолгой трехсотлетней историей. Сама необходимость стохастического лишь описания подсистем при том, что полная система находится в определенном физическом состоянии, противоречит более чем тысячелетней традиции натуральной философии. Кажущаяся парадоксальность ситуации продиктована уже возможностью представить вектор состояния в виде линейной суперпозиции двух или нескольких других, вполне физически различимых. В этом смысле все доквантовые описания систем отвечали бы схеме, в которой фигурируют лишь ортогональные между собой квантовые состояния. Принцип взаимного проецирования физических состояний являет существенно новую концепцию не только для физики, но и для логики вообще. Впервые указанное обстоятельство было отмечено Ю.Ф. Орловым (*Орлов Ю.Ф.* Волновой математический анализ на основе волновой логики (неопубликованная статья)). Хотя сама по себе идея о необходимости дополнить классическую логику новыми категориями содержится уже в работах Дж. фон Неймана [17].

Принцип линейной суперпозиции волновых векторов предопределяет использование некоей метрической меры в построении любой прогностической стратегии. Всякая физическая теория есть лишь формализованный вариант одной из таких стратегий.

Показательно в этом смысле появление понятия вероятности еще внутри (а точнее — параллельно с ней) классической картины мира. Дело в том, что детерминистские геометро-динамические модели всей старой физики (включая теорию относительности) оказались в разительном противоречии с человеческим опытом повседневного судьботворчества. В противоречии с изначальным для здоровой психики убеждением в присутствии творческой воли хотя бы у самого наблюдателя-субъекта. Понятие случайного и вероятностная мера с неясным физическим смыслом послужили на время паллиативом, позволившим немного прикрыть остроту этого противоречия.

Формальная ситуация в сегодняшней физике оказалась полностью подобна (и генетически с ней связана) той, что прослеживается в математическом осмыслении комбинаторики. Первоначально биномиальные коэффициенты и другие факториальные комбинации возникли в математике на чисто игровой основе. Вскоре они оказались полезны и для физики, моделируя какие-то числовые отношения реального бытия. Однако их приложение к физическому прогнозу снова потребовало дополнительных допущений вроде равновероятности, полного перемешивания или других эквивалентов эргодической гипотезы.

Параллельно с этим неожиданно выяснилось, что все хорошо знакомые математикам комбинаторные конструкции естественным образом возникают в матричных элементах теории линейных представлений конечных и унитарных групп [18]. С другой стороны, постепенно прояснилось определяющее значение трансформационных симметрии различных физических состояний для их наблюдаемых свойств. Достаточно вспомнить хотя бы различие квантовых статистик у газов из тождественных частиц с различной перестановочной симметрией. Теперь уже почти очевидно, что и первопричина появления комбинаторных отношений в моделях физической науки лежит именно здесь.

С этой позиции само становление квантовой теории в ее современной интерпретации логично трактовать как естественный шаг по пути, продолжающему знаменитую эрлангенскую программу Ф.Клейна. В основу этой программы заложен идеал построения математики (а по сути, естествознания), в котором различные разделы формальных наук выступали бы как способы изучения групп преобразований и их представлений (знаковых изоморфизмов). Трудно не заметить, что именно такое формопостроение и происходит в сегодняшней фундаментальной квантовой физике.

Продолжим обсуждение двух статистически связанных подсистем. Расставшись в результате столкновения с частью "памяти" о своем прежнем состоянии, подсистема как бы замещает это знание сведениями о состоянии партнера. Квантовые энтропии результирующих состояний удовлетворяют соотношению взаимности [16]:

$$S_1 = S_2. \qquad (21)$$

Справедливость этого равенства не требует идентичности столкнувшихся подсистем (например, чтобы они оказались одинаковыми частицами). Напротив, партнеры по столкновению могут как угодно разниться по своим динамическим свойствам и числу степеней свободы. Для выполнения (21) в любой модели достаточно, чтобы состояние полной системы было чистым ($S = 0$).

