

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА И ТЕОРЕМА БЕЛЛА

А.В. Белинский, Д.Н. Клышко

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

(Статья поступила 13.04.93 г.)

Посвящается памяти
Сергея Александровича Ахманова

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (1).
2. Обзор литературы (3).
3. Эксперименты с двумя наблюдателями (6). 3.1. Двухканальный интерферометр. 3.2. Неравенства Белла для двух наблюдателей. 3.3. Классическая стохастическая модель. 3.4. Квантовая теория двухфотонной интерференции. 3.5. Учет случайных совпадений. 3.6. Интерференция сжатого шума. 3.7. Гомодинное детектирование в интерференции интенсивности.
4. Эксперименты с тремя наблюдателями (19). 4.1. Шестимодовый трехканальный интерферометр. 4.2. Неравенство Белла для трех наблюдателей. 4.3. Теорема Белла без неравенств. 4.4. Стохастические модели трехканальной интерференции. 4.5. Квантовая теория трехфотонной интерференции.
5. Теорема Белла для N наблюдателей (27). 5.1. N -канальный интерферометр. 5.2. Неравенство Белла для N наблюдателей. 5.3. Квантовая теория N -фотонной интерференции и нарушение неравенства Белла. 5.4. Классические волновые модели. 5.5. Парадокс ГХЦ в N -канальном эксперименте.
6. Другие примеры противоречий между квантовой механикой и "здоровым смыслом" (32). 6.1. Теорема Кохена—Спекера. 6.2. Противоречие Стаппа. 6.3. Противоречие, основанное на неравенстве Коши—Шварца.
7. Заключение (36).
- Приложения (36). I. Спины, фотоны и фазы. II. Модель двух частиц с антикоррелированными угловыми моментами. III. Излучение параметрического преобразователя частоты в интерферометре. IV. Усреднение по случайным фазам в классических моделях.
- Список литературы (43).

Аббревиатуры: ГХЦ — Гринбергер, Хорн, Цайлингер, КС — Кохен, Спекер, КТ — квантовая теория, НБ — неравенства Белла, ТСП — теория скрытых параметров (если не оговорено особо, то имеется в виду локальная ТСП), ЭПР — Эйнштейн, Подольский, Розен.

1. Введение. Проблемы, поставленные много лет назад Эйнштейном, Подольским и Розеном (ЭПР) [1], Бомом [2] и Беллом [3] (см. также обзоры [4—10]), продолжают волновать и новые поколения физиков. В значительной мере это связано с тем, что обнаруженное Беллом противоречие в предсказаниях квантовой теории (КТ) и теории скрытых параметров (ТСП) можно довольно убедительно разрешить (в пользу КТ, разумеется) критическим экспериментом в отличие от большинства других квантовых парадоксов. ТСП тесно связана с ансамблевой статистической интерпретацией КТ, поэтому такие эксперименты — реальные или мысленные — служат серьезным аргументом в вечном споре приверженцев статистической (эйнштейновской) и ортодоксальной (беровской, или копенгагенской) интерпретаций, а также их многочисленных модификаций (см., например, обзор [8] и учебник [10]).

Возможно, все же в будущем этот спор разрешится (не исключено — в пользу третьего пути), и истории физики станут рассматривать его как еще один яркий пример заблуждений, которым были подвержены даже лучшие умы прошлого.

В этом русле в последние годы наметилось несколько новых направлений теоретических и экспериментальных исследований. Мы ставили задачу описать некоторые из них, представляющие, на наш

взгляд, наибольший интерес. К ним относятся в частности:

- использование эффективных нелинейно-оптических параметрических источников света, дающих направленные потоки "бифотонов" (коррелированных пар практически одновременно рожденных квантов) и позволяющих осуществлять новые модификации оптических экспериментов типа ЭПР [11—13];

- разработка трех- и, вообще, N -канальных моделей экспериментов с корреляцией типа ЭПР — Бома [14, 15] и формулирование соответствующих обобщенных неравенств Белла (НБ) в форме Мермина и др. [16—21];

- теорема Гринбергера, Хорна и Цайлингера (ГХЦ), или теорема Белла без неравенств [14, 15, 22, 23];

- новые простые примеры [24, 25], демонстрирующие и доказывающие теорему Кохена — Спекера (КС) [26—29].

Реализация оптических методов проверки НБ, впервые осуществленная Клаузером и др. [30—32] (см. также обзоры [4, 5, 9]), имеет ряд преимуществ как в практическом отношении, так и в плане простоты описания, допускающего наглядные классические и полуклассические модели. Возможность параллельных квантовой и классической трактовки оптических экспериментов и положена в основу нашего изложения. Надеемся, что такой подход способствует хотя бы частичному сближению квантовых и классических представлений о сущности экспериментов типа ЭПР — Бома и, вообще, эффектов многофотонной интерференции. Той же цели служит и преимущественное использование нами представления Гейзенберга для квантового описания интерференционных схем. С его помощью мы попытаемся показать неудачность термина "нелокальность", который почти всегда рассматривается как определяющий признак обсуждаемых квантовых эффектов.

Представление Гейзенберга позволяет перенести квантовые парадоксы (по крайней мере, оптические) с выхода на вход интерферометра, который вместе с детекторами можно считать классическим устройством для исследования действительно квантового объекта — исходного поля. При этом неклассическими становятся лишь статистические свойства входного еще локализованного поля, и проблема сводится к основному парадоксу КТ — принципу дополнительности. Приведенные соображения касаются и популярных в настоящее время эффектов двух- и многофотонной интерференции, не связанных непосредственно с НБ, но проявляющих, как принято считать, "нелокальность" [33—35].

Хотя парадоксы ЭПР и Белла описывались в популярной литературе (см., например, [36—38]) и

даже учебниках по квантовой механике (отметим замечательную во многих отношениях книгу Садбери [10]), они все же сохраняют некий ореол таинственности, эзотеричности, репутацию недоступности для непосвященных. Отчасти это связано с традиционным использованием спиновой модели Бома [2], отчасти — с описанием оптических моделей в представлении Шрёдингера, т.е. в терминах эволюции вектора состояния двухфотонного поля при прохождении через интерферометр. Все это затрудняет сопоставление с привычной многим картиной интерференции классических волн.

В приложениях I и III мы показываем, что между N коррелированными спинами $1/2$ и оптическими N -фотонными полями имеется однозначное соответствие. При этом каждый фотон принадлежит двум модам, отличающимся типом поляризации и/или направлением волнового вектора. Магнитному анализатору спина Штерна—Герлаха соответствует поляризационный анализатор (призма) или светоделитель с фазовым компенсатором, которые попарно перемешивают моды. Аналогия можно распространить и на частицы с произвольным спином j , когда каждый фотон принадлежит $2j+1$ модам [39].

Значительное внимание мы уделяем рассмотрению конкретных экспериментальных процедур, соответствующих вводимым в теорию понятиям и математическим символам. Вообще, представляется, что большинство квантовых парадоксов и понятий, таких как теорема КС и редукция волновой функции, целесообразно рассматривать *операционально*, т.е. с указанием конкретных, хотя бы мысленных, экспериментов и измерительных процедур, включая операцию усреднения при повторных испытаниях одинаково "приготовленных" квантовых систем. Поэтому разделы 3 — 5 начинаются именно с описания экспериментов. Такой подход позволил, в частности, заключить, что вопреки ожиданиям единичные испытания не обнаруживают противоречий между КТ и ТСП даже в условиях идеальной (полной) корреляции показаний наблюдателей.

План нашего изложения ясен из оглавления. После краткого обзора литературы, в основном за последние 10 лет, последовательно рассмотрены двух-, трех- и N -канальные ЭПР-эксперименты, описанные в рамках ТСП, КТ, и несколько классических моделей, в которых "неуловимые" скрытые параметры получают реальное воплощение в виде случайных фаз квазимонохроматических волн, генерируемых параметрическими преобразователями.

Отдельный раздел посвящен теореме КС, парадоксу Стаппа и противоречию, вытекающему из неравенства Коши—Шварца.

Дополнительные и вспомогательные материалы вынесены в приложения I—IV.

Разделы мы стремились сделать по возможности автономными. Читатели, желающие получить лишь самое общее представление о НБ и соответствующих оптических экспериментах с двухфотонным светом, могут ограничиться лишь чтением подразделов 3.1 — 3.4, где подробно описаны простейший опыт и его интерпретация в рамках трех различных подходов, использующих, соответственно, феноменологическую теорию скрытых параметров Белла, классическую модель интерферирующих волн со случайными фазами (предложенную авторами данного обзора [19]) и, наконец, формальное квантовое описание корреляции фотонов. Следующие далее разделы и приложения рассчитаны на интересующихся более тонкими аспектами проблемы и современными направлениями ее исследований.

2. Обзор литературы. В 1935 г. ЭПР [1], рассматривая квантовую систему из двух коррелированных частиц, пришли к заключению, что формальная квантовая теория (КТ) не дает полного описания физической реальности. Отсюда следует, что можно ввести некоторые дополнительные параметры λ , дающие полное описание без элементов случайности. Для иллюстрации доводов ЭПР Бом в 1951 г. рассмотрел систему двух спинов $1/2$ [2]. Белл [3] в 1964 г. в весьма общем виде показал, что ТСП и КТ приводят в модели Боме к противоречивым предсказаниям. Одно из немногих допущений Белла заключалось в естественном предположении о *локальности*, т.е. отсутствии влияния двух удаленных измерительных приборов друг на друга.

Обнаруженное Беллом противоречие (теорема, или парадокс, Белла) ставит под сомнение перспективность программы исследований, намеченной ЭПР (полагаем, что термины *противоречие*, *теорема* и *парадокс* могут считаться синонимами в данном контексте). В простейшем случае оно возникает не только в модели Боме, но и в опыте с двумя коррелированными фотонами, каждый из которых принадлежит двум модам [11—13, 30—32, 39—41]. Некоторая комбинация измеряемых величин S , которую назовем *наблюдаемой Белла*, в рамках ТСП после усреднения по функции распределения вероятности ρ_λ для множества скрытых параметров λ не может превышать единицы:

$$|\langle S \rangle_\rho| \leq 1. \quad (2.1a)$$

При этом

$$\rho_\lambda \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\lambda d\lambda = 1.$$

Для удобства мы используем определение S , вдвое меньшее общепринятого.

С другой стороны, в рамках КТ существуют нефакторизуемые состояния $|\psi\rangle$, называемые *перемешанными*, иначе — *связанными* или *перепутанными* (entangled states), в которых среднее значение оператора S , соответствующего наблюдаемой Белла, принимает значение

$$\langle S \rangle_\psi = \sqrt{2} \quad (2.16)$$

(далее мы, как правило, не будем различать понятия наблюдаемой и соответствующего ему оператора).

Противоречие (2.1 а, б), которое будет подробно обосновано в разделе 3, неоднократно проверялось экспериментально, в основном оптическими методами [11—13, 30—32]. При этом, разумеется, использовалось единственно возможное на практике "частотное" определение среднего

$$\langle S \rangle_{\text{exp}} \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L S_i, \quad (2.2)$$

где L — число испытаний.

По существу, эти эксперименты базируются на некоей разновидности эффекта *интерференции интенсивности* Брауна — Твисса [42, 43]. Его характерной чертой является гармоническая модуляция корреляции интенсивности двух световых пучков (мод):

$$\langle I_1 I_2 \rangle \propto 1 + V \cos \varphi, \quad (2.3)$$

где V — видность интерференции, а φ — определенная комбинация фазовых задержек в оптическом тракте или — для поляризационного эксперимента — удвоенный угол между осями анализаторов.

Феноменологическая теория Белла оперирует с дискретными двузначными (дихотомными) наблюдаемыми типа $A = \pm 1$, поэтому детектирование должно осуществляться в режиме счета фотонов. КТ предсказывает идеальную видность $V = 1$ при одновременном поступлении на входы интерферометра по одному фотону. На практике такой стационарный "двухфотонный" свет генерируется либо при двухквантовых переходах (каскадных [30, 31] или прямых [32]) в атомных пучках, либо более эффективным методом — в результате распада квантов первичного излучения *накачки* на пары вторичных фотонов — эффект *параметрического рассеяния*, или *параметрического преобразования частоты вниз* (down-conversion) [11—13].

Если акты рождения фотонных пар происходят слишком часто, то в пределах постоянной времени детектирования они иногда перекрываются, что приводит к "случайным" совпадениям фотоотсчетов. При этом видность интерференции снижается,

а квантовое и экспериментальное значения наблюдаемой Белла не превышают

$$\langle S \rangle = \sqrt{2} V, \quad (2.4)$$

так что НБ не нарушается для $V \leq 0,71$.

Более сильное ограничение видности $V \leq 0,5$ дают классические модельные теории, описывающие интерференцию случайных волн (подраздел 3.3).

Однако в большинстве экспериментов видность V превосходила критическое значение 0,71. Здесь следует оговориться: применимость рассмотрения Белла к реальным условиям ограничена дополнительными, не всегда явными, предположениями, имеющими вполне "разумный" или даже "очевидный" характер, но, тем не менее, подвергающихся дощному критическому анализу [44, 45].

В большинстве экспериментов типа ЭПР—Белла применялась поляризационная интерферометрия с коррелированными по поляризации фотонами. Но после разработки эффективных параметрических источников направленных потоков поляризованных фотонов с коррелированными фазами, или, иначе, с коррелированными *квадратурными компонентами*, начали использоваться новые типы интерферометров интенсивности. Так, Рарити и Тапстер [13] получили видность $V = 0,8$ в схеме с двумя интерферометрами Маха—Цендера с отсутствующими входными светоделителями. Идея такого эксперимента, выдвинутая еще в [46, 47], будет подробно разобрана в подразделе 3.1. Ряд аналогичных модификаций рассматривался также в [39, 48—53].

Лишь недавно впервые реализован опыт, демонстрирующий парадокс ЭПР для непрерывных наблюдаемых с гомодинным интерферометром [54]. Подобные схемы обсуждались ранее в [55—59] (см. также подраздел 3.7).

В последнее время появились и другие интересные предложения [60—72]. Так, Жуковский и Цайлингер [70] проанализировали комбинированную схему, где в одном из каналов поляризационный интерферометр, а в другом — Маха—Цендера.

Джоши и Лаванде [72] рассмотрели систему сильно возбужденных двухуровневых атомов и ее резонансную флуоресценцию в качестве источника света интерферометра интенсивности, генерирующего пары коррелированных фотонов.

Оливер и Строуд предложили вместо спинов или фотонов использовать два или три ридберговских атома, возбужденных в нефакторизуемое состояние одним общим фотоном [71]. Выведенное ими НБ для трех наблюдателей оказалось частным случаем N -канальных НБ, найденных Мермином [16] и Харди [20].

В работе [64] показано, что параметрическое рас-

сеяние позволяет продемонстрировать парадокс ЭПР для наблюдаемых q_{\perp} и p_{\perp} — поперечных координаты и импульса двух коррелированных по направлениям распространения фотонов. Аналогичные возможности для пары наблюдаемых "энергия — время рождения" фотонов рассмотрены в [65—67].

Перейдем к теоретическим работам по обобщению и интерпретации НБ. После пионерской статьи Белла [3] появились альтернативные выводы и модификации его неравенств, исходящие, в частности, лишь из существования совместных распределений всех наблюдаемых без явного упоминания скрытых параметров (см., например, [73]). Для краткости мы здесь не будем различать эти варианты, следуя логике и первоначальным обозначениям Белла.

Значительные усилия направлялись на логический анализ роли понятий скрытых параметров, совместных распределений, локальности, детерминизма и др.; см. [74—86].

Оценка максимально возможных нарушений НБ в рамках КТ и поиск соответствующих этим нарушениям состояний проведен Цирельсоном [87] и рядом других авторов [88—92].

Наглядные классические модели для двух частиц с противоположно направленными вращательными моментами помимо Белла [3] (см. также [15]) предложили также Барут и Мейстр [93] (см. приложение II).

Известную популярность получили обобщения НБ на случаи двух частиц с произвольным спином j и на большее двух количество частиц N [94—102]. Джизин и ряд других авторов показали, что любое нефакторизуемое состояние с $N \geq 2$ дает нарушение НБ, причем противоречие сохраняется для произвольно больших j [103—106].

Работы [107—110] посвящены анализу НБ и квантовых корреляций с точки зрения теории информации.

Новое развитие получила теорема Кохена—Спекера (КС) [24, 25], которая приводит к противоречию типа $+1 = -1$ в рамках формализма КТ при замене операторов (в системе составленных из коммутирующих операторов тождеств) на их собственные значения (см. подраздел 6.1). Взаимосвязь такого рода парадоксов с лоренц-инвариантностью рассмотрена в [111—114]. Дьюдни [115] дал логический анализ исходных допущений теоремы КС в формулировках Переса [24] и Мермина [25] в связи с известной концепцией ТСП, предложенной де Бройлем и Бомом. Противоречие КС в предельном переходе $N \rightarrow \infty$ изучено в [116], а связь этого парадокса с нелокальностью проанализировали Хейвуд и Ре-

дхед [117].

Гринбергер, Хорн и Цайлингер (ГХЦ) [14, 15] рассмотрели модификацию эксперимента ЭПР—Бомы для $N = 3$ и 4 и выявили противоречие между КТ и ТСП нового типа (см. подраздел 4.3), которое также сводится к виду $+1 = -1$. Парадокс ГХЦ отличается от (2.1а,б) двумя основными особенностями: он не требует ни статистического усреднения, ни неравенств, в связи с чем его называют также теоремой Белла без неравенств. Работы [14,15] сразу вызвали заметный резонанс [16—23,118—127]. Мермин [25, 118] наглядно представил суть парадокса почти без формул [118] и проанализировал его связь с теоремой КС [25].

Рассмотренные ГХЦ нефакторизуемые состояния дали толчок формулировкам новых интересных мысленных экспериментов [125, 126], вызвавших дискуссию [127], и стимулировали появление дальнейших обобщений НБ на случай произвольного числа частиц N со спином $1/2$ [16—20]. Видимо, наиболее интересный вариант найден Мермином [16] и усовершенствован Роем, Сином [17], а также авторами [19] с предложением соответствующей оптической схемы опыта (см. еще [21]). При этом противоречие (2.1а,б) преобразуется в неравенство вида

$$|\langle S_N \rangle_\psi / \langle S_N \rangle_\rho| \geq 2^{(N-1)/2}. \quad (2.5)$$

В частности, $N = 2$ дает (2.1 а,б), $N = 3$ (но не более) приводит к результату Харди [20]. Согласно [16] при $N \gg 1$ можно говорить о новом макроскопическом квантовом эффекте. В разделе 5 дан новый вывод (2.5) в достаточно общем виде (без использования спиновой модели) [19].

Весьма неожиданное развитие обсуждаемые вопросы получили недавно в криптографии — науке о кодировании сообщений для защиты от "подслушивания" [128—131]. Теоретически и экспериментально исследовано применение коррелированных пар фотонов в помехоустойчивой связи, для измерения расстояний и малой диссипации [132—135], а также в фотометрии [136—138].

Кратко остановимся на интерпретациях теорем Белла и КС, доказывающих несовместность классических представлений и квантового формализма. Сложилось мнение, что эти теоремы вместе с соответствующими экспериментами, подтверждающими предсказания КТ, свидетельствуют о *нелокальности* не только конкретных физических процессов, но и самой квантовой механики. Иногда используют также термин *несепарабельность* (подробнее см. несколько ниже).

Считается, что "нелокальность типа ЭПР" отличается от "сигнальной нелокальности", предполага-

ющей существование сигналов, распространяющихся посредством квантовых корреляций со сверхсветовой скоростью. Опровержению последней возможности посвящены работы [139—143]. Связь этого вопроса с нелинейной квантовой механикой Вайнберга рассмотрена в [144, 145]; отметим также сомнения в правомочности корпускулярно-волнового дуализма и принципа неопределенности Фейнмана [146]. **Но вернемся к основной нашей теме.**

Лишь немногие работы [21, 147—151] оспаривают необходимость привлечения понятия нелокальности для разрешения парадоксов Белла, КС, ГХЦ. Новые аргументы в этом направлении мы попытаемся сформулировать далее.

Существуют две основные возможности формального примирения ТСП с экспериментами и КТ: признание нелокальности (за счет неизвестных взаимодействий между регистраторами квантовых частиц) и/или допущение отрицательных вероятностных распределений измеряемых величин [9, 93, 152—153]. Принятие любой из этих гипотез — весьма дорогая плата за сохранение "объективного реализма" как альтернативы принципу дополнительности, и вряд ли кто-либо воспринимает их буквально. Однако наметившееся злоупотребление термином "нелокальность" не проясняет существа дела, логику которого в случае НБ сформулируем так.

Имеются две исходные посылки:

а) локальные классические теории приводят к определенному неравенству;

б) квантовая теория нарушает это неравенство; в нарушение правил формальной логики отсюда делают вывод, что

в) квантовая теория нелокальна.

Для сравнения приведем сопоставимый силлогизм:

а') все хорошие рассказы короткие;

б') этот роман длинный;

вывод:

в') он нехороший.

Иногда "квантовая теория" в б) и в) первого силлогизма заменяют "наблюдаемыми квантовыми эффектами", что существа дела, конечно, не меняет.

Четкого независимого определения того, что именно следует понимать под в), видимо, не существует, поэтому остается единственная возможность: в) является просто более коротким символическим представлением исходных посылок а) и б).

Необоснованность термина "нелокальность" по отношению к КТ непосредственно следует также из квантового описания оптических экспериментов типа ЭПР—Белла в представлении Гейзенберга, весьма близкого к классической статистической электро-

динамике, которую вряд ли можно обвинить в нелокальности. В этом смысле понятие "несепарабельность", обозначающее квантовые корреляции двух или более частиц (необязательно друг от друга удаленных), представляется несколько более удачным, но в математике у него совсем другое содержание.

В связи с теоремой КС используют также выводы типа "алгебраическое доказательство нелокальности КТ" или "доказательство несовместности КТ и неконтекстуальных ТСП". Под *контекстуальностью* при этом понимают зависимость результатов измерения наблюдаемой A от того, какие другие наблюдаемые B, C, \dots регистрируются одновременно, т.е. опять фактически предполагают некое таинственное взаимодействие (типа телепатии?) между наблюдателями или приборами, фиксирующими A, B, C, \dots

Подобные интерпретации опять-таки не имеют независимого смысла и определения вне самой теоремы КС. Суть последней определим так: замена операторов на их собственные значения "портит" некоторые операторные тождества, превращая их в алгебраически противоречивые равенства. Простейший пример:

$$(\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y)^2 = -I \rightarrow (\sigma_x \sigma_y)^2 = -1 (?); \quad (2.6)$$

здесь $\hat{\sigma}_\alpha$ и $\sigma_\alpha = \pm 1$ ($\alpha = x, y$) — соответственно операторы Паули и их собственные значения, I — операторная единица. Отметим сразу, что оператор $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i\sigma_z$ неэрмитов.

Недавно найденные интересные примеры [24,25] включают несколько исходных тождеств, в каждое из которых входят лишь взаимно коммутирующие комбинации операторов, однако для получения противоречия все тождества надо перемножить, так что результирующее "противоречивое" соотношение, как и (2.6), содержит некоммутирующие операторы (подробнее см. подраздел 6.1). Это соображение сводит сущность парадокса к простой формуле типа (2.6).

В ортодоксальной интерпретации КТ некоторые свойства частицы, характеризующиеся операторами $A = A_\alpha$ и $A' = A_{\alpha'}$ (в интерференционном опыте a и α' — несовпадающие фазовые задержки, лишь одна из которых реализуется в единичном испытании) а priori не существуют. То же относится и к свойствам B, B' другой частицы. Следовательно, ненулевые значения средних $E^{(1)} = \langle AB \rangle_\varphi$, $E^{(2)} = \langle A'B \rangle_\varphi \dots$ означают корреляцию того, чего нет! Ситуация, действительно, достойна удивления: в эксперименте участвуют несколько наблюдателей, показания каждого не predetermined, но predetermined их корреляция!

Такие силлогизмы порождают новые попытки примирить формализм КТ с инстинктивным "объективным реализмом" с помощью нечетко определенных "метафизических" терминов типа "несепарабельность", "контрфактуальность", "контекстуальность", пресловутая "нелокальность" и их разновидностей.

И последний аргумент. Распространено мнение, что в опытах типа ЭПР—Белла "... квантовая механика предсказывает более сильные корреляции между частицами, чем локальные теории" ([10], с. 276). Казалось бы, оно вполне согласуется с ограничением классической теории на видность интерференции $V_{\text{class}} \leq 0,5$. Однако существуют и другие классические модели, обеспечивающие такую же, как в КТ, полную корреляцию $E = \pm 1$ (см. подразделы 3.3, 4.4, 5.4). Количественное различие между КТ и ТСП выявляется лишь при учете конкретного вида зависимости коррелятора $E(\alpha, \beta, \dots)$ от фазовых параметров α, β, \dots операторов A_α, B_β, \dots (в результате НБ нарушаются). Таким образом, "нелокальность" или "несепарабельность" опять остаются ни при чем.

3. Эксперименты с двумя наблюдателями.

3.1. Двухканальный интерферометр.

На рис. 1, а представлена одна из простейших схем [39] эксперимента по проверке НБ. Близкий, по существу, вариант, предложенный в [46] (см. также

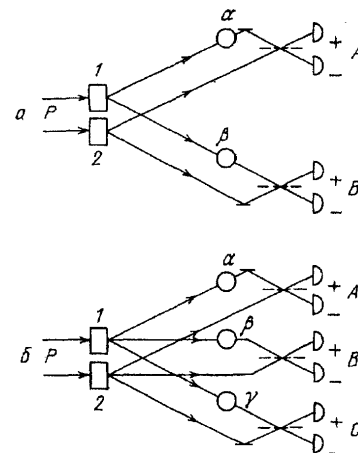


Рис. 1. Схемы интерферометров интенсивности с параметрическими источниками излучения для двух (а) или трех (б) наблюдателей. Коррелированные фотоны рождаются одновременно с нелинейных элементах 1 или 2 под действием накачки P и направляются к наблюдателям $A, B, (C)$ по двум модам, одна из которых испытывает фазовую задержку (кружки). Моды смешиваются на 50 %-ных светоделителях (штриховые отрезки) и детектируются. В схеме а при нулевой суммарной фазовой задержке ($\varphi = \alpha + \beta = 0$) фотоны синхронно поворачиваются либо оба вверх (к детекторам +), либо оба вниз (к детекторам —), а при $\varphi = \pi$ — один вверх, другой вниз. В схеме б при $\varphi = \alpha + \beta + \gamma = 0$ либо все три фотона идут вверх, либо один вверх и два вниз. При $\varphi = \pi$ — один или три вниз

[50]), реализован в [13].

Накачка с частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 освещает двулучепреломляющий пьезокристалл, в котором за счет квадратичной нелинейности χ происходит распад необыкновенного фотона накачки на пару обыкновенных фотонов с волновыми векторами \mathbf{k}_a и \mathbf{k}_b . Это так называемый эффект параметрического рассеяния, или спонтанного преобразования частоты вниз (down-conversion).

"Сигнальный" фотон \mathbf{k}_a распределяется по двум пучкам \mathbf{k}_1^a и \mathbf{k}_2^a с помощью маски, разделяющей выходную грань кристалла на две области 1 и 2. Можно, конечно, использовать два отдельных кристалла с общей когерентной накачкой. То же самое происходит и со вторым, "холостым" квантом, частота которого $\omega_b = \omega_0 - \omega_a$ может не совпадать с ω_a . Таким образом, маска *делит фронт* волны. Допустимо и *деление амплитуды* посредством светоделителей [11, 50] (см. также приложение III). Можно, наконец, использовать осевую симметрию излучаемого поля [13, 46]: фотон определенной частоты ω_a (как и ω_b) входит в континуум мод с фиксированным углом рассеяния $\theta_a(\theta_b)$, принадлежащих поверхности конуса. При этом $(\mathbf{k}_{1,2}^a + \mathbf{k}_{1,2}^b)_\perp = 0$. Цель у всех этих операций одна: получить из двух пучков a, b четыре. Для поляризационных интерферометров моды 1, 2 должны отличаться типом поляризации. Аналогично можно получить и $2j+1$ пар пучков, имитирующих две коррелированные частицы со спином j [39].

Сигнальные пучки, обладающие одинаковыми частотами ω_a , смешиваются на 50 %-ном светоделителе и направляются на два детектора D_+^a и D_-^a . Предварительно в один из пучков вносится регулируемая фазовая задержка α . Аналогичные элементы установлены и в канале B : система задержки β , светоделитель и детекторы D_\pm^b .

Описанная схема, по существу, представляет собой разновидность интерферометра интенсивности, в котором вместо нелинейного кристалла могут быть другие источники. С классической позиции светоделители преобразуют флуктуации фаз во флуктуации интенсивности /, которые и регистрируются детекторами. В результате каждый из четырех наблюдаемых корреляторов $\langle I_\pm^a I_\pm^b \rangle$ при медленном изменении α или β осциллирует по гармоническому закону с фазой $\varphi = \alpha \pm \beta$ [33, 34]. Знак зависит от источника: коррелируют или антикоррелируют исходные фазы (подробнее см. раздел 3.3, где показано в частности, что осцилляции могут быть и негармонические).

Видность интерференции V , определяемая относительным уровнем фона, не зависящего от φ , в КТ может достигать единицы, в ТСП $V \leq 1/\sqrt{2}$, а

классическая стохастическая электродинамика ограничивает V значением 1/2. При этом мы имеем в виду гармонические интерференционные кривые.

Пусть детекторы работают в режиме счета фотонов. Сигнальный и холостой кванты рождаются почти одновременно с пикосекундным разбросом, что существенно меньше длительности выходных импульсов детекторов T (для ФЭУ $T \sim 10^{-9}$ с). Выберем мощность накачки достаточно малой для того, чтобы пары регистрировались в среднем, скажем, через 10^{-6} с. Таким образом, вероятность перекрытия импульсов от двух соседних (по времени) пар фотонов будет пренебрежимо мала.

Если бы квантовая эффективность детекторов η достигала 100 %, то они срабатывали бы строго попарно: например, зарегистрированный D_+^a фотон непременно сопровождался бы одновременным срабатыванием D_+^b или D_-^b . При $\eta < 1$ полной корреляции уже не будет, однако ущербные "одиночные" события можно исключить схемой совпадений.

С другой стороны, детекторы одного канала, наоборот, будут срабатывать только вразнобой, ведь фотон направляется светоделителем случайным образом либо "вверх", либо "вниз". Следуя Мермину [118], для наглядности подключим к верхним детекторам D_+^a и D_+^b зеленые лампы, а к нижним D_-^a и D_-^b — красные. Тогда в каждом испытании (при регистрации пары) вспыхивать будут только две лампы — одна в канале A , другая в B .

Начнем варьировать фазу в одном из каналов, например α , наблюдая за лампами. При некоторой α , которую мы примем за нулевую ($\varphi = \alpha = 0$), одновременно будут вспыхивать или обе красные, или обе зеленые лампы. Если же к фазе α добавить π , то лампы будут вспыхивать точно не впопад — красная с зеленой и наоборот.

Параметризуем картину, приписывая функции A Значение +1 при срабатывании детектора D_+^a и значение -1 при срабатывании D_-^a . Аналогично образуем функцию $B = \pm 1$. Мы получили два "точечных" случайных процесса A_i, B_i , где i — номер события, которые происходят в случайные моменты времени.

Определим еще и третью дихотомную (т.е. принимающую только два дискретных значения) функцию $F_{\varphi i} \equiv A_{\alpha i} B_{\beta i} = \pm 1$. При $\varphi = 0$ во всех испытаниях $F_{0i} = 1$, а при $\varphi = \pi$: $F_{\pi i} = -1$, т.е. наблюдаем полную корреляцию или антикорреляцию случайных последовательностей A_i и B_i , так что $F_{\varphi i}$ при этом детерминирована. Промежуточным значениям φ соответствует случайная стационарная последовательность $F_{\varphi i}$, зависящая от φ как от параметра.

