

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КЕРРОВСКОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ И ПРИРОДА АКТИВНОСТИ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ЯДЕР

В.С. Бескин, В.И. Парьев

(Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва)

(Статья поступила 4.03.93 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (95).
2. Основные уравнения (96). 2.1. Движение в заданном полоидальном поле. 2.2. Особые точки. 2.3. Уравнение на полоидальное поле.
3. Обсуждение результатов (102). 3.1. Основные свойства уравнения на полоидальное поле. 3.2. Частные случаи уравнения на полоидальное поле. 3.3. Границы применимости уравнения на полоидальное поле.
4. Заключение (105),
Список литературы (106).

1. Введение. Осесимметричные стационарные магнитогидродинамические течения в окрестности центрального компактного объекта уже давно рассматриваются в связи со многими астрофизическими источниками. К этому классу течений относятся как сферически-симметричные аккреция на обычные звезды [1, 2] и черные дыры [2], так и аксиально симметричный звездный (солнечный) ветер [3–6], струйные выбросы из молодых звездных объектов [7] и эжекция частиц из осесимметричной магнитосферы вращающейся нейтронной звезды [8–12]. Не исключено, что подобные магнитогидродинамические течения играют заметную роль и в галактических источниках, рассматриваемых как кандидаты в черные дыры [13–14]. Именно на основе уравнений, описывающих осесимметричные стационарные течения, удалось существенно продвинуться в понимании и более сложных систем, таких, например, как радиопульсары, которые не обладают осевой симметрией [15–16].

МГД-модели активно развиваются сейчас и в связи с теорией строения магнитосферы сверхмассивной ($\mathcal{M} \sim 10^8 - 10^9 M_\odot$) вращающейся черной дыры, которая, как полагают, является "центральной маши-

ной" в активных галактических ядрах и квазарах [17–22]. Действительно, именно аккреция вещества на подобные компактные объекты позволяет понять природу как их чрезвычайно интенсивного энерговыделения $10^{46} - 10^{48}$ эрг/с, так и достаточную стабильность наблюдаемых струйных выбросов, энергетика которых достигает $10^{44} - 10^{46}$ эрг/с [17]. Поскольку в дальнейшем нас будет прежде всего интересовать именно магнитосфера черных дыр, мы везде будем приводить все выражения с учетом эффектов общей теории относительности. Самогравитацией вещества и полей, т.е. влиянием их на метрику пространства-времени черной дыры, мы будем пренебречь, что соответствует реальной астрофизической ситуации [17].

Подчеркнем, что вопрос о необходимости учета эффектов общей теории относительности во многих компактных космических источниках не является очевидным. Например, есть указания на то, что струйные выбросы в молодых звездных объектах связаны не с центральной вращающейся звездой, а с аккреционным диском [18]. Если механизм образования джетов в активных галактических ядрах и квазарах имеет ту же природу, что и в молодых звездах, то не исключено, что черная дыра играет лишь пассивную роль в процессе образования выбросов, а эффекты общей теории относительности не являются принципиально важными для понимания природы их образования.

Вместе с тем гравитационные эффекты, по-видимому, все же вносят заметный вклад в определение физических условий в компактных объектах. На это указывают прежде всего жесткие спектры и аннигиляционные линии в галактических рентгеновских источниках, являющихся кандидатами в черные ды-

ры солнечной массы [14]. Такие свойства никогда не наблюдаются у рентгеновских источников, про которые достоверно известно, что в них происходит аккреция не на черную дыру, а на нейтронную звезду. Кроме того, сюда можно отнести также сверхсветовые скорости деталей в квазарах [17], которые, возможно, связаны с потоком релятивистской электронно-позитронной плазмы, эjectируемой наряду со слаборелятивистским струйным выбросом [23]. Все это говорит в пользу существования дополнительного механизма рождения и ускорения частиц, для понимания которого эффекты общей теории относительности могут играть определяющую роль. Представляет поэтому несомненный интерес рассмотреть вопрос о строении магнитосферы в наиболее общей постановке, т.е. в присутствии вращающейся черной дыры.

В настоящей работе получено основное уравнение, описывающее осесимметричное стационарное течение в окрестности керровской черной дыры. Проведен его анализ и, в частности, показано, как вблизи горизонта событий в быстрой МГД-точке происходит изменение типа уравнения от эллиптического к гиперболическому. Обсуждаются границы применимости магнитогидродинамического подхода к анализу явлений, происходящих в ядрах активных галактических ядер и квазаров. Показано, что для применимости МГД-подхода плотность фотонов в окрестности черной дыры должна быть достаточно мала.