Доказательство равенства (21) можно получить непосредственным вычислением, используя свойство унитарности оператора $\mathbf{U}$. Мы же поступим несколько по-иному, исследовав попутно вопрос о косвенных измерениях. Построим апостериорное распределение над $\{y\}$ по результату измерения X. Условные вероятности $p(y|x)$ из (13) представим как диагональные элементы условной матрицы плотности $\langle y|\sigma^{(x)}|y'\rangle$:

$$p(y|x) = \langle y|\sigma^{(x)}|y\rangle = \\ = \frac{|\langle x, y|U|k,\chi\rangle|^2}{\langle x|\rho|x\rangle}. \qquad (22)$$

Согласно принятым выше правилам эта матрица содержит полное физическое описание состояния второй подсистемы, возникшее после измерения заданной переменной X в первой. Действительно, поскольку Y остается пока произвольной, исчерпывающий прогноз последующих измерений над второй подсистемой дается матрицей $\langle y|\sigma^{(x)}|y'\rangle$ и всевозможными ее представлениями в L_2.

Нетрудно убедиться, что $\langle y|\sigma^{(x)}|y'\rangle$ описывает некоторое чистое состояние:

$$\langle y|\sigma^{(x)}|y'\rangle = \\ = \frac{\langle x, y|U|k,\chi\rangle\langle k,\chi|U^+|x,y'\rangle}{\langle x|\rho|x\rangle}. \qquad (23)$$

Ему следует сопоставить условный волновой вектор $|\varphi(x)\rangle$ (результат косвенной редукции)

$$|\varphi(x)\rangle = \frac{\langle x|U|k,\chi\rangle}{(\langle x|\rho|x\rangle)^{1/2}}, \qquad (24)$$

уже имеющий внутренний смысл независимо от выбора того или другого базиса $\{|y\rangle\}$.

Вычислим скалярное произведение условных векторов, редуцированных при различных результатах x (но по-прежнему с фиксированной $\mathbf{X}$):

$$\langle\varphi(x')\,|\varphi(x)\rangle = \sum_y \langle\varphi(x')\,|y\rangle\langle y|\varphi(x)\rangle = \\ = \frac{\langle x|\rho|x'\rangle}{(\langle x|\rho|x\rangle\langle x'|\rho|x'\rangle)^{1/2}}, \qquad (25)$$

где $\{|y\rangle\}$ — любой ортонормированный базис в L_2. Интересно, что согласно (25) в общем случае набор $\{|\varphi(x)\rangle\}$ оказывается неортогональным [16]. Чуть позже мы покажем, что это существенное обстоятельство открывает путь к осмыслению нестационарных косвенных измерений, сопоставимых с классическими наблюдениями фазовых траекторий.

Ортогональная косвенная редукция реализуется лишь при $\mathbf{X} \equiv \mathbf{N}$, когда $\langle n|\rho|m\rangle = \rho_n\delta_{nm}$. Это достигается измерением переменной $\mathbf{N}$, коммутирующей с $\hat{\rho}$. Воспользуемся свойствами состояний, порождаемых таким измерением. Набор $\{|\varphi(n)\rangle\}$ необязательно полон в L_2, хотя и ортогонален. Дополнив его ортогональным образом до $\{|\nu\rangle\} \ni \{|\varphi(n)\rangle\}$, легко видеть, что матрица плотности $\langle\mu|\sigma|\nu\rangle$ безусловного смешанного состояния второй подсистемы диагонализуется именно на этом базисе:

$$\langle\mu|\sigma|\nu\rangle = \sum_n \rho_n\langle\mu|\varphi(n)\rangle\langle\varphi(n)|\nu\rangle = \\ = \sigma_\nu\delta_{\mu\nu}. \qquad (26)$$

Это возможно лишь в том случае, если наборы ненулевых собственных чисел операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ совпадают. В частности, отсюда следует равенство

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}^K = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}^K, \qquad (27)$$

где K — любое целое положительное число, а возведение в степень производится по обычным правилам операторного умножения. Наконец, по той же причине все ненулевые слагаемые в суммах (18) и (19) попарно совпадают, что и доказывает равенство (21).

Соотношения взаимности (21) и (27) оказываются просто трюизмами, если при взаимодействии сохраняется какая-либо аддитивная физическая величина, а начальные состояния $|k\rangle$ и $|\chi\rangle$ суть ее собственные векторы в подсистемах. Продемонстрируем это на примере сохранения энергии для подсистем с невырожденными спектрами.

Пусть $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ — гамильтонианы подсистем и $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}$

— взаимодействие между ними. Суммарная энергия при взаимодействии сохраняется, если $[\mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2] = 0$. Заметим, что для такой возможности спектр оператора $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ обязан быть вырожден даже при нашем условии невырожденности спектров $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$.