Можно измерить ее среднее значение

$$E_\varphi \equiv \langle F_\varphi \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L F_{\varphi i},$$

$$F_{\varphi i} = A_{\alpha i} B_{\beta i}, \quad \varphi = \alpha + \beta, \quad (3.1.1)$$

где L — полное число зарегистрированных за какое-то время пар. При "достаточно больших" L получаем "частотное" определение среднего значения.

Отметим, что F_φ — многоканальная наблюдаемая: для ее измерения наблюдатели A и B должны по каким-то каналам связи обменяться информацией (или сообщить ее третьему лицу) и синхронизировать часы, чтобы определить начало нумерации событий, поскольку каждая из рассматриваемых последовательностей образует пуассоновский случайный процесс. Из приведенных соображений ясно, что передача сигналов со сверхсветовой скоростью между наблюдателями A и B за счет квантовой корреляции, конечно, как и классической, невозможна [139—143]. Однако такую корреляцию можно использовать для защиты каналов связи от подслушивания [128—131] или помех [132—135].

Подчеркнем также, что наблюдатель только одной последовательности, например $A_{\alpha i}$, никакой зависимости от фазы α (и тем более от β) не обнаружит, ибо в этом случае $P_A^+ = P_A^- = 1/2$. Такое же распределение типа "орла и решетки" имеет B_β . В то же время из эксперимента и квантовой модели следует

$$P_F^+(\varphi) = \cos^2(\varphi/2), \quad P_F^-(\varphi) = \sin^2(\varphi/2). \quad (3.1.2)$$

Совместное распределение наблюдаемых A и B :

$$P_{AB}^{++}(\varphi) = P_{AB}^{--}(\varphi) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$P_{AB}^{+-}(\varphi) = P_{AB}^{-+}(\varphi) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.1.3)$$

Отсюда

$$E_\varphi = P_{AB}^{++} + P_{AB}^{--} - P_{AB}^{+-} - P_{AB}^{-+} = \cos \varphi. \quad (3.1.4)$$

Существенно, что в КТ не существует совместного распределения $P_{AA'}^{\pm\pm}$ для пары наблюдаемых $A \equiv A_\alpha$ и $A' \equiv A_{\alpha'}$, при $\alpha \neq \alpha'$ (и аналогично для B и B' при $\beta \neq \beta'$), поскольку они не коммутируют: $[A, A'] \propto \sin(\alpha - \alpha')$ (см. также формулу (III. 22)), и не могут быть измерены одновременно. Именно это обстоятельство является формальной причиной противоречия между КТ и ТСП.

При учете "случайных" совпадений за счет перекрытия соседних пар фотонов полной корреляции уже не будет, и в правой части (3.1.4) появится дополнительный множитель V ($0 < V < 1$), имеющий смысл видности интерференционной картины:

$$E_\varphi = V \cos \varphi. \quad (3.1.5)$$

При уменьшении мощности накачки и соответ-

ствующем снижении скорости испускания бифотонов $R, V \rightarrow 1$ (подробнее см. подраздел 3.5).

Вернемся к эксперименту. Будем устанавливать в каждом канале по два фиксированных значения фазы α и α' , β и β' , отличающихся на $\pi/2$:

$$\alpha' - \alpha = \pi/2; \quad \beta' - \beta = \pi/2. \quad (3.1.6)$$

Проведем последовательно четыре серии измерений при следующих комбинациях фаз:

$$\alpha, \beta; \alpha, \beta'; \alpha', \beta; \alpha', \beta'. \quad (3.1.7)$$

Таким образом, последовательно будут зарегистрированы четыре многоканальные наблюдаемые

$$F^{(1)} = AB, \quad F^{(2)} = AB', \quad (3.1.8)$$

$$F^{(3)} = A'B, \quad F^{(4)} = A'B'.$$

Образую из них комбинацию

$$S \equiv \frac{1}{2} (F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} - F^{(4)}), \quad (3.1.9)$$

которую назовем наблюдаемой Белла. Усредним полученные данные:

$$\langle S \rangle_{\text{exp}} = \frac{1}{2} (E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} - E^{(4)}) =$$

$$= \frac{1}{2} \langle AB + AB' + A'B - A'B' \rangle_{\text{exp}}. \quad (3.1.10)$$

Этот результат должен быть близок к предсказанию КТ, следующему из (3.1.4), (3.1.6):

$$\langle S \rangle_\psi = \frac{1}{2} [\cos \varphi_1 + 2 \cos \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} \right) -$$

$$- \cos(\varphi_1 + \pi)] = \sqrt{2} \cos \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.1.11)$$

где $\varphi_1 = \alpha + \beta$, а $\langle \dots \rangle_\psi$ обозначает усреднение по квантовому состоянию, характеризующему вектором $|\psi\rangle$, который будет определен нами далее (см. формулу (3.4.1)).

Наблюдаемая Белла максимальна при $\varphi_1 = -\pi/4$:

$$\langle S(A, A', B, B') \rangle_{\psi, \text{max}} = \sqrt{2}. \quad (3.1.12)$$

Можно показать, что значение $\sqrt{2}$ не может быть превышено (см. (III.25)), в каком бы квантовом состоянии $|\psi\rangle$ не находилась система [87—89].

Интересно, что $\langle S \rangle_\psi$ зависит лишь от суммы $\alpha + \beta$, оставляя свободной одну из составляющих фаз (например, α) при выбранной φ_1 . Заметим также, что все четыре слагаемых в (10) дают одинаковый положительный (или одинаковый отрицательный для $\varphi_1 = 3\pi/4$) вклад в $\langle S \rangle_\psi$, равный $1/\sqrt{2}$ при достижении $\langle S \rangle_\psi$ экстремальных значений.

Тот же эксперимент, рассмотренный в рамках ТСП при некоторых "естественных" и вполне "разумных" предположениях: наличие у наблюдаемых A, A', B, B' априорных значений в интервале от -1 до $+1$, задаваемых некоторой неотрицательной совместной функцией распределения, и отсутствие взаимного влияния измерительных устройств друг на друга (о более тонких предпосылках см., например, [41, 44, 45]), должен был бы приводить к

$$-1 \leq \langle S \rangle_\rho \leq 1. \quad (3.1.13)$$

Противоречие между (3.1.12) и (3.1.13) является возможным критерием для выбора одной из альтернативных теорий.

Следует подчеркнуть, что общему ограничению (3.1.13) должны быть подчинены всевозможные частные классические модели, описывающие экспериментальные процедуры, аналогичные рассмотренным нами. Некоторые из них вошли в данный обзор.

Отметим также, что неравенство (3.1.13) установлено лишь для усредненной наблюдаемой Белла. В отдельных же комбинациях (3.1.9) $S = 0, \pm 1, \pm 2$ как в классической, так и квантовой теориях.

3.2. Неравенства Белла для двух наблюдателей. Попробуем объяснить описанную выше картину — мигание зеленых и красных ламп — с самых общих позиций. Забудем об уравнениях Максвелла, Шрёдингера, фотонах, интерференции. Будем рассуждать по Лапласу: если мигнули две зеленые лампы в момент времени t_i , т.е. произошло событие " $A_i = 1, B_i = 1$ ", то его вызвали какие-то предшествующие причины, "стечение обстоятельств". Обозначим совокупность параметров, однозначно приведших к этому событию, через λ . Мы не можем измерить все эти параметры — или в принципе, или из-за их количества (скажем, 10^{23}). Поэтому назовем их "скрытыми". Однако допустимо приписать им определенную функцию распределения $\rho(\lambda)$, причем

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1, \quad (3.2.1)$$

где интегрирование проводится по всему множеству параметров λ . Моменты времени мигания ламп t_i , связанные с динамикой $\lambda(t)$, также однозначно определяются через $\lambda_i \equiv \lambda(t_i)$

Итак, мы верим, что существуют детерминированные (однозначные) дихотомные функции $A_{\alpha i} = A(\alpha, \lambda_i)$, $B_{\beta i} = B(\beta, \lambda_i)$, где отдельно обозначены "открытые" параметры α, β и учтена "локальность" измерений: A не зависит от β и B — от α ; ведь управляющие фазами наблюдатели могут находиться сколь угодно далеко друг от друга и источника света, т.е. носителя скрытых параметров. Следовательно, существует также и третья детерминированная функция

$$F_{\alpha\beta i} \equiv A_{\alpha i} B_{\beta i}. \quad (3.2.2)$$

Описанные в предыдущем разделе четыре серии измерений должны определяться зависимостями

$$A(\lambda_i^{(m)}), A'(\lambda_i^{(m)}), B(\lambda_i^{(m)}), B'(\lambda_i^{(m)}); \quad (3.2.3)$$

здесь $\lambda_i^{(m)} = \lambda(t_i^{(m)})$ и $t_i^{(m)}$ — момент наступления i -го события в m -й серии.

Каждая из множества функций $\lambda(t)$ заметно из-

меняется за время атомных масштабов, поэтому их можно считать случайными процессами, причем значения λ в моменты времени $t_i^{(m)}$, $t_{i+1}^{(m)}$ и $t_i^{(m')}$ независимы. Принимая эргодическую гипотезу, заменим среднее по времени средним по ансамблю с весом $\rho(\lambda) \equiv \rho_\lambda$. Тогда, опуская индексы у функций (3.2.3), получаем

$$\langle S \rangle_\rho = \int S_\lambda \rho_\lambda d\lambda, \quad (3.2.4)$$

где, в соответствии с (3.1.9),

$$S_\lambda \equiv \frac{1}{2} (A_\lambda B_\lambda + A_\lambda B'_\lambda + A'_\lambda B_\lambda - A'_\lambda B'_\lambda). \quad (3.2.5)$$

Легко убедиться, что S_λ , как и A_λ, B_λ , — дихотомная функция. Для этого представим ее в виде

$$S_\lambda = \frac{1}{2} [A_\lambda (B_\lambda + B'_\lambda) + A'_\lambda (B_\lambda - B'_\lambda)] = \pm 1. \quad (3.2.6)$$

Если $B_\lambda = B'_\lambda$, то $S_\lambda = A_\lambda B_\lambda = \pm 1$, и если $B_\lambda = -B'_\lambda$, то $S_\lambda = A'_\lambda B_\lambda = \pm 1$. При этом выполнение фазового ограничения (3.1.6) необязательно. Существенно, что все входящие в (3.2.6) функции должны быть от одного (одинакового) аргумента λ . В противном случае (3.2.6) может не выполняться. Обращаем на этот факт особое внимание, поскольку в литературе он, как правило, не акцентируется. Индексы λ в дальнейшем изложении будут часто опускаться.

В классической теории вероятностей и согласно "здравому смыслу" $S_\lambda \geq 0$, поэтому из (3.2.1), (3.2.4) и (3.2.6) следует

$$|\langle S \rangle_\rho| \leq \int |S_\lambda| \rho_\lambda d\lambda = 1. \quad (3.2.7)$$

Итак, окончательно

$$-1 \leq \langle S \rangle_\rho \leq +1. \quad (3.2.8)$$

Это один из простейших вариантов НБ. Другие его модификации и обобщения приведены, например, в [15, 40, 41, 45, 89]. Здесь лишь отметим, что дихотомность функций A, A', B, B' не является неперемным условием правомочности (3.2.8). Достаточно лишь потребовать выполнения

$$|A| \leq 1, |B| \leq 1, |A'| \leq 1, |B'| \leq 1, \quad (3.2.9)$$

т.е. измерения могут вестись и в непрерывном спектре значений, но обязательно пронормированных.

Вернемся к квантовой трактовке рассматриваемого эксперимента.

Заметим, что при полной корреляции, когда

$$\langle AB \rangle = \langle AB' \rangle = \langle A'B \rangle = \langle A'B' \rangle = \pm 1, \quad (3.2.10)$$

НБ, хоть "на пределе", но еще удовлетворяется (см. формулу (3.1.11) при $\varphi_1 = 0$ или π), в отличие от трехканального варианта эксперимента, где как раз в случае полной корреляции нарушение НБ максимально в количественном отношении (см. раздел 4). Таким образом, логика программы ЭПР к возможному

невыполнению (3.28) неприменима. В связи с этим напомним, что оригинальная программа ЭПР по дополнению квантовой механики скрытыми параметрами [1, 15] предполагала эксперименты, обеспечивающие именно полную корреляцию измерений, поскольку основным ее направлением было искоренение "статистичности" в природе и утверждение детерминизма ("Бог не играет в кости"). Поэтому статистический характер нарушения НБ в опытах двух наблюдателей, строго говоря, к парадоксу ЭПР отношения не имеет. Иными словами, при анализе описанного в предыдущем подразделе 3.1 эксперимента надо различать две ситуации: с полной корреляцией ($E = \pm 1$), когда применима логика ЭПР, и с неполной, где $E = \pm 1/\sqrt{2}$ и в рамках КТ нарушается неравенство (3.2.8).

3.3. Классическая стохастическая модель. Попробуем описать изображенный на рис. 1, а эксперимент на языке классической статистической теории с помощью модели интерферирующих волн с флуктуирующими фазами. Практически подобный эксперимент легко осуществить в радиодиапазоне.

Пусть используются "одномодовые" детекторы (см., например, [154]): их постоянная времени T и поперечный размер апертуры R должны быть много меньше соответствующих масштабов когерентности падающего на них излучения, которое предполагается квазимонохроматическим и квазиплоским: $T \ll \tau_{\text{coh}} \sim 2\pi/\Delta\omega$, $R \ll \rho_{\text{coh}}$. Такие детекторы дают сигнал $i(t) >$ пропорциональный "мгновенной" интенсивности $i(t) = \eta n(t) = \eta |a(t)|^2$, где η — эффективность детектора, пропорциональная $R^2 T$, и $a(t)$ — медленно меняющаяся (с масштабом τ_{coh}) амплитуда поля в безразмерных единицах (таких, что поток энергии равен $\hbar\omega |a|^2 \Delta\omega/2\pi$ [154]).

Выясним действие фазовой задержки α и 50%-ного светоделителя, смешивающего две пространственные моды в одном канале (см. рис. 1, а). Если моды отличаются только типом поляризации, то роль светоделителя может играть призма Николя. Пусть $a_k = |a_k| \exp(-ix_k)$ — комплексные амплитуды на входе, $k = 1, 2$. Тогда выходные амплитуды можно представить в виде

$$a_{\pm} = (\pm a_1 e^{i\alpha/2} + a_2 e^{-i\alpha/2})/\sqrt{2}. \quad (3.3.1)$$

Общий фазовый множитель здесь не учитывается, поскольку он не входит в выходные интенсивности

$$n_{\pm}^a \equiv |a_{\pm}|^2 = [n_a \pm 2|a_1 a_2| \cos(x + \alpha)]/2, \quad (3.3.2)$$

где

$$n_a \equiv n_1^a + n_2^a \equiv |a_1|^2 + |a_2|^2, \quad x(t) \equiv x_2 - x_1$$

— соответственно полная интенсивность в канале A

и разность фаз, медленно зависящая от времени.

Заметим, что из $|a_1 + a_2|^2 \geq 0$ следует неравенство

$$2|a_1 a_2| \leq |a_1|^2 + |a_2|^2 \equiv n_a. \quad (3.3.3)$$

Преобразование (3.3.1) относится к типу унитарных преобразований $SU(2)$ и сохраняет энергию: $n_+^a + n_-^a = n_1^a + n_2^a \equiv n_a$ (см., например, [33, 34, 155]).

Согласно (3.3.2) светоделитель преобразует флуктуации разности фаз $x(t)$ во флуктуации интенсивностей $n_{\pm}^a(t)$. Для $T \ll \tau_{\text{coh}}$ (3.3.2) описывает стационарную *интерференцию амплитуд* — гармоническую зависимость n_{\pm}^a и n_{\pm}^a от параметра α . Если же время усреднения $T > \tau_{\text{coh}}$, то средние интенсивности не зависят от α : $\langle n_{\pm}^a \rangle = \langle n_a \rangle/2$.

Аналогичная (3.3.2) зависимость определяет выходные интенсивности n_{\pm}^b в канале B через входные амплитуды и фазы $b_k = |b_k| \exp(-iy_k)$.

Рассмотрим корреляцию интенсивностей двух каких-либо выходных мод каналов A и B ; например, согласно (3.3.2)

$$\begin{aligned} \langle n_+^a n_+^b \rangle &= \frac{1}{4} \langle n_a n_b \rangle + \\ &+ \langle |a_1 a_2 b_1 b_2| \cos(x + \alpha) \cos(y + \beta) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Если входные интенсивности не флуктуируют, либо флуктуируют независимо от фаз, то второе слагаемое здесь пропорционально сумме

$$\begin{aligned} &\langle \cos(x(t) + y(t) + \alpha + \beta) \rangle + \\ &+ \langle \cos(x(t) - y(t) + \alpha - \beta) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Следовательно, стационарная интерференция интенсивности может наблюдаться лишь в двух случаях

$$x(t) \pm y(t) = \text{const}, \quad (3.3.6a)$$

т.е. при корреляции или антикорреляции фаз исходных волн (см., например, обзор [33]). Заметим, что попарное перемешивание мод может осуществляться без светоделителей непосредственно на фоточувствительных поверхностях детекторов. Не исключена также двухмодовая и даже многомодовая интерференция [21, 33, 34, 156, 157].

В квантовой теории условиям (3.3.6a) соответствуют ненулевые значения корреляторов двух типов [33, 34]:

$$G_+ \equiv \langle a_1 a_2^+ b_1 b_2^+ \rangle_{\psi} \neq 0 \quad (3.3.6b)$$

или

$$G_- \equiv \langle a_1 a_2^+ b_1^+ b_2 \rangle_{\psi} \neq 0,$$

где теперь a^+ , b^+ и a , b — операторы рождения и уничтожения фотонов. При описании экспериментов со спинами корреляторы G_{\pm} заменяются на $\langle \sigma_{\pm}^a \sigma_{\pm}^b \rangle$ (см. приложение I).

Случай $G_- \neq 0$, или $x - y = \text{const}$, соответствует давно известной интерференции интенсивности ти-

па Брауна—Твисса [42] (см. также [43], с. 106). При этом в качестве пары источников света могут служить, например, две звезды.

Антикорреляция фаз $G_+ \neq 0$, или $x + y = \text{const}$, возникает при использовании "параметрического" шума или двухфотонных переходов в атомах. Оба эти случая имеют ряд общих черт [65, 66].

Итак, интерференция интенсивности бывает двух основных типов и имеет простое классическое объяснение: коррелированные или антикоррелированные флуктуации фаз преобразуются в дополнительные флуктуации амплитуд. Заметим, что в отличие от рассмотренной четырехмодовой схемы (см. рис. 1, а) придвухмодовой интерференции коррелированность или антикоррелированность фаз в виде (3.3.6а), (3.3.6б) не обязательна [33, 34]. Этот особый случай можно выделить в третий основной тип интерференции интенсивности.

Для параметрических генераторов фаза $x + y = x_2 - x_1 + y_2 - y_1$ определяется постоянной разностью фаз волн накачки (см. рис. 1, а). Положим $x + y = 0$, тогда согласно (3.3.4) при постоянных входных интенсивностях n_a, n_b

$$\langle n_+^a n_+^b \rangle = \frac{1}{4} n_a n_b (1 + V \cos \varphi), \quad (3.3.7)$$

где $\varphi \equiv \alpha + \beta$, а видность равна

$$V = \frac{2|a_1 a_2 b_1 b_2|}{n_a n_b} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3.8)$$

Последнее неравенство следует из (3.3.3). Таким образом, в классической модели с постоянными входными интенсивностями видность не превышает $1/2$. Учет начальных гауссовских флуктуаций интенсивности приводит к уменьшению этого предела до $1/3$. Дальнейшее снижение V происходит при нарушении условия $T \ll \tau_{\text{coh}}$ (см. подраздел 3.5).

Аналогичная модель для трехканальной интерференции интенсивности (см. рис. 1, б) при учете (3.3.3) для постоянных входных интенсивностей n_a, n_b, n_c дает

$$V_3 = \frac{2|a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2|}{n_a n_b n_c} \leq \frac{1}{4}, \quad (3.3.9)$$

а в случае N каналов —

$$V_N \leq 1/2^{N-1}. \quad (3.3.10)$$

Вернемся к схеме рис. 1, а и образуем разности (в квантовой теории эти наблюдаемые также можно выразить через операторы разности фаз (см. (1.19)))

$$\begin{aligned} \Delta n_a &\equiv n_+^a - n_-^a = a_1 a_2^* e^{i\alpha} + \text{к.с.} = \\ &= 2|a_1 a_2| \cos(x + \alpha), \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta n_b &\equiv n_+^b - n_-^b = b_1 b_2^* e^{i\beta} + \text{к.с.} = \\ &= 2|b_1 b_2| \cos(y + \beta). \end{aligned}$$

Их корреляция, нормированная на $\langle n_a n_b \rangle$, при учете

параметрического ограничения $x + y = 0$ и возможных независимых от фаз флуктуаций интенсивности имеет вид

$$E_\varphi \equiv \frac{\langle \Delta n_a \Delta n_b \rangle}{\langle n_a n_b \rangle} = V \cos \varphi, \quad (3.3.12)$$

$$V = 2\langle |a_1 a_2 b_1 b_2| \rangle / \langle n_a n_b \rangle. \quad (3.3.13a)$$

Такая нормировка при постоянных n_a и n_b обеспечивает применимость теоремы Белла, поскольку в любой реализации измеряемые относительные величины по модулю не превышают единицы (см. условие (3.2.9)):

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta n_a|}{n_a} &\equiv \frac{|n_+^a - n_-^a|}{n_+^a + n_-^a} \leq 1, \\ \frac{|\Delta n_b|}{n_b} &\equiv \frac{|n_+^b - n_-^b|}{n_+^b + n_-^b} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Итак, в "классическом" варианте эксперимента по проверке НБ интенсивности параметрически генерируемых волн необходимо поддерживать неизменными во всех сериях измерений, что легко осуществимо как раз при использовании параметрических генераторов.

В квантовой теории (3.3.13а) заменяется на

$$V = \frac{2\text{Re}\langle a_1 a_2^+ b_1 b_2^+ \rangle_\psi}{\langle n_a n_b \rangle_\psi} \quad (3.3.13б)$$

и, как будет показано в следующем подразделе 3.4, видность может быть равной единице. Более того, существуют состояния $|\psi\rangle$, для которых $V_N = 1$ при произвольном N (см. раздел 5).

Таким образом, с увеличением количества каналов N экспоненциально нарастает и относительное различие классического и квантового предсказаний видности (как 2^{N-1}), причем проявляется оно уже начиная с $N = 2$. Этот результат выгодно отличается от следующего из теоремы Белла в форме (5.1.8), где относительный рост расхождений составляет лишь $2^{(N-1)/2}$. Однако в данном случае мы ограничиваем себя рамками конкретной модели эксперимента в отличие от общей постановки задачи в теореме Белла.

Интересно, что если корреляцию Δn_a и Δn_b про- нормировать на дисперсии флуктуаций этих разностей $\langle \Delta n^2 - \langle \Delta n \rangle^2 \rangle = \langle \Delta n^2 \rangle$, т.е. определить обычный коэффициент корреляции вида

$$\Gamma_\varphi = \frac{\langle \Delta n_a \Delta n_b \rangle}{(\langle \Delta n_a^2 \rangle \langle \Delta n_b^2 \rangle)^{1/2}} = \cos \varphi, \quad (3.3.15)$$

то для двухканального интерферометра результаты классического и квантового рассмотрения совпадут. Условие теоремы Белла (3.2.9) при такой нормировке, разумеется, не соблюдено, так как измеряемые относительные величины $\Delta n_a / \langle \Delta n_a^2 \rangle^{1/2}$ и

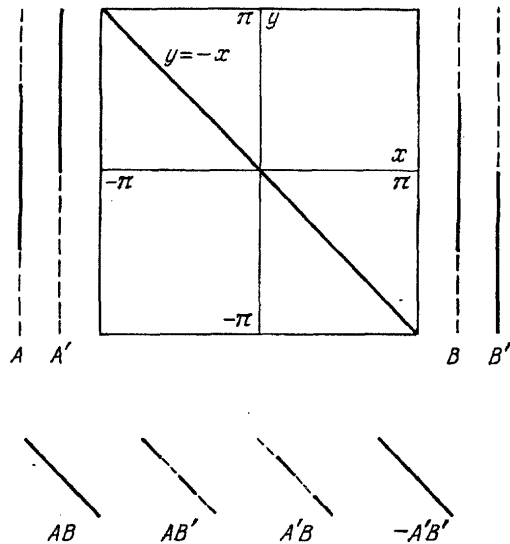


Рис. 2. Диаграммы, иллюстрирующие связь скрытых параметров (случайных фаз x и y) с результатами испытаний в классической модели с дихотомными наблюдаемыми. В силу параметрического ограничения фазы принадлежат биссектрисе $y = -x$. Сплошные жирные линии соответствуют значениям наблюдаемых $+1$, а штриховые -1 , причем $A = A_0$, $A' = A_{\pi/2}$, $B = B_0$, $B' = B_{\pi/2}$

$\Delta n_b / \langle \Delta n_b^2 \rangle^{1/2}$ могут превышать единицу. На это обратили внимание Барут и Мейстр [93], анализируя поведение двух частиц с антикоррелированными угловыми моментами. Подробнее об их схеме см. в приложении II. Отметим лишь, что видность в таком случае оказывается ограниченной значением $1/3$, связанным с числом равновероятных проекций трехмерного вектора углового момента.

Рассмотренные классические модели описывают эксперименты с аналоговыми детекторами, дающими показания с непрерывным спектром значений. При этом интерференционная структура имеет вид $\cos \varphi$, как и в КТ, однако максимальная классическая корреляция не превышает $1/2$ в оптическом и $1/3$ в спиновом экспериментах в отличие от КТ, допускающей полную корреляцию (т.е. равную 1). Это различие связано с использованием непрерывных наблюдаемых, в то время как счетчики фотонов дают $n = 0$ или 1 , так что $\Delta n_{a,b}$ являются дихотомными переменными: $\Delta n_{a,b} = \pm 1$ (в случае однофотонных состояний в каждом канале).

Полную корреляцию $E = \pm 1$ можно получить и в рамках классической теории при использовании дихотомных наблюдаемых с дискретным спектром (см., например, спиновые модели в [3, 15]). Мы рассмотрим далее дискретную волновую модель.

Будем периодически регистрировать показания четырех детекторов (см. рис. 1,а) через некоторый интервал $\Delta t \gg \tau_{\text{coh}} \gg T$. В результате получим четыре последовательности случайных чисел $n_{\pm}^a, b(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, L$, где $L \Delta t$ — общая продолжительность серии. Образует с помощью двух разностных масси-

вов $\Delta n_{a,b}(t_i)$ три “знаковые” дихотомные последовательности

$$A_i \equiv \text{sign } \Delta n_a(t_i), B_i \equiv \text{sign } \Delta n_b(t_i), \\ F_i \equiv A_i B_i. \quad (3.3.16)$$

Таким образом, теперь запись $A_i = +1$ символизирует событие “фототок детектора D_+^a больше, чем D_-^a ”.

В качестве источника возьмем два параметрических генератора с общей когерентной накачкой, так что условие $x(t) + y(t) = 0$ выполняется. Это означает, что мгновенные частоты $\omega(t) = \bar{\omega} + dx/dt$ сигнальных (a) и холостых (b) волн всегда дрейфуют в противоположных направлениях. Заметим, что требование $\omega_a = \omega_b$ необязательно: для стационарной интерференции (без биений) необходимо лишь $\omega_1^a = \omega_2^a$ и $\omega_1^b = \omega_2^b$.

Согласно (3.3.11), (3.3.16) имеем

$$A_{\alpha i} = \text{sign } \cos(\alpha + x_i), \quad (3.3.17)$$

$$B_{\beta i} = \text{sign } \cos(\beta - x_i),$$

$$F_{\alpha\beta i} = \text{sign}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta + 2x_i)],$$

где $x_i \equiv x(t_i)$. Следовательно, при $\varphi \equiv \alpha + \beta = 0$ (или π) получаем полную корреляцию (или антикорреляцию) $F_{\alpha\beta i} = +1$ (или -1), как и в КТ.

С классической точки зрения функция $x(t)$ полностью детерминирована процессами в параметрическом генераторе (возможно, на атомном уровне), т.е. существует однозначная зависимость $x_i = x[\lambda(t_i)]$, где $\lambda(t)$ — совокупность всех параметров, влияющих на фазу. Естественно считать, таким образом, саму фазу “скрытым” параметром, по которому ведется усреднение. Связь случайных фаз $x(t)$ и $y(t)$ с регистрируемыми значениями наблюдаемых наглядно проиллюстрирована на рис. 2. Пусть $x(t)$ имеет равномерное распределение $\rho(x) = 1/2\pi$ в интервале от $-\pi$ до π , тогда

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{\alpha\beta x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos \varphi + \cos(2x)] dx = 1 - 2 \frac{|\varphi|}{\pi} \quad (3.3.18)$$

при $|\varphi| \leq \pi$. Вывод дан в приложении IV, а график E_φ — на рис. 3,б.

Наблюдаемая Белла теперь принимает вид

$$\langle S \rangle_\rho = 1 + [(|\alpha + \beta| + |\alpha + \beta'| + |\alpha' + \beta| - |\alpha' + \beta'|)]/\pi. \quad (3.3.19)$$

При использовании уже известной нам комбинации фаз (3.1.11) с $\varphi_1 = \pi/4$, обеспечивающей наибольшее нарушение НБ в квантовом эксперименте, имеем

$$E^{(1)} = E^{(2)} = E^{(3)} = -E^{(4)} = 1/2, \quad (3.3.20)$$

так что $\langle S \rangle_\rho = 1$ и НБ не нарушается. Этому следовало ожидать, поскольку описанная схема представляет

собой конкретное воплощение универсальной модели Белла.

С другой стороны, в отдельных реализациях НБ может не выполняться за счет того, что, например, A и A' регистрировались в разные моменты времени при неидентичных значениях "скрытых" параметров $x(t_i)$ (см. также формулу (3.2.6) и следующий за ней текст).

С помощью (3.3.16), (3.3.17) нетрудно найти и совместные распределения вероятностей для наблюдаемых типа $P_{AB}^{\pm\pm}, P_{AA'}^{\pm\pm}$, аналогичные (3.1.3). Однако существование распределений для несовместных в КТ наблюдаемых A и A' является специфической чертой ТСП. Напомним, что в КТ распределений типа $P_{AA'}^{\pm\pm}$ при $\alpha \neq \alpha'$ не существует.

Итак, рассмотренная модель, хотя и дает полную корреляцию (как и в КТ), но благодаря "спрямлению" гармонической интерференционной кривой $E_\varphi = \cos \varphi$ в пилообразную (см. рис. 3), не нарушает НБ. Заметим, что такая схема, согласно приложению I, изоморфна модели двух классических спиновых частиц, рассмотренной Беллом [3] (см. также [15]), которая тоже приводит к линейной зависимости (3.3.18).

3.4. Квантовая теория двухфотонной интерференции. В экспериментальной схеме на рис. 1,а в качестве источника предполагался параметрический усилитель-преобразователь на пьезокристаллах. Его спонтанное излучение состоит из пар фотонов ("бифотонов"), коррелированных по моментам времени рождения (или по энергии [65]), а также по направлениям вылета. Из известных источников двухфотонного света параметрические преобразователи наиболее эффективны.