2. Основные уравнения. Рассмотрим стационарное осесимметричное МГД-течение плазмы в гравитационном поле керровской черной дыры с метрикой в координатах Бойера-Линдквиста [24]

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{ik} (dx^i + \beta^i dt) (dx^k + \beta^k dt), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho}{\Sigma} \Delta^{1/2}, \quad \beta^r = \dot{\beta}^\theta = 0, \\ \beta^\varphi &= -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2}, \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \tilde{\omega}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

а

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \\ \tilde{\omega} &= \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta; \end{aligned} \quad (3)$$

здесь, как обычно, M и a — соответственно масса и угловой момент черной дыры, отнесенный к единице массы, т.е. $a = J/M$, а также использована система

единиц, в которой $c = G = 1$.

Благодаря осесимметричности и стационарности, т.е. наличию двух векторов Киллинга $k = \partial/\partial t$ и $m = \partial/\partial\varphi$ [24], имеют место два закона сохранения, соответствующие сохранению энергии E и z -компоненты момента импульса L_z

$$p^\alpha = T_\beta^\alpha k^\beta, \quad J^\alpha = -T_\beta^\alpha m^\beta, \quad (4)$$

где T_β^α — полный тензор энергии-импульса вещества и поля. Этот факт замечательным образом позволяет отделить задачу о структуре полоидального магнитного поля и электрических токов от задачи об ускорении частиц и структуре тороидального магнитного поля. Такая возможность связана с существованием в общем случае пяти интегралов движения, описывающих осесимметричное стационарное течение в приближении одножидкостной идеальной магнитогидродинамики. При этом решение последней задачи в заданном полоидальном поле выражается простыми алгебраическими соотношениями.

2.1. Движение в заданном полоидальном поле. Приведем основную сводку алгебраических соотношений, позволяющих по известному полоидальному магнитному полю \mathbf{B}_p определить характеристики плазмы, текущей в магнитосфере. Покажем прежде всего, как в рассматриваемом формализме возникает в общем случае пять интегралов движения.

Везде в дальнейшем используется техника "3+1" — расщепления, т.е. все величины выражаются через трехмерные векторы, измеряемые так называемыми опорными наблюдателями или наблюдателями с нулевым угловым моментом [24]. Такие наблюдатели движутся вокруг вращающейся черной дыры с угловой скоростью ω (2). Латинские индексы без шляпки обозначают компоненты относительно координатного базиса $\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\varphi$ в "абсолютном" 3-пространстве, латинские индексы со шляпкой — относительно ортонормированного базиса

$$\mathbf{e}_r = \frac{\Delta^{1/2}}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Символ ∇ всегда означает ковариантное дифференцирование в "абсолютном" 3-пространстве с метрикой g_{ik} (2).

Итак, в стационарном осесимметричном случае полоидальное магнитное поле может быть записано в виде

$$\mathbf{B}_p = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\tilde{\omega}}, \quad (5)$$

благодаря чему автоматически выполняется уравнение Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Легко видеть, что $\mathbf{B} \nabla \Psi = 0$, так что функция $\Psi(r, \theta) = \text{const}$ задает магнитные поверхности. При этом коэффициент

пропорциональности в (5) выбран таким образом, чтобы величина Ψ совпадала по величине с потоком магнитного поля внутри силовой трубы $\Psi = \text{const}$. Тороидальное же магнитное поле нам будет удобно записать в виде

$$B_{\hat{\varphi}} = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}}; \quad (6)$$

здесь $I(r, \theta)$ — полный электрический ток, текущий внутри области $\Psi < \Psi(r, \theta)$, а шляпка, как обычно, означает, что определяется физическая компонента вектора [24].

Будем считать, как обычно, что в магнитосфере содержится достаточное количество плазмы, чтобы заэкранировать продольную компоненту электрического поля, так что выполнено условие $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$. Тогда электрическое поле \mathbf{E} , определяемое непосредственно из уравнения Максвелла [24, 25]

$$\nabla \times (\alpha\mathbf{E}) = \mathcal{L}_\beta \mathbf{B}, \quad (7)$$

где

$$\mathcal{L}_\beta \mathbf{B} \equiv (\beta \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \beta$$

— производная Ли, должно быть параллельно градиенту $\nabla\Psi$. В результате поле \mathbf{E} может быть записано в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega^F - \omega}{2\pi\alpha} \nabla\Psi, \quad (8)$$