Выберем начальные чистые состояния $|k\rangle$ и $|\chi\rangle$ стационарными:

$$\mathbf{H}_1|k\rangle = E_k|k\rangle,\ \mathbf{H}_2|\chi\rangle = E_\chi|\chi\rangle. \tag{28}$$

Унитарный оператор эволюции полной системы в представлении взаимодействия $\mathbf{U} = \exp(-i\,\mathrm{H}_{\text{int}}\,t)$, где t — время взаимодействия (пользуемся шкалой, в которой $\hbar = 1$). При сделанных допущениях результирующие матрицы плотности $\langle n|\rho|m\rangle$ и $\langle\mu|\sigma|\nu\rangle$ описывают стационарные смешанные состояния подсистем и диагональны в энергетическом представлении.

Рассмотрим в L подпространство состояний $|n,\nu\rangle$ с одинаковыми $E_n + E_\nu$, совпадающими с начальным $E_k + E_\chi$. Тогда вероятность $p(n) = \rho_n$ значения E_n совпадает с $p(\nu)$ при $E_\nu = E_k + E_\chi - E_n$ просто в силу сохранения энергии. Таким образом, природа соотношений (21) и (27) становится абсолютно прозрачной. В этом смысле общий вариант указанных соотношений фактически означает, что при любом унитарном повороте в L всегда можно построить аддитивный инвариант (с точностью до унитарных нефизических поворотов в L_1 и L_2).

Обсудим в этой же модели случай нестационарного измерения. Это означает, что измеряемая в первой подсистеме величина $\mathbf{X}$ не коммутирует с $\mathbf{H}_1$. Соответственно ее собственные векторы $|x\rangle$ описывают нестационарные состояния. Нестационарными окажутся и результаты косвенной редукции $|\varphi(x)\rangle$ — апостериорные состояния второй подсистемы. Согласно (25) различные $|\varphi(x)\rangle$ еще и не ортогональны друг другу. Поясним, почему это существенно.

Рассмотрение неортогональных между собой волновых пакетов необходимо для установления соответствия между квантовыми уравнениями и классическими законами движения. Именно поэтому такие состояния широко дискутировались на заре появления квантовой теории. Нерасплывающиеся гауссовы пакеты для квантового осциллятора (когерентные состояния — [19]) адекватны описанию монохроматического волнового поля с известными амплитудой и фазой. Они оказались нужны не только для полуклассической интерпретации квантовой оптики, но и позволили существенно упростить некоторые строгие расчеты. Когерентные векторы $|\alpha\rangle$ не ортогональны между собой, хотя и образуют полный (точнее, сверхполный) набор в гильбертовом пространстве состояний осциллятора. Классическому наблюдению за осциллятором разумно было бы сопоставить редукцию его состояний к таким векторам. Из сказанного выше ясно, что необходимое для такой возможности логическое звено как раз и содержит в себе нестационарное косвенное измерение.

Подчеркнем, что сами по себе апостериорные состояния не являются по отношению к исходному смешанному состоянию ни потенциально нестационарными, ни стационарными — все зависит от способа измерения. Они априорно просто вообще не существуют в качестве каких-то, пускай, скрытых от наблюдателя, но реальных сущностей. Это, если угодно, еще раз поясняет неприменимость эргодической концепции к наблюдению за квантовыми системами.

Заканчивая рассмотрение взаимосвязи двух подсистем, приведем без доказательства обобщение некоторых энтропийных неравенств на случай смешанных начальных состояний. Генезис таких состояний снова следует понимать как результат прежнего взаимодействия подсистем с каким-то внешним окружением, но углубляться в эту сторону вопроса сейчас не будем.

Итак, пусть вместо исходного $|k,\chi\rangle$ начальные состояния описываются операторами $\hat{\rho}_0, \hat{\sigma}_0$ и независимы между собой. По той же схеме, что и в (18), (19), сопоставим им начальные квантовые энтропии S_{01} и S_{02}, обозначив $S = S_{01} + S_{02}$. По-прежнему обозначая S_1, S_2 результирующие квантовые энтропии провзаимодействовавших подсистем, приведем неравенство (см. [16])

$$|S_1 - S_2| \le S. \tag{29}$$

Поскольку $(S, S_1, S_2) \ge 0$, это неравенство обобщает соотношение (21).