В приложении III показано, что два таких преобразователя с общей когерентной накачкой многократно приготавливают исходное четырехмодовое поле в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 b_1 + a_2 b_2)^+ |0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_a |10\rangle_b + |01\rangle_a |01\rangle_b), \quad (3.4.1)$$

где $a_{1,2}^+, b_{1,2}^+$ — операторы рождения фотонов в сигнальных и холостых модах, а $|0\rangle \equiv |0\rangle_1^a |0\rangle_1^b |0\rangle_2^a |0\rangle_2^b$ обозначает вакуумное состояние. Запись (1) мы интерпретируем следующим образом: сигнальный (холостой) фотон может быть равновероятно рожден в одном из двух кристаллов, т.е. принадлежит сразу двум модам a_1 и a_2 , но при этом холостой (сигнальный) фотон обязательно рождается в *том же* кристалле. Если мощность накачки достаточно мала для того, чтобы за время проведения одного измерения T испускалось не более одной пары квантов, то можно

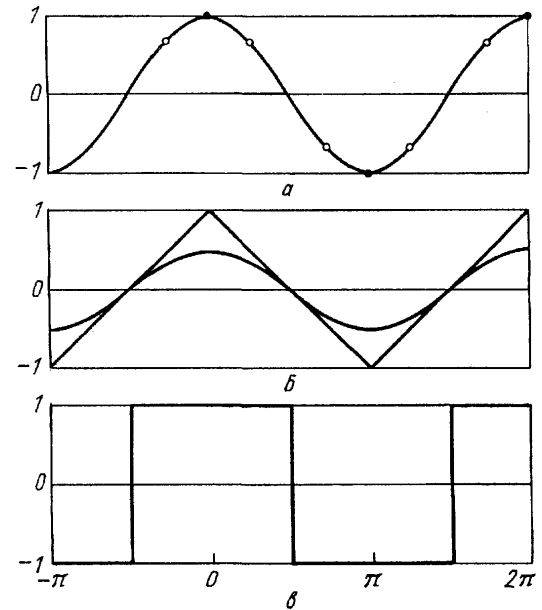


Рис. 3. Интерференционные кривые, т.е. графики зависимостей коррелятора E от суммы фазовых сдвигов в каналах $\varphi = \alpha + \dots$ (а, б), либо от одного из них α_n (в), в различных моделях, а — Квантовая модель, число наблюдателей $N \geq 2$ произвольно, светлые и темные кружки соответствуют оптимальным значениям фаз для четных и нечетных N . б — Классическая модель с равномерно распределенными случайными фазами для $N = 2$ (ломаная линия) и $N = 3$ (взаимноперевёрнутые вершинные участки парабол). в — Классическая модель с дискретным распределением фаз (случайными знаками амплитуд), $N \geq 2$ произвольно

считать, что состояние (1) соответствует каждому единичному измерительному акту.

Такие нефакторизованные состояния из двух или большего числа частиц называют *связанными*, *перемешанными* или *перепутанными* (entangled). Как раз с ними и связаны многие квантовые парадоксы.

Действие фазовых задержек α, β и светоделителей (см. рис. 1,а) на исходное поле будем описывать в представлении Гейзенберга, т.е. с помощью формулы (3.3.1). В результате операторы чисел фотонов в двух выходных модах канала A принимают вид (ср. с (3.3.2))

$$n_{\pm}^a \equiv a_{\pm}^+ a_{\pm} = \frac{1}{2} \left[n_1^a + n_2^a \pm (\sigma_-^a e^{i\alpha} + \sigma_+^a e^{-i\alpha}) \right], \quad (3.4.2)$$

где

$$\sigma_-^a \equiv a_1^+ a_2^+, \sigma_+^a \equiv a_1^+ a_2 = (\sigma_-^a)^+. \quad (3.4.3)$$

Отсюда находим оператор, соответствующий наблюдаемому событию — "вспышке зеленой или красной лампы" в канале A :

$$A_\alpha \equiv n_+^a - n_-^a = \sigma_-^a e^{i\alpha} + \text{э.с.}, \quad (3.4.4)$$

э.с. обозначает эрмитово-сопряженный оператор.

Аналогичные соотношения определяют операторы n_{\pm}^b, B_β .

Подчеркнем, что наши *квантовые* наблюдаемые обладают точно таким же свойством "локальности", что и *классические*: A_α не зависит от β и B_β — от α .

Используемое здесь представление Гейзенберга позволяет констатировать локальность КТ как факт, вполне очевидный. Действительно, вектор состояния (3.4.1) на входе интерферометра определяет статистические свойства источника света — пары параметрических преобразователей, — пока фотоны еще не успели разлететься в разные стороны. Дальнейшая их судьба — распространение в линейных устройствах — может быть адекватно описана по классическим законам [155].

Временные задержки в каналах интерферометра в (3.4.2) и (3.4.4) не возникли в связи с использованием монохроматических мод. Учет конечной ширины спектров, т.е. многомодовое описание двухфотонной интерференции, ничего существенного в вопросе локальности не дает [156].

Часто говорят о *несепарабельности* квантовой картины подобных экспериментов, имея в виду нефакторизуемость вектора состояния пары частиц, разлетевшихся на значительное расстояние. Но это понятие возникает лишь в шрёдингеровском подходе, где фигурирует волновая функция пары уже отделившихся частиц, т.е. с учетом эффекта распространения. Эквивалентное гейзенберговское описание ясно показывает, что КТ столь же локальна, как, например, и классическая стохастическая электродинамика, в которой также возможны интересные корреляции, аналогичные квантовым (см. разделы 3.3, 3.6 и приложение II).

Вернемся к нашему рассмотрению и с помощью (4) найдем многоканальный оператор

$$F_\varphi \equiv A_\alpha B_\beta = \sigma_-^a \sigma_-^b e^{i\varphi} + \text{э.с.}, \quad \varphi = \alpha + \beta. \quad (3.4.5)$$

Здесь опущены слагаемые $\sigma_+^a \sigma_+^b e^{i(\pm\alpha \mp \beta)}$, поскольку при действии на вектор (3.4.1) они дают нуль.

Заметим, что в общем случае операторы $A \equiv A_\alpha$ и $A' \equiv A_{\alpha'}$, $B \equiv B_\beta$ и $B' \equiv B_{\beta'}$, а также F_φ и $F_{\varphi'}$ не коммутируют (см. приложение III). Следовательно, соответствующие наблюдаемые не могут быть измерены в одном испытании. Практически это понятно: ведь, например, фаза α не может одновременно иметь два значения.

Легко проверить, что (3.4.1) — собственный вектор с собственными значениями ± 1 следующих операторов:

$$A_\alpha^2 = B_\beta^2 = F_\varphi^2 = I, \quad (3.4.6)$$

$$(AA')^2 = (BB')^2 = (F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'})^2 = -I, \quad (3.4.7)$$

$$F_0 |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad (3.4.8)$$

$$F_\pi |\psi\rangle = -|\psi\rangle, \quad (3.4.9)$$

здесь I — операторная единица, $\alpha' = \alpha \pm \pi/2$, $\beta' = \beta \pm \pi/2$,

$$F_0 \equiv \sigma_x^a \sigma_x^b,$$

$$F_\pi \equiv -\sigma_x^a \sigma_x^b,$$

σ_x — матрица Паули (см. также приложение I). В тождественных соотношениях (3.4.6), (3.4.7) для F использованы не (3.4.5), а более общие выражения (3.4.4).

Теперь становится понятным, почему наблюдаемая F_0 не флуктуирует в эксперименте: ведь в состоянии (3.4.1) она принимает одно и то же значение $+1$, т.е. реализуется полная корреляция. Аналогично F_π всегда равна -1 (антикорреляция).

Отрицательные собственные значения квадратов операторов в (3.4.7) связаны со свойством матриц Паули [158] (см. также приложение I):

$$(\sigma_x \sigma_y)^2 = (i\sigma_z)^2 = -1. \quad (3.4.10)$$

Хотя формально мы и можем рассматривать операторы типа $\sigma_x \sigma_y$, однако они не могут описывать одноразовые измерения и неэрмитовы (как и AA' в общем случае):

$$(\sigma_x \sigma_y)^+ = \sigma_y \sigma_x = -\sigma_x \sigma_y. \quad (3.4.11)$$

В состоянии (3.4.1) коррелятор $\langle \sigma_-^a \sigma_-^b \rangle = 1/2$, и согласно (5)

$$\langle F_\varphi \rangle_\psi = \cos \varphi. \quad (3.4.12)$$

Дисперсия флуктуаций многоканальной наблюдаемой с учетом (3.4.6), (3.4.12) равна

$$\langle \Delta F_\varphi^2 \rangle \equiv \langle (F_\varphi - \langle F_\varphi \rangle)^2 \rangle = 1 - \langle F_\varphi \rangle^2 = \sin^2 \varphi. \quad (3.4.13)$$

Как и ранее, определим оператор Белла для четырех значений фаз:

$$\begin{aligned} S &\equiv \frac{1}{2} (F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} - F^{(4)}) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_-^a \sigma_-^b (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_4}) + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Заметим, что согласно этому определению, S есть сумма четырех некоммутирующих операторов, и ему соответствуют наблюдаемая, для измерения которой надо провести четыре испытания с различными фазами φ .

Производя усреднение (3.4.14), имеем

$$\langle S \rangle_\psi = \frac{1}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 - \cos \varphi_4). \quad (3.4.15)$$

Дисперсия наблюдаемой Белла согласно (13) — (15) равна

$$\langle \Delta S^2 \rangle_\psi = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \langle \Delta F^{(m)^2} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \sin^2 \varphi_m. \quad (3.4.16)$$

Здесь мы просто просуммировали дисперсии флуктуаций каждой серии измерений, поскольку подбор экспериментальных результатов в "четверке" не предполагает какого-то определенного алгоритма и может быть совершенно случайным (единственным ограничением является лишь избежание повторов

т.е. использование одних и тех же исходов испытаний в разных "четверках"). Таким образом, взаимовлияние $F^{(m)}$ и $F^{(m')}$ при $m \neq m'$ отсутствует.

Уже известная нам комбинация фаз

$$-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4/3 = \pi/4, \quad (3.4.17)$$

подставленная в (15), дает $\langle S \rangle_{\varphi} = \sqrt{2}$, что совпадает с точной верхней границей нормы оператора S [87—89] и на 41 % выше максимального классического значения (единицы). При этом согласно (16) $\langle \Delta S^2 \rangle = 1/2$.

Напомним, что в классических статистических моделях формула (3.4.12) заменяется на $V \cos \varphi$ с $V \leq 1/2$ (см. (3.3.12)) или на $1 - (2|\varphi|/\pi)$ (см. (3.3.18)), чем и обуславливается их согласие с НБ.

Отметим также, что в дискретных моделях ТСП все четыре наблюдаемых A, A', B, B' принимают лишь значения ± 1 (дихотомны), и НБ $|\langle S \rangle| \leq 1$ вытекает из классического ограничения $S_{\lambda} = \pm 1$ (см. (3.2.6), (3.2.7) и (3.3.16)). Но таков же и спектр наблюдаемых A, A', B, B' в КТ. Почему же в ней не выполняется равенство $S = \pm 1$? Оказывается, именно ненулевые коммутаторы $[A, A']$ и $[B, B']$ увеличивают норму оператора S выше классической границы (единицы) [87—89] (см. приложение III).

Некоммутативность операторов приводит и к отсутствию общих собственных векторов и, следовательно, к невозможности существования совместных распределений, например, распределение $P_{AA'}$ при $\alpha \neq \alpha'$ в КТ определить нельзя. В классическом же подходе существование такого распределения постулируется (явно или неявно), что и накладывает дополнительное ограничение на наблюдаемую Белла S [107].

Вместе с тем, операторы A_{α} и B_{β} коммутируют, и их совместные распределения вида (3.1.3) можно вычислить по общим рецептам КТ (см. приложение III).

В приложении I показано, что некоммутативность операторов A_0 и $A_{\pi/2}$ аналогична некоммутативности матриц Паули σ_x и σ_y или операторов координаты q_k и импульса p_k двух осцилляторов. Еще одна наглядная интерпретация, также изложенная в приложении I, состоит в том, что A_0 и $A_{\pi/2}$ совпадают с некоммутирующими операторами разности фаз C_{12} и S_{12} соответственно [159]. Их классический аналог — гармонические функции в (3.3.11): $\cos(x_2 - x_1)$ и $\sin(x_2 - x_1)$, принимающие непрерывное множество значений в интервале $[-1, +1]$. В состояниях с фиксированным общим числом фотонов (стационарных состояниях) операторы C_{12}, S_{12} имеют дискретный спектр [159]. В частности, в рассматриваемом нами двухмодовом однофотонном со-

стоянии они принимают только два значения: $\pm 1/2$, т.е. разность фаз равновероятно может оказываться равной двум фиксированным величинам: $\pi/3$ и $2\pi/3$ у C_{12} и $\pm\pi/6$ у S_{12} . Учитывая связь C_{12}, S_{12} с матрицами Паули σ_x, σ_y , мы, таким образом, имеем оптический волновой аналог пространственного квантования спина $1/2$. Увеличивая число мод, по которым распределен единственный фотон до $2j + 1$, данную аналогию естественно обобщить и на пространственное квантование произвольного спина j также одной частицы [39].

3.5. Учет случайных совпадений. В реальных экспериментах обычно измеряются скорости совпадений фотоотсчетов приемников [31]: R_{++} — скорости одновременных срабатываний детекторов D_+^a и D_+^b (см. рис. 1, а), $R_{+-} = D_+^a$ и D_-^b , аналогично R_{-+}, R_{--} . Если эффективности всех четырех детекторов одинаковы, то из симметрии остаются только две измеряемые величины: $R_+ \equiv R_{++} = R_{--}$ и $R_- \equiv R_{+-} = R_{-+}$. При этом нормированный коррелятор

$$E_{\text{exp}} \equiv \langle F \rangle_{\text{exp}} = \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-}. \quad (3.5.1)$$

Фактически это выражение повторяет "частотное" определение среднего значения (3.1.1), поскольку числитель, домноженный на время измерений, представляет собой $\sum_i F_i$, а домноженный на это же время знаменатель — полное число зарегистрированных пар.

Если выходные импульсы детекторов от последовательно испускаемых фотонных пар начнут перекрываться, то появятся "случайные" совпадения, характеризующиеся скоростью R_{acc} , не зависящей от фазы $\varphi = \alpha + \beta$. Следовательно, согласно (3.1.3), регистрируемые скорости окажутся равными

$$\begin{aligned} R_+ &= R_{\text{acc}} + R' \cos^2(\varphi/2), \\ R_- &= R_{\text{acc}} + R' \sin^2(\varphi/2), \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

где R' — максимальная скорость "истинных" совпадений (в частности, $R' = R_+$ при $R_{\text{acc}} = 0$ и $\varphi = 0$).

Подстановка (3.5.2) в (3.5.1) дает

$$E_{\text{exp}} = V \cos \varphi, \quad (3.5.3)$$

где

$$V = [1 + (2R_{\text{acc}}/R')]^{-1}. \quad (3.5.4)$$

С учетом неединичной видности V наблюдаемая Белла оказывается равной

$$\langle S \rangle_{\text{exp}} = \sqrt{2} V, \quad (3.5.5)$$

так что НБ нарушается лишь при $V > 1/\sqrt{2} \approx 0,71$ [39, 59, 160].

Выясним зависимость V от эффективности параметрического преобразования и от величины

$Q \equiv 2\Delta\nu T \sim T/\tau_{\text{coh}}$, где $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ — ширина полосы частот генерируемого излучения, а T — постоянная времени детектора. Если радиус апертуры детектора $R_{\text{det}} \ll \rho_{\text{coh}}$ (ρ_{coh} — радиус когерентности принимаемого им излучения), то скорость счета фотонов R (вероятность регистрации фотона в единицу времени) равна

$$r = \eta' N/T, \eta' = \eta (T/\tau_{\text{coh}}) (R_{\text{det}}/\rho_{\text{coh}})^2, \quad (3.5.6)$$

где η — квантовая эффективность детектора, а

$$N = \langle n \rangle = \text{sh}^2 \tau \quad (3.5.7)$$

— среднее число фотонов в моде в центре полосы $\Delta\nu$ (см. приложение III). Соотношение (6) относится к каждому из четырех детекторов.

Поскольку средний интервал времени регистрируемыми фотонами равен R^{-1} , вероятность появления фотоотсчета за время $T \ll R^{-1}$ есть T/R^{-1} , а скорость случайных совпадений в каналах представляет собой отношение квадрата этой вероятности к T :

$$R_{\text{acc}} = R^2 T. \quad (3.5.8)$$

Можно показать [154], что

$$R'/R_{\text{acc}} = \mu^2/f(Q), \quad (3.5.9)$$

где $f(Q) = 2Q^2/(-1 + e^{-2Q} + 2Q)$, т.е. $f(Q) = 1$ при $Q \ll 1$ и $f(Q) = Q$ при $Q \gg 1$. Параметр μ определяется относительной величиной нестационарного коррелятора (см. приложение III):

$$\mu \equiv \frac{|\langle ab \rangle|}{N} = \text{cth} \tau = \left(\frac{N+1}{N} \right)^{1/2}. \quad (3.5.10)$$

Фактически — это некая мера неклассичности параметрического шума (в более общем виде параметр неклассичности вводился, например, в [161]). Действительно, из неравенства Коши—Шварца при классическом усреднении следует [50]

$$|\langle ab \rangle|^2 \leq \langle a^* a \rangle \langle b^* b \rangle, \quad (3.5.11)$$

так что

$$\mu_{\text{class}} \leq 1. \quad (3.5.12)$$

Условие $\mu^2 < 1$ определяет также область существования P -распределения Глаубера—Сударшана [154], играющего роль распределения вероятности амплитуд a , b [43]. Кроме того, параметр μ просто связан с параметром группировки фотонов:

$$g \equiv \langle a^+ a b^+ b \rangle / \langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle = 1 + \mu^2. \quad (3.5.13)$$

Для пуассоновской и гауссовской статистики g равен 1 и 2 соответственно.

В параметрически рассеянном излучении сильное неравенство $\mu^2 \gg 1$ проявляется в значительном превышении скорости истинных совпадений над задержанными (случайными). Этот эффект экспериментально обнаружен Барнхемом и Вайнбергом в 1970 г. [162], а существование нестационарных корреляторов $\langle ab \rangle$ и их сверхклассическая величина ра-

нее предсказаны в [163].

Отметим, что излучения двух усилителей с общей накачкой не независимы: корреляторы $\langle a_1 b_1 \rangle$ и $\langle a_2 b_2 \rangle$ имеют определенные фазы, связанные с фазой накачки, что согласно (3.3.4) и приводит к интерференции интенсивности.

В соответствии с (3.5.9), (3.5.10)

$$\frac{R'}{R_{\text{acc}}} = \frac{N+1}{Nf(Q)} = \frac{\text{cth}^2 \tau}{f(Q)}, \quad (3.5.14)$$

и с учетом (4) видность равна

$$V = [1 + (2f(Q)/\mu^2)]^{-1} = (N+1)/(2Nf(Q) + N+1). \quad (3.5.15)$$

В типичном эксперименте с непрерывной несфокусированной накачкой $N \approx \tau^2 \sim 10^{-8}$ и $Q \sim 10^3$, так что $V \approx 1$. При более интенсивной накачке (импульсной и/или сфокусированной) или в результате использования резонатора эффективность параметрического преобразования нарастает, N увеличивается, и в случае $N \gg 1$ (параметрическая сверхлюминесценция или генерация) даже для малых $Q \ll 1$ видность ограничена:

$$V = \frac{N+1}{3N+1} = \frac{1}{1 + 2 \text{th}^2 \tau} \approx \frac{1}{3}. \quad (3.5.16)$$

Это типичное значение видности интерференции интенсивности хаотических источников света [33, 34].

Согласно (3.5.5), (3.5.15) НБ нарушаются при

$$\mu^2 > \frac{2f(Q)}{\sqrt{2}-1} \approx 4,9 f(Q) \quad (3.5.17)$$

или

$$N < \frac{\sqrt{2}-1}{2f(Q)+1-\sqrt{2}}. \quad (3.5.18)$$

В частности, для $Q \ll 1$: $N < 0,26$ [39].

Если воспользоваться (3.5.12), (3.5.15), то

$$V_{\text{class}} \leq (1 + 2f(Q))^{-1}. \quad (3.5.19)$$

Обычно в экспериментах $V \approx 1$ и $Q \sim 10^3$, так что этот предел превышает на несколько порядков! Следовательно, существует интервал значений видности от (3.5.19) до $1/\sqrt{2}$, противоречащих классической стохастической модели (удовлетворяющей неравенству Коши—Шварца), но все еще не нарушающих НБ [19, 50, 160]. Таким образом, различие предсказаний классической и квантовой теорий здесь проявляется более разительно, чем в теореме Белла. Однако содержание последней гораздо глубже, поскольку она не связана с какой-либо конкретной моделью эксперимента и основана на весьма общих посылах.

Отметим также, что для двухфотонной интерференции интенсивности по схеме Франсона [33, 154, 156, 164, 165] Оу и Мандель [166] получили следу-

ющее ограничение на видность

$$V \leq [(T/\tau_{\text{coh}}) - 1]^{-1} \quad (3.5.20)$$

исходя из общей стохастической теории эргодических случайных процессов для $T \gg \tau_{\text{coh}}$. Они подчеркивают, что это противоречащее эксперименту ограничение снимается ценой отказа от гипотезы эргодичности. Ситуация напоминает дискуссию вокруг нарушения НБ [9, 93, 152—153], в ходе которой указывалось на альтернативу КТ: допущение отрицательной совместной функции распределения [152].

Наш модельный результат (3.5.19) удовлетворяет (3.5.20). Параллельные же классическое и квантовое описания схемы Франсона [154, 156] приводят к заключению, что классическая видность подчинена неравенству типа (3.5.20), следующему из (3.5.11) для случайных амплитуд.

3.6. Интерференция сжатого шума.

Рассмотрим модификацию представленного на рис. 1, а эксперимента, которую можно реализовать как в оптическом (включая ИК), так и радиодиапазоне [33, 154]. Она отличается присутствием на входах обоих параметрических усилителей "затравочного" гауссовского шума с интенсивностью N_0 фотонов на моду, т.е. со спектральной яркостью $B_{\omega\Omega} = \hbar c N_0 / \lambda^3$. Если $N_0 \gg 1$, то квантовыми шумами усилителей (появляющимися вследствие вакуумной "затравки") можно пренебречь, поскольку некоммутативность операторов перестает сказываться на итоговом результате. При этом на входах интерферометра остается только преобразованное в фазочувствительных параметрических усилителях сжатое гауссово излучение и допустимо классическое описание. Свойства подобного излучения аналогичны свойствам квантового сжатого шума: дисперсии флуктуаций двух квадратурных компонент для вырожденного режима работы усилителя ($\omega_a = \omega_b$) **неодинаковы**. Поэтому его можно назвать "классическим сжатым шумом". Напомним, что под квадратурными компонентами в квантовой теории понимаются операторы (эрмитовы) $X = (a + a^+)/2$ и $Y = (a - a^+)/i2$, а в классической — действительная и мнимая части медленно меняющейся комплексной амплитуды волны.

На эту аналогию обратил внимание С.А. Ахманов с сотрудниками [167—170]. Классическая теория параметрического преобразования шума развивалась С.А. Ахмановым с сотрудниками, Ю.Е. Дьяковым, А.С. Чиркиным и др. в работах [167, 171—175] и монографии [176].

Если условие классичности $N_0 \gg 1$ использовать лишь в конечных формулах, то можно проследить непрерывный переход от квантовой к классической

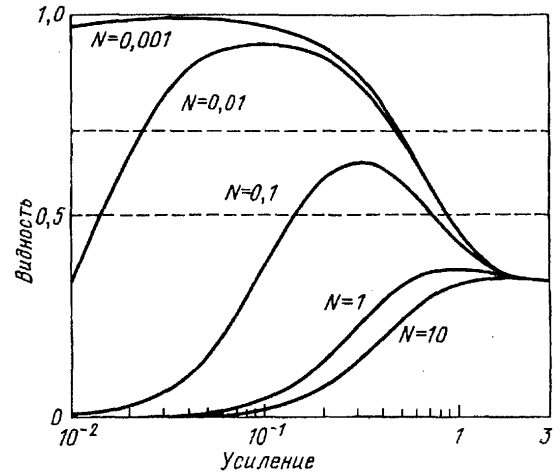


Рис. 4. Графики зависимости видности интерференции V от инкремента параметрического усиления τ источника излучения при различных интенсивностях гауссова "затравочного" шума N (фотонов на моду) на входе усилителя. Горизонтальные штриховые прямые — верхние границы видности, выше которых не выполняются: НБ ($1/\sqrt{2}$), предсказания классической модели (3.3.8) (1/2)

теории. Примечательно, что единственное различие результатов при этом сводится к меньшей видности в классическом случае, что является следствием предполагаемой линейности процесса преобразования [33, 154]. Отметим, что трех- и более фотонные параметрические усилители нелинейны и иногда дают качественные отличия свойств спонтанного и усиленного шума [35, 177].

В приложении III показано (соотношения (III. 32), (III. 33)), что при наличии затравочного шума равной интенсивности N_0 на входах сигнальной и холостой мод формула для среднего числа фотонов в моде (3.5.7) заменяется на

$$N + \frac{1}{2} = \left(N_0 + \frac{1}{2}\right) \text{ch } 2\tau, \quad (3.6.1)$$

а нестационарный коррелятор на выходе каждого усилителя равен

$$M \equiv \langle ab \rangle = \left(N_0 + \frac{1}{2}\right) \text{sh } 2\tau. \quad (3.6.2)$$

Чтобы не учитывать случайных совпадений фотонных пар, связанных с "многомодовостью" детекторов, положим $Q \sim T/\tau_{\text{coh}} \ll 1$. Тогда видность интерференции согласно (3.5.15) и (3.5.10) есть

$$V = \frac{M^2}{2N^2 + M^2} = \left\{ 1 + \frac{2}{(2N_0 + 1)^2} [(N_0 + 1) \text{th } \tau + N_0 \text{cth } \tau]^2 \right\}^{-1}. \quad (3.6.3)$$

Графики полученной функции представлены на рис. 4. С их помощью легко выявить режимы работы, при которых нарушаются неравенства Белла или Коши—Шварца.

Причина снижения видности с ростом N_0 та же,

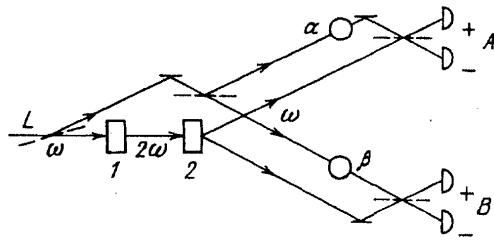


Рис. 5. Схема гомодинного интерферометра. 1 — удвоитель частоты лазера L , 2 — параметрический преобразователь частоты вниз, работающий в вырожденном по частоте режиме. Остальные обозначения не отличаются от принятых на рис. 1

что и в предыдущем подразделе — случайные совпадения вследствие перекрытия фотонных пар.

В реальном эксперименте затравочный шум может сопровождаться многомодовостью детекторов ($Q > 1$), и видность нужно вычислять из (3.5.10), (3.5.15), (3.6.1) и (3.6.2) бездопущения $Q \ll 1$.

Предельное классическое значение видности в смысле $N_0 \rightarrow \infty$ следует из (3.6.3) (ср. с (3.5.16)):

$$V = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{cth}^2 2\tau} \leq \frac{1}{3}. \quad (3.6.4)$$

Таким образом, как в квантовом режиме ($N_0 \ll 1$), так и в данной классической модели ($N_0 \gg 1$) видность при $\tau \gg 1$ оказывается одинаковой $V = 1/3$, характерной, кстати, и для интерференции гауссова излучения [33, 34].

3.7. Гомодинное детектирование в интерференции интенсивности. В схеме на рис. 1, a наблюдателю A посылаются две волны a_1 и a_2 , имеющие независимые случайные фазы x_1 и x_2 . Разность этих фаз x фактически он и измеряет посредством интерферометра. Для возникновения корреляции с измерениями наблюдателя B , очевидно, необходима коррелированность разностей фаз x и y в каналах, что и выражено условием (3.3.6a). Такая интерпретация справедлива и для квантового описания процесса при соответствующем определении операторов разности фаз, приведенном в приложении I.

Естественно в данной ситуации поставить вопрос не об измерении разностей фаз, а об их "абсолютных" значениях, отсчитываемых от определенного фазового репера, т.е. опорной волны гомодина. При этом удалось бы обойтись всего одним параметрическим источником излучения вместо двух. Один из вариантов такого схемного решения представлен на рис. 5. Ясно, что фазы гомодинов в каналах A и B должны быть коррелированы, следовательно, опять нужно иметь по две линии связи источника с каждым наблюдателем. По классификации интерферометров [33, 34] — это четырехмодовая интерференция интенсивности.

Обозначим теперь операторы сигнальной и холо-

стой мод одного параметрического преобразователя, как $a \equiv a_1$ и $b \equiv b_1$, а оператор гомодинных мод, как $c = a_2 = b_2$. Аналогичные схемы рассматривались в [54—59, 178]. Регулируемые фазы α и β можно считать дополнительными фазами гомодинов. Напомним, что фаза нестационарного коррелятора $\langle ab \rangle$ включает фазу накачки φ_0 , которую мы обычно полагаем нулевой. Поэтому фаза гомодинов должна быть связана с φ_0 . В реальном эксперименте, конечно, используется единый задающий лазер.

Пусть мода гомодина — в когерентном состоянии с амплитудой $\sqrt{2} z$. Согласно (3.4.3), (3.4.4) получаем

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = |z|^2 \langle ab \rangle e^{i\varphi} + \text{к.с.}, \quad \varphi = \alpha + \beta. \quad (3.7.1)$$

Здесь для простоты мы положили фазы гомодинов нулевыми.

Нормирующий делитель K теперь имеет вид (ср. с (III.36))

$$\begin{aligned} K^2 &\equiv \langle (n_a + n_c)(n_b + n_c) \rangle = \langle n_a n_b \rangle + \\ &+ \langle n_a + n_b \rangle \langle n_c \rangle + \langle n_c^2 \rangle = \\ &= N^2 + M^2 + 2N|z|^2 + |z|^4, \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

где функции $N(\tau, N_0)$ и $M(\tau, N_0)$ определены (III.32) и (III.33).

Напомним, что такая нормировка универсальна как в классическом, так и в квантовом рассмотрении при выполнении следующих условий: при детектировании в режиме счета фотонов каждому парному фотоотсчету приписывается значение $+1$ или -1 (в зависимости от того, на каком детекторе он зарегистрирован), а при работе с непрерывными наблюдаемыми интенсивности излучения на всех входах интерферометра поддерживаются постоянными.

Произведя указанную нормировку, имеем

$$E_\varphi = \frac{\langle A_\alpha B_\beta \rangle}{K^2} = V \cos \varphi, \quad (3.7.3)$$

$$V = 2M|z|^2/K^2. \quad (3.7.4)$$

Оптимизируя амплитуду гомодинов:

$$|z|_{\text{opt}}^4 = N^2 + M^2, \quad (3.7.5)$$

найдем максимальную видность

$$V_{\text{max}} = M/[N + (N^2 + M^2)^{1/2}]. \quad (3.7.6)$$

Если на входе параметрического преобразователя вакуум ($N_0 = 0$ — затравка отсутствует), то $N = \operatorname{sh}^2 \tau$, $M = (1/2) \operatorname{sh} 2\tau$, и

$$V_{\text{max}} = [\operatorname{th} \tau + (1 + \operatorname{th}^2 \tau)^{1/2}]^{-1}. \quad (3.7.7)$$

Это результат Тана и др. [59].

В режиме параметрического рассеяния $\tau \ll 1$: $|z|_{\text{opt}}^4 = N/4 = \tau^2/4$, и видность $V = 1$ — чисто квантовый случай. Увеличивая эффективность преобразования до

$$\tau = \frac{1}{2} \operatorname{arccch} \frac{9}{7} \approx 0,37,$$

получаем предельное в ТСП значение $V = 1/\sqrt{2}$.