если, как непосредственно следует из (7), выполнено условие $\mathbf{B} \nabla \Omega^F = 0$. Иными словами, угловая скорость Ω^F должна быть постоянна на магнитной силовой поверхности

$$\Omega^F = \Omega^F(\Psi). \quad (9)$$

Далее, уравнение непрерывности записывается в виде

$$\nabla \cdot (\alpha n \mathbf{u}) = 0, \quad (10)$$

где n — концентрация частиц в их собственной системе покоя, а $\mathbf{u} = \mathbf{v}/(1 - v^2)^{1/2}$ — пространственная компонента четырехскорости частиц. Соотношение (10) вместе с уравнением Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и условием вмогренности позволяет сразу записать полоидальную компоненту четырехскорости \mathbf{u}_p в виде

$$\mathbf{u}_p = \frac{\eta}{n\alpha} \mathbf{B}_p, \quad (11)$$

причем, благодаря условию $\nabla \cdot (\eta \mathbf{B}_p) = 0$, величина η также должна быть постоянна на магнитной поверхности $\Psi = \text{const}$

$$\eta = \eta(\Psi). \quad (12)$$

Таким образом, величина $\eta(\Psi)$, как и угловая скорость $\Omega^F(\Psi)$, имеет смысл интеграла движения. Воспользовавшись же уравнением вмогренности

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

которое в МГД-приближении считается точно выполненным, имеем

$$\mathbf{u} = \frac{\eta}{\alpha n} \mathbf{B} + \gamma(\Omega^F - \omega) \frac{\tilde{\omega}}{\alpha} \mathbf{e}_\varphi, \quad (14)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор плазмы.

Для получения еще двух интегралов движения, эквивалентных (4), запишем закон сохранения энергии-импульса $T_{\mathbf{v}; \mu}^{\mu} = 0$, который в (3+1)-формализме (и при условии $\partial/\partial t = 0$) имеет вид [24]

$$-\frac{1}{\alpha} (\vec{\beta} \nabla) \epsilon = -\frac{1}{\alpha^2} \nabla \cdot (\alpha^2 \mathbf{S}) + H_{ik} T^{ik}, \quad (15)$$

$$\nabla_k T_i^k + \frac{1}{\alpha} S_\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x^i} + (\epsilon \delta_i^k + T_i^k) \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = 0; \quad (16)$$

здесь гравитационное ускорение $\mathbf{g} = -(1/\alpha) \nabla \alpha$, гравимагнитное тензорное поле $H_{ik} = (1/\alpha) \nabla_i \beta_k$, а гравитационное красное смещение α и функция смещения $\vec{\beta}$ определяются соотношениями (2). При этом плотность энергии ϵ , поток энергии \mathbf{S} и тензор натяжения T_{ik} определяются точно так же, как и в плоском пространстве

$$\epsilon^{\text{эм}} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2),$$

$$\mathbf{S}^{\text{эм}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

$$T_{ik}^{\text{эм}} = \frac{1}{4\pi} [-E_i E_k - B_i B_k + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) g_{ik}], \quad (17)$$

$$\epsilon^{\text{част}} = (\rho_m + Pv^2) \gamma^2,$$

$$\mathbf{S}^{\text{част}} = (\rho_m + P) \gamma^2 \mathbf{v},$$

$$T_{ik}^{\text{част}} = (\rho_m + P) \gamma^2 v_i v_k + Pg_{ik}, \quad (18)$$

где P — давление, а ρ_m — плотность энергии плазмы. В результате, подставляя выражения (17), (18) в уравнение энергии (15) и в $i = \varphi$ — компоненту уравнения импульса (16), а также используя определения (5), (6), (8) и (14), имеем после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_p \nabla \left(\frac{\Omega^F I}{2\pi} + \alpha \mu \gamma \eta \right) - \\ - \frac{\omega}{2\pi} \mathbf{B}_p \nabla I + \mathbf{B}_p \nabla \omega \cdot \mu \eta \mathbf{e}_\varphi = 0, \\ \mathbf{B}_p \nabla \left(\frac{I}{2\pi} + \eta \mu u_\varphi \right) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

здесь величина μ представляет собой удельную энталпию

$$\mu = \frac{\rho_m + P}{n}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) сразу следует, что вдоль силовой линии должны сохраняться величины E и L

$$E = E(\Psi) = \frac{\Omega^F I}{2\pi} + \mu \eta (\alpha \gamma + \omega u_\varphi), \quad (21)$$

$$L = L(\Psi) = \frac{I}{2\pi} + \mu \eta u_\varphi, \quad (22)$$

соответствующие как раз потокам энергии и z -компоненты момента импульса (4).