Кроме того, из неравенства Шеннона (17) и леммы Клейна в форме $S(x,y) \ge S$ следует [15, 20]

$$S_1 + S_2 \ge S. \tag{30}$$

Далее, мы увидим, что (30) имеет ключевое значение для обоснования статистической термодинамики.

4. Случайное блуждание. Обширной сферой естественнонаучных приложений теории вероятностей оказалась физическая кинетика. Задачи о последовательных эволюциях физической системы под случайным воздействием внешних силовых факторов составляют ее суть. К настоящему времени выяснилось, что кинетика представляет собой лишь одну (хотя и важную) ветвь общей теории открытых квантовых систем [21]. В сущности, рассмотрение газовой молекулы как открытой системы использовал еще Л.Больцман. Эволюционное уравнение для одночастичной функции распределения (кинетическое уравнение Больцмана) как раз и закладывает основы такой теории. Для полноты нашего анализа уместно проследить, как в рамках формально-метрического понимания вероятности достигается адекватное общепринятому описание процессов случайного блуждания квантовой системы.

Введем основные понятия, нужные для описания открытой системы [21, 22]. Пусть окружающая среда представляет собой совокупность идентичных физических подсистем (однородный поток), с которыми поочередно взаимодействует интересующая нас открытая система (объект). Обозначим $\widehat{\rho}_0$ и $\widehat{\sigma}_0$ операторы плотности начальных состояний объекта и одной из внешних подсистем (представителя потока), предполагая их статистически независимыми. Будем рассматривать последовательные взаимодействия представителей потока с объектом и покажем, что при некоторых допущениях эволюция его состояний может быть описана в формализме марковских цепей.

Пусть $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{H}_r$ — операторы Гамильтона объекта и представителя соответственно, а n и ν — номера их собственных значений (полагаем спектры невырожденными). Снова введем взаимодействие $\mathbf{H}_{\text{int}}$, наложив условие $[\mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r] = 0$. Опираясь на формулы предыдущего раздела, запишем изменение состояния объекта за один акт взаимодействия

$$\langle n|\rho_1|m\rangle = \sum_{\nu} \langle n,\nu|U\rho_0\sigma_0 U^+|m,\nu\rangle. \tag{31}$$

В частном случае, когда на объект непрерывным образом воздействует световой луч, за время t одного акта взаимодействия следует принять время когерентности луча.

Пронумеруем индексом j последовательные взаимодействия объекта с представителями потока и обозначим $\widehat{\rho}_j$ оператор плотности его состояния после j-го воздействия. Считая начальные состояния всех представителей одинаковыми и независимыми между собой, с помощью (31) получим

$$\langle n|\rho_{j+1}|m\rangle = \sum_{p,q} (n,m|p,q)\,\langle p|\rho_j|q\rangle; \tag{32}$$

здесь обозначено

$$(n,m|p,q) = \sum_{\mu,\nu,\lambda} \langle n,\mu|U|p,\nu\rangle\,\langle\nu|\sigma_0|\lambda\rangle \times \\ \times \langle q,\lambda|U^+|m,\mu\rangle. \tag{33}$$

Будем называть матрицу (33) переходной характеристикой обобщенной марковской цепи. Заметим, что элементы $(n, m|p, q)$ не имеют, вообще говоря, смысла переходных вероятностей. Они обладают очевидным свойством

$$\sum_n (n,n|p,q) = \delta_{pq}, \tag{34}$$

вытекающим из унитарности оператора $\mathbf{U}$ и нормировки $\mathrm{Sp}\,\widehat{\sigma}_0 = 1$.

Наложим требования стационарности начальных состояний $[\widehat{\rho}_0, \mathbf{H}_s] = 0$, $[\widehat{\sigma}_0, \mathbf{H}_r] = 0$. Тогда $\widehat{\rho}_0$ и $\widehat{\sigma}_0$ в энергетическом представлении изобразятся диагональными матрицами. Более того, с принятым условием сохранения суммарной энергии $[\mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r] = 0$ диагональными останутся и все $\langle n|\rho_j|m\rangle = \rho_n^{(j)}\,\delta_{nm}$ (см. [23]), а вместо (32) получим

$$\rho_n^{(j+1)} = \sum_m p(n|m)\,\rho_m^{(j)}; \tag{35}$$

здесь $p(n|m) = (n, n \mid m, m)$ — обычные переходные вероятности классической цепочки Маркова [24], алфавитом которой служит энергетический спектр объекта. Необходимая нормировка для $p(n|m)$ с очевидностью обеспечивается формулой (34).