Полагая $N_0 \gg 1$, получаем классический сжатый шум, для которого $N = N_0 \operatorname{ch} 2\tau$ и $M = N_0 \operatorname{sh} 2\tau$, так что

$$V_{\max} = \frac{\operatorname{sh} 2\tau}{\operatorname{ch} 2\tau + (\operatorname{ch} 4\tau)^{1/2}} = \tau, \quad \tau \ll 1, \\ = 1/(1 + \sqrt{2}), \quad \tau \gg 1 \quad (3.7.8)$$

при

$$|z|_{\text{opt}}^4 = \operatorname{ch} 4\tau. \quad (3.7.9)$$

Итак, эффективно сжатый классический шум в гомодинной схеме дает гармоническую интерференционную структуру с 41%-ной видностью. НБ при этом, конечно, не нарушается,

4. Эксперименты с тремя наблюдателями. Естественное, хотя и малореалистичное пока обобщение рассмотренного выше эксперимента, представлено на рис. 1,6 [19, 21]. Отличие от рис. 1,а сводится к добавлению еще одного двухмодового канала. Такая схема конкретизирует идею ГХЦ [14,15] и позволяет продемонстрировать нарушение НБ $|\langle S_3 \rangle| \leq 1$ для наблюдаемой S_3 с помощью сравнительно небольшого числа испытаний, поскольку S_3 достигает максимума (равного двум вместо $\sqrt{2}$ для $\langle S_2 \rangle_\psi$) при полной корреляции, т.е. при экстремальных значениях составляющих ее четырех корреляторов вида $E \equiv \langle ABC \rangle = \pm 1$. Таким образом, статистическая обработка результатов отдельных (тройных) совпадений фотоотсчетов становится, в принципе, ненужной. Ближе мы подходим и к программе ЭПР, предполагающей в ее оригинальном варианте полную корреляцию измеряемых величин [1,15].

Кроме того, добавление к четырем наблюдаемым A, A', B, B' еще двух: C, C' дает возможность наглядно сформулировать парадокс нового типа — теорему Белла без неравенств ГХЦ [14, 15]. Это яркий пример того, как количество (наблюдателей) переходит в качество — новый вид противоречия.

4.1. Шестимодовый трехканальный интерферометр. Нарис. 1,б два параметрических источника ($k = 1, 2$) испускают тройки фотонов ($\nu = a, b, c$), причем $\omega_a + \omega_b + \omega_c = \omega_0$. Регулируемые фазовые задержки в каждом канале: α, β, γ . Установлены три светоделителя и шесть счетчиков фотонов (или просто детекторов) D_{\pm}^{ν} , к которым для наглядности вновь подключены три зеленые (+) и три красные (−) лампы.

Неидеальность источников и детекторов опять преодолеваем тем, что посредством схемы совпадений принимаем во внимание только тройные события, когда очередная тройка фотонов (за номером $i = 1, 2, \dots$) вызывает одновременную вспышку трех

ламп разных каналов. Наблюдаемым $A_\alpha, B_\beta, C_\gamma$ приписываем значения ± 1 в зависимости от цвета вспыхнувшей лампы. Мощность накачки выберем достаточно малой для того, чтобы вероятность случайного перекрытия соседних троек фотонов за время T (постоянная времени детекторов) оказалась незначительной.

Квантовая теория предсказывает следующие результаты, которые без сомнения подтвердятся экспериментом, если технические трудности будут преодолены.

При некотором значении суммарной фазы $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$, которое примем за нулевое $\varphi = \alpha = \beta = \gamma = 0$, установится полная корреляция — в каждом испытании i будет вспыхивать только нечетное число (1 или 3) зеленых ламп и, соответственно, четное (2 или 0) — красных. При $\varphi = \pm \pi$ картина станет обратной. Таким образом,

$$F_{0i} = 1, \quad F_{\pi i} = -1, \quad (4.1.1)$$

где

$$F_{\varphi i} \equiv A_{\alpha i} B_{\beta i} C_{\gamma i}. \quad (4.1.2)$$

Напомним, что в опытах с двумя наблюдателями при полной корреляции измерений противоречия с ТСП не наблюдалось. В рассматриваемом же случае "экспериментальные" результаты (4.1.1) несовместны с классическими представлениями. Наглядно и без математики это показал Мермин [118].

Продолжим наш мысленный эксперимент, варьируя φ и вычисляя средние значения многоканальной наблюдаемой F_φ . При достаточно продолжительных сериях испытаний зависимость должна быть гармонической:

$$E_\varphi = \langle F_\varphi \rangle_\psi = \cos \varphi \approx \langle F_\varphi \rangle_{\text{exp}} \equiv L^{-1} \sum_{i=1}^L F_{\varphi i}. \quad (4.1.3)$$

Это пример трехфотонной интерференции интенсивности со 100 %-ной видностью.

Среднеквадратическое отклонение наблюдаемой F_φ в КТ есть

$$\langle \Delta F_\varphi^2 \rangle_\psi^{1/2} = |\sin \varphi|. \quad (4.1.4)$$

Аналогично эксперименту с двумя наблюдателями используем по два фиксированных значения фаз в каждом канале:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = \pi/2. \quad (4.1.5)$$

Выберем следующие комбинации

$$(\alpha', \beta, \gamma), (\alpha, \beta', \gamma), (\alpha, \beta, \gamma'), (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (4.1.6)$$

для которых проведем четыре последовательных серии испытаний, регистрируя

$$F^{(1)} = A'BC, \quad F^{(2)} = AB'C, \\ F^{(3)} = ABC', \quad F^{(4)} = A'B'C', \quad (4.1.7)$$

где $A = A_\alpha, A' = A_{\alpha'}$ и т.д.

Для средних согласно (4.1.3) получим

$$E^{(1)} = E^{(2)} = E^{(3)} = \cos(\varphi - \pi/2),$$

$$E^{(4)} = \cos(\varphi - 3\pi/2) \quad (4.1.8)$$

при флуктуациях, описываемых (4.1.4), где $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$.

Наложим дополнительное условие $\varphi = \pi/2$, которое реализуется, например, для $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$. При этом фиксируются наблюдаемые $A = A_{\pi/2}$, $A' = A_0$ и т.д. (на спиновом языке это операторы Паули: $A = \sigma_y^a$, $A' = \sigma_x^a$, см. приложение I). Согласно (4.1.4) наблюдаемые $F_i^{(m)}$ теперь не флуктуируют и принимают два возможных значения: или +1 (полная корреляция) или -1 (полная антикорреляция).

В четырех отдельных испытаниях ($i = 1, 2, 3, 4$) зафиксируем 12 значений

$$A'_1, B_1, C_1; \dots; A'_4, B'_4, C'_4. \quad (4.1.9)$$

Перемножив тройки (4.1.2), согласно (4.1.8) получим

$$F_1^{(1)} = -1, F_2^{(2)} = -1,$$

$$F_3^{(3)} = -1, F_4^{(4)} = 1. \quad (4.1.10)$$

(С точки зрения КТ здесь допущена определенная непоследовательность: слева в равенствах стоят операторы, а справа — числа. Строго говоря, надо заменить $F^{(m)}$ на $\langle F^{(m)} \rangle_\psi$ или 1 на единичный оператор I .) Складывая первые три равенства и вычитая четвертое, получим наблюдаемую Белла для трехканального эксперимента [20]

$$S \equiv \frac{1}{2}(F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} - F^{(4)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(A'_1 B_1 C_1 + \dots - A'_4 B'_4 C'_4) = -2. \quad (4.1.11)$$

Если же, следуя Мермину [25], перемножить все четыре равенства (10), то произведением будет *наблюдаемая ГХЦ*

$$Z \equiv \prod_{m=1}^4 F^{(m)} = A'_1 B_1 C_1 \dots A'_4 B'_4 C'_4. \quad (4.1.12)$$

Это "экспериментальные" результаты. Например, первые 11 величин в (4.1.9) могли бы оказаться равными -1, а двенадцатая $C'_4 = +1$. Сравним теперь "измеренные" S и Z с предсказаниями ТСП.

4.2. Неравенства Белла для трех наблюдателей. Экспериментальные значения A_i , A'_i и т.д. в ТСП предопределены детерминированными функциями $A(\lambda_i)$, $A'(\lambda_i)$, ..., где $\lambda_i = \lambda(t_i)$ — набор переменных (число которых может достигать, скажем, 10^{23}), полностью задающий мгновенное состояние экспериментальной установки. Он, в частности, определяет и момент времени t_i наступления очередного события и 12 конкретных значений шести наблюдаемых A, B, C, A', B', C' в описанном выше

опыте из четырех событий. В каждом испытании эти переменные предписывают данному фотону a повернуть, например, "наверх" в канале интерферометра с фазой a , так что реализуется событие $A_a = +1$. Более того, тот же самый фотон несет и информацию о том, как бы он поступил, если бы "встретил" другую фазу a' .

Итак, в принципе, имеется детерминированная функция

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) =$$

$$= \frac{1}{2} [F^{(1)}(t_1) + F^{(2)}(t_2) + F^{(3)}(t_3) - F^{(4)}(t_4)] =$$

$$= \frac{1}{2} [A'(\lambda_1)B(\lambda_1)C(\lambda_1) + A(\lambda_2)B'(\lambda_2)C(\lambda_2) +$$

$$+ A(\lambda_3)B(\lambda_3)C'(\lambda_3) - A'(\lambda_4)B'(\lambda_4)C'(\lambda_4)], \quad (4.2.1)$$

описывающая результаты четырех испытаний с различными регулируемыми фазами α, β, γ ; здесь $\lambda_i = \lambda(t_i)$. Отметим, что из (4.2.1) вовсе не следует, например, обязательно $C(\lambda_1) = C(\lambda_2)$, так как λ_1 не должна совпадать с λ_2 в общем случае. ТСП дает ограничения лишь для усредненных экспериментальных данных.

Как и в подразделе 3.2, усредним S по временам t_i :

$$\langle S \rangle_t = \frac{1}{2} (\langle F^{(1)} \rangle_t + \langle F^{(2)} \rangle_t + \langle F^{(3)} \rangle_t - \langle F^{(4)} \rangle_t); \quad (4.2.2)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ означает среднее по множеству реализаций, случившихся в различные моменты времени.

Будем считать эволюцию системы $\lambda(t)$ эргодическим случайным процессом с распределением ρ_λ и перейдем к усреднению по ансамблю экспериментальных установок, например,

$$\langle F^{(1)} \rangle_t \rightarrow \langle F^{(1)} \rangle_\rho \equiv \int A'_\lambda B_\lambda C_\lambda \rho_\lambda d\lambda. \quad (4.2.3)$$

В результате имеем

$$\langle S \rangle_\rho = \int S_\lambda \rho_\lambda d\lambda, \quad (4.2.4)$$

где теперь все λ одинаковы:

$$S_\lambda \equiv \frac{1}{2}(A'_\lambda B_\lambda C_\lambda + A_\lambda B'_\lambda C_\lambda + A_\lambda B_\lambda C'_\lambda -$$

$$- A'_\lambda B'_\lambda C'_\lambda). \quad (4.2.5)$$

Таким образом, под знаком интеграла по λ наблюдаемые в выражении (4.2.1) теряют временные индексы, так что теперь их можно группировать произвольным образом.

Определим две вспомогательные переменные S_2 и S'_2 , отличающиеся перестановкой штрихованных и нештрихованных наблюдаемых (индекс λ временно опускаем):

$$S_2 \equiv \frac{1}{2} [A(B + B') + A'(B - B')],$$

$$S'_2 \equiv \frac{1}{2} [A'(B' + B) + A(B' - B)]. \quad (4.2.6)$$

Ясно, что S_2 и S'_2 могут принимать лишь значе-

ния ± 1 в случае дихотомных наблюдаемых (см. (3.2.6)).

Образуем теперь

$$S \equiv S_3 \equiv \frac{1}{2} [S_2(C+C') + S'_2(C-C')] = \pm 1, \quad (4.2.7)$$

так как либо $C = C'$ и $S = S_2C = \pm 1$, либо $C = -C'$ и $S = -S'_2C' = \pm 1$. Этот результат справедлив при любых наборах фаз (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$, а не только в случае (4.1.5). Существенно лишь предположение о локальности (4.1.2), т.е. независимости A от β, γ и т.д., которое позволило сгруппировать наблюдаемые в виде (4.2.6), (4.2.7).

В классической теории вероятностей мера ρ_λ всегда неотрицательна, а $\int \rho_\lambda d\lambda = 1$, поэтому значения интеграла (4.2.4) не могут выйти из интервала $[-1, +1]$:

$$|\langle S \rangle_\rho| \leq \int |S_\lambda| \rho_\lambda d\lambda = 1. \quad (4.2.8)$$

Итак, в рамках ТСП,

$$|\langle S \rangle_\rho| = \frac{1}{2} |E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} - E^{(4)}| \leq 1. \quad (4.2.9)$$

Это и есть НБ для трех наблюдателей [20, 71]. Оно справедливо и в опытах с непрерывными наблюдаемыми A, A', B, B', C, C' , по модулю не превышающими единицы (см. (3.2.9)).

Заметьте, что устранение нумерующих события индексов i в (4.2.1) дает (4.2.5) и можно прийти к ошибочному выводу о выполнении НБ в каждой экспериментальной серии из четырех событий. На самом деле неусредненная наблюдаемая Белла (4.2.1) находится в более широком интервале возможных значений: $[-2, 2]$.

НБ можно вывести и без явного привлечения ТСП, если сразу исходить из предположения о том, что непосредственно перед каждым очередным тройным событием уже предопределены будущие показания детекторов для двух вариантов фазовой задержки (в данном случае 0 и $\pi/2$) каждого из каналов. Но это как раз и означает априорную инструкцию фотону, куда ему повернуть на светоделителе — вверх или вниз — при обеих фазовых задержках (0 и $\pi/2$). Простая радиофизическая модель подобной ситуации описана в подразделе 4.4. Там "инструкция" заключена в случайной разности фаз смешиваемых сигналов двух параметрических генераторов.

Из вывода НБ понятно, что для устранения противоречия между (4.2.9) и "экспериментальным" значением $\langle S \rangle_{\text{exp}} = \langle S \rangle_\psi = -2$ (см. (4.1.11)) достаточно отказаться от одного из двух предположений: а) локальность (если $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha\beta\gamma}, B_\beta \rightarrow \dots$, то нарушаются (4.2.6), (4.2.7)), или б) неотрицательность ρ_λ (при этом нарушается (4.2.8)). Обе альтернативы

ведут к одинаково неприятным противоречиям (например, с теорией относительности [142]), однако судя по общепринятой терминологии, большинство физиков предпочитает "нелокальность". Математическую эквивалентность этих альтернатив доказал Водкиевич [153] на примере двух спинов в синглетном состоянии (см. также [93, 152]).

Есть, наконец, и третий выход из положения — отказ в праве на существование совместной функции распределения для шести наблюдаемых, которую можно образовать из ρ_λ . Его и предлагает копенгагенская трактовка квантовой механики: штрихованные и нештрихованные операторы не коммутируют, например согласно (3.4.4):

$$[A, A'] \equiv [A_{\pi/2}, A_0] = 2i(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1), \quad (4.2.10)$$

поэтому говорить о распределении $P(A, A')$ просто не имеет смысла.

В многочисленных работах обсуждаются и другие варианты классических теорий, допускающих нарушение НБ (см., например, [8, 9]). При этом всегда приходится "поступаться принципами" — отказываться от прочно установленных физических представлений.

Как и в случае опытов с двумя наблюдателями, случайные совпадения ограничивают измеряемые корреляторы значениями $\pm V$, так что в эксперименте может быть, например, $E^{(1)} = E^{(2)} = E^{(3)} = -V$, $E^{(4)} = +V$. При этом $|\langle S \rangle_{\text{exp}}| = 2V$, и НБ нарушается, лишь если видность V (относительное число "неправильных" по знаку значений $F_i^{(m)}$) превышает 50%. Напомним, что в Двухканальном варианте аналогичный порог был выше (71%).

4.3. Теорема Белла без неравенств. Кратко эта теорема или парадокс ГХЦ [14, 15] формулируется следующим образом. Согласно определению (4.1.12) в комбинированную наблюдаемую Z каждая локальная наблюдаемая с одной и той же регулируемой фазой входит дважды:

$$Z_{\text{exp}} = (A'_1 A'_4) (A_2 A_3) \dots (C'_3 C_4) = -1. \quad (4.3.1)$$

Фазы и их комбинации выбраны в соответствии с (4.1.5) и (4.1.6), и выполняется (4.1.10). Индексы в (4.3.1) соответствуют номеру испытания. Традиционно считается, что парадокс ГХЦ можно продемонстрировать в четырех одиночных испытаниях, т.е. без статистической обработки результатов многочисленных измерений — в отличие от "обычных" НБ. В самом деле, если опустить индексы в (4.3.1), то

$$Z = (AA'BB'CC')^2 = +1 \quad (4.3.2)$$

в противоречии с правой частью (4.3.1), являющейся итогом квантового рассмотрения.

Попытаемся выяснить смысл проделанной

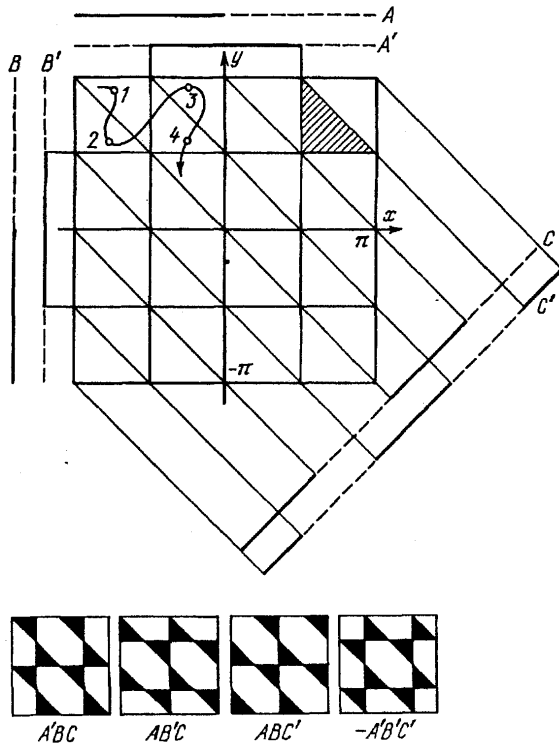


Рис. 6. Диаграммы, иллюстрирующие отображение пространства случайных фаз (x, y) , занимающего квадрат $[-\pi, +\pi]^2$, на множество значений шести дихотомных переменных A, A', B, B', C, C' . Сплошные жирные линии соответствуют значениям "+1", а штриховые — "-1". Заштрихованный треугольник подпространства фаз дает значения -1 для всех шести наблюдаемых. Извилистая кривая — возможная траектория, изображающая эволюцию фаз во времени. На нижних диаграммах темные треугольники дают +1 для слагаемых НБ: $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}$ и $-F^{(4)}$, определяемых согласно (4.1.5) — (4.1.7). Всюду приняты $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2, \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$

процедуры — игнорирования номера испытания — в возникшем противоречии между "экспериментальным" прогнозом КТ (4.3.1) и предсказанием ТСП (4.3.2).

Многоканальной комбинированной наблюдаемой ГХЦ Z в ТСП соответствует однозначная (детерминированная) функция скрытых параметров

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = A'(\lambda_1)B(\lambda_1)C(\lambda_1) \dots A'(\lambda_4)B'(\lambda_4)C(\lambda_4); \quad (4.3.3)$$

здесь λ_i — совокупность значений скрытых параметров в момент i -го испытания, например, $A_i = A(\lambda_i)$ — конкретное значение наблюдаемой $A = A_\alpha$ в этой реализации.

Совокупность значений λ_1 предопределяет в ТСП не только фактически наблюдаемые величины в одном испытании, например, $A'_1 = B_1 = C_1 = \pm 1$, но и три ненаблюдаемые величины, в частности, $A_1 = B'_1 = C'_1 = \pm 1$ в отличие от КТ, где такая возможность исключается принципом дополнительности, и символ $\langle AA' \rangle$ просто не имеет смысла, поскольку фазовая задержка (или ориентация магнита в спиновом эксперименте) не может одновременно

иметь два различных значения α и α' . Иными словами, ТСП постулирует *однозначное* соответствие между точкой λ_1 в непрерывном фазовом пространстве $\Lambda \equiv \{\lambda\}$ источника и набором значений шести наблюдаемых A, A', B, B', C, C' , например, $\sigma_1 = (+ + + + +)$. Ясно, что этот же набор σ_1 порождается некоторым подмножеством точек (подпространством) в пространстве Λ , которое мы обозначим Λ_1 , причем $\lambda_1 \in \Lambda_1$.

Общее количество различных наборов σ_k для $2N=6$ дихотомных наблюдаемых составляет $2^6 = 64$. Эта совокупность $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{64}$ составляет дискретное множество наблюдаемых $\{\sigma\} \equiv \Sigma$.

Другой точке $\sigma_2 \neq \sigma_1$ из множества Σ , например, $\sigma_2 = (- + + + +)$ соответствует другое подпространство Λ_2 . Важно, что Λ_1 и Λ_2 не имеют общих точек (не пересекаются), т.е. $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, ибо в противном случае соответствие Λ множеству Σ будет неоднозначным: одна причина λ ($\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$) породит два взаимоисключающих следствия σ_1 и σ_2 , что противоречит лапласовскому детерминизму.

Итак, каждой "точке" σ_k множества Σ соответствует свое подпространство $\Lambda_k, k = 1, 2, \dots, 64$, пространства Λ . Некоторые из этих подпространств могут быть пустыми, например, в следующем подразделе рассмотрена модель, в которой половина 64 точек не реализуется (рис. 6). На языке теории множеств мы имеем однозначную функцию/или отображение Λ на Σ , которое обозначается как $\{f: \Lambda \rightarrow \Sigma\}$, в частности $\sigma_1 = f(\lambda_1)$. Обратное преобразование неоднозначно, его обозначают символом $\Lambda_1 = f^{-1}(\sigma_1)$, и Λ_1 называют полным *прообразом* σ_1 . Объединения подпространств $\cup_k \Lambda_k = \Lambda$ исчерпывает все множество возможных значений скрытых переменных λ .

С течением времени изображающая точка $\lambda(t)$ в фазовом пространстве источника переходит из одной области Λ_k в другую, так что если в момент t_i (с учетом времени пролета частиц от источника к детекторам) она пересекает область Λ_k , то исход эксперимента — σ_k .

Пусть при всех четырех испытаниях изображающая точка $\lambda(t)$ находилась в одном и том же подпространстве Λ_k :

$$\lambda_i \in \Lambda_k, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.3.4)$$

тогда, действительно, индексы в (4.3.3) можно опустить, или записать более конкретно

$$Z_\lambda = (A_\lambda A'_\lambda B_\lambda B'_\lambda C_\lambda C'_\lambda)^2 = +1. \quad (4.3.5)$$

Теоретически такой вариант не исключен. В этом смысле можно сказать, что парадокс ГХЦ не нуждается в многократных испытаниях. Однако в реальности за время проведения четырех отдельных измерений, разделенных макроскопическими интервалами

Δt (на оптическом языке $\Delta t \gg \tau_{\text{coh}}$) изображающая точка скорее всего выйдет за пределы Λ_k . Пусть, например, моменту t_2 соответствует определенная выше область Λ_1 , а моменту t_3 — Λ_2 , тогда в (4.3.1) имеем $A_2 = +1$, $A_3 = -1$, и (4.3.4), (4.3.5) не выполняются. Следовательно, четыре испытания не воспроизводят парадокса ГХЦ — ведь измеренное значение $Z = -1$ всегда можно объяснить нарушением (4.3.4) — необходимым условием игнорирования индексов в (4.3.3).

Проконтролировать соблюдение (4.3.4) в общем случае невозможно. Поэтому единственным выходом в данной ситуации является проведение большого количества испытаний, что позволит констатировать попадание λ_i в одно и то же подпространство Λ_k при всех $i = 1, 2, 3, 4$ с определенной вероятностью, превышающей таковую предсказаниями ТСП.

Рассмотрим экспериментальную процедуру подробнее. В четырех сериях испытаний измеряются многоканальные наблюдаемые $F^{(m)}$, $m = 1 - 4$, соответствующие комбинациям фаз (4.1.5), (4.1.6). В идеальной ситуации квантовая трактовка предсказывает полную корреляцию (4.1.10). Однако случайные совпадения могут дать $(1 - I)L$ "неправильных" знаков. Пусть для каждого m общее число правильных ответов значительно превышает произведение 64 на количество "неправильных" реализаций. В этом случае можно уверенно заключить, что хотя бы четыре "правильных" — по одному для каждой серии m — имели прообразом одно и то же подпространство Λ_k . Следовательно, для этих четырех испытаний (4.3.4) выполняется, индексы номера испытания i в (4.3.1) допустимо исключить, т.е. на законном основании получить (4.3.2) или (4.3.5).

Итак, массив, скажем, из $4 \times 64 \times 10$ реализаций должен явно продемонстрировать парадокс ГХЦ и, тем самым, неадекватность ТСП. Хотя формального усреднения при этом не требуется, процедура все же носит статистический характер, т.е. позволяет сделать заключительное суждение с конечной вероятностью. Последняя может быть повышена увеличением числа реализаций, и принципиально ограничивают ее лишь случайные совпадения.

Помимо исключительной наглядности, парадокс ГХЦ обладает тем положительным свойством, что никакие "промасштабированные" ТСП, предложенные Сантосом [44, 45] для объяснения экспериментальных нарушений НБ, его, по-видимому, не разрешают.

Где же выход из противоречия $-1 \neq +1$? Отказ от лапласовского детерминизма (однозначности $\sigma = f(\lambda)$) и примирение с принципом дополнительности в виде невозможности приписывания некомму-

тирующим наблюдаемым априорных значений представляются наиболее очевидными ("минимальная" интерпретация [10]). Это точка зрения сторонников ортодоксальной или копенгагенской интерпретации КТ. Однако продолжается и поиск различных "лазеек" в приведенном выводе для оправдания новых вариантов "объективногореализма"; см., например, [44, 45].

Далее будет показано, что результат КТ $Z = -1$ следует из операторного тождества $(AA')^2 = -I$, которое возможно лишь для некоммутирующих операторов A и A' , т.е. они не могут быть измерены одновременно в одном испытании. Более того, оператор AA' неэрмитов: $(AA')^+ = A'A \neq AA'$, значит, не может описывать наблюдаемую величину.

4.4. Стохастические модели трехканальной интерференции. В полной аналогии с подразделом 3.3 будем описывать поле на входе интерферометра шестью комплексными амплитудами a_k, b_k, c_k . Интенсивность всех шести мод полагаем постоянными и одинаковыми: $n_\nu = 1$, а фазы $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$ подчиняем "параметрическим" условиям:

$$x_k + y_k + z_k = \text{const}, k = 1, 2. \quad (4.4.1)$$

В интерферометре флуктуации фаз преобразуются в флуктуации интенсивностей (см. (3.3.2)):

$$n_{\pm}^a(t) = 1 \pm \cos(\alpha + x(t)),$$

$$n_{\pm}^b(t) = 1 \pm \cos(\beta + y(t)), \quad (4.4.2)$$

$$n_{\pm}^c(t) = 1 \pm \cos(\gamma - x(t) - y(t)),$$

где α, β, γ — регулируемые фазы, $x(t) = x_2 - x_1$, $y(t) = y_2 - y_1$.

Коррелятор фототоков трех детекторов, например $\langle n_{+}^a n_{+}^b n_{+}^c \rangle$, обнаружит интерференцию "третьего порядка" с фазой $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$ и видимостью $1/4$ (см. (3.3.7), (3.3.9)). На этом описание модели с непрерывными наблюдаемыми мы завершим и сразу перейдем к дискретным дихотомным A, B, C .

Будем регистрировать знаки разностей токов $\Delta n_\nu = n_{+}^\nu - n_{-}^\nu$ в трех каналах в последовательные моменты времени t_i , разделенные интервалами $\Delta t \gg \tau_{\text{coh}}$. Получим три дихотомные последовательности:

$$A_i = \text{sign} \cos(\alpha + x_i),$$

$$B_i = \text{sign} \cos(\beta + y_i), \quad (4.4.3)$$

$$C_i = \text{sign} \cos(\gamma - x_i - y_i).$$

Две случайные разности фаз $x(t)$ и $y(t)$ или x_i и y_i играют здесь роль скрытых параметров. Полагая их эргодическими случайными функциями с равномерным распределением $\rho(x, y) = 1/4\pi^2$ в квадрате $\Lambda = [-\pi, +\pi]^2$, для корреляции знаков

многоканальной наблюдаемой F_i получаем (подробный вывод — в приложении IV)

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \langle F_\varphi \rangle_\rho = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} [\cos x \times \\ &\times \cos y \cdot \cos (x + y - \varphi)] dx dy = \\ &= (1 - \tilde{\varphi}^2)/2 \text{ при } |\tilde{\varphi}| \leq 1, \\ &= [(|\tilde{\varphi}| - 2)^2 - 1]/2 \text{ при } 1 < |\tilde{\varphi}| \leq 2, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

где $\tilde{\varphi} = 2\varphi/\pi$. График этой зависимости состоит из одинаковых участков парабол, перевернутых вверх и вниз друг относительно друга. Он приведен на рис. 3,б.

Экспериментальные значения E_φ равны $\pm 1/2$ при $\varphi = 0$ и $\pm \pi$, т.е. на этот раз полной корреляции не наблюдается (ср. с (3.3.18)).

При уже известных нам комбинациях фаз (4.1.5), (4.1.6) НБ выполняется на пределе:

$$\langle S \rangle_\rho = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -1. \quad (4.4.5)$$

Пространство скрытых параметров Λ в рассматриваемой модели вполне осязаемо и можно наглядно проследить его связь с множеством Σ дихотомных наблюдаемых A, A', B, B', C, C' ($A \equiv A_{\pi/2}, A' \equiv A_0$ и т.д. согласно (4.1.5)), которая в общем виде проанализирована в предыдущем подразделе. Отображение $\Lambda \rightarrow \Sigma$ иллюстрирует рис. 6. Двумерное пространство $\Lambda = \{x, y\}$ занимает квадрат $[-\pi, \pi]^2$ на плоскости xOy . Согласно (4.4.3)

$$\begin{aligned} A &= -\text{sign} \sin x, \\ B &= -\text{sign} \sin y, \\ C &= \text{sign} \sin (x + y), \\ A' &= \text{sign} \cos x, \\ B' &= \text{sign} \cos y, \\ C' &= \text{sign} \cos (x + y) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

и четыре многоканальных наблюдаемых $F^{(m)}$ из которых образуются наблюдаемые Белла и ГХЦ, равны

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= -\text{sign} [\cos x \cdot \sin y \cdot \sin (x + y)], \\ F^{(2)} &= -\text{sign} [\sin x \cdot \cos y \cdot \sin (x + y)], \\ F^{(3)} &= \text{sign} [\sin x \cdot \sin y \cdot \cos (x + y)], \\ F^{(4)} &= \text{sign} [\cos x \cdot \cos y \cdot \cos (x + y)]. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Заметим, что при одних и тех же x, y (неизменных для всех $m = 1 - 4$)

$$Z \equiv F^{(1)} F^{(2)} F^{(3)} F^{(4)} = +1, \quad (4.4.8)$$

т.е. выполняются два парных равенства с $F^{(m)}$ типа $F^{(1)} = F^{(3)}$ и $F^{(2)} = F^{(4)}$ или с другими комбинациями m .

Согласно (4.4.6) половина $2^6 = 64$ возможных вариантов значений шести наблюдаемых σ_k имеют прообразами пустые подпространства Λ_k , например,

$\sigma_1 = (+ + + + +)$ в данной модели никогда не реализуется, и $\Lambda_1 = \emptyset$. Остальные 32 подпространства изображены на рис. 6 треугольниками, а соответствующие знаки наблюдаемых — отрезками прямых.

Случайные фазовые функции $x(t)$ и $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$ попадают в каждое из 32 непустых подпространств Λ_k бесконечное число раз и равномерно заполняют квадрат $\Lambda = [-\pi, +\pi]^2$. Таким образом, по рис. 6 легко вычислить корреляторы $E^{(m)} = \langle F^{(m)} \rangle$ как отношения сумм площадей и подпространств Λ_+ и Λ_- , дающих $F = +1$ и $F = -1$ к общей площади Λ :

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= E^{(2)} = E^{(3)} = E_\pi = \frac{8 - 24}{8 + 24} = -\frac{1}{2}, \\ E^{(4)} &= E_0 = \frac{24 - 8}{24 + 8} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Здесь единичной мерой служит площадь элементарного треугольника Λ_k на рис. 6. Полученные числа — частные значения функции E_φ вида (4.4.4), которые как раз и дают (4.4.5), т.е. "классическое" значение наблюдаемой Белла $\langle S \rangle_\rho = -1$.