Гидродинамические уравнения должны быть дополнены уравнением состояния. В нашем случае удобно выбрать в качестве термодинамических переменных давление P и энтропию на одну частицу s . Тогда термодинамическим потенциалом будет как раз удельная энталпия μ (20). При этом первый закон термодинамики записывается в виде [26]

$$d\mu = \frac{1}{n} dP + T ds, \quad (23)$$

так что

$$n = n(P, s), T = T(P, s).$$

Представленные выше соотношения позволяют выразить величины μ , T и P как функции n и s . Так, для политропного уравнения состояния $P = k_0 n^\Gamma$ имеем [2]

$$\mu = m + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} k_0(s) n^{\Gamma - 1},$$

где m — масса частиц. В частном же случае холодной плазмы имеем просто $\mu = m$. Поясним, что в качестве m нужно брать среднюю массу для всех частиц, так, для e^- -плазмы $m \approx m_p/2$, для e^+e^- -плазмы $m = m_e$. n — полная концентрация всех сортов частиц.

Наконец, необходимо сделать дополнительное предположение, что течение плазмы является изэнтропийным:

$$\mathbf{u} \nabla s = 0.$$

В осесимметричном случае это условие вместе с (11) дает

$$s = s(\Psi),$$

так что энтропия на одну частицу $s(\Psi)$ является фактически пятым интегралом движения.

Покажем теперь, как, зная пять интегралов движения, $\Omega^F(\Psi)$, $E(\Psi)$, $L(\Psi)$, $\eta(\Psi)$ и $s(\Psi)$, а также полоидальное магнитное поле \mathbf{B}_p , можно восстановить значения тороидального магнитного поля B_φ и основные параметры плазмы, такие как плотность n и скорость \mathbf{v} . Действительно, используя теперь законы сохранения (21), (22), а также φ -компоненту уравнения (14), можно разрешить их относительно величин тока I , лоренц-фактора γ и физической тороидальной скорости $u_\varphi = u_\varphi/\tilde{\omega}$:

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\alpha^2 L - (\Omega^F - \omega) \tilde{\omega}^2 (E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2}, \quad (24)$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha \mu \eta} \frac{\alpha^2 (E - \Omega^F L) - M^2 (E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2}, \quad (25)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{\tilde{\omega} \mu \eta} \frac{(E - \Omega^F L) (\Omega^F - \omega) \tilde{\omega}^2 - L M^2}{\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2}; \quad (26)$$

здесь и далее величина

$$M^2 = \frac{4\pi\eta^2\mu}{n} \quad (27)$$

с точностью до фактора α^2 есть квадрат числа Маха по отношению к альвеновской скорости $u_A = B_p/(4\pi n \mu)^{1/2}$

$$M^2 = \alpha^2 \frac{u_p^2}{u_A^2}.$$

Нам в дальнейшем будет удобно пользоваться именно величиной M^2 , поскольку она остается конечной на горизонте черной дыры. Согласно (23) $\mu = \mu(n, s)$ и, следовательно, уравнение (27) позволяет выразить концентрацию n (а значит, и удельную энталпию μ) как функции η , s и M . Это означает, что наряду с пятью интегралами движения $\Omega^F(\Psi)$, $E(\Psi)$, $L(\Psi)$, $\eta(\Psi)$ и $s(\Psi)$ выражения для I , γ и u_φ зависят лишь от одной дополнительной величины — числа Маха M .

Для определения же числа Маха M воспользуемся очевидным соотношением

$$\gamma^2 - u^2 = 1, \quad (28)$$

которое благодаря выражениям (11), (25) и (26), может быть записано в виде

$$\frac{K}{\tilde{\omega}^2 A^2} = \frac{1}{64\pi^4} \frac{M^4 (\nabla \Psi)^2}{\tilde{\omega}^2} + \alpha^2 \eta^2 \mu^2, \quad (29)$$

где

$$A = \alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2, \quad (30)$$

а

$$K = \alpha^2 \tilde{\omega}^2 (E - \Omega^F L)^2 [\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - 2M^2] + M^4 [\tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2]. \quad (31)$$

Соотношения (24) — (26) и (29) являются алгебраическими связями, позволяющими по известному полоидальному полю \mathbf{B}_p (5) (т.е. по известному потенциалу Ψ), а также по известным интегралам движения определить компоненты четырехскорости плазмы u^i и тороидальное магнитное поле \mathbf{B}_φ (6). Равенства (24) — (26), (29) как раз и анализировались в работах по солнечному ветру [4—6], акреции на нейтронные звезды и черные дыры [1,2], по эjectionи плазмы из пульсаров [9—12], а также в наиболее общем случае метрики Керра в работах [19—22].