Коэффициенты в уравнениях (32), (35) не зависят от того, производится ли измерение после очередного воздействия на объект. Разумеется, начальное состояние для вычисления последующих эволюции объекта после каждого измерения (редукции) нужно выбирать соответственно полученному результату. По существу, цепочка (35) представляет собой кинетическое уравнение с дискретным временем (0, 1,..., j,...), где $p(n|m)$ выражается через (33) и структурно подобна ядру интеграла столкновений. Аналогично этому (32) есть квантовое кинетическое уравнение, в котором переходная характеристика $(n, m\,|\,p, q)$ не обязательно имеет вероятностный смысл [25].

Принципиально неклассическим оказывается случайное блуждание объекта под воздействием чистого стационарного потока $\widehat{\sigma}_0 = |\chi\rangle\langle\chi|$, где $\mathbf{H}_r|\chi\rangle = E_\chi|\chi\rangle$. Тогда вся наблюдаемая стохастичность зарождается непосредственно при воздействии потока на объект, а не в прежних взаимодействиях с каким-либо иным физическим окружением. В этом случае блуждание снова описывается простой цепочкой (35), где

$$p(n|m) = \sum_{\nu} |\langle n,\nu|U|m,\chi\rangle|^2. \tag{36}$$

Таким образом, в рамках довольно естественной физической модели открытой системы не потребовалось никаких дополнительных постулатов для обоснования марковского характера блуждания. Не понадобилось и явного или неявного привлечения скрытых источников стохастичности кроме принципа линейной суперпозиции квантовых состояний и принятого с *определением 3* метрического правила.

5. Тепловое равновесие. Традиционный подход к статистическому обоснованию феноменологической термодинамики состоит в рассмотрении замкнутой системы частиц. Классические работы Цермело, Пуанкаре, Гиббса (см., например, [26]) содержат ряд весьма глубоких и доказательных утверждений, но не решают проблемы окончательно. До сего времени аналитические статьи по изучению эргодической гипотезы концентрируют на себе пристальное внимание математиков-прикладников и физиков-теоретиков.

Модель изолированной системы частиц занимает не вполне типичное положение в структуре физики. Ее никак не отнесешь к числу точно решаемых моделей, на базе которых развитие теории обычно идет увереннее. Исторически такой подход восходит скорее к специфическому образному строю специалистов по небесной механике, а не продиктован логикой развития науки.

Между тем, в рамках теории открытых систем каноническое распределение как некоторый предельный тип смешанных состояний получается на основе строгих неравенств. Логический эквивалент второго начала термодинамики содержится уже в неравенстве (30). Некоторые метафизические вопросы из прежних дискуссий при таком подходе действительно не находят ответов, но едва ли в этом и есть нужда.

Для выполнения обозначенной программы введем понятие стабильного состояния открытой системы, находящейся под воздействием однородного потока [22]. (Термин "стабильное" состояние мы используем взамен двусмысленного в данном контексте клише "стационарное состояние", нередко употребляемого в русской научной литературе применительно к открытым системам.) Ограничимся опять рассмотрением стационарных однородных потоков и взаимодействий, сохраняющих энергию. Обращаясь к (32) и (35) потребуем, чтобы состояние $\hat{\rho}$ объекта после взаимодействия с потоком и надлежащего шпурования не изменялось:

$$\rho_n = \sum_m \rho_m \sum_{\mu,\nu} \sigma_\mu^{(0)} \, |\langle n,\nu|U|m,\mu\rangle|^2. \qquad (37)$$

В терминах цепочки (35) это означает, что стабильные ρ_n могут быть найдены как решение системы линейных уравнений, получаемых из требования $\rho_n^{(j+1)} = \rho_n^{(j)}$. Определенного внимания заслуживает проблема возможной сингулярности матрицы из коэффициентов $p(n\,|\,m)$. Однако для состояний с максимальной энтропией, которыми здесь и будем заниматься, такой проблемы не возникает.