Но можно ли в рамках классической модели достичь полной корреляции (или антикорреляции) наблюдаемых F при $N \geq 3$, или это прерогатива лишь квантовой трактовки? Для ответа на закономерный возникший вопрос рассмотрим неоднородные распределения фаз $\rho(x, y)$. Пусть, например, фазы двух параметрических генераторов, оставаясь независимыми и случайными, удерживаются в заштрихованном треугольнике на рис. 6. При этом все шесть наблюдаемых A, A', \dots, C' принимают лишь одно значение -1 и, естественно, наблюдается полная антикорреляция, например, $F^{(1)} = -1$. Однако такая модель — не адекватна нашему гипотетическому эксперименту, где A равно ± 1 и т.д. с равной вероятностью.

Если же отказаться от независимости фаз x и y , то появится парная корреляция между каналами. Так, полагая $x = y$, получаем $A = B$ и $A' = B'$, что опять противоречит "эксперименту".

Отсутствие парной корреляции можно обеспечить факторизацией функции распределения:

$$\rho(x, y) = \rho_x(x) \rho_y(y), \quad (4.4.10)$$

а равновероятность положительных и отрицательных исходов каждой из шести наблюдаемых — симметричностью функций $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ относительно точек смены знаков наблюдаемых.

Этим условиям удовлетворяет следующая модель. Пусть разности фаз x и y случайным образом принимают значения, принадлежащие двум интервалам: $0 \pm \delta\varphi$ и $\pi \pm \delta\varphi$, где $\delta\varphi \ll \pi/2$. Такая ситуация реализуется при повторных запусках вырожденного параметрического генератора и названа

С.А. Ахмановым с сотрудниками *квантованием фазы* [171, 172]. Итак, можно принять

$$\rho(x, y) = \frac{1}{4} (\delta(x) + \delta(x - \pi + 0)) \times \\ \times (\delta(y) + \delta(y - \pi + 0)). \quad (4.4.11)$$

Мы сдвинули δ -функции на бесконечно малую положительную величину для удобства интегрирования при выполнении усреднения.

Согласно (4.4.11) все три разности фаз x, y и $z = -x - y$ испытывают случайные попарно независимые скачки на π от реализации к реализации. Подстановка (4.4.11) в интеграл типа (4.4.4) дает

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \rho(x, y) dx dy = \\ = \frac{1}{4} (F(0, 0) + F(\pi, 0) + F(0, \pi) + F(\pi, \pi)) = \\ = \text{sign}(\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma) = \pm 1, \quad (4.4.12)$$

где теперь

$$F(x, y) = \text{sign}[\cos(\alpha + x) \cdot \cos(\beta + y) \times \\ \times \cos(\gamma - x - y)]. \quad (4.4.13)$$

Таким образом, при любых α, β, γ , не равных $\pm\pi/2$, имеет место полная корреляция (или антикорреляция), изменять знак которой может любой из трех наблюдателей, например, меняя α при фиксированном β и γ . НБ, конечно, выполняется: комбинации фаз (4.1.5), (4.1.6) с добавлением бесконечно малого сдвига $+0$ дают $E^{(m)} = +1$ для всех $m = 1 - 4$.

Итак, полная корреляция (антикорреляция) не специфична для квантовой модели. Более того, наша классическая модель дает идентичные квантовым низшие моменты:

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = \langle C \rangle = \langle AB \rangle = \langle AC \rangle = \langle BC \rangle = 0. \quad (4.4.14)$$

Единственное наблюдаемое отличие — П-образная зависимость E от каждой фазы α, β, γ (см. рис. 3, в) вместо гармонической интерференционной кривой $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ в КТ. Полученные результаты допускают обобщение на произвольное число каналов регистрации N , чему посвящен подраздел 5.4.

Отметим также, что наблюдаемая ГХЦ в дискретных классических моделях (с дихотомными наблюдаемыми) не зависит от вида $\rho(x, y)$, и (4.4.8), таким образом, всегда выполняется. Подчеркнем еще раз противоречие этого результата КТ, где в отсутствие случайных совпадений $Z = +1$ *никогда* не реализуется (разумеется, условия (4.1.5) — (4.1.7) должны быть соблюдены). Тем не менее, экспериментальное подтверждение этого факта, как показано в предыдущем подразделе, будет носить статистический характер. Проиллюстрируем с помощью рис. 6 данное соображение на наглядном примере. Не накладывая ограничений на функцию распределения $\rho(x, y)$, предположим, что в серии из четырех испы-

таний случайные фазы $(x, y) \equiv \lambda$ в момент времени $t_i, i = 1, 2, 3, 4$, находились в точках, отмеченных на рис. 6 такими же числами. В точках 1 и 2 зарегистрируем показания $(A'BC)_1 = (- - +)$ и $(AB'C)_2 = (+ - -)$, так что $C_1 \neq C_2$, и условия возникновения парадокса ГХЦ не будут соблюдены (все четыре набора $\lambda^{(m)}$ не принадлежат одному треугольнику). Действительно, согласно рис. 6 $F^{(1)} = F^{(2)} = F^{(3)} = +1, F^{(4)} = -1$, откуда $Z = -1$ и $S = +2$. Таким образом, в соответствии с ТСП отдельные серии испытаний могут давать результаты, выходящие из классических рамок, требующих идентичности скрытых параметров.

4.5. Квантовая теория трехфотонной интерференции. На входе интерферометра (см. рис. 1, б) имеем три фотона a, b, c , каждый из которых распределен по двум модам $k = 1, 2$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^2 a_k^+ b_k^+ c_k^+ |0\rangle \equiv \\ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_a |10\rangle_b |10\rangle_c + |01\rangle_a |01\rangle_b |01\rangle_c). \quad (4.5.1)$$

Наблюдаемые $A_\alpha, B_\beta, C_\gamma$ описываются выражениями типа (3.4.4), а многоканальный оператор F_φ имеет вид

$$F_\varphi \equiv A_\alpha B_\beta C_\gamma = \sigma_-^a \sigma_-^b \sigma_-^c e^{i\varphi} + \text{э.с.}, \quad (4.5.2)$$

где $\sigma_-^a = a_1 a_2^+$ и т.д., $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$, а э.с. означает эрмитово сопряжение. Здесь опущены слагаемые, одновременно включающие σ_- и σ_+ .

Действие операторов наблюдаемых (3.4.4) на вектор состояния (1) описывается соотношениями типа

$$A_\alpha |\psi\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\alpha} a_2^+ b_1^+ c_1^+ + e^{-i\alpha} a_1^+ b_2^+ c_2^+) |0\rangle. \quad (4.5.3)$$

Аналогично для B_β и C_γ .

Найдем среднее значение и дисперсию многоканальной наблюдаемой:

$$E_\varphi \equiv \langle F_\varphi \rangle = \cos \varphi, \quad \langle \Delta F_\varphi^2 \rangle = \sin^2 \varphi, \quad (4.5.4)$$

т.е. опять имеем полное совпадение с результатами анализа двухфотонного интерферометра. В дальнейшем они будут обобщены и на произвольное число наблюдателей N (см. (5.3.9)).

Совместное распределение наблюдаемых A, B, C отличается от (3.1.3) лишь численным коэффициентом, связанным с увеличением количества каналов наблюдения:

$$P_{ABC}^{\xi\eta\zeta} = \langle n_a^\xi n_b^\eta n_c^\zeta \rangle = \\ = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \text{ при } \xi\eta\zeta = +1, \\ = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ при } \xi\eta\zeta = -1, \quad (4.5.5)$$

где $\xi, \eta, \zeta = \pm 1$.

Перейдем теперь к обоснованию теоремы ГХЦ и "экспериментального" результата (4.3.1). При выбранных в четырех модификациях опыта комбинациях фаз (4.1.5), (4.1.6) для наблюдаемой ГХЦ с учетом (4.1.7) имеем

$$Z \equiv F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)}F^{(4)} = A'BC... C' = -I. \quad (4.5.6)$$

С другой стороны, в силу коммутативности разнотипных операторов: $[A, B] - [A', B] = \dots = 0$, находим

$$Z = BB'BB' = (BB')^2 = I + B[B', B]B'. \quad (4.5.7)$$

Это означает, что именно пренебрежение некоммутируемостью штрихованных и нештрихованных операторов (вданном случае B и B') дает $Z = +I$, т.е. вывод ТСП $Z = +I$. Итак, теорема ГХЦ, впрочем, как и Белла, и КС, формально следует из некоммутируемости алгебры операторов наблюдаемых.

В приложении I показано (см. (1.19)), что при соответствующих фазах операторы A и A' или B и B' практически совпадают с операторами Паули σ_y и σ_x . Поэтому сущность парадокса ГХЦ в сконцентрированном виде можно сформулировать неравенством

$$Z = (\sigma_y \sigma_x)^2 = (-i\sigma_z)^2 = -I \neq \sigma_x^2 \sigma_y^2 = I. \quad (4.5.8)$$

Отметим также, что поскольку Z — произведение некоммутирующих операторов, соответствующую наблюдаемую нельзя измерить за одно испытание. По этой причине в опытах с неполной корреляцией сравнивать с результатами эксперимента имеет смысл произведение средних $\langle F^{(1)} \rangle \langle F^{(2)} \rangle \langle F^{(3)} \rangle \langle F^{(4)} \rangle$, но не среднее от произведения $\langle F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)}F^{(4)} \rangle$, так как измерить последнее просто невозможно.

Перейдем, далее, к обобщению рассматриваемой модели на случай усиления параметрическим преобразователем начального гауссова шума с интенсивностью $N_0 = \langle a_0^+ a_0 \rangle_0 = \langle b_0^+ b_0 \rangle_0 = \langle c_0^+ c_0 \rangle_0$. Аналогичную операцию мы уже проделали для Двухканального варианта интерферометра (см. подраздел 3.6). Предельный переход $N_0 \rightarrow \infty$ даст генерацию источником классического аналога трехфотонного сжатого света [35, 177].

В представлении Гейзенберга трехмодовое параметрическое преобразование описывается уравнениями движения

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= b^+ c^+, \\ \frac{db}{d\tau} &= a^+ c^+, \\ \frac{dc}{d\tau} &= a^+ b^+, \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

аналогичными (III.2). Нелинейность (4.5.9) приводит к ряду интересных особенностей (см., например, [33, 179] и цитируемую там литературу).

Решение (4.5.9) запишем в рамках теории возмущений по τ

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \tau b_0^+ c_0^+ + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} a_0 (1 + b_0^+ b_0 + c_0^+ c_0) + \dots \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Аналогичные выражения получаются и для b, c .

В случае вакуумного начального состояния ($N_0 = 0$) первые два порядка по τ дадут при соответствующей нормировке предыдущие результаты (4.5.4), (4.5.5). Поправки третьего порядка позволяют учесть случайные совпадения, скорость которых в трехфотонном эксперименте равна (ср. с (3.5.8)) $R^3 T^2$, где R — скорость счета фотонов в каждом канале, а T — "окно" схемы совпадений, в основном определяемое постоянной времени детекторов. Мы в дальнейшем рассмотрении ограничимся квадратичным по τ приближением.

Упомянутая выше "соответствующая нормировка" наблюдаемых аналогична уже известной нам по выражениям (3.3.14), (3.5.1), (3.7.2), (III.35):

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{n_+^a - n_-^a}{K}, \\ B_\beta &= \frac{n_+^b - n_-^b}{K}, \\ C_\gamma &= \frac{n_+^c - n_-^c}{K}, \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

где теперь

$$K^3 = \langle (n_+^a + n_-^a) (n_+^b + n_-^b) (n_+^c + n_-^c) \rangle. \quad (4.5.12)$$

Напомним, что она универсальна как для классических, так и квантовых моделей, например, усреднение по состоянию (4.5.1) дает $K = 1$.

Подставим (4.5.10) в (4.5.11) и образуем нормированную корреляцию

$$E_\varphi \equiv \langle F_\varphi \rangle = V \cos \varphi, \quad (4.5.13)$$

где видность интерференции

$$V \approx [1 + (4N_0^3/\tau^2)]^{-1}. \quad (4.5.14)$$

При выводе этих соотношений использованы следующие промежуточные результаты:

$$\begin{aligned} \langle (n_+^a - n_-^a) (n_+^b - n_-^b) (n_+^c - n_-^c) \rangle_0 &= \\ &= 2\tau^2 (1 + 6N_0 + 15N_0^2 + 18N_0^3 + \\ &+ 9N_0^4) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

$$\begin{aligned} K^3 \equiv \langle n_a n_b n_c \rangle_0 &\approx \langle n_a n_b n_c \rangle_0 \big|_{\tau=0} + \\ &+ \langle n_a n_b n_c \rangle_0 \big|_{N_0=0} = 2(\tau^2 + 4N_0^3). \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Поскольку мы используем представление Гейзенберга, усреднение $\langle \dots \rangle_0$ производится по исходному хаотическому смешанному состоянию, характеризующему корреляторами (III.27). Приближение

(4.5.14), (4.5.16), справедливое при $N_0 \ll 1$ и $\tau^2 \ll 1$, позволяет избежать крайне громоздких точных вычислений. В (4.5.16) мы пренебрегли слагаемыми смешанного типа: $\tau^2 N_0$, $\tau^2 N_0^2$ и т.д., поскольку в дальнейшем нас будут интересовать значения $N_0^3 \sim \tau^2 \gg \tau^2 N_0$, $\tau^2 N_0^2$, ... Отношение (4.5.15) к (4.5.16) при $N_0 \ll 1$ дает (4.5.13), (4.5.14).

Отметим, что выражением (4.5.13) далеко не исчерпывается многообразие трех- и более фотонной интерференции различных порядков [33—35, 157, 177], проявляющееся даже несмотря на линейность интерферометров. Например, в некоторых схемах возможна эволюция интерференционного максимума в минимум с ростом N_0 от нуля до ∞ [35, 177].

Вернемся, однако, к нашему случаю. Как отмечалось в конце подраздела 4.2, верхний предел видности V , при котором НБ еще выполняется, равен $1/2$. Поэтому согласно (4.5.14) нарушение НБ происходит при

$$N_0 < (\tau^2/4)^{1/3}. \quad (4.5.17)$$

Причиной падения видности с ростом N_0 являются все те же случайные совпадения, но при $N_0 \neq 0$ они происходят даже в интерферометре с идеальными условиями детектирования, когда окно схемы совпадений $T = 0$.

Отметим еще одно интересное обстоятельство. Если независимый по каналам начальный гауссов шум подавать не на параметрический преобразователь, а непосредственно на входы интерферометра, то интерференции не будет: видность $V = 0$. Легко убедиться в том, что для суперпозиции квантового состояния (4.5.1) и хаотического смешанного состояния с $\langle n_k^v \rangle_0 = 1/2$, $v = a, b, c$; $k = 1, 2$ (т.е. $\langle n_v \rangle_0 = 1$), видность интерференции составит $V = 1/2$, и НБ будет выполняться. Таким образом, добавление к каждому фотону из коррелированной тройки всего по одному хаотическому фотону приводит к исчезновению чисто квантового эффекта — нарушения НБ, что соответствует аналогичному выводу работы [161] более общего характера.

Как и в случае опытов двух наблюдателей, возможна гомодинная модификация трехфотонного эксперимента — замена одного из двух параметрических источников "трифотонов" когерентным гомодином, задающим общий фазовый репер трех каналов. Очевидное преобразование схемы на рис. 5 при этом производится по принципу рис. 1, $a \rightarrow 1, б$.

Если условия, оговоренные при выводе (4.5.13), (4.5.14), соблюдены и в гомодинном варианте эксперимента, то (4.5.13) сохраняет справедливость, а видность интерференции

$$V \approx \frac{2\tau|z|^3}{\tau^2 + (N_0 + |z|^2)^3}, \quad (4.5.18)$$

где $|z|^2 \ll 1$ — интенсивность излучения гомодина, вводимая в каждый канал (предполагается по каналам одинаковой).

Оптимизируя эффективность параметрического процесса:

$$\tau_{\text{opt}} = (N_0 + |z|^2)^{3/2}, \quad (4.5.19)$$

найдем максимальную видность

$$V_{\text{max}} = [1 + (N_0/|z|^2)]^{-3/2}. \quad (4.5.20)$$

Таким образом, нарушение НБ происходит при $N_0/|z|^2 < 0,59$, что соответствует снижению видности от 1 до $1/2$ с ростом N_0 от нуля.

5. Теорема Белла для N наблюдателей. Проблема обобщения теоремы и неравенств Белла на случаи произвольного числа коррелированных частиц (как правило, со спином $1/2$) посвящено значительное число работ [14—20, 90, 116] и др. В интересной форме эта задача была решена недавно Мермином [16], а затем несколько усовершенствована Роем и Сином [17]. Дальнейшие исследования проведены Ардехаи [18] и др. [19, 21]. Во всех случаях, кроме [19, 21], предполагалось использование N -частичной спиновой модели в качестве объекта исследований. Основным результатом этих работ является обнаружение нетривиальной возможности экспоненциального роста по N относительных расхождений в предсказаниях КТ и ТСП для N -частичной наблюдаемой S_N :

$$|\langle S_N \rangle_\psi / \langle S_N \rangle_\rho| \geq 2^{(N-1)/2}. \quad (5.1)$$

При $N=2$ и 3 (5.1) дает знакомые результаты: (3.1.12), (3.1.13); (4.1.11), (4.2.9). В предельном же переходе $N \rightarrow \infty$ здесь согласно Мермину [16] можно говорить о макроскопическом квантовом эффекте нового типа. Следует, однако, иметь в виду, что для его регистрации потребовалось бы детектирование каждой из N частиц в отдельности.

Мы предлагаем вывод и обсуждение теоремы Белла, приводящей к результату в форме (5.1), применительно к интерференционному оптическому эксперименту (в настоящее время гипотетическому) [19, 21].

5.1. N -канальный интерферометр. Вернемся к схемам на рис. 1, имея в виду вместо двух или трех наблюдателей произвольное их количество N . Теперь два N -частотных параметрических преобразователя последовательно в случайные моменты времени t_i рожают ансамбли из N фотонов, каждый из которых принадлежит двум модам. Регистрируем дихотомные наблюдаемые $A_n(\alpha_n) = \pm 1$, $n = 1, 2, \dots, N$. Пусть α_n — фазовая задержка в n -м канале. В спиновом варианте эксперимента величи-

на a_n определяла бы ориентацию анализатора Штерна—Герлаха, аналогично описанной в приложении II модели. Возможна и гомодинная схема, обобщающая рис. 5.

Введем N -канальную наблюдаемую

$$F(\{\alpha\}) \equiv A_1(\alpha_1, t_i) A_2(\alpha_2, t_i) \dots A_n(\alpha_n, t_i). \quad (5.1.1)$$

КТ предсказывает гармоническую интерференционную модуляцию со 100 %-ной видностью:

$$E_N(\{\alpha\}) = \langle F_\varphi \rangle_\psi = \cos \varphi, \quad \varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n. \quad (5.1.2)$$

Соотношения (3.1.4), (4.1.3), таким образом, получают естественное обобщение.

В режиме полной корреляции ($E_N=1$) удобно установить реперные значения регулируемых фаз в каждом из каналов: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$.

Хотя с ростом N эксперимент становился менее наглядным, противоречие его результатов ТСП в форме (5.1) приобретает более драматический характер.

5.2. Неравенство Белла для N наблюдателей. Результаты испытаний в ТСП предопределены детерминированными функциями скрытых параметров: $A_n(\alpha_n, \lambda_i) = \pm 1$, $\lambda_i = \lambda(t_i)$. В дальнейшем для упрощения записи эту зависимость от λ мы специально не оговариваем.

Измерения в каждом канале будем производить при двух значениях фаз: α_n и α'_n , которым поставим в соответствие две наблюдаемые: $A_n \equiv A_n(\alpha_n)$ и $A'_n \equiv A_n(\alpha'_n)$, также принимающие значения ± 1 .

Далее возникает проблема определения N -канальной наблюдаемой Белла S_N , которая бы обнаруживала максимальное противоречие между КТ и ТСП, аналогично S_2 и S_3 . Очевидный путь ее решения — продолжение итерационной процедуры, позволившей нам найти S_3 вида (4.2.7):

$$S_N = \frac{1}{2} S_{N-1} (A_N \pm A'_N) \pm \frac{1}{2} S'_{N-1} (A_N \mp A'_N),$$

$$S_0 = S'_0 = 1, N = 1, 2, \dots; \quad (5.2.1)$$

здесь S'_N отличается от S_N перестановкой штрихов: $A_n \leftrightarrow A'_n$. Мы использовали более общую по сравнению с (3.2.6) и (4.2.7) расстановку знаков, которая, однако, не нарушает обоснованного далее НБ. Важно лишь, чтобы знаки внутри круглых скобок всегда были противоположны. В частности, нам потребуются следующие комбинации:

$$(- + +), (+ + -), (- - +), (+ - -) \quad (5.2.2)$$

при N , равном 1, 2, 3, 4 с периодом 4 (mod 4) соответственно. Они обеспечат нам компактную запись S_N в форме (5.2.13), (5.2.14). Для низших N имеем

$$S_1 = A_1, S'_1 = A'_1, \quad (5.2.3)$$

$$S_2 = [S_1(A_2 + A'_2) + (S'_1(A_2 - A'_2))]/2 =$$

$$= (A_1 A_2 + A'_1 A_2 + A_1 A'_2 - A'_1 A'_2)/2 \equiv$$

$$\equiv (A^2 + 2AA' - A'^2)/2, \quad (5.2.4)$$

$$S_3 = [S_2(A_3 - A'_3) - S'_2(A_3 + A'_3)]/2 =$$

$$= (A_1 A_2 A_3 - A_1 A'_2 A'_3 - A'_1 A_2 A'_3 -$$

$$- A'_1 A'_2 A_3)/2 \equiv (A^3 - 3AA'A'^2)/2, \quad (5.2.5)$$

$$S_4 = [S_3(A_4 + A'_4) - S'_3(A_4 - A'_4)]/2 =$$

$$= (A^4 + 4A^3 A' - 6A^2 A'^2 - 4AA'^3 + A'^4)/4, \quad (5.2.6)$$

$$S_5 = [S_4(A_5 - A'_5) + S'_4(A_5 + A'_5)]/2 =$$

$$= (A^5 - 10A^3 A'^2 + 5AA'^4)/4, \quad (5.2.7)$$

где KA'^{N-n} в символической форме означает сумму из K нетождественных перестановок штрихованных и нештрихованных величин. Таким образом, S_N образуется из всевозможных вариантов нелокальной наблюдаемой $F_N = A \pm A_2 \dots A_N$ с различной расстановкой штрихов и представляет собой детерминированную дихотомную функцию

$$S_N(\lambda) = \pm 1 \quad (5.2.8)$$

со средним значением

$$\langle S_N \rangle_\rho = \int S_N(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (5.2.9)$$

которое в силу $\rho(\lambda) \geq 0$ и $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ подчинено N -канальному НБ вида

$$|\langle S_N \rangle_\rho| \leq 1. \quad (5.2.10)$$

Отметим, что дихотомность A_n и A'_n для выполнения (5.2.10) в общем случае необязательна. Достаточным условием является

$$|A_n| \leq 1, |A'_n| \leq 1. \quad (5.2.11)$$

Наблюдаемую Белла S_N можно записать более элегантно. Воспользуемся для этого компактным методом Мермина [16] в несколько модифицированном виде. Введем комплексные функции

$$M_n \equiv A_n + iA'_n, \Pi_N \equiv \prod_{n=1}^N M_n. \quad (5.2.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что итерационное определение наблюдаемой Белла (5.2.1) с использованием знаковых комбинаций (5.2.2) тождественно следующим выражениям:

$$S_N = 2^{-m} (\text{Re } \Pi_N + \text{Im } \Pi_N) \quad (5.2.13)$$

при четных $N = 2m$,

$$S_N = 2^{-m} \text{Re } \Pi_N \quad (5.2.14)$$

при нечетных $N = 2m + 1$.

Функция Π_N содержит 2^N слагаемых, следовательно, согласно (5.2.13) S_N включает $K = 2^N$ членов, а согласно (5.2.14) слагаемых будет уже $K = 2^{N-1}$. Например, при $N = 2, 3, 4, 5$ имеем $K = 4, 4, 16, 16$. С другой стороны, в итерационном определении (5.2.1) $K_{N+1} = 4K_N$, но при четных N половина членов (5.2.1) сокращается, а оставшиеся попарно

равны друг другу, и опять, так же как в (5.2.13), (5.2.14), $K_{2m+1} = K_{2m}$.

Помимо компактности, выражения (5.2.13), (5.2.14) обладают еще одним преимуществом: они позволяют легко вычислять S_N с помощью символической формулы $\Pi_N = (A + iA')^N$ и бинома Ньютона, что и использовано в (5.2.4) — (5.2.7).

Покажем далее, как можно получить НБ непосредственно из (5.2.13), (5.2.14), воспользовавшись аргументацией Мермина [16]. Согласно (5.2.12) при соблюдении (5.2.11) экстремальные M_N и Π_N равны

$$M_N = \pm 1 \pm i = \pm \sqrt{2} \exp(is_n \pi/4), \quad (5.2.15)$$

$$\Pi_N = \pm 2^{N/2} \exp(is_n \pi/4), \quad (5.2.16)$$

где $s_n = \pm 1$, $s = \sum_{n=1}^N s_n = 0, \pm 1, \dots$

При четных $N = 2m$: $s = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, и

$$|\operatorname{Re} \Pi_N| = 2^m,$$

$$|\operatorname{Im} \Pi_N| = 0$$

или

$$|\operatorname{Re} \Pi_N| = 0,$$

$$|\operatorname{Im} \Pi_N| = 2^m. \quad (5.2.17)$$

При нечетных $N = 2m + 1$: $s = \pm 1, \pm 3, \dots$, и

$$|\operatorname{Re} \Pi_N| = |\operatorname{Im} \Pi_N| = (\sqrt{2})^{N-1}. \quad (5.2.18)$$

Во всех случаях

$$S_N = \pm 1, \quad (5.2.19)$$

и вновь имеем НБ (5.2.10).

5.3. Квантовая теория N -фотонной интерференции и нарушение неравенства Белла. Цель данного подраздела — показать, что квантовое среднее $\langle \psi | S_N | \psi \rangle \equiv \langle S_N \rangle_\psi$ может превышать единицу при некоторой комбинации фаз $\{\alpha_n, \alpha'_n\}$.

Для реализации оптического варианта опыта нужно приготовить N -фотонное состояние $2N$ -модового поля вида

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\prod_{n=1}^N a_{n1}^+ + \prod_{n=1}^N a_{n2}^+ \right) |0\rangle. \quad (5.3.1)$$

Это естественное обобщение знакомых нам состояний (3.4.1), (4.5.1), которое может быть приготовлено, например, с помощью двух N -частотных параметрических преобразователей, $a_{n1,2}^+$ — операторы рождения фотонов в моде $n1$ и $n2$.

Согласно (3.4.4) наша наблюдаемая

$$A_n = \sigma_-^n e^{i\alpha_n} + \sigma_+^n e^{-i\alpha_n} = \sigma_x^n \cos \alpha_n + \sigma_y^n \sin \alpha_n, \quad (5.3.2)$$

где $\sigma_-^n = a_{n1}^+ a_{n2}^+$, $\sigma_+^n = a_{n1}^- a_{n2}^-$.

Конкретизируем α_n и α'_n . Мермин [16] при этом использовал ограничение $\alpha_n = 0$ и $\alpha'_n = \pi/2$. Ардехали рассмотрел вариант $\alpha_n = \pi/4$, $\alpha'_n = 3\pi/4$ [18], и результаты Мермина для четных и нечетных N поменялись местами. Мы проанализируем более общий случай, наложив на фазы менее жесткое условие (напомним, что при выводе НБ (5.2.10) никаких фазовых ограничений не использовано):

$$\alpha'_n = \alpha_n + \pi/2. \quad (5.3.3)$$

При этом из (5.3.2) и (5.2.12) следует (теперь (5.2.12) — (5.2.14) мы рассматриваем как операторные соотношения, в которых $\operatorname{Re} \Pi_N \equiv (\Pi_N + \Pi_N^+)/2$, $\operatorname{Im} \Pi_N \equiv (\Pi_N - \Pi_N^+)/2i$ — соответственно эрмитова и неэрмитова части Π_N)

$$M_N = 2\sigma_+^N e^{-i\alpha_N}, \quad (5.3.4)$$

так что усреднение оператора Π_N по состоянию (5.3.1) дает просто (см. (1.3))

$$\begin{aligned} \langle \Pi_N \rangle_\psi &= \\ &= 2^N e^{-i\varphi} \langle \psi | \prod_{n=1}^N \left[\sigma_+^n (|10\rangle_n + |01\rangle_n) \right] / \sqrt{2} = \\ &= 2^{N-1} e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

где

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n.$$

Таким образом, согласно (5.2.13), (5.2.14)

$$\langle S_N \rangle_\psi = 2^{m-1/2} \sin(\pi/4 - \varphi) \text{ при } N = 2m, \quad (5.3.6)$$

$$\langle S_N \rangle_\psi = 2^m \cos \varphi \text{ при } N = 2m + 1. \quad (5.3.7)$$

Установим суммарную фазу $\varphi = -\pi/4$ в (5.3.6) или равную нулю в схеме с нечетным числом каналов (т.е. в (5.3.7)). В обоих случаях

$$\langle S_N \rangle_\psi = 2^{(N-1)/2} \quad (5.3.8)$$

и с учетом НБ (5.2.10) приходим к итоговому отношению (5.1). Универсальная его форма для четных и нечетных N отличается от результата Мермина [16], у которого $\langle S_{2m} \rangle_\psi$ оказались в $\sqrt{2}$ меньше нашего значения. Причина — разные определения наблюдаемой Белла: Мермин использовал лишь выражение типа (5.2.14) для любых N . Рой и Син [17], в свою очередь, для получения более общего соотношения (5.1) ввели вместо (5.3.1) состояния специального вида, различающиеся для четных и нечетных N .

Браунштейн, Манн и Ревзен [90] доказали, что (5.3.8) дает предельное значение наблюдаемой Белла в форме Мермина [16]. Максимальным оно является и в нашем случае.

Правильность (5.3.8) подтверждается также частными примерами четырех- и пятиканальной схем.

Поскольку, в соответствии с (5.3.1) и (5.3.2),

$$E_N \equiv \langle A_1 A_2 \dots A_N \rangle_\psi = \cos \varphi, \langle \Delta F_N^2 \rangle = \sin^2 \varphi, \quad (5.3.9)$$

усредняя (5.2.6) и (5.2.7), имеем

$$\langle S_4 \rangle_\psi = \frac{1}{4} [\cos \varphi + 4 \cos(\varphi + \pi/2) - 6 \cos(\varphi + \pi) - 4 \cos(\varphi + 3\pi/2) + \cos(\varphi + 2\pi)], \quad (5.3.10)$$

$$\langle S_5 \rangle_\psi = \frac{1}{4} [\cos \varphi - 10 \cos(\varphi + \pi) + 5 \cos(\varphi + 2\pi)]. \quad (5.3.11)$$

Выражение (5.3.10) напоминает (3.1.11) для $N=2$. При $\varphi = -\pi/4$ каждое из 16 слагаемых в (5.2.6) и все косинусы в (5.3.10) (с учетом знаков) одинаковы и равны $1/\sqrt{2}$, так что $\langle S_4 \rangle_\psi = 2^{3/2}$ в согласии с (5.3.8). Полной корреляции измерений, как и в Двухканальном интерферометре, при этом, разумеется, нет [18]. Однако вывод о том, что она в принципе невозможна для четырехканального варианта, был бы ошибочным. Как раз для $N=4$ впервые сформулирован парадокс ГХЦ [14], требующий именно полной корреляции (и антикорреляции). Однако там использованы лишь четыре коррелятора из возможных шестнадцати, которые при определенных φ могут быть равными ± 1 , что с очевидностью следует из (5.2.6) и (5.2.10) (подробнее см. подраздел 5.5). Итоговый вывод этих рассуждений допускает обобщение на случаи с произвольными четными N : хотя полная корреляция (и антикорреляция) результатов некоторых измерений возможна, условия ее достижения не совпадают с требованием $\varphi = -\pi/4$, обеспечивающим максимальность наблюдаемой Белла в форме (5.2.1) или (5.2.13).