2.2. Особые точки. Алгебраические соотношения позволяют определить особые точки рассматриваемых МГД-течений. Такими особыми точками являются:

1) Альвеновская точка A , определенная из условия равенства нулю знаменателя A (30) в соотношениях (24) — (26)

$$A = 0. \quad (32)$$

В монопольном магнитном поле, как было показано еще в работе [4], на плоскости в координатах $u^r - r$ она является точкой более высокого порядка, чем,

например, седло или фокус (рис. 1). Вместе с тем, как показано в работе [22], через нее проходят все траектории с положительным квадратом энергии E независимо от значений интегралов движения.

2) Быстрая магнитозвуковая точка F , определяемая как особенность в выражении для градиента \mathbf{M}^2 (и, следовательно, как особенность в градиенте четырехскорости \mathbf{u}). Действительно, воспользовавшись соотношениями (29)–(31), которые можно переписать в виде

$$(\nabla\Psi)^2 = F(M^2, E, L, \eta, \Omega^F, \mu), \quad (33)$$

где

$$F = \frac{64\pi^4}{M^4} \frac{K}{A^2} - \frac{64\pi^4}{M^4} \alpha^2 \tilde{\omega}^2 \eta^2 \mu^2, \quad (34)$$

получаем

$$\begin{aligned} \nabla_a M^2 = & - \frac{A \cdot \nabla \psi}{(\nabla \psi)^2 D} \nabla^\beta \psi \nabla_a \nabla_\beta \psi + \\ & + \frac{A}{2} \frac{\nabla_a' F}{(\nabla \psi)^2 D}; \end{aligned} \quad (35)$$

здесь и далее индексы a, b пробегают значения r, θ , оператор ∇' действует на все величины за исключением M^2 . При этом знаменатель

$$D = - \frac{A}{2F} \frac{\partial F}{\partial(M^2)}$$

может быть записан в виде

$$D = \frac{A}{M^2} + \frac{\alpha^2 B_\varphi^2}{M^2 B_p^2} - \frac{1}{u_p^2} \frac{A}{M^2} \frac{a_s^2}{1 - a_s^2}; \quad (36)$$

$$a_s^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_s$$

— квадрат скорости звука. При выводе соотношения (36) был использован первый закон термодинамики (23), благодаря которому (см., например, [2])

$$\begin{aligned} d\mu = & \frac{a_s^2}{1 - a_s^2} \mu \left(2 \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dM^2}{M^2} \right) + \\ & + \frac{1}{1 - a_s^2} \left[T + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \right] ds. \end{aligned} \quad (37)$$

Условие $D = 0$ и определяет положение быстрой МГД-точки. Быстрая МГД-точка, в отличие от альвеновской, является седловой точкой [22], т.е. гладкие, без бесконечных производных и точек остановки, решения существуют лишь при определенной связи между интегралами движения, когда числитель в (35) равен нулю в быстрой МГД-точке (рис. 2). Аналогичным образом условие $D = 0$ определяет и медленную МГД-точку.

Наконец, характерной точкой является

3) Световой цилиндр R_L , т.е. поверхность, на которой электрическое поле \mathbf{E} сравнивается по величине с полоидальной компонентой магнитного поля \mathbf{B}_p