В наиболее общей постановке уравнение типа (37) потенциально содержит в себе всю теорию стабильного состояния открытой квантовой системы. В частности, сюда относится теория гомеостаза — поддержания стабильности существенно неравновесного состояния объекта за счет увеличения энтропии в неравновесном потоке. Мы же напротив, ограничиваемся пока обсуждением распределений с максимальной энтропией.

Пусть совокупное состояние объекта и представителя потока обладает максимальной квантовой энтропией S при заданной средней суммарной энергии $\langle H_s + H_r\rangle$. Оператор плотности $\mathbf{R}$ системы в таком состоянии получается из вариационного уравнения Эльзассера [27]

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{R} &= \ln \hat{\rho} + \ln \hat{\sigma}_0 = \\ &= -(1+\eta)\,\mathbf{1} - \alpha(\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r). \end{aligned} \qquad (38)$$

Легко видеть, что это дает просто гиббсовское распределение по энергиям. Неопределенные множители Лагранжа α и η имеют простой физический смысл: $\alpha^{-1} = T$ есть энергетическая температура, а $\exp(1+\eta) = Z$ — обычная статсумма. Для подавляющего большинства рассматриваемых в различных приложениях физических систем максимальная энтропия $S_{\max}$ как функция от $\langle H_s + H_r\rangle$ монотонна.

Убедимся, что при таких начальных условиях состояние $\hat{\rho}$ обладает свойством безусловной стабильности, т.е. является решением уравнения (37) независимо от конкретного вида взаимодействия $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}$ или эволюционного оператора $\mathbf{U}$. Действительно, в силу (30) и условия сохранения энергии сумма квантовых энтропии подсистем не может измениться, а в силу единственности решения (38) не меняются и сами состояния. Таким образом, под воздействием однородного равновесного потока (термостата) асимптотически устанавливается стабильное состояние объекта, которое описывается гиббсовским распределением при той же температуре. Если же состояние потока отличается от равновесного, то согласно (30) суммарная энтропия может только возрастать. Именно такая выделенность смешанных состояний с максимальной энтропией и сделала возможной равновесную термодинамику (точнее, термостатику). В случаях, когда наряду с энергией существуют другие аддитивные инварианты взаимодействия, понятие статистического равновесия можно обобщить, а класс безусловно стабильных состояний — расширить [22].

Описание на том же языке энергообмена в квазиравновесных системах позволяет связать его с изменением энтропии, обосновав тем самым традиционное феноменологическое описание теплопередачи. Для этого снова нужно рассмотреть гиббсовские начальные состояния подсистем, но с различными температурами T_s, T_r. Полагая взаимодействие достаточно слабым (первый порядок теории возмущений для $\langle n, \nu | U | m, \mu \rangle$), при довольно общих прочих предположениях можно доказать равенство (см, [22])

$$\Delta S = S_s + S_r - S = \\ = \Delta \langle H_s \rangle \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_r} \right), \qquad (39)$$

где $\Delta \langle H_s \rangle$ — изменение средней энергии объекта в процессе взаимодействия, а S_s и S_r — результирующие квантовые энтропии подсистем. Формула (39) оправдывает формальную трактовку квазиравновесной энергопередачи как обмена теплом $\delta Q = T\mathrm{d}S$, составляющую фундамент аксиоматической термодинамики.

Идеология уравнения (37) предлагает естественный подход и к задачам неравновесной термодинамики. В частности, на этом пути легко построить примеры, позволяющие строгими методами квантовой теории проверить справедливость принципа Пригожина [28] о минимальном производстве энтропии в стабильном состоянии.

6. Заключение. Итак, предлагаемая метрическая схема обеспечивает обоснованный формализм для решения многих существенных задач физической стохастики. В каждом случае важно лишь построить адекватную модель начального состояния и физического взаимодействия, после чего недвусмысленно формализовать процедуру измерения (в теории шумов и флуктуаций последнего часто не делают, что может вести к недоразумениям). В остальном же нужно с осторожностью относиться к псевдонаглядным интерпретациям случайного, апеллирующим нередко к устаревшим ложным формам "классического здравого смысла".