В схемах с нечетным числом каналов N ситуация иная. Например, при $N=5$ для $\varphi=0$ все 16 слагаемых в (5.3.6) и косинусы в (5.3.11) (с учетом знака) равны по единице. При этом $\langle S_5 \rangle_\psi = 2^2$ максимальна, и как раз реализуется полная корреляция (и антикорреляция) [18]: $E_N = \pm 1$ (включая в определение (5.3.9) иштрихованные A_n). Именно в этих условиях реализуется парадокс ГХЦ для $N=3$ (подробнее см. подраздел 4.3). Итак, при всех используемых комбинациях фаз (но с $\varphi=0$) наблюдается полная корреляция, и наблюдаемые $F_N = A_1 A_2 \dots A_N$ (включая иштрихованные A_n) не флуктуируют: во всех испытаниях $F_N = \pm 1$. В эксперименте последнее условие можно использовать для установки реперных значений фаз в каждом из каналов. Фактически корреляторы E_N будут отличаться от единицы множителем V (видность интерференции) за счет случайных совпадений (см. подраздел 3.5). Следовательно, экспериментальное значение наблюдаемой Белла

$$\langle S_N \rangle_{\text{exp}} = V_N 2^{(N-1)/2}, \quad (5.3.12)$$

и для нарушения НБ (5.2.10) необходимо

$$V_N > 2^{(1-N)/2}. \quad (5.3.13)$$

Тем не менее в практике двухфотонных экспериментов часто "облегчают" выполнение подобного условия введением скорректированного значения $\langle \tilde{S}_2 \rangle = \langle S_2 \rangle_{\text{exp}} / V_2$, так что гармонически интерференционная зависимость "автоматически" приводит к нарушению НБ.

5.4. Классические волновые модели.

Попытаемся обобщить некоторые из рассмотренных в третьем и четвертом разделах вариантов классических экспериментов на случай произвольного числа наблюдателей N . При этом мы, в частности, убедимся в том, что сама по себе полная корреляция или антикорреляция $E_N(\{\alpha_n\}) = \pm 1$ показаний N удаленных детекторов, знак которой управляется любым из N локальных параметров α_n , не специфична для квантовых моделей и вполне допускает классическую трактовку. В этих случаях справедливость НБ определяется не только видностью интерференции, но и (или) характером интерференционной зависимости E_N от α_n .

Обсуждение классических моделей начнем с варианта регистрации непрерывных наблюдаемых.

Вернемся к схемам на рис. 1, имея в виду вместо двух или трех измерительных каналов произвольное их количество N . Заменим также параметрические преобразователи на N -частотные генераторы, испускающие $2N$ классических квазимонохроматических волн с постоянными интенсивностями и медленно дрейфующими фазами x_{nk} , $k=1,2$, играющими роль скрытых параметров λ_{nk} . Эти фазы связаны с неизменными фазами когерентных волн накачки φ_{01} и φ_{02} "параметрическими" условиями (здесь k далее мы отождествляем $x \equiv \lambda$)

$$\sum_{n=1}^N (\lambda_{n1}(t) - \lambda_{n2}(t)) = \varphi_{01} - \varphi_{02}. \quad (5.4.1)$$

Без нарушения общности рассмотрения можно положить $\varphi_{01} = \varphi_{02}$, и

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n = 0, \lambda_n \equiv \lambda_{n2} - \lambda_{n1}. \quad (5.4.2)$$

Заметим, что фазовым репером может служить и стабильный локальный гомодин, если N -канальную схему организовать аналогично изображенной на рис. 5. При этом есть возможность обойтись лишь одним параметрическим генератором.

В измерительном канале в один из сигналов вносится дополнительная фаза α_n , после чего оба смешиваются и выпрямляются. Измеряемой величиной каждого наблюдателя является разность выпрямленных сигналов Δn_n , описываемая гармоническим за-

коном вида (3.3.11). Таким образом, в чистом виде реализуется фазовое детектирование.

Из измеряемых величин образуем коррелятор

$$E_N(\{\alpha_n\}) = \langle A_1(\alpha_1, \lambda) A_2(\alpha_2, \lambda) \dots A_N(\alpha_N, \lambda) \rangle_\rho, \quad (5.4.3)$$

который в данном случае (при $\rho(\lambda) = \text{const}$), как и (3.3.12), (4.4.2), описывает гармоническую интерференционную кривую

$$E_N(\varphi) = V_N \cos \varphi. \quad (5.4.4)$$

Напомним, что классическое значение видности V_N подчинено условию (3.3.10), т.е. ограничению более жесткому, нежели необходимому для выполнения НБ (см. (5.3.13)). Таким образом, существует заметный интервал значений (рис. 7)

$$2^{1-N} < V_N \leq 2^{(1-N)/2}, \quad (5.4.5)$$

согласующихся с ТСП, но противоречащих конкретной классической волновой модели, своеобразный количественный "выигрыш" которой в расхождении с КТ является следствием этой конкретности.

Ограничение на ВЕЩНОСТЬ (3.3.10) снимается в дискретной классической модели, являющейся предметом последующего изложения.

"Дихотомизируем" наблюдаемые, фигурирующие в феноменологической теореме Белла, используя знаковую функцию (аналогично (3.3.16), (4.4.3)):

$$A_n(\alpha_n, \lambda) \equiv \text{sign } \Delta n_n = \text{sign } \cos(\alpha_n + \lambda_n), \quad (5.4.6)$$

т.е. в каждом канале имеем биполярный телеграфный сигнал со случайными моментами смены знака и некоторым временем корреляции τ_{coh} . Как и в рассмотренном выше случае непрерывных наблюдаемых, регистрацию всех сигналов ведем через интервалы времени $\Delta t \gg \tau_{\text{coh}}$. В данном варианте получим N случайных дихотомных последовательностей $A_n(\alpha_n, t_i) = \pm 1, i = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, N$.

Корреляторы этих последовательностей, например (5.4.3), определяются функцией распределения, которую полагаем факторизованной:

$$\rho(\lambda) = \rho(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}) = \prod_{n=1}^{N-1} \rho_n(\lambda_n) \quad (5.4.7)$$

Сюда вошло лишь $N - 1$ случайных фаз (независимых скрытых параметров), поскольку одну из N определяет (5.4.2).

Выполняя усреднение, имеем

$$E_N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \int \left[\prod_{n=1}^{N-1} A_n(\alpha_n, \lambda_n) \rho_n(\lambda_n) \right] \times \\ \times A_N(\alpha_N, -\sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_{N-1}. \quad (5.4.8)$$

Если распределения фаз равномерны ($\rho_n = 1/2\pi$)

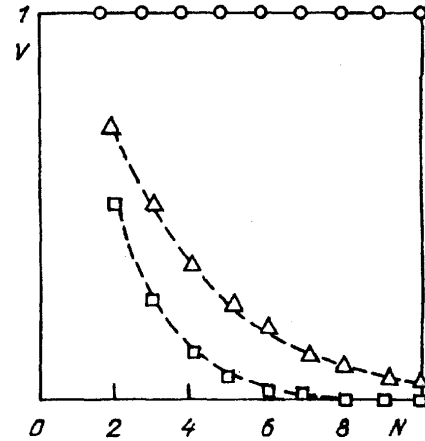


Рис. 7. Верхние границы видности интерференции V , выше которых не выполняются НБ (треугольники), предсказания классической модели (3.3.10) (квадратики). КТ допускает $V = 1$ (кружки)

в интервале 2π , то полная корреляция ($E_N = \pm 1$) может быть лишь в Двухканальном интерферометре (см. подраздел 3.3). Для $N = 3$ уже $|E_3| \leq 1/2$ (в обоих случаях ограничение на видность (3.3.10) снимается). Нельзя рассчитывать на возвращение полной корреляции и при дальнейшем увеличении $N \geq 3$. Однако в классической теории, вообще, полная корреляция все же возможна и для произвольных N . Заменяем однородное распределение фаз на неоднородное:

$$\rho_n(\lambda_n) = (\delta(\lambda_n) + \delta(\lambda_n - \pi + 0))/2, \quad (5.4.9)$$

$$-\pi < \lambda_n \leq \pi,$$

т.е. предположим, что разности фаз двух исходных сигналов (в гомодинном варианте — просто фаза сигнала) каждого из каналов испытывают скачки на π в случайные моменты времени. Иными словами, амплитуды колебаний каждой входной моды интерферометра претерпевают случайные попарно независимые изменения знака: $a_{nk} \rightarrow -a_{nk}$ (см. рис. 3,б). При этом (5.4.8) дает (см. заключительную часть приложения IV)

$$E_N(\{\alpha_n\}) = \text{sign} \prod_{n=1}^N \cos(\alpha_n) = \pm 1. \quad (5.4.10)$$

Отличие от нуля момента N -го порядка является следствием единственной связи между фазами (5.4.2), а все низшие порядки моментов — нулевые:

$$\langle A_n \rangle = \langle A_m A_n \rangle = \dots \\ = \langle A_1 A_2 \dots A_{N-1} \rangle = 0, m \neq n. \quad (5.4.11)$$

Согласно (5.4.10) $E_N = \pm 1$ — как и в квантовой модели с нечетным N при $\varphi = 0$ или π (см. (5.3.9)), но теперь E_N зависит от каждой фазы α_n в отдельности, а не от их суммы

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n.$$

Интересно, что знаком коррелятора E_N может управлять любой из N наблюдателей, а промежуточные значения корреляции отсутствуют: только ± 1 .

Последняя модель опровергает встречающееся мнение о том, что причина нарушения НБ обусловлена более сильными корреляциями в квантовой теории по сравнению с классической. При нарушении неравенства Коши—Шварца (см. (3.5.11)) эта причина, действительно, имеет под собой почву, но для НБ важны не только экстремальные значения коррелятора, но и конкретный вид зависимости $E_N(\{\alpha_n\})$, т.е. форма интерференционной кривой.

5.5. Парадокс ГХЦ в N -канальном эксперименте. Подробному обсуждению парадокса ГХЦ для трех наблюдателей посвящен подраздел 4.3. При $N = 2$ в силу недостаточности числа параметров модели он возникает лишь при существенном усложнении методики проведения опыта [22, 23] (уже может проявиться и близкий, по существу, парадокс КС [24, 25]; см. подраздел 6.1). Случай $N = 4$ также заслуживает внимания, поскольку с его помощью легко выяснить перспективы дальнейшего наращивания N . Кроме того, именно четырехканальный мысленный эксперимент фигурировал в оригинальном предложении ГХЦ [14].

Перепишем коррелятор (5.3.9) в виде

$$\langle F_\varphi \rangle \equiv \langle A_\alpha B_\beta C_\gamma D_\delta \rangle = \cos \varphi, \quad \langle \Delta F_\varphi^2 \rangle = \sin^2 \varphi, \quad (5.5.1)$$

$$\varphi = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Проведем четыре серии испытаний, в каждой из которых реализуется полная корреляция ($\langle \Delta F^2 \rangle = 0$). Воспользуемся при этом следующими наборами фаз

$$(0, 0, 0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0). \quad (5.5.2)$$

Примем обозначения $A = A_0$, $A' = A_{\pi/2}$, $B = B_0$, $B' = B_{\pi/2}$ и т.д., игнорирующие номер испытания (обсуждение этого "упрощения" см. в подразделе 4.3). Согласно (1) эксперимент даст следующие результаты

$$\begin{aligned} F_0^{(1)} &= ABCD = 1, \\ F_\pi^{(2)} &= A'B'CD = -1, \\ F_\pi^{(3)} &= A'BC'D = -1, \\ F_\pi^{(4)} &= AB'C'D = -1. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Знаки усреднения здесь опущены, поскольку наблюдаемые F не флуктуируют ($\langle \Delta F^2 \rangle = 0$). Перемножив эти равенства, получим противоречие типа

$$Z = \prod_{m=1}^4 F^{(m)} = (AA'BB'CC'D^2)^2 = -1. \quad (5.5.4)$$

Заметим, что фаза четвертого канала δ не варьируется, т.е. вполне можно было бы обойтись и без него [15]. Это соображение дает тривиальное обобщение формулировки парадокса ГХЦ на произвольное N :

$$\begin{aligned} Z &= (A_1 A'_1 A_2 A'_2 A_3 A'_3 A_4^2 \dots A_N^2)^2 \equiv \\ &\equiv (A_1 A'_1 A_2 A'_2 A_3 A'_3)^2 = -1. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Таким образом, увеличение числа каналов свыше трех ничего нового в этом смысле не дает. Более того, лишь обостряется проблема обеспечения попадания набора скрытых параметров λ в одно и то же подмножество однозначности Λ во всех четырех сериях экспериментов, поскольку общее количество принципиально возможных исходов испытаний растет как 2^{2N} , и для уверенной констатации неадекватности ТСП потребуется увеличить число реализаций (подробнее см. в подразделе 4.3).

Отметим также, что в рамках рассмотренной выше классической модели с дискретными фазами, несмотря на полную корреляцию парадокса ГХЦ, разумеется, не возникает в силу несоответствия коррелятора (5.4.10) условию (5.5.1).

6. Другие примеры противоречий между квантовой механикой и "здравым смыслом".

6.1. Теорема Кохена — Спекера. Некоммутирующие операторы, как известно, не могут одновременно иметь определенные численные значения. Формально это следует из отсутствия у них общих собственных функций. На конкретном примере Кохен и Спекер (КС) показали, что игнорирование этого правила приводит к алгебраическому противоречию типа $+1 = -1$.

Рассмотрим наиболее простые примеры доказательства теоремы КС, следуя Пересу [24] и Мермину [25]. Пусть имеются две частицы со спином $1/2$. Для определенности будем иметь в виду экспериментальную схему на рис. 8 (см. ниже на с. 35). Все наблюдаемые свойства системы описываются операторными функциями шести "базисных" матриц Паули $\sigma_\alpha^{(n)}$ ($n = 1, 2$; $\alpha = x, y, z$) и операторной единицы I . Обозначим $\sigma_x^{(1)} = x_1$ и т.д. и запишем основные соотношения, связывающие эти операторы, в виде

$$\begin{aligned} [x_n, y_n] &= 2x_n y_n = 2iz_n, \\ [x_1, y_2] &= [x_2, y_1] = 0, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

$$x_n^2 = y_n^2 = z_n^2 = I.$$

Определим также операторы

$$F_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{(1)} \sigma_\beta^{(2)}, \quad (6.1.2)$$

описывающие корреляцию проекций спинов в каналах измерения.

Предположим в начале, что система находится в синглетном состоянии $|\psi\rangle$ вида (П. 6), тогда согласно (П.11)

$$\langle F_{xx} \rangle_\psi = \langle F_{yy} \rangle_\psi = \langle F_{zz} \rangle_\psi = -1, \quad (6.1.3)$$

причем в отсутствие случайных совпадений соответствующие измерения будут происходить в условиях полной корреляции с нулевой дисперсией флуктуаций.

Образует произведение

$$F_{xy}F_{yx} \equiv x_1y_2y_1x_2 = x_1y_1y_2x_2 = z_1z_2 = F_{zz}. \quad (6.1.4)$$

Поскольку операторы F_{xy} и F_{yx} коммутируют, в принципе, возможно одновременное измерение соответствующих им наблюдаемых. Не останавливаясь на конкретизации такой процедуры, допуская лишь ее потенциальную осуществимость, согласно (6.1.4) и (6.1.3) следует ожидать, что

$$\langle F_{xy}F_{yx} \rangle_\psi = -1 \quad (6.1.5)$$

также при полной корреляции результатов измерений.

Спектр собственных значений всех использованных в данном подразделе операторов состоит из двух чисел: ± 1 , т.е. все наблюдаемые дихотомны и в эксперименте могут принимать только эти значения. Покажем далее, что в таком случае результаты (6.1.3), (6.1.5) не укладываются в рамки ТСП.

В первой серии испытаний будем измерять

$$\langle F_{xy}F_{yx} \rangle = x_1(\lambda_i^{(1)})x_2(\lambda_i^{(1)})y_1(\lambda_i^{(1)})y_2(\lambda_i^{(1)}) = -1. \quad (6.1.6)$$

Соотношение записано в трактовке ТСП, $\lambda_i^{(1)}$ — набор скрытых параметров источника частиц i -го испытания первой серии. Знаки усреднения здесь опущены в силу полной корреляции "экспериментального" результата (6.1.5) с однозначным исходом -1

В испытаниях второй и третьей серии, согласно (6.1.3), следует ожидать

$$\langle F_{xx} \rangle = x_1(\lambda_i^{(2)})x_2(\lambda_i^{(2)}) = -1, \quad (6.1.7)$$

$$\langle F_{yy} \rangle = y_1(\lambda_i^{(3)})y_2(\lambda_i^{(3)}) = -1. \quad (6.1.8)$$

Как и в парадоксе ГХЦ при достаточно представительных выборках каждой серии испытаний с определенной достоверностью можно найти реализации, для которых аргументы $\lambda_i^{(m)}$ в (6.1.6) — (6.1.8) допустимо не учитывать, либо считать их всюду одинаковыми. При этом произведение (6.1.7) и (6.1.8) в ТСП тождественно левой части (6.1.6), но равно $+1$, и мы вновь столкнулись с противоречием $+1 = -1$

С помощью приложений I и III все описанные манипуляции нетрудно перевести на "оптический" язык. Отметим, что хоть в данном случае это и не требуется, но измерение наблюдаемых, соответствующих $\sigma_z^{(n)}$, можно осуществить по схеме рис. 1, а с исключенными светоделителями.

Интересный вариант интерференционного эксперимента, призванного продемонстрировать противоречие $+1 = -1$, выдвинул Харди [22]. Его преимущество, по сравнению с оригинальным предложением ГХЦ [14,15], в использовании обычного параметрического источника двухфотонного света, т.е. полная практическая реализуемость на современном уровне техники. То же относится и к только что появившейся работе [23].

Все рассмотренные нами до сих пор формулировки парадокса $+1 = -1$, включая ГХЦ, предполагали приготовление синглетных квантовых состояний. Но является ли это условие необходимым? КС дают отрицательный ответ: оригинальная версия их теоремы справедлива для произвольных состояний [26], но при этом потребовалось привлечь 117 наблюдаемых частиц со спином 1. Мермину [25] удалось обойтись всего девятью. По рецепту Переса [24] расположим их в таблице

x_1	x_2	F_{xx}	I
y_2	y_1	F_{yy}	I
F_{xy}	F_{yx}	F_{zz}	I
I	I	$-I$	

Вне таблицы даны результаты перемножения операторов в соответствующих строках и столбцах. Действительно, согласно (6.1.1) находим

$$x_1x_2(x_1x_2) = x_1^2x_2^2 = I, \quad (6.1.9)$$

$$y_2y_1(y_1y_2) = y_1^2y_2^2 = I, \quad (6.1.10)$$

$$(x_1y_2)(y_1x_2)(z_1z_2) = x_1y_1z_1y_2x_2z_2 = iz_1^2(-iz_2^2) = I, \quad (6.1.11)$$

$$x_1y_2(x_1y_2) = x_1^2y_2^2 = I, \quad (6.1.12)$$

$$x_2y_1(y_1x_2) = y_1^2x_2^2 = I, \quad (6.1.13)$$

$$(x_1x_2)(y_1y_2)(z_1z_2) = x_1y_1z_1x_2y_2z_2 = (iz_1z_2)^2 = -I. \quad (6.1.14)$$

Важно, что во всех этих равенствах три перемножаемые оператора попарно коммутируют, следовательно, они имеют общие собственные состояния и принимают в этих состояниях соответствующие собственные значения: $+1$ или -1 . Поэтому кажется естественным заменить в тождествах (6.1.9) — (6.1.14) операторы на одно из двух собственных значений ± 1 . Такие "замененные" операторы обозначим символом [...]. В результате операторные тождества принимают вид алгебраических равенств:

$$\begin{aligned} [x_1][x_2][x_1x_2] &= 1, \dots, \\ [x_1x_2][y_1y_2][z_1z_2] &= -1, \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

где по сравнению с (6.1.6) — (6.1.14) операторные единицы заменены на 1.

Перемножив левые и правые части этих соотношений, получим произведения 18 собственных значений:

$$[x_1] [x_2] [x_1 x_2] \dots [z_1 z_2] = -1. \quad (6.1.16)$$

Каждый из девяти символов [...] входит в левую часть (6.1.16) дважды, так что

$$([x_1] [x_2] [x_1 x_2] \dots [z_1 z_2])^2 = -1, \quad (6.1.17)$$

т.е. $+1 = -1$. Вывод таков: не всегда можно приписывать операторам их собственные значения. Иногда используют формулировки типа "алгебраического доказательства нелокальности квантовой теории". В этой связи заметим, что если в (6.1.16) произвести обратную замену собственных значений на операторы (убрать квадратные скобки), то в полученном операторном тождестве появятся некоммутирующие операторы, например, x_1 и y_1 . Следовательно, противоречивое равенство (6.1.17) фактически происходит от приписывания собственных значений именно некоммутирующим операторам.

В последней версии парадокса скрытые параметры явно не участвовали и локальность не акцентировалась, хотя и подразумевалась в форме независимости, скажем, наблюдений над первой частицей от ориентации второго детектора (анализатора Штерна—Герлаха), определяющей, измеряется ли $\sigma_x^{(2)}$, или $\sigma_y^{(2)}$. Как уже нами отмечалось, этот вид локальности в равной мере присущ как классическому, так и квантовому описаниям. По-видимому, логический вывод из противоречия (6.1.17) должен быть таким: "Для рассмотренной системы формализм КТ и классическое описание с априорными значениями наблюдаемых несовместны". Интерпретация же (6.1.17) как проявления нелокальности КТ представляется неубедительной. Отметим также, что часто используемый термин "контекстуальный" тоже, по существу, предполагает влияние измерителей разных каналов друг на друга.

Формально парадоксы типа КС и ГХЦ следуют из свойства алгебры Ли (6.1.1) операторов Паули:

$$(\sigma_x \sigma_y)^2 = (i\sigma_z)^2 = -I. \quad (6.1.18)$$

Но любой оператор f , ограниченный условием $f^2 = -I$ в некотором векторном подпространстве состояний, не эрмитов, т.е. не может описывать реально наблюдаемую величину и нет смысла приписывать ему какие-либо числовые значения. Действительно, для эрмитова f его матричные элементы связаны соотношением $f_{ij} = f_{ji}^*$, откуда имеем

$$(f^2)_{ii} = \sum_j |f_{ij}|^2 \geq 0,$$

в то время как из $f^2 = -I$ следует $(f^2)_{ii} = -1$.

Переходя к практическому аспекту задачи, заметим, что возможность экспериментальной демонстрации противоречия (6.1.17) не очевидна. Одно испытание не может дать значения всех девяти наблюдаемых, так как нет способа одновременно измерить, например, $\sigma_x^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$. Значит, нет гарантий, что всем парам одинаковых операторов в (6.1.16) будут соответствовать одни и те же зарегистрированные значения, поскольку некоторые из них могут быть получены в разных испытаниях. Таким образом, парадокс вновь приобретает статистический характер.

Сформулировав теорему КС для двух частиц со спином 1/2, нетрудно произвести обобщение и на большее их количество. Например, для трех таких частиц потребуется уже 10 наблюдаемых и соответствующих им операторов [25]. В наших обозначениях это сразу следует из (4.1.10). Заменим в этих формулах 1 на / и умножим полученные операторные тождества слева на $F^{(m)}$:

$$\begin{aligned} F^{(1)} A' B C &= I, \quad F^{(2)} A B' C = I, \quad F^{(3)} A B C' = I, \\ F^{(4)} A' B' C' &= I, \quad F^{(1)} F^{(2)} F^{(3)} F^{(4)} = -I. \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Первые четыре соотношения здесь фактически имеют вид $(F^{(m)})^2 = I$, а последнее следует из (4.5.6). Заметим также, что $[F^{(m)}, F^{(m')}] = 0$.

Перемножив друг на друга все пять тождеств получим выражение, в котором все 10 операторов встречаются дважды, а справа — минус I . Дальнейшие рассуждения повторяют следующие за (6.1.14).

Можно показать, что тождества (6.1.19) в отличие от исходных (4.1.10) справедливы во всем пространстве состояний рассматриваемой системы, что свидетельствует об их более общем характере. В этом, видимо, и состоит единственное существенное различие парадоксов типа КС и ГХЦ (более подробное обсуждение см. в [25]).

6.2. Противоречие Стаппа. Стапп [73] нашел еще одну интересную форму противоречия между КТ и предположением об априорном существовании наблюдаемых независимо от того, регистрируются они или нет. Такое допущение называют иногда термином "контрфактуальная определенность" (contrafactual definiteness) [73, 74].

Стапп использует частотное определение средних, избегая явного привлечения скрытых параметров λ и совместных вероятностей некоммутирующих наблюдаемых типа $P(A, A')$. Его вариант эксперимента предполагает как полную корреляцию показаний двух наблюдателей (см. рис. 1, а) при $\varphi = 0$ и $E = \cos \varphi = 1$, так и неполную ($|E| < 1$). Парадокс имеет общие черты с теоремами Белла и ГХЦ, занимая как бы промежуточное между ними положение.

Стапп имел в виду опыт с двумя спинами (рис. 8), но мы для преемственности изложения воспользуемся его оптическим аналогом (см. рис. 1,а).

Рассмотрим четыре серии экспериментов ($m = 1, 2, 3, 4$) с наборами фаз

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = 0, \quad \alpha' + \beta' = \pi/2, \\ \alpha + \beta' = -\pi/4, \quad \alpha' + \beta' = \pi/4, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

например

$$\alpha = \beta = 0, \quad \alpha' = \pi/2, \quad \beta' = -\pi/4.$$

Для состояния (3.4.1) КТ дает следующие значения корреляторов

$$\begin{aligned} E^{(1)} \equiv \langle AB \rangle = 1, \quad E^{(2)} \equiv \langle A'B \rangle = 0, \\ E^{(3)} \equiv \langle AB' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E^{(4)} \equiv \langle A'B' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Поскольку (6.2.2) не противоречит данным экспериментов, потребуем, чтобы и классические средние принимали те же значения.

Как и в формулировках парадоксов КС или ГХЦ, проигнорируем зависимость наблюдаемых от номера испытания и серии эксперимента. Смысл такого предположения подробно разобран нами выше. Оно вполне допустимо теоретически, но на практике ему удовлетворяет некоторая ограниченная выборка из множества реализаций.

Итак, имеется последовательность четверок чисел $A_i, A'_i, B_i, B'_i, i = 1, 2, \dots, L$, принимающих значения ± 1 и после усреднения при $L \rightarrow \infty$ дающих квантовые результаты (6.2.2), например

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L A_i B_i.$$

Следовательно, при полной корреляции $A_i = B_i$, и, заменяя B_i на A_i во второй серии испытаний, имеем

$$\langle AA' \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L A_i B_i = 0. \quad (6.2.3)$$

Еще раз напомним, что символ $\langle AA' \rangle$ в КТ не имеет операционального смысла.

Рассмотрим комбинацию наблюдаемых

$$T_i \equiv (A_i + A'_i - \sqrt{2} B'_i)^2. \quad (6.2.4)$$

Она может принимать всего три значения: $(2 - \sqrt{2})^2 \approx 0,34$; 2 ; $(2 + \sqrt{2})^2 = 12$; значит, $\langle T \rangle \geq 0,34$. (6.2.5)

С другой стороны, по определению (6.2.4) имеем

$$T_i = 4 + 2(A_i A'_i - \sqrt{2} A_i B'_i - \sqrt{2} A'_i B'_i), \quad (6.2.6)$$

где учтены $A_i^2 = A'^2_i = B'^2_i = 1$.

Но (6.2.2) и (6.2.3) при усреднении (6) дают

$$\langle T \rangle = 4 - 2\sqrt{2} (\langle AB' \rangle + \langle A'B' \rangle) = 0, \quad (6.2.7)$$

что никак не соответствует (6.2.5).

Таким образом, классические парные моменты не могут принимать квантовый набор значений (6.2.2).

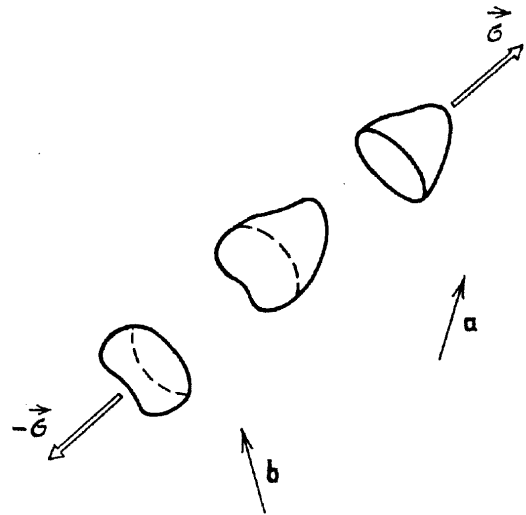


Рис. 8. Схема эксперимента, предложенного Барутом и Мейером [93]. $\vec{\sigma}$ и $-\vec{\sigma}$ — векторы угловых моментов разлетающихся частей первоначально целого материального тела. Измеряются проекции этих векторов, соответственно, на направления a и b

6.3. Противоречие, основанное на неравенстве Коши—Шварца. Сформулированный далее парадокс поражает гигантскими масштабами расхождений результатов классической и квантовой теорий (примерно 8 порядков!), но он не обладает той универсальностью, которая характерна для теорем Белла, КС или ГХЦ, поскольку связан с конкретной моделью эксперимента. Она проста. Пусть каждый из параметрически рождаемых парных фотонов непосредственно регистрируется своим детектором, т.е. в схеме на рис. 1,а остаются только один пьезокристалл и два фотоприемника, связанные схемой совпадений.

Двухфотонное состояние двухмодового поля, приготовленного параметрическим преобразователем, описывается вектором (III.6). В несколько обобщенном виде перепишем эту формулу в виде

$$|\psi\rangle = C_{00}|0\rangle_a|0\rangle_b + C_{11}|1\rangle_a|1\rangle_b, \quad (6.3.1)$$

откуда низшие моменты

$$\langle ab \rangle_\psi = C_{00}^* C_{11}, \quad (6.3.2)$$

$$\langle n_a \rangle_\psi = \langle n_b \rangle_\psi = \langle n_a n_b \rangle_\psi = |C_{11}|^2. \quad (6.3.3)$$

Величина $\langle n_a n_b \rangle$ определяет общую вероятность совпадений фотоотсчетов, из них часть совпадений, пропорциональная $\langle n_a \rangle \langle n_b \rangle$, не зависит от временных задержек и представляет собой случайные совпадения, определяющие уровень фона. Итак, максимуму корреляционной функции

$$G(\Delta t) \equiv \langle n_a(t_a) n_b(t_b) \rangle, \quad \Delta t = t_a - t_b \quad (6.3.4)$$

соответствует момент $\langle n_a n_b \rangle$ при $\Delta t = 0$, а ее крыльям (пьедесталу) — произведение $\langle n_a \rangle \langle n_b \rangle = G(\infty)$; здесь t_a и t_b — времена пролета фотонов от источника к детекторам, соответственно, в сигнальном и холостом каналах.

Для одномодовых детекторов скорость счета

фотонов в каждом из каналов согласно (3.5.6) равна

$$R_\nu = \eta'_\nu \langle n_\nu \rangle / T, \quad (6.3.5)$$

где $\nu = a, b$.