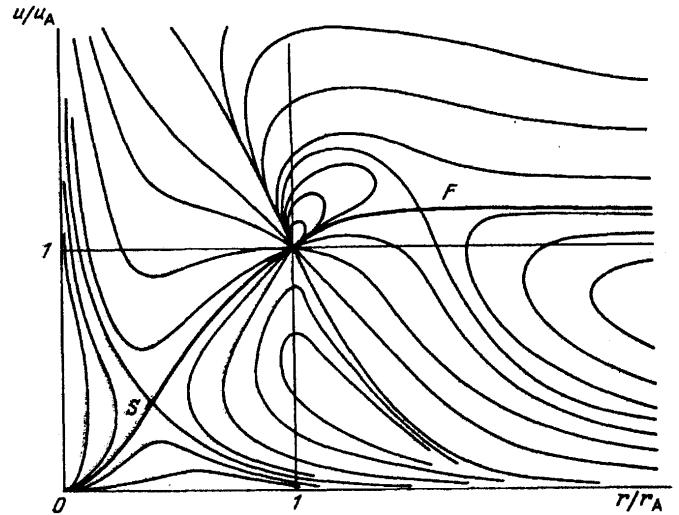


Рис. 1. Фазовая диаграмма, показывающая зависимости полоидальной скорости u от расстояния r до точечного ньютонаовского гравитирующего центра для нерелятивистского МГД-течения в экваториальной плоскости монопольного полоидального поля $\Psi = \Psi_0(1 - \cos\theta)$, получающаяся в результате решения алгебраического уравнения (29) при различных значениях E . u_A, r_A — значения u и r в альвеновской точке; S — медленная, F — быстрая магнитозвуковые точки. Значения остальных четырех интегралов движения Ω^F, L, η, s подобраны так, чтобы существовало решение, проходящее через все три критические точки, дозвуковое при $r \rightarrow 0$ и сверхзвуковое при $r \rightarrow \infty$. Это решение показано жирной линией [4]

Отметим, наконец, еще одно важное свойство, присущее исключительно магнитосфере черной дыры. Оно состоит в том, что наряду с обычными особенностями — "внешним" световым цилиндром R_L и лежащей внутри него альвеновской точкой A (а также, возможно, "внешней" быстрой МГД-точкой F), эффекты общей теории относительности приводят к появлению второго семейства особых точек вблизи горизонта черной дыры [25]. При этом согласно работе [22] в случае монопольного магнитного поля быстрая F -точка лежит между горизонтом и внутренней альвеновской точкой A (см. рис. 2).

Здесь чрезвычайно важным является тот факт, что внешняя альвеновская точка (через которую, как уже говорилось, проходят все траектории) лежит в полуплоскости $u' > 0$, т.е. соответствует истекающей плазме, тогда как внутренняя альвеновская точка соответствует значению $u' < 0$, т.е. акреции. Но это, как легко видеть, противоречит предположению о постоянстве функции η на данной силовой линии $\Psi = \text{const}$, так как разные значения продольной скорости u' согласно соотношению (11) должны соответствовать разным знакам величины η . Следовательно, течение плазмы во всей магнитосфере черной дыры (а точнее, на силовых линиях, проходящих через горизонт) не может быть непрерывным. Поэтому в области между двумя альвеновскими точками должен существовать источник плазмы, задающий раз-

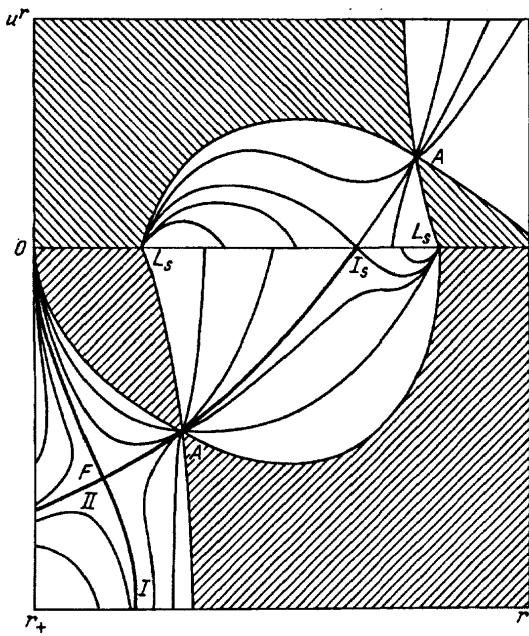


Рис. 2. Семейство решений алгебраического уравнения (29) при различных значениях E для экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ керровской черной дыры с $a = 0.8$ для холодного вещества ($s = 0$). Задано монопольное полоидальное поле, $0 < \Omega^F < \Omega^H$. A — внутренняя и внешняя альвеновские точки, F — внутренняя магнитозвуковая точка, J_s — точка инъекции вещества с 0-й скоростью за счет механизма рождения плазмы, L_s — световой цилиндр. Заштрихована область, в которой нет решений, т.е. (29) не может быть удовлетворено ни при каком E . Жирными линиями показаны сепаратрисы седловой точки F . Величины E , L , η — терпят разрыв при переходе из полуплоскости $u' > 0$ в полуплоскость $u' < 0$, обусловленный образованием плазмы в точке I_s [22]

ные значения η во внешней и внутренних областях магнитосферы черной дыры.