Очевидная генетическая связь обсуждавшихся моделей с парадоксом Эйнштейна—Подольского—Розена поучительна. Тонкая интуиция Альберта Эйнштейна ощутила, по-видимому, какой клубок вековых противоречий задет. Но принцип суперпозиции квантовых состояний в те времена не стал еще основой физического мышления, не вполне осознается он и сейчас. Не так просто преодолевается и предрассудок геометро-динамического идеала мироздания, берущий начало еще в аксиоматике Эвклида, в старинных истоках эллинской натурфилософии. Все наши естественные науки вслед за математикой пронизаны метафизическим убеждением в непрерывности мира. Хотя даже чисто логически ясно, что фетишизация континуальных множеств неразумна и что они избыточны для познания. Допустимо предположить, что и само гильбертово пространство в последующих теориях будет редуцировано к его дискретному аналогу на базе теории конечных групп.

Убеждение в грядущих деформациях самых основ естествознания подкрепляется и положением дел в современной математике. Продолжавшаяся многие десятилетия попытка выстроить самоценное и автономное вне человеческого опыта здание формальных наук заканчивается, похоже, полным идейным крахом [29]. Один из наиболее впечатляющих результатов на пути происходящей переоценки ценностей — теорема Левенгейма—Сколема о возможности дискретно-математического моделирования любой аксиоматической системы. Одновременно выясняется принципиальная необходимость использовать внешние по отношению к математике естественнонаучные факторы для выбора математической модели. Теперь уже практически очевидно, что математика может быть лишь одним из языков чувственного познания, не более. И как самой науке, так и ее языку предстоит еще большой труд по ревизии надежности своих точек опоры.

Континуальный менталитет почти неотвратимо ведет к философскому динамизму, к устранению творческого волевого начала из природы бытия. Здесь множество вопросов, на которые нет полных ответов. Тайна велика, но забрезжила уже надежда на просвет.

В более общем плане можно усмотреть и обратную связь науки с душевными стремлениями евроамериканской цивилизации за последние три столетия. Эта тема еще ждет своих исследователей, перед которыми встанет задача необычайной глубины — компетентно и гармонично переосмыслить фундаментальное триединство древнейших ветвей развития человеческого духа: культуры, науки, религии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйнштейн А.* Собр. научи, трудов. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 604—611.
2. *Фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
3. *Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.* УФН. 1992,**162: 7**, 151.
4. *Демуцкий В.П., Половин Р.В.* УФН. 1992,**162: 10**, 93.
5. *Хамермеш М.* Теория групп. М.: Мир, 1966.
6. *Крестьянинов А.С., Митюгов В.В.* Радиотехника и электроника. 1986, **31: 5**,891.
7. *Колмогоров А.Н.* УМН. 1938, вып. 5, 52.
8. *Винер Я.* Теория предсказания. — Современная математика для инженеров. М.: ИЛ, 1958. С. 185—215.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.:

ГИФМЛ, 1963.
11. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1978. С. 56—59.
12. *Менскш М.Б.* Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. М.: Наука, 1976.
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964.
14. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 433—460.
15. *Митюгов В.В.* Проблемы управления и теории информации. 1973, **2: 3—4**, 243.
16. *Митюгов В.В.* Физические основы теории информации. М.: Сов. радио, 1976.
17. *Фон Нейман Дж.* Общая и логическая теория автоматов. — *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? М.: ГИФМЛ, 1960.
18. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
19. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов. — Квантовая оптика, квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966.
20. *Стратонович Р.Л.* Изв. вузов. — Радиофизика. 1965, **8: 1**, 116—141.
21. *Davies E.B.* Quantum Theory of Open Systems. London: AP, 1976.
22. *Митюгов В.В.* Изв. вузов. Радиофизика. 1989, **32: 4**, 436.
23. *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.
24. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
25. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
26. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
27. *Elsasser W.M.* Phys. Rev. 1937, **52: 9**, 987.
28. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИЛ, 1960.
29. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.

Дерево парадокса. М и т ю г о в В.В. "Успехи физических наук". Август 1993 г. Т.163, № 8. — 103 — 114. (Методические заметки). Анализируется специфика стохастичности, возникающей при взаимодействии (столкновении) квантовых подсистем. Показано, что ключевая для классической статистики эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина или ее аналог в квантовой теории отсутствуют принципиально. Поэтому квантовые вероятности в рамках эргодической концепции не могут быть определены. На базе фоннеймановской теории измерений предлагается метрическое определение вероятности как меры сравнения апостериорной физической ситуации с априорной. Продемонстрирована работоспособность принятого подхода в задачах о случайном блуждании и в теории теплового равновесия. Библиогр. ссылок 29.