Аналогично общая скорость совпадений имеет вид

$$R_c = \eta'_a \eta'_b \langle n_a n_b \rangle / T, \quad (6.3.6)$$

и случайных совпадений —

$$R_{acc} = \eta'_a \eta'_b \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle / T = R_a R_b T. \quad (6.3.7)$$

Таким образом, для параметра группировки фотонов имеем

$$g \equiv \frac{G(0)}{G(\Delta t \rightarrow \infty)} = \frac{\langle n_a n_b \rangle}{\langle n_a \rangle \langle n_b \rangle} = \frac{R_c}{R_{acc}} = 1 + \mu^2, \quad (6.3.8)$$

где отношение истинных совпадений к случайным

$$\mu^2 \equiv \frac{R_c - R_{acc}}{R_{acc}} = \left| \frac{C_{00}}{C_{11}} \right|^2 = \frac{|\langle ab \rangle|^2}{\langle n_a n_b \rangle}. \quad (6.3.9)$$

Здесь учтено условие нормировки

$$\langle \psi | \psi \rangle \equiv |C_{00}|^2 + |C_{11}|^2 = 1. \quad (6.3.10)$$

В классической теории коэффициент μ подчинен ограничению [154]

$$|\mu_{class}| \leq 1, \quad (6.3.11)$$

которое следует из неравенства Коши—Шварца [50].

КТО освобождает μ от необходимости выполнения (11), что обнаружено в [163] и впервые экспериментально подтверждено Барнхемом и Вайнбергом [162]. В типичных для параметрического рассеяния условиях $|\mu|^2 \sim 10^8$. Такое превышение максимума корреляционной функции над фоном свидетельствует о явной неадекватности представления света в виде классической волны в рассматриваемом опыте.

7. Заключение. Поток публикаций, связанных с обсуждавшимися здесь вопросами, не иссякает, и настоящая работа, в которой мы стремились отразить наиболее интересные идеи и эксперименты, опубликованные в последнее время (включая 1992 г.), к моменту выхода, вероятно, уже устареет. Так, только что вышли интересные работы [186—203].

Тем не менее мы надеемся, что этот обзор все же поможет читателю ориентироваться в текущей литературе по данной теме и что приведенный выше подробный анализ и наглядные классические модели послужат основой для лучшего восприятия новых идей.

Мы старались привлечь внимание "молчаливого большинства" физиков к квантовым парадоксам, допускающим демонстрацию оптическими методами, и в то же время уточнить смысл широко используемого термина "нелокальность". Рассмотренные здесь оптические интерференционные эффекты, на наш взгляд, не более нелокальны, чем эффекты, опи-

сываемые классической статистической оптикой и полуклассической теорией фотодетектирования. При использовании гейзенберговского подхода распространение света в интерферометрах и других линейных оптических приборах описывается классическими, по существу, функциями Грина (пропагаторами), так что квантовая специфика сводится лишь к необычным статистическим свойствам (нарушение неравенства Коши—Шварца для модовых амплитуд) используемого на входе интерферометра источника "неклассического" света.

Рассмотренные выше модели с фазовым кодированием классических шумовых волн, генерируемых параметрическими устройствами (подразделы 3.3, 4.4 и 5.4), показывают, что полная корреляция показаний N удаленных детекторов, $E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \pm 1$, знак которой управляется любым из локальных параметров α_i , не является привилегией квантовых моделей — вопреки широко распространенному мнению.

Хотя исследования, касающиеся парадокса ЭПР—Белла, имеют чисто методический, интерпретационный ("метафизический" [10]) характер, они могут привести, как показывает история физики, к важным практическим последствиям, например, к развитию новых интерференционных схем и методов передачи информации [132—135]. Исследования по квантовой фотометрии [136—138] и квантовой криптографии [128—131] с использованием двухфотонной света также могут представить практический интерес.

Наконец, продолжающийся поиск логических "лазеек", делающих экспериментальные демонстрации несовместимости "локального реализма" и квантового формализма неубедительными (см., например, критический анализ Сантоса [44, 45]), способствует появлению новых идей и направлений экспериментов, а также подавляет излишний конформизм и самоуспокоенность, мешающих зарождению нового.

Считаем своей приятной обязанностью поблагодарить Алевтину Прохоровну Крылову за постоянную неоценимую помощь в работе.

Приложения.

I. Спины, фотоны и фазы. Рассмотрим множество двухмодовых однофотонных состояний, в которых один фотон принадлежит одной из двух мод с одинаковыми частотами:

$$|\psi\rangle = C_{01}|01\rangle + C_{10}|10\rangle, \quad |C_{01}|^2 + |C_{10}|^2 = 1. \quad (I.1)$$

Эти состояния образуют гильбертово пространство, изоморфное пространству состояний частицы со спи-

ном $1/2$, или, вообще, двухуровневой квантовой системы. Такое пространство, как известно, отображается на сферу единичного радиуса (Блоха или Пуанкаре). Чтобы связать фотоны со спинами, введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_- &\equiv a_1 a_2^+ = (\sigma_x - i\sigma_y)/2, \\ \sigma_+ &\equiv a_1^+ a_2 = (\sigma_x + i\sigma_y)/2, \\ \sigma_x &\equiv \sigma_- + \sigma_+, \quad \sigma_y \equiv i(\sigma_- - \sigma_+), \\ \sigma_z &\equiv n_1 - n_2 = [\sigma_+, \sigma_-],\end{aligned}\quad (I.2)$$

откуда

$$\sigma^2 \equiv \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 4j(j+1),$$

где $j \equiv (n_1 + n_2)/2$. Операторы $\sigma_{x,y,z}$ в пространстве (I.1) соответствуют матрицам Паули.

Из приведенных соотношений следует, что оператор $\sigma_- = (\sigma_+)^+$ переносит фотон из первой моды во вторую, а σ_+ производит обратное действие:

$$\begin{aligned}\sigma_- |10\rangle &= |01\rangle, \quad \sigma_- |01\rangle = 0, \\ \sigma_+ |01\rangle &= |10\rangle, \quad \sigma_+ |10\rangle = 0.\end{aligned}\quad (I.3)$$

Из (I.1) и (I.2) также находим

$$\begin{aligned}\sigma_- |\psi\rangle &= C_{10} |01\rangle, \\ \sigma_+ |\psi\rangle &= C_{01} |10\rangle, \\ \sigma_x |\psi\rangle &= C_{01} |10\rangle + C_{10} |01\rangle, \\ \sigma_y |\psi\rangle &= -iC_{01} |10\rangle + iC_{10} |01\rangle, \\ \sigma_z |\psi\rangle &= C_{10} |10\rangle - C_{01} |01\rangle, \\ 2j |\psi\rangle &= |\psi\rangle.\end{aligned}\quad (I.4)$$

Повторное действие операторов дает

$$\begin{aligned}\sigma_+^2 |\psi\rangle &= \sigma_-^2 |\psi\rangle = 0, \quad \sigma_- \sigma_+ |\psi\rangle = C_{01} |01\rangle, \\ \sigma_+ \sigma_- |\psi\rangle &= C_{10} |10\rangle, \\ \sigma_x^2 |\psi\rangle &= \sigma_y^2 |\psi\rangle = \sigma_z^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle.\end{aligned}\quad (I.5)$$

Таким образом, (I.1) — собственное состояние операторов $2j, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ с собственным значением $+1$, и операторов σ_+^2 и σ_-^2 — с собственным значением 0 . Следовательно, в рассматриваемом однофотонном гильбертовом пространстве эти операторы являются скалярами:

$$\begin{aligned}2j &= \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I, \\ \sigma_+^2 &= \sigma_-^2 = 0.\end{aligned}\quad (I.6)$$

Из (I.2) следуют также соотношения, характерные для матриц Паули и, вообще, для алгебры Ли $su(2)$:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad (I.7)$$

где индексы 1, 2, 3 получаются из x, y, z четной перестановкой.

Матрицы преобразования векторов состояний поля (I.1), соответствующие линейным оптическим элементам (светоделителям, интерферометрам, поляризаторам и т.д.), представимы в виде линейных

комбинаций матриц Паули, что относится и к наблюдаемым с помощью двух счетчиков фотонов величинам. Это пример общего правила — наблюдаемые играют двойную роль: их можно измерять и они же — генераторы преобразований. Например, согласно (3.4.4), наблюдаемая разность показаний двух счетчиков на выходе светоделителя описывается оператором

$$\begin{aligned}A_\alpha &\equiv n_+ - n_- = \sigma_- e^{i\alpha} + \sigma_+ e^{-i\alpha} = \\ &= \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = \vec{\sigma} \mathbf{n}_\alpha,\end{aligned}\quad (I.8)$$

где $\mathbf{n}_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ — единичный вектор. Для частицы со спином $1/2$ этой наблюдаемой соответствует проекция спина на направление \mathbf{n}_α в плоскости xOy , т.е. \mathbf{n}_α дает ориентацию магнита в опыте Штерна—Герлаха. Если же речь идет об однофотонном поле, то \mathbf{n}_α определяет фазовый сдвиг α между модами, поступающими на светоделитель.

В общем случае эти моды могут отличаться как направлением волнового вектора, так и типом поляризации. Когда моды принадлежат одной плоской волне, вектор $\langle \vec{\sigma} \rangle$ связан с параметрами Стокса, а произвольное линейное преобразование состояния (I.1) — с матрицами Джонса [33]. При этом роль светоделителя и фазовой задержки α играет ротатор, поворачивающий плоскость поляризации на угол 2α . Если же базисные состояния $|10\rangle$ и $|01\rangle$ отнести к двум модам с противоположными круговыми поляризациями, то среднее значение $\langle \sigma_z \rangle = |C_{10}|^2 - |C_{01}|^2$ имеет простой физический смысл момента импульса, переносимого плоской волной.

Определения (I.2) дают возможность посредством вектора $\vec{\sigma}$ с точностью до произвольной общей фазы отобразить любое состояние двухмодового поля с фиксированной энергией (как квантового, так и классического) на сферу. В классической теории это соответствие имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\text{Re}(a_1^* a_2), \quad \sigma_y = 2\text{Im}(a_1^* a_2), \\ \sigma_z &= |a_1|^2 - |a_2|^2, \\ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)^{1/2} &= |a_1|^2 + |a_2|^2 = \text{const}.\end{aligned}\quad (I.9)$$

Вернемся к квантовой теории и продолжим изучение свойств A_α . С помощью (3), (8) несложно проверить, что векторы

$$\begin{aligned}|\psi_\alpha^+\rangle &= (e^{-i\alpha/2} |10\rangle + e^{i\alpha/2} |01\rangle) / \sqrt{2}, \\ |\psi_\alpha^-\rangle &= (e^{-i\alpha/2} |10\rangle - e^{i\alpha/2} |01\rangle) / \sqrt{2},\end{aligned}\quad (I.10)$$

являющиеся частными случаями состояния (I.1), — собственные для оператора A_α :

$$A_\alpha |\psi_\alpha^+\rangle = |\psi_\alpha^+\rangle, \quad A_\alpha |\psi_\alpha^-\rangle = -|\psi_\alpha^-\rangle. \quad (I.11)$$

Полагая $\alpha = 0$ и $\alpha' = \pi/2$, находим собственные

векторы для σ_x и σ_y :

$$\begin{aligned} |\psi_x^+\rangle &= (|10\rangle + |01\rangle)/\sqrt{2}, \\ |\psi_y^+\rangle &= e^{-i\pi/4} (|10\rangle + i|01\rangle)/\sqrt{2}, \\ |\psi_x^-\rangle &= (|10\rangle - |01\rangle)/\sqrt{2}, \\ |\psi_y^-\rangle &= e^{-i\pi/4} (|10\rangle - i|01\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (I.12)$$

Любое двухмодовое состояние типа (I.1) всегда можно представить в виде линейной комбинации двух других состояний того же типа, например, $|\psi_x^-\rangle$ и $|\psi_y^-\rangle$.

Подчеркнем, что A_α и $A_{\alpha'}$ не коммутируют при $\alpha \neq \alpha'$ и, следовательно, не имеют общих собственных векторов.

Введем теперь эрмитовы операторы координаты и импульса (с точностью до коэффициента $\sqrt{2}$ они совпадают с упомянутыми в подразделе 3.6 квадратурными компонентами X и Y):

$$q_k = (a_k + a_k^\dagger)/\sqrt{2}, \quad p_k = (a_k - a_k^\dagger)/i\sqrt{2}, \quad (I.13)$$

и наблюдаемая A_α принимает вид

$$\begin{aligned} A_\alpha &= (q_1 q_2 + p_1 p_2) \cos \alpha + \\ &+ (q_1 p_2 - p_1 q_2) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (I.14)$$

Возможна еще одна интерпретация A_α на основе операторов фазы E^\pm и разности фаз двух осцилляторов C_{12} , S_{12} [159]:

$$\begin{aligned} E_k^+ &= a_k^\dagger (n_k + 1)^{-1/2}, \\ E_k^- &= (n_k + 1)^{-1/2} a_k, \\ C_{12} &= (E_1^- E_2^+ + E_1^+ E_2^-)/2, \\ S_{12} &= (E_1^- E_2^+ - E_1^+ E_2^-)/i2. \end{aligned} \quad (I.15)$$

Соответствующие классические аналоги:

$$\begin{aligned} E^- &\rightarrow a/|a| = e^{-i\phi}, \quad E^+ \rightarrow e^{i\phi}, \\ C_{12} &\rightarrow \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad S_{12} \rightarrow \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (I.16)$$

В случае фоковского двухмодового состояния $|n_1 n_2\rangle$ операторы $E_1^\pm E_2^\mp$ отличаются от σ_\pm лишь с-числом:

$$\begin{aligned} E_1^- E_2^+ &= \sigma_+ [n_1(n_2 + 1)]^{-1/2}, \\ E_1^+ E_2^- &= \sigma_- [(n_1 + 1)n_2]. \end{aligned} \quad (I.17)$$

Согласно (I.1), (I.4) находим

$$\begin{aligned} C_{12}|\psi\rangle &= (C_{01}|10\rangle + C_{10}|01\rangle)/2 = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x |\psi\rangle, \\ S_{12}|\psi\rangle &= i(C_{01}|10\rangle - C_{10}|01\rangle)/2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sigma_y |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (I.18)$$

Таким образом, в рассматриваемом однофотонном пространстве (I.1) наши наблюдаемые совпадают с удвоенными операторами разности фаз:

$$A_0 = a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2 = \sigma_x = 2C_{12},$$

$$\begin{aligned} A_{\pi/2} &= i(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2) = \\ &= \sigma_y = -2S_{12}. \end{aligned} \quad (I.19)$$

Итак, в двухмодовом однофотонном состоянии операторы C_{12} и S_{12} имеют собственные значения $\pm 1/2$ [159], что согласуется с собственными значениями ± 1 операторов A_α . Напомним, что у одномодовых фоковских состояний фаза вообще не определена. Полученные соотношения (19) полезно сравнить с определением наблюдаемых (3.3.11) в классической стохастической модели, откуда становится понятным, что антикорреляцию отсчетов двух детекторов на выходе светоделителя одного из каналов интерферометра в случае однофотонного двухмодового состояния (т.е. регистрация фотона одним детектором, например, D_+^a , никогда не может сопровождаться одновременным фотоотсчетом другого — D_-^a) можно рассматривать как демонстрацию квантования разности фаз. Иными словами, каждый канал интерферометра — измеритель разности фаз, конкретно — наблюдаемых C_{12} , S_{12} (в радиотехнике это просто фазовый детектор). Отметим, что проблема определения оператора фазы и ее измерения в квантовой оптике в последнее время привлекает значительное внимание [180—183].

Изложенное рассмотрение аналогичным образом можно провести и для произвольного N -фотонного двухмодового состояния, которому соответствует состояние частицы со спином $j = N/2$ [33, 39]. Интересно, что соответствие между трансформационными свойствами двухмодового поля и группой $SU(2)$ не специфично для квантового поля, так как классические моменты N -го порядка $a_1^n a_2^{N-n}/n^{1/2}(N-n)^{1/2}$, где $n = 0, 1, \dots, N$, также образуют базис этой группы с размерностью $N+1$ [33, 184].

II. Модель двух частиц с антикоррелированными угловыми моментами. Рассмотрим мысленный эксперимент, по существу, повторяющий модель Белла [3, 15], но с некоторой спецификой, внесенной Барутом и Мейстром [93]. Пусть некое материальное тело с нулевым начальным угловым моментом распадается на две части, угловые моменты которых в соответствии с законом сохранения противоположны по направлению и равны по величине. Обозначим их как $\vec{\sigma}$ и $-\vec{\sigma}$ соответственно (см. рис. 8). Будем измерять проекции угловых моментов разлетевшихся частиц: первой — на направление **a**, а второй — на **b**, причем $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$. В результате измерения получим

$$\begin{aligned} A &\equiv \vec{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \sigma \sin \theta \cdot \cos \phi, \\ B &\equiv -\vec{\sigma} \cdot \mathbf{b} = -\sigma \sin \theta \cdot \cos(\phi - \varphi), \end{aligned} \quad (II.1)$$

где $\sigma = |\vec{\sigma}|$, φ — угол между векторами **a** и **b**, а θ и ϕ — сферические (полярные) координаты, причем

долгота ϕ отсчитывается от направления \mathbf{a} , а полярное расстояние θ — от нормали к плоскости, образованной \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Многочисленные повторения эксперимента при равномерном распределении по направлениям углового момента $\vec{\sigma}$ и постоянной его абсолютной величине σ дает

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0, \quad (\text{II.2a})$$

$$\langle A^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \times \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{\sigma^2}{3} = \langle B^2 \rangle. \quad (\text{II.3a})$$

Интегрирование здесь фактически описывает прохождение концом вектора $\vec{\sigma}$ всей совокупности точек на поверхности сферы радиуса σ и непрерывное вычисление проекции этого вектора на \mathbf{a} (или \mathbf{b}). Именно поэтому во втором интеграле (II.3a) появляется "лишний" синус. Ведь если бы эта проекция была тождественно равна единице, то интеграл

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi$$

дал бы площадь поверхности сферы единичного радиуса.

Определим корреляцию измеряемых величин, нормированную на σ^2 ,

$$E_\varphi \equiv \frac{\langle AB \rangle}{\sigma^2} = -V \cos \varphi, \quad (\text{II.4a})$$

$$V = \frac{1}{3}.$$

Использованная нормировка соответствует условию теоремы Белла (3.2.9), поскольку $|A|/\sigma \leq 1$ и $|B|/\sigma \leq 1$.

Физический смысл тройки в знаменателе (II.3a) и видности V в (II.4a) ясен: средние квадраты трех компонент углового момента равноценны, $\langle \sigma_x^2 \rangle = \langle \sigma_y^2 \rangle = \langle \sigma_z^2 \rangle = \sigma^2/3$ в силу изотропности модели. Именно вследствие изотропности результаты (II.2a) — (II.4a) не зависят от абсолютной ориентации измерителей в пространстве, но лишь от угла между ними (в (II.4a)).

Итак, классическое ограничение видности в данном случае имеет виде

$$V \leq 1/3, \quad (\text{II.5a})$$

поскольку неидеальность измерителей может лишь ее уменьшить. Напомним, что в классической стохастической модели интерферометра, рассмотренной в начале раздела 3.3, $V \leq 1/2$ (см. (3.3.8)).

Очень близка к обсуждаемому здесь опыту оригинальная модель Белла [3, 15]. Отличие лишь в алгоритме обработки результатов измерений: с помощью

знаковых функций Белл преобразует A и B в дихотомные переменные, аналогично (3.3.16). Зависимость от φ при этом у корреляционной функции становится пилообразной (см. рис. 3,б).

Перейдем теперь к квантовой трактовке рассматриваемого эксперимента. Предположим, что разлетевшиеся частицы обладают антикоррелированными спинами $\langle j \rangle = \pm 1/2$. Их квантовое состояние зададим вектором

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_a |-\rangle_b - |-\rangle_a |+\rangle_b), \quad (\text{II.6})$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_z^a |+\rangle_a &= |+\rangle_a, \quad \sigma_z^a |-\rangle_a = -|-\rangle_a, \\ \sigma_z^b |+\rangle_b &= |+\rangle_b, \quad \sigma_z^b |-\rangle_b = -|-\rangle_b, \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

т.е. векторы $| \pm \rangle_{a,b}$ являются собственными векторами оператора Паули $\sigma_z^{a,b}$ с собственными значениями ± 1 ; здесь и далее обозначения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ символизируют уже матрицы Паули.

Расположение измерителей в пространстве зададим в самом общем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\equiv \{a_x, a_y, a_z\} \equiv \\ &\equiv \{\sin \theta_a \cos \phi_a, \sin \theta_a \sin \phi_a, \cos \theta_a\} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

и аналогично для \mathbf{b} .

Измеряемым величинам при этом будут соответствовать следующие операторы:

$$A = a_x \sigma_x^a + a_y \sigma_y^a + a_z \sigma_z^a, \quad (\text{II.9})$$

$$B = b_x \sigma_x^b + b_y \sigma_y^b + b_z \sigma_z^b.$$

В результате подобных измерений, повторенных многократно, мы получим дихотомные последовательности, состоящие из ± 1 . Таким образом, условия теоремы Белла соблюдены.

При вычислении корреляторов типа (II.2a) — (II.4a) нам потребуются следующие соотношения [158]

$$\begin{aligned} \sigma_x |+\rangle &= |-\rangle, \quad \sigma_x |-\rangle = |+\rangle, \\ \sigma_y |+\rangle &= i|-\rangle, \quad \sigma_y |-\rangle = -i|+\rangle; \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

здесь индексы a и b временно опущены.

Таким образом, выполняя усреднение по состоянию (II.6), для всевозможных комбинаций операторов Паули имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\alpha^a \sigma_\beta^b \rangle_\psi &= \langle \sigma_\alpha^a \sigma_\beta^b \rangle = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \\ \langle (\sigma_\alpha^a)^2 \rangle_\psi &= \langle (\sigma_\alpha^b)^2 \rangle_\psi = 1, \\ \langle \sigma_\alpha^a \sigma_\alpha^b \rangle_\psi &= -1, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$.

$$\langle A \rangle_\psi = \langle B \rangle_\psi = 0, \quad (\text{II.2b})$$

$$\langle A^2 \rangle_\psi = \langle B^2 \rangle_\psi = |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = 1, \quad (\text{II.3b})$$

$$E_\varphi \equiv \langle AB \rangle_\psi = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos \varphi, \quad (\text{II.4b})$$

где, как и ранее, φ — угол между измерителями.

Итак, итоговые результаты вновь зависят лишь от взаимной, ориентации измерителей. Таким образом, квантовая модель, как и классическая, изотропна. Однако видность $V=1$ в КТ в противоречии с (II.5a). Следовательно, НБ вида (3.2.8) может нарушаться.

Интересно, что коэффициент корреляции (ср. с (3.3.15))

$$\Gamma_{\varphi} = \frac{\langle AB \rangle}{(\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle)^{1/2}} = -\cos \varphi, \quad (\text{II.12})$$

вычисленный для классической и квантовой моделей, один и тот же. Но при этом классическая модель теряет применимость к условию (3.2.9) теоремы Белла, поскольку измеряемые относительные величины $A/\langle A^2 \rangle^{1/2}$, $B/\langle B^2 \rangle^{1/2}$ по модулю могут оказываться больше единицы.

Явная близость рассмотренного мысленного опыта к модели Белла [3,15] и, соответственно, к парадоксу ЭПР [1—3], обуславливает необходимость сделать следующее замечание. Дело в том, что определенные недоразумения могут возникнуть при анализе процесса измерения параметров коррелированных разлетевшихся частиц. Действительно, если у одной частицы мы не можем измерить две наблюдаемые, описываемые некоммутирующими операторами (например, σ_x и σ_y), то у двух частиц, за счет корреляции, казалось бы, можно эту проблему обойти: у одной, например, в канале A , измерить σ_x^a , а у другой — σ_y^b , и в силу $\sigma_x^a = -\sigma_x^b$, $\sigma_y^a = -\sigma_y^b$ получить всю необходимую информацию (для краткости наблюдаемые здесь мы отождествили с их операторами). На самом деле, подобное намерение несостоятельно уже потому, что σ_x^a и σ_y^b некоррелированы: $\langle \sigma_x^a \sigma_y^b \rangle = \langle \sigma_x^a \rangle \langle \sigma_y^b \rangle = 0$ (см. (II.11)), т.е. производить подобные измерения у коррелированных частиц все равно, что у совершенно случайных, причем такое свойство не является исключительной прерогативой КТ: и в классической модели для измерения σ_x^a и σ_y^b детекторы должны быть развернуты на прямой угол $\varphi = \pi/2$ друг относительно друга. Но при этом согласно (II.4a) $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle = 0$. Таким образом, в данной модели подобных парадоксов не возникает.

III. Излучение параметрического преобразователя частоты в интерферометре. Простейшая модель двухмодового параметрического усиления, происходящего в поле неистощающейся классической плоской и монохроматической накачки, предполагает использование гамильтониана [33]

$$H = i\hbar\Gamma(a^+b^+ - ab), \quad (\text{III.1})$$

здесь $a^+(a)$ и $b^+(b)$ — операторы рождения (уничтожения) фотонов в сигнальной и холостой модах, Γ —

параметр усиления, пропорциональный нелинейности пьезокристалла $\chi^{(2)}$, его длине z и амплитуде накачки. Для простоты положим Γ действительным, что эквивалентно заданию определенной фазы накачки.

Из (1) следуют уравнения движения Гейзенберга

$$\frac{da}{dt} = \Gamma b^+, \quad \frac{db}{dt} = \Gamma a^+, \quad (\text{III.2})$$

которые описывают "перемешивание" операторов рождения и уничтожения. Ими же можно описывать и классический параметрический усилитель, заменив операторы a^+ , b^+ на отрицательно-частотные медленно меняющиеся амплитуды мод a^* , b^* в безразмерных единицах, и a , b — на положительно-частотные амплитуды. В реальном стационарном оптическом эксперименте процесс развивается в пространстве, а не во времени, и t заменяется на z/c (обоснование дано в [179]).

В представлении Шрёдингера эволюционируют не операторы, а вектор состояния поля:

$$i\hbar d|\psi\rangle/dt = H|\psi\rangle. \quad (\text{III.3})$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$|\psi(\tau)\rangle = U(\tau)|\psi_0\rangle, \quad U(\tau) = e^{i\tau(a^+b^+ - ab)}, \quad (\text{III.4})$$

где $|\psi_0\rangle$ — начальное состояние поля, $\tau = \Gamma t$. Оператор эволюции U в данном случае называется *оператором сжатия*, поскольку параллельно генерации бифотонов осуществляется подавление квантовых флуктуаций одной из квадратурных компонент суммарного поля сигнальной и холостой мод [168—170].

Эквивалентное решение уравнения (2) в представлении Гейзенберга имеет вид унитарного преобразования Боголюбова:

$$a = U^+ a_0 U = u a_0 + v b_0^+, \quad b = u b_0 + v a_0^+, \quad (\text{III.5})$$

где $u = \text{ch } \tau$, $v = \text{sh } \tau$.

Пусть начальное состояние поля — вакуумное: $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, тогда в первом порядке теории возмущений по τ из (III.4) находим

$$|\psi\rangle = (I + \tau a^+ b^+) |0\rangle = |0\rangle + \tau |1\rangle_a |1\rangle_b, \quad (\text{III.6})$$

где $|1\rangle_a |1\rangle_b \equiv |1\rangle_a \otimes |1\rangle_b$ — состояние поля с одновременным присутствием одного сигнального и одного холостого фотонов.

Поскольку τ мало ($\ll 1$), удельный вклад вакуума в (III.6) весьма значителен. Именно вакуумная компонента $|\psi\rangle$ обуславливает ненулевой нестационарный "аномальный" коррелятор, который появляется при учете "быстрой" зависимости от времени и имеет вид

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \tau \langle 0|ab|1\rangle_a |1\rangle_b e^{-i(\omega_a + \omega_b)t} = \tau e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{III.7})$$

где $\omega_0 = \omega_a + \omega_b$ — частота накачки. Существование этого нестационарного момента непосредственно об-

наруживается при гомодинном детектировании (см., например, (3.7.1)). Если же используются обычные детекторы совпадений фотоотсчетов, не чувствующие влияния вакуумной компоненты, то можно полагать

$$|\psi\rangle = a^+ b^+ |0\rangle \equiv |1\rangle_a |1\rangle_b. \quad (\text{III.8})$$

Следующим этапом реализации интерференционных экспериментов по проверке НБ является распределение генерируемых сигнального и холостого фотонов еще по двум модам, поскольку нам требуется четырехмодовая интерференция интенсивности [33, 34]. Проще всего это сделать, установив в сигнальном и холостом каналах по 50%-ному светоделителю. Такой метод предложили Рэйд и Уоллз [50], ранее его рассмотрел Пауль [185], а экспериментально использовали, например, Ших и Алли [11].

Преобразование поля сигнального пучка светоделителем согласно (3.3.1) при $\alpha = 0$ имеет вид $a_{1,2} = (\pm a_{10} + a_{20})/\sqrt{2}$. При этом одна из поступающих на светоделитель мод (a_{20}) находится в состоянии вакуума. Операторы здесь записаны в представлении Гейзенберга.

Исходное состояние на входе светоделителя, описывается вектором $|\psi_0\rangle_a = a_{10}^+ |00\rangle = |10\rangle_a$. Найти преобразованное состояние можно, выразив a_{10} через a_1, a_2 с помощью обратного преобразования $a_{10,20} = (a_1 \pm a_2)/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ + a_2^+) |00\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_a + |01\rangle_a). \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Таким образом, сигнальный фотон "размазался" по двум выходным модам. Состояние (III.9) нефакторизуемое, но и не "перемешанное", так как относится лишь к одному фотону. Отметим также, что общая теория преобразования квантового поля различными линейными оптическими устройствами рассмотрена в [33, 155].

В результате описанного распределения сигнального и холостого фотонов вектор состояния суммарного четырехмодового поля принимает вид

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^+ + a_2^+) \otimes (b_1^+ + b_2^+) |0000\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (|10\rangle_a |10\rangle_b + |01\rangle_a |01\rangle_b + \\ &+ |10\rangle_a |01\rangle_b + |01\rangle_a |10\rangle_b). \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

По сравнению с требуемым состоянием (3.4.1), к сожалению, (III.10) включает "лишние" компоненты — два последних слагаемых, которые не только усложняют картину, но и вдвое снижают видность интерференции. Более благоприятной в этом смысле

является схема, изображенная на рис. 1,а. Для нее гамильтониан (III.1) заменяется на

$$H = i\hbar \Gamma \sum_{k=1}^2 (a_k^+ b_k^+ - a_k b_k), \quad (\text{III.11})$$

так что вместо (III.10) получаем (3.4.1).

Воспользовавшись компактными обозначениями (3.4.3), (1.2), легко проверить, что "перемешанное" состояние (3.4.1) обладает следующими свойствами (см. также (1.3) — (1.5)):

$$\begin{aligned} n_1^a |\psi\rangle &= n_1^b |\psi\rangle = |10\rangle_a |10\rangle_b / \sqrt{2}, \\ n_2^a |\psi\rangle &= n_2^b |\psi\rangle = |01\rangle_a |01\rangle_b / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{aligned} (n_1^a + n_2^a) |\psi\rangle &= (n_1^b + n_2^b) |\psi\rangle = |\psi\rangle, \\ n_1^a n_2^b |\psi\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\langle n_k^a \rangle_\psi = \langle n_k^b \rangle_\psi = \langle n_k^a n_k^b \rangle_\psi = 1/2, \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} \sigma_-^a \sigma_+^a |\psi\rangle &= \sigma_-^b \sigma_+^b |\psi\rangle = \\ &= \sigma_-^a \sigma_-^b |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_a |01\rangle_b, \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} \sigma_+^a \sigma_-^a |\psi\rangle &= \sigma_+^b \sigma_-^b |\psi\rangle = \\ &= \sigma_+^a \sigma_+^b |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_a |10\rangle_b, \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^a |\psi\rangle &= \sigma_z^b |\psi\rangle = \\ &= (|10\rangle_a |10\rangle_b - |01\rangle_a |01\rangle_b) / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

С помощью определения (3.4.4) найдем также действие операторов наблюдаемых A_α, B_β и $F_\varphi \equiv A_\alpha B_\beta$:

$$\begin{aligned} A_\alpha |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_a |10\rangle_b e^{i\alpha} + \\ &+ |10\rangle_a |01\rangle_b e^{-i\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$\begin{aligned} F_\varphi |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_a |01\rangle_b e^{i\varphi} + \\ &+ |10\rangle_a |10\rangle_b e^{-i\varphi}), \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} (AA')^l |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|10\rangle_a |10\rangle_b e^{il(\alpha' - \alpha)} + \right. \\ &+ \left. |01\rangle_a |01\rangle_b e^{-il(\alpha' - \alpha)} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} (FF')^l |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|10\rangle_a |10\rangle_b e^{il(\varphi' - \varphi)} + \right. \\ &+ \left. |01\rangle_a |01\rangle_b e^{-il(\varphi' - \varphi)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Найдем далее коммутаторы наблюдаемых в пространстве состояний $|\psi\rangle$:

$$[A, A'] = 2i\sigma_z^a \sin(\alpha' - \alpha), \quad (\text{III.22})$$

$$[F, F'] = AA'[B, B'] + [A, A']B'B. \quad (\text{III.23})$$

Согласно (3.4.6) или (III.20), $A^2 = B^2 = I$. Таким образом, квадрат оператора наблюдаемой Белла $S \equiv (AB + A'B + AB' - A'B')/2$ равен

$$S^2 = I - [A, A'] [B, B'] / 4, \quad (\text{III.24})$$

откуда сразу следует роль некоммутативности

наблюдаемых A, A' и B, B' . Действительно, производя усреднение с учетом (III.17), (III.22), получаем "квантовое" НБ [87—89]

$$|\langle S \rangle_\psi| = \left[1 + \langle \sigma_z^a \sigma_z^b \rangle_\psi \sin(\alpha' - \alpha) \times \right. \\ \left. \times \sin(\beta' - \beta) \right]^{1/2} \leq \sqrt{2}, \quad (\text{III.25})$$

не противоречащее экспериментам.