2.3. Уравнение на полоидальное поле. Таким образом, система алгебраических соотношений (24)–(26), (29), описывающая движение плазмы в заданном полоидальном поле, позволяет существенно продвинуться в понимании основных свойств стационарных осесимметричных течений. Однако в подобной постановке задачи не могут быть определены, например, сами значения интегралов движения Ω^F , E , L , η и s , которые, в частности, определяют одну из основных характеристик системы, а именно, величину потерь энергии центральным объектом. Кроме того, в подавляющем большинстве работ рассматривалось течение плазмы лишь в монопольном магнитном поле [10, 12, 22], которое, вообще говоря, не является самосогласованным (т.е. не является решением уравнения на полоидальное поле), не говоря уже о том, что оно не позволяет понять природу струйных выбросов, наблюдавшихся в квазарах и активных галактических ядрах. Наконец, ясно, что в случае уравнения в частных производных поведение решения вблизи особых точек требует специального исследования.

Что же касается задачи о структуре полоидального магнитного поля и продольных электрических токов, лишь в рамках которой может быть, например,

исследован вопрос о возможной коллимации струи вдоль оси вращения, то здесь ситуация остается значительно менее определенной. Наибольший прогресс достигнут лишь в бессиловом приближении, когда плотность энергии магнитного поля существенно превосходит плотность энергии плазмы, так что можно пренебречь массой частиц, т.е. положить $T = T^m$. В этом приближении, интересном прежде всего для магнитосфер нейтронных звезд — пульсаров, уже давно было получено уравнение, описывающее структуру магнитного поля [15–16]. Оно является обобщением уравнения Трэда — Шафранова, полученного еще в пятидесятых годах для торoidalных плазменных систем. В общем случае метрики Керра оно имеет вид [25]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \nabla \cdot \left\{ \frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2} \left[1 - \frac{(\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2}{\alpha^2} \right] \nabla \Psi \right\} + \\ + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha^2} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega^F}{d\Psi} + \\ + \frac{16\pi^2}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} I \frac{dI}{d\Psi} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (38) является эллиптическим уравнением второго порядка на потенциал $\Psi(r, \theta)$, в которое в качестве источников входят две неизвестные функции — угловая скорость $\Omega^F(\Psi)$, а также ток $I(\Psi)$, который, как видно из определения (22), в бессиловом приближении также становится интегралом движения.

Ясно, однако, что в бессиловом приближении теряется информация о влиянии массы частиц на структуру магнитного поля, которую, безусловно, необходимо учитывать, например, во внешних областях магнитосферы нейтронной звезды [10, 11]. Как мы увидим, вблизи горизонта черной дыры уравнение (38) также заведомо нарушается. Поэтому представляет несомненный интерес исследовать более общее уравнение на полоидальное поле, включающее в себя эффекты, связанные с ненулевой массой частиц. Такое уравнение, подобно уравнению (38), должно включать в себя лишь потенциал Ψ , а также зависящие от него интегралы движения $\Omega^F(\Psi)$, $E(\Psi)$, $L(\Psi)$ и $\eta(\Psi)$, а также, вообще говоря, энтропию на одну частицу $s(\Psi)$.

Впервые подобное уравнение, описывающее осесимметричную стационарную магнитосферу, было получено Ардаваном в 1979 г. в пренебрежении эффектами гравитации [27] и затем обсуждалось в работах [28–30]. Для нерелятивистской плазмы оно исследовалось численно в работах [18, 31–34], а для релятивистской плазмы в слабом гравитационном поле — в работах [35–40]. Наконец, совсем недавно в работе [41] уравнение на полоидальное поле было

записано и в наиболее общей метрике Керра, однако в приближении холодной плазмы, т.е. для случая $s(\Psi) \equiv 0$.

Итак, запишем полоидальную компоненту уравнения сохранения импульса (16)

$$\nabla_k T_a^k + \frac{1}{\alpha} S_\varphi \nabla_a \omega + (\epsilon \delta_a^k + T_a^k) \frac{1}{\alpha} \nabla_k \alpha = 0,$$