Найдем далее совместное распределение наблюдаемых A и B с помощью стандартной формулы

$$P_{AB}^{\pm\pm} = |\langle \psi | \psi_\alpha^\pm, \psi_\beta^\pm \rangle|^2, \quad (\text{III.26})$$

где $|\psi_\alpha^\pm\rangle$ и $|\psi_\beta^\pm\rangle$ — собственные функции A_α и B_β вида (1.10), подстановка которых в (26) дает (3.1.3). Эти же результаты сразу следуют из определений типа $P_{AB}^{++} = \langle n_+^a n_+^b \rangle_\psi$.

Перейдем, наконец, к квантовому описанию параметрического усилителя гауссова "затравочного" шума с интенсивностью N_0 и влияния этого шума на результаты наблюдений, производимых по схеме на рис. 1,а.

Низшие четные моменты шумового поля имеют вид (нечетные равны нулю):

$$\langle a_k^+ a_l \rangle_0 = \langle b_k^+ b_l \rangle_0 = N_0 \delta_{kl}, \\ \langle a_k^+ b_l^+ b_m a_n \rangle_0 = N_0^2 \delta_{kl} \delta_{mn}, \\ \langle a_k^+ a_l^+ a_m a_n \rangle_0 = N_0^2 (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \quad (\text{III.27})$$

где $k, l, m, n = 1, 2$.

Выходные моменты нетрудно вычислить в представлении Гейзенберга с помощью (5):

$$\langle a_k^+ a_l \rangle = \langle b_k^+ b_l \rangle = N \delta_{kl}, \quad (\text{III.28})$$

$$\langle a_k b_l \rangle = \langle b_k a_l \rangle = M \delta_{kl}, \quad (\text{III.29})$$

$$\langle a_k^+ b_l^+ b_m a_n \rangle = N^2 \delta_{kn} \delta_{lm} + M^2 \delta_{kl} \delta_{mn}, \quad (\text{III.30})$$

$$\langle a_k^+ a_l^+ a_m a_n \rangle = N^2 (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \quad (\text{III.31})$$

где

$$N = u^2 N_0 + v^2 (N_0 + 1) = \\ = \left(N_0 + \frac{1}{2} \right) \text{ch } 2\tau - \frac{1}{2}, \quad (\text{III.32})$$

$$M = uv(2N_0 + 1) = \\ = \left(N_0 + \frac{1}{2} \right) \text{sh } 2\tau. \quad (\text{III.33})$$

Отметим инвариант преобразования (5)

$$N(N+1) - M^2 = N_0(N_0 + 1) = \text{const.} \quad (\text{III.34})$$

Пронормируем наблюдаемые A_α и B_β так, чтобы в режиме счета фотонов принимаемые ими значения лежали в интервале $[-1, +1]$:

$$A_\alpha = (n_+^a - n_-^a)/K, \\ B_\beta = (n_+^b - n_-^b)/K, \quad (\text{III.35})$$

где

$$K^2 = \langle (n_+^a + n_-^a) (n_+^b + n_-^b) \rangle =$$

$$= \langle (n_1^a + n_2^a) (n_1^b + n_2^b) \rangle = \\ = 2(2N^2 + M^2). \quad (\text{III.36})$$

При $N_0 \ll 1$, когда можно считать, что на входе усилителей практически вакуум, имеем

$$N = \text{sh}^2 \tau, \quad M = N(N+1), \\ K^2 = 2N(3N+1). \quad (\text{III.37})$$

Если же, наоборот, $N_0 \gg 1$, то получаем классический результат

$$N = N_0 \text{ch } 2\tau, \quad M = N_0 \text{sh } 2\tau, \\ K^2 = 2N_0^2 (1 + \text{ch}^2 \tau). \quad (\text{III.38})$$

Вернемся к произвольному N_0 и, образовав оператор нормированной многоканальной наблюдаемой

$$F \equiv A_\alpha B_\beta = \frac{1}{K^2} \left[\sigma_-^a \sigma_-^b e^{i\varphi} + \right. \\ \left. + \sigma_-^a \sigma_+^b e^{i(\alpha - \beta)} + \text{э.с.} \right], \quad (\text{III.39})$$

вычислим ее корреляцию

$$E \equiv \langle F \rangle = V \cos \varphi. \quad (\text{III.40})$$

Выражение для видности интерференции

$$V = \frac{2M^2}{K^2} = \frac{g-1}{g+1} = \frac{1}{1 + (2/\mu^2)} \quad (\text{III.41})$$

тождественно (3.6.3), но получено другим способом, здесь $g = 1 + \mu^2$ — параметр группировки фотонов, и

$$\mu \equiv \frac{M}{N} = \frac{2N_0 + 1}{N_0 \text{cth } \tau + (N_0 + 1) \text{th } \tau} \approx \\ \approx \text{cth } \tau \text{ при } N_0 \ll 1, \\ \approx \text{th } 2\tau \text{ при } N_0 \gg 1. \quad (\text{III.42})$$

IV. Усреднение по случайным фазам в классических моделях. Вычисление интеграла (3.3.18)

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} [\cos \varphi + \cos(2x)] dx = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sign}(\cos \varphi + \cos x) dx \quad (\text{IV.1})$$

сводится к нахождению длин отрезков оси x , на которых знаковая функция принимает положительные и отрицательные значения. В силу четности E_φ достаточно рассмотреть интервал $0 \leq \varphi \leq \pi$, на котором в пределах интегрирования $0 \leq x \leq \pi$ подынтегральная функция положительна при $\cos x > \cos(\pi - \varphi)$, т.е. на отрезке $0 \leq x < \pi - \varphi$. Длина "отрицательного" интервала — φ . Сложив эти длины с учетом их знаков и разделив сумму на π , получим итоговое выражение (3.3.18).

Аналогичным образом вычисление интеграла (4.4.4)

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} F_{\varphi} dx dy = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \text{sign} [\cos x \cdot \cos y \times \\
 &\quad \times \cos(\varphi + x + y)] dx dy
 \end{aligned}
 \quad (\text{IV.2})$$

сводится к определению площадей Δ_{\pm} участков Δ_{\pm} квадрата $[-\pi, \pi]^2$ на плоскости прообразов (x, y) , дающих положительную или отрицательную подынтегральную функцию.

В результате замены

$$x = \frac{\pi}{2} u, \quad y = \frac{\pi}{2} v, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \tilde{\varphi} \quad (\text{IV.3})$$

область интегрирования в плоскости (u, v) преобразуется в квадрат $[-2, 2]^2$, состоящий из 16 квадратов единичной площади (см. рис. 6). Ограничимся в начале интервалом $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 1$

В квадрате $u, v \in [0, 1]$ знак аргумента знаковой функции в (IV.2) определяется сомножителем $\cos[(u + v + \tilde{\varphi})\pi/2]$, который положителен в равнобедренном треугольнике, образованном осями u, v и прямой

$$u + v + \tilde{\varphi} = 1. \quad (\text{IV.4})$$

Длина катета этого треугольника (рис. 9) равна $1 - \tilde{\varphi}$, поэтому вклад рассматриваемого квадрата в E_{φ} есть

$$\Delta_{+} - \Delta_{-} = 2\Delta_{+} - 1, \quad \Delta_{+} = (1 - \tilde{\varphi})^2/2. \quad (\text{IV.5})$$

Такой же вклад, но с обратным знаком, дает квадрат $u, v \in [-1, 0]$. Результат суммирования — взаимокompенсация этой пары. Всего таких пар, отображаемых друг в друга заменой $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$ и расположенных в шахматном порядке, восемь (см. рис. 6).

Представителем другого семейства оставшихся восьми квадратов, не компенсирующих друг друга, является $u \in [0, 1], v \in [-1, 0]$. В нем "отрицательный" треугольник определяется условием

$$u + v + \tilde{\varphi} \in [1, 2]. \quad (\text{IV.6})$$

Площадь этого треугольника $\Delta_{-} = \tilde{\varphi}^2/2$, так что вклад квадрата составляет $1 - \tilde{\varphi}^2$. С учетом нормировки, таким образом,

$$E_{\varphi} = (1 - \tilde{\varphi}^2)/2, \quad |\tilde{\varphi}| \leq 1. \quad (\text{IV.7})$$

Аналогично вычисляется E_{φ} при $|\tilde{\varphi}| \in [1, 2]$, которая следует из (7) в результате замены $|\tilde{\varphi}|$ на $2 - |\tilde{\varphi}|$ и смены знака. В (7) и далее мы перешли от $\tilde{\varphi}$ к $|\tilde{\varphi}|$ в силу четности E_{φ} .

В заключение вычислим N -кратный интеграл (5.4.8) при учете параметрической связи

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n = 0$$

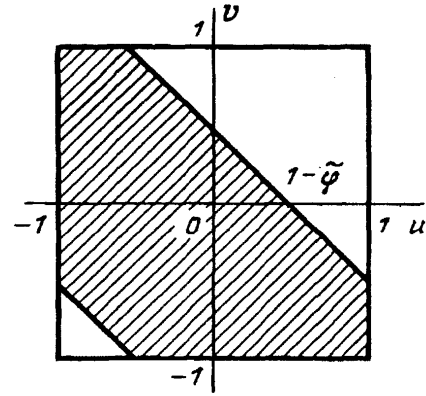


Рис. 9. К вычислению интеграла (4.4.4). Заштрихованная область соответствует положительным аргументам подынтегральной функции

и случайных фазовых скачков на π (5.4.9).

Поскольку все λ_n равны лишь 0 или π , $\sin \lambda_n = 0$, и

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha_N + \lambda_n) &= \cos\left(\alpha_N - \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n\right) = \\
 &= \cos \alpha_N \cdot \prod_{n=1}^{N-1} \cos \lambda_n.
 \end{aligned}
 \quad (\text{IV.8})$$

Следовательно, подынтегральная функций факторизуется и получается произведение $N - 1$ интегралов вида

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} [\cos \lambda_n \cdot \cos(\alpha_n + \lambda_n)] \times \\
 &\quad \times (\delta(\lambda_n) + \delta(\lambda_n - \pi + 0)) d\lambda_n = \\
 &= \text{sign} \cos \alpha_n,
 \end{aligned}
 \quad (\text{IV.9})$$

откуда имеем итоговое выражение (5.4.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Phys. Rev. 1935, **47**, 777; УФН. 1936, **16**, 440.
2. Bohm D. Quantum Theory. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N.J., 1951; перевод: Бом Д. Квантовая теория. М.: Физматгиз, 1961.
3. Bell J.S. Physics. 1964, **1**, 195.
4. Clauser J.R., Shimony A. Rep. Prog. Phys. 1978, **41**, 1881.
5. Гриб А.А. УФН. 1984, **142**, 619.
- 5а. Спасский Б.И., Московский А.В. УФН. 1984, **142**, 599.
6. Ахизер А.И., Половин Р.В. УФН. 1972, **107**, 463.
7. Демуцкий В.П., Половин Р.В. УФН. 1992, **162**, 95.
8. Home D., Whitaker M.A.B. Phys. Rep. 1992, **210**, 223.
9. Home D., Selleri F. Riv. Nuovo Cimento. 1991, **14**, 1.
10. Sadberry A. Quantum Mechanics and the Particles of Nature. Cambridge: University Press, 1986; перевод: Садберри А. Квантовая механика и физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989.
11. Alley C.O., Shih Y.H. Proc. of the 2nd Intern. Symposium on Foundations of Quantum Mechanics. Ed. M. Namuki et al. Tokyo, 1987. P. 36; Phys. Rev. Lett. 1988, **61**, 2921.
12. Ou Z.Y., Mandel L. Phys. Rev. Lett. 1988, **61**, 50.
13. Rarity J.G., Tapster P.B. Phys. Rev. Lett. 1990, **64**, 2495.
14. Greenberger D.M., Home M.A., Zeilinger A. Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe. Ed M.

- Kafatos. Dordrecht, Holland: Kluwer, 1989. **P. 69.**
15. Greenberger D.M., Horne M.A., Shimony A., Zeilinger A. Am. J. Phys. 1990, **58**, 1131.
 16. Mermin N.D. Phys. Rev. Lett. 1990, **65**, 1838.
 17. Roy S.M., Singh V. Phys. Rev. Lett. 1991, **67**, 2761.
 18. Ardehali M. Phys. Rev. A. 1992, **46**, 5375.
 19. Belinsky A. V., Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1993, **176**, 415.
 20. Hardy L. Phys. Lett. A. 1991, **160**, 1.
 21. Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1993, **172**, 399.
 22. Hardy L. Phys. Lett. A. 1992, **167**, 17.
 23. Bernstein H.J., Greenberger D.M., Horne M.A., Zeilinger A. Phys. Rev. A. 1993, **47**, 78.
 24. Peres A. Phys. Lett. A. 1990, **151**, 107; 1992, **163**, 243.
 25. Mermin N.D. Phys. Rev. Lett. 1990, **65**, 3373.
 26. Kochen S., Specker K.P. J. Math. Mech. 1967, **17**, 59.
 27. Brown H.R., Svetlichny G. Found. Phys. 1990, **20**, 1379.
 28. Elby A. Found. Phys. 1990, **20**, 1389.
 29. Stairs A. Phil. Sci. 1983, **50**, 578.
 30. Freedman S.J., Clauser J.F. Phys. Rev. Lett. 1972, **28**, 938.
 31. Aspect A., Dalibard J., Roger G. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 1804.
 32. Perrie W., Duncan A.J., Beyer H.J., Kleinpopp H. Phys. Rev. Lett. 1985, **54**, 1790.
 33. Belinsky A. V., Klyshko D.N. Laser Phys. 1992, **2**, 112.
 34. Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1992, **163**, 349.
 35. Belinsky A. V., Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1992, **166**, 303.
 36. Shimony A. Sci. Am. 1988, 258, 2; перевод: Шимони А. В мире науки. 1988, № 3, 22.
 37. D'Espagnat B. Sci. Am. 1979, **241**, 128.
 38. Stedman G.E. Am. J. Phys. 1985, **53**, 1143.
 39. Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1988, **132**, 299.
 40. Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A. Phys. Rev. Lett. 1969, **23**, 880.
 41. Clauser J.F., Horne M.A. Phys. Rev. D. 1974, **10**, 526.
 42. Brown H.R., Twiss R.Q. Nature. 1956, **177**, 27.
 43. Глаубер Р. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. Под ред. О.В. Богданкевича, О.Н. Крохина. М.: Мир, 1966. С. 91—280.
 44. Santos E. Phys. Rev. Lett. 1991, **66**, 1388, 3227; 1992, **68**, 2700.
 45. Santos E. Phys. Rev. A. 1992, **46**, 3646.
 46. Horne M.A., Shimony A., Zeilinger A. Phys. Rev. Lett. 1989, **62**, 2209.
 47. Horne M.A., Zeilinger A. Proc. of Symposium on Foundations of Modern Physics/Eds. P. Lachti, P. Mittelstaedt. Singapore: World Scientific, 1985. P. 435.
 48. Drummond P.D. Phys. Rev. Lett. 1983, **50**, 1407.
 49. Reid M.D., Walls D.F. Phys. Rev. Lett. 1984, **53**, 955.
 50. Reid M.D., Walls D.F. Phys. Rev. A. 1986, **34**, 1260.
 51. Reid M.D., Drummond P.D. Phys. Rev. Lett. 1988, **60**, 2731.
 52. Zukowski M., Pykacz J. Phys. Lett. A. 1988, **127**, 1.
 53. Ou Z.Y., Hong C.K., Mandel L. Opt. Commun. 1988, **67**, 159.
 54. Ou Z.Y., Pereira S.F., Kimble H.J., Peng K.C. Phys. Rev. Lett. 1992, **68**, 3663.
 55. Grangier P., Potasek M.J., Yurke B. Phys. Rev. A. 1988, **38**, 3132.
 56. Reid M.D., Drummond P.D. Phys. Rev. Lett. 1988, **60**, 2447.
 57. Reid M.D. Phys. Rev. A. 1989, **40**, 913.
 58. Oliver B.J., Stroud C.R. Phys. Rev. A. 1989, **135**, 407.
 59. Tan S.M., Holland M.D., Walls D.F. Opt. Commun. 1990, **77**, 285.
 60. Tan S.M., Walls D.F. Opt. Commun. 1989, **71**, 235.
 61. Chubarov M.S., Nikolaev E.P. Phys. Lett. A. 1985, **110**, 199.
 62. Ou Z.Y., Hong C.K., Mandel L. Phys. Lett. A. 1987, **122**, 11.
 63. Ou Z.Y. Phys. Rev. A. 1988, **37**, 1607.
 64. Клышко Д.Н. УФН. 1988, **154**, 133.
 65. Клышко Д.Н. УФН. 1989, **158**, 327.
 66. Klyshko D.N. Phys. Lett. A. 1988, **128**, 133.
 67. Davis L.M. Phys. Lett. A. 1989, **140**, 275.
 68. Stedman G.E. J. Mod. Opt. 1989, **36**, 1461.
 69. Zukowski M. Phys. Lett. A. 1990, **150**, 136.
 70. Zukowski M., Zeilinger A. Phys. Lett. A. 1991, **155**, 69.
 71. Oliver B.J., Stroud C.R. J. Opt. Soc. Am. B. 1987, **4**, 1426.
 72. Joshi A., Lawande S.V. Phys. Rev. A. 1991, **44**, 716.
 73. Stapp H.P. Found. Phys. 1988, **18**, 427.
 74. D'Espagnat B. Phys. Rep. 1984, **110**, 201.
 75. Hardy L. Phys. Lett. A. 1991, **161**, 21.
 76. Elitzur A.C., Popescu S., Rohrlich D. Phys. Lett. A. 1992, **162**, 25.
 77. Eberhard P.H. Nuovo Cimento B. 1977, **38**, 75.
 78. Feingold S.J., Peres A., J. Phys. A. 1980, **13**, 3187.
 79. Stapp H.P. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 1470.
 80. Stapp H.P. Am. J. Phys. 1985, **53**, 306.
 81. Eberhard P.H. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 1474.
 82. Fine A. Phys. Rev. Lett. 1982, **48**, 291.
 83. Fine A. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 242.
 84. Bismas S.N., Choudhury S.R., Datta K. Phys. Lett. A. 1991, **153**, 279.
 85. Clifton R.K., Butterfield J.N., Redhead M.L.J. Br. J. Phil. Sci. 1990, **41**, 5.
 86. Whitaker M.A.B., Dennison J.G. Phys. Lett. A. 1988, **133**, 466.
 87. Cireton B.S. Lett. Math. Phys. 1980, **4**, 93.
 88. Landau L.J. Phys. Lett. A. 1987, **120**, 54.
 89. Andas M.E. Phys. Lett. A. 1992, **167**, 6.
 90. Braunstein S.L., Manna A., Revzen M. Phys. Rev. Lett. 1992, **68**, 3259.
 91. Popescu S., Rohrlich D. Phys. Lett. A. 1992, **169**, 411.
 92. Summers S.J., Werner R.F. J. Math. Phys. 1987, **28**, 2440.
 93. Barut A.O., Meystre P. Phys. Lett. A. 1984, **105**, 458.
 94. Livi R. Lett. Nuovo Cimento 1977, **19**, 189.
 95. Mermin N.D. Phys. Rev. D. 1980, **22**, 356.
 96. Mermin N.D., Schwarz G.M. Found. Phys. 1982, **12**, 101.
 97. Ogren M. Phys. Rev. D. 1983, **27**, 1766.
 98. Garg A., Mermin N.D. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 901.
 99. Garg A., Mermin N.D. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**, 1294.
 100. Garg A., Mermin N.D. Phys. Rev. D. 1983, **27**, 339.
 101. Ardehali M. Phys. Rev. D. 1991, **44**, 3336.
 102. Peres A. Phys. Rev. A. 1992, **46**, 4413.
 103. Gisin N. Phys. Lett. A. 1991, **154**, 201.
 104. Gisin N., Peres A. Phys. Lett. A. 1992, **162**, 15.
 105. Popescu S., Rohrlich D. Phys. Lett. A. 1992, **162**, 293.
 106. Barnett S.M., Phoenix S.J.D. Phys. Lett. A. 1992, **167**, 233.
 107. Braunstein S.L., Caves C.M. Phys. Rev. Lett. 1988, **61**, 662.
 108. Braunstein S.L., Caves C.M. Ann. of Phys. 1990, **202**, 22.
 109. Barnett S.M., Phoenix S.J.D. Phys. Rev. A. 1991, **44**, 535.
 110. Schumacker B.W. Phys. Rev. A. 1991, **44**, 7047.
 111. Hardy L. Phys. Rev. Lett. 1992, **68**, 2981.
 112. Hardy L., Squires E.J. Phys. Lett. A. 1992, **168**, 169.
 113. Pagonis C., Clifton R. Phys. Lett. A. 1992, **168**, 100.
 114. Clifton H., Niemann P. Phys. Lett. A. 1992, **166**, 177.
 115. Dewdney C. J. Phys. A. 1992, **25**, 3615.
 116. Pagonis C., Redhead M.L.G., Clifton R. Phys. Lett. A. 1991, **155**, 441.
 117. Heywood P., Redhead M.L.G. Found. Phys. 1983, **13**, 481.
 118. Mermin N.D. Am. J. Phys. 1990, **58**, 731.
 119. Mermin N.D. Phys. Today. 1990, 43:6, 9.
 120. Choi H.S. Phys. Lett. A. 1991, **153**, 285.
 121. Yurke B., Stoler D. Phys. Rev. A. 1992, **46**, 2229.
 122. Reid M.D., Munro W.J. Phys. Rev. Lett. 1992, **69**, 997.
 123. Zukowski M. Phys. Lett. A. 1991, **157**, 198.
 124. Zukowski M. Phys. Lett. A. 1991, **157**, 203.
 125. Pitowskil. Phys. Lett. A. 1991, **156**, 137.
 126. Pitowskil. Phys. Lett. A. 1992, **166**, 292.
 127. Herbut F. Phys. Lett. A. 1992, **163**, 5.
 128. Ekert A.K. Phys. Rev. Lett. 1991, **67**, 661.
 129. Bennet C.H., Brassard G., Mermin N.D. Phys. Rev. Lett. 1992, **68**, 557.
 130. Bennet C.H. Phys. Rev. Lett. 1992, **68**, 3121.
 131. Ekert A.K., Rarity J.G., Tapster P.R., Palma G.M. Phys. Rev. Lett. 1992, **69**, 1293.
 132. Mandel L. Opt. Soc. Am. B. 1984, **1**, 108.
 133. Hong C.K., Friberg S.R., Mandel L. Appl. Opt. 1985, **24**, 3877.
 134. Seward S.F., Tapster P.R., Walker J.G., Rarity J.G. Quant. Opt.

- 1991, **3**, 201.
135. *Rarity J.G., Tapster P.R., Walker J.G., Seward S.F.* Appl. Opt. 1990, **29**, 2939.
 136. *Клышко Д.Н., Пенин А.Н.* УФН. 1987, **152**, 653.
 137. *Кутаева Г.Х., Ленин А.Н.* КЭ. 1992, **19**, 816.
 138. *Penin A.N., Sergienko A.V.* Appl. Opt. 1991, **30**, 3583.
 139. *Ghirardi G.C., Rimini A., Weber T.* Lett. Nuovo Cimento. 1980, **27**, 293.
 140. *Bussey P.J.* Phys. Lett. A. 1982, **90**, 9.
 141. *Dieks D.* Phys. Lett. A. 1982, **92**, 271.
 142. *Ballentine L.E., Jarret J.P.* Am. J. Phys. 1987, **55**, 696.
 143. *Ghirardi G.C., Grassi R., Rimini A., Weber T.* Europhys. Lett. 1988, **6**, 95.
 144. *Polchinski J.* Phys. Rev. Lett. 1991, **66**, 397.
 145. *Gisin N.* Phys. Lett. A. 1990, **143**, 1.
 146. *Valentini A.* Phys. Rev. A. 1990, **42**, 639.
 147. *Muynck W.M.* Phys. Lett. A. 1986, **114**, 65.
 148. *Muynck W.M., Martens H.* Phys. Lett. A. 1989, **142**, 187.
 149. *Muynck W.M., Abu-Zeid O.* Phys. Lett. A. 1984, **100**, 193.
 150. *Berthelot A.* Nuovo Cim. B. 1980, **57**, 193.
 151. *Ratall P.* Found. Phys. 1983, **13**, 555.
 152. *Muckenheim W.* Lett. Nuovo Cimento 1982, **35**, 300.
 153. *Wodkiewicz K.* Phys. Lett. A. 1988, **129**, 1.
Agarwal G.S., Home D., Schleich W. Phys. Lett. A. 1992, **170**, 359.
 154. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. A. 1990, **146**, 93.
 155. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. A. 1989, **137**, 334.
 156. *Klyshko D.N.* Laser Phys. 1992, **2**, 997.
 157. *Белинский А.В.* ЖЭТФ, 1993, **103**, 1538.
 158. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972.
 159. *Carruthers P., Nieto M.* Rev. Mod. Phys. 1968, **40**, 411.
 160. *Su C., Wodkiewicz K.* Phys. Rev. A. 1991, **44**, 6097.
 161. *Lee C.T.* Phys. Rev. A. 1991, **44**, 2775.
 162. *Burnham D.C., Weinberg D.L.* Phys. Rev. Lett. 1970, **25**, 84.
 163. *Зельдович Б.Я., Клышко Д.Н.* Письма ЖЭТФ. 1969, **9**, 69.
 164. *Franson J.D.* Phys. Rev. Lett. 1989, **62**, 2205.
 165. *Ou Z.Y., Zou X.Y., Wang L.G., Mandel L.* Phys. Rev. Lett. 1990, **65**, 321.
 166. *Ou Z.Y., Mandel L.* J. Opt. Soc. Am. B. 1990, **7**, 2127.
 167. *Ахманов С.А.* УФН. 1986, **149**, 361.
 168. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* КЭ. 1988, **15**, 873.
 169. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* Опт. и спектр. 1989, **66**, 738.
 170. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* — Новые физические принципы оптической обработки информации. Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова М.: Наука, 1990, С. 83—194.
 171. *Ахманов С.А.* Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1961, **4**, 769.
 172. *Ахманов С.А., Комолов В.П.* Вести. Моск. ун-та. Сер. 3: Физика и астрономия, 1966, **7**: 5, 95.
 173. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Радиотехн. и электрон. 1961, **6**, 1813.
 174. *Дьяков Ю.Е.* Радиотехн. и электрон. 1963, **8**, 1812.
 175. *Дьяков Ю.Е.* Радиотехн. и электрон. 1963, **8**, 2034.
 176. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Д., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
 177. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* ЖЭТФ. 1992, **102**, 1116.
 178. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. A. 1990, **146**, 471.
 179. *Elyutin P.V., Klyshko D.N.* Phys. Lett. A. 1990, **149**, 241.
 180. *Vogel W., Schleich W.* Phys. Rev. A. 1991, **44**, 7642.
 181. *Noh J.W., Fougères A., Mandel L.* Phys. Rev. Lett. 1991, **67**, 1426.
 182. *Noh J.W., Fougères A., Mandel L.* Phys. Rev. A. 1992, **45**, 424.
 183. *Freyberger M., Schleich W.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 30.
 184. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 248.
 185. *Paul H.* Opt. Acta. 1981, **1**, 28.
 186. *Brendel J., Mohler E., Martienssen W.* Europhys. Lett. 1992, **20**: 7, 575.
 187. *Shih Y.H., Sergienko A.V., Rubin M.H.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 1288.
 188. *Stapp H.P.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 847.
 189. *Zurek W.H., Habib S., Paz J.P.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 1187.
 190. *Williams J.F., Kumar M., Stelbovics A.T.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 1240.
 191. *Smithey D.N., Beck M., Raymer M.G., Fehdani A.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 1244.
 192. *Elby A., Jones M.P.* Phys. Lett. A. 1992, **171**, 11.
 193. *Mann A., Revzen M., Schleich W.* Phys. Rev. A. 1992, **46**, 5363.
 194. *Selleri F.* Quantum paradoxes and physical reality. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publ, 1990.
 195. *Horgan D.* Scient. Am. 1992, 267:1; перевод Хорган Д. В мире науки. 1992, N9—10, 70.
 196. *Belsley M., Smithey D.T., Raymer M.G.* Phys. Rev. A. 1992, **46**, 414.
 197. *Larchuk T.S., Campos R.A., Rarity J.G., Tapster P.R., Jakeman E., Saleh B.E.A., Teich M.C.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 1603.
 198. *Vinduska M.* Phys. Lett. A. 1993 (to be published).
 199. *Ardehali M.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 1633.
 200. *Scherer H., Busch P.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 1647.
 201. *Braunstein S.L., Mann A.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 2427.
 202. *Kwiat P.G., Steinberg A.M., Chiao R.Y.* Phys. Rev. A. 1993, **47**, 2472.
 203. *Bennett C.H., Brassard G., Crepeau C., Jorsra R., Peres A., Wootters W.K.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 1895.

Интерференция света и теорема Белла. Белинский А.В., Клышко Д.Н. "Успехи физических наук". Август 1993 г. Т. 163, № 8. — 1 — 45. Обзор посвящен проблеме экспериментальной демонстрации с помощью эффекта интерференции интенсивности неадекватности классического представления о существующих априори свойствах квантовых объектов. Подробное описание экспериментальных процедур, использующих N -фотонный свет, где $N=2,3,\dots$, сопровождается трактовкой экспериментальных результатов с помощью квантовой теории и нескольких наглядных классических моделей. Обсуждаются различные формулировки противоречия между классическими представлениями и квантовой теорией, привлекающие в последнее время большое внимание: теорема Белла без неравенств, теорема Кохена — Спекера и др. Табл. 1. Ил. 9. Библиогр. ссылок 203 (206 назв.).

The interference of light and the Bell's theorem. Belinskii A.V., Klyshko D.N. Uspekhi Fizicheskikh Nauk. August 1993. Vol. 163, No. 8. — 1 — 45. The intensity interference of light waves observed with photon counters and coincidence circuits gives a clear demonstration of the Bell's theorem, which states that in general it is impossible to ascribe a priori definite properties to quantum objects — the light waves, in the present example. Several possible experimental procedures with 2, 3 or N observers are described in detail, as well as their tentative interpretations by various classical models and quantum theory. Alternative formulations of the Bell's theorem such as the N -particle Bell inequalities, the Bell theorem without inequalities, the Kochen—Specker theorem are also considered. 1 table. 9 figs. 203 refs. (206 titles.).