где вновь индексы a и b будут пробегать лишь значения r и θ . Подставляя в это уравнение значения плотности энергии ϵ , потока S и тензора натяжения T (17), (18), получаем

$$Z = Z_{\text{эм}} + Z_{\text{част}} = 0,$$

$$Z_{\text{эм}} = \frac{1}{16\pi^3 \alpha} \times$$

$$\times \left[\nabla_k \left\{ \frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2} \left[1 - \frac{(\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2}{\alpha^2} \right] \nabla^k \Psi \right\} \nabla_a \Psi + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega^F}{d\Psi} \nabla_a \Psi + \frac{16\pi^2}{\alpha \tilde{\omega}^2} I \nabla_a I \right], \quad (39)$$

$$Z_{\text{част}} = \mu u^b \nabla_b (\mu u_a) +$$

$$+ \nabla_a P - \mu n (u_\varphi^2) \frac{1}{\tilde{\omega}} \nabla_a \tilde{\omega} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \mu n \gamma (\tilde{\omega} u_\varphi) \nabla_a \omega + \mu n \gamma^2 \frac{1}{\alpha} \nabla_a \alpha; \quad (40)$$

здесь первое слагаемое (39) соответствует электромагнитному вкладу (17), а второе — гидродинамическому вкладу (18).

Мы видим, что первое слагаемое в бессиловом пределе, когда $I = I(\Psi)$ (и, следовательно, $\nabla_a I = (dI/d\Psi) \nabla_a \Psi$), как раз пропорционально уравнению (38). Вместе с тем, в отличие от (38) уравнение $Z_{\text{эм}} = 0$ является векторным и не сводится к уравнению второго порядка на потенциал Ψ . Однако, как будет показано ниже, уравнение $Z = 0$ также может быть сведено к скалярному.

Действительно, воспользовавшись определением (14), связывающим четырехскорость u с магнитным полем \mathbf{B} (а также, заменяя в последнем слагаемом в (40) величину γ^2 на $1 + u^b u_b + (u_\varphi^2)$, получаем после элементарных, хотя и громоздких преобразований

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \nabla_k \left\{ \frac{1}{\alpha \tilde{\omega}^2} [\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2] \nabla^k \Psi \right\} \nabla_a \Psi + \\ & + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{2M^2} \nabla_a \frac{M^4 (\nabla \Psi)^2}{\tilde{\omega}^2} + \\ & + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha^2} \frac{d\Omega^F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 \nabla_a \Psi + \\ & + \frac{16\pi^2}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} I \nabla_a I + 16\pi^3 \nabla_a P + \\ & + \frac{16\pi^3}{\alpha^2} \mu n (\gamma \alpha) (\tilde{\omega} u_\varphi) \nabla_a \omega - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 16\pi^3 \mu n (u_\varphi^2) \frac{1}{\tilde{\omega}} \nabla_a \tilde{\omega} + \\ & + 16\pi^3 \mu n (1 + u_\varphi^2) \frac{1}{\alpha} \nabla_a \alpha = 0; \end{aligned} \quad (41)$$

здесь по-прежнему

$$M^2 = \frac{4\pi \mu \eta^2}{n}.$$

Подставляя теперь в уравнение (41) значение величины $M^4 (\nabla \Psi)^2 / \tilde{\omega}^2$, определенное из соотношения (29), дифференцируя и приводя подобные члены, убеждаемся, что коэффициенты при градиентах $\nabla_a M^2$, $\nabla_a \alpha$, $\nabla_a \tilde{\omega}$ и $\nabla_a \omega$ оказываются тождественно равны нулю. Что же касается градиента давления $\nabla_a P$, то для его преобразования нам необходимо воспользоваться первым законом термодинамики в виде (23)

$$dP = n d\mu - n T ds. \quad (42)$$

Но для изэнтропийного течения энтропия s должна быть постоянной вдоль магнитной силовой линии

$$\mathbf{B}_p \nabla s = 0 \quad (43)$$

(для политропного уравнения состояния $P = k_0 n^{\Gamma}$ пятым интегралом движения будет величина $k_0 = k_0(\Psi)$). В результате вектор $\nabla_a P - n \nabla_a \mu$ должен быть ортогонален магнитной силовой линии, т.е. параллелен $\nabla_a \Psi$. Наконец, градиенты от интегралов движения $E(\Psi)$, $L(\Psi)$, $\eta(\Psi)$ и $\Omega^F(\Psi)$ также пропорциональны, естественно, градиенту $\nabla_a \Psi$.

В итоге, как и в бессиловом случае, уравнение на полоидальное поле (39), (40) сводится к скалярному уравнению второго порядка, умноженному на $\nabla_a \Psi$. Оно может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \tilde{\omega}^2} A \nabla^k \Psi \right) + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha^2} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega^F}{d\Psi} + \\ & + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \frac{G}{A} - \\ & - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - \\ & - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} G = & \alpha^2 \tilde{\omega}^2 (E - \Omega^F L)^2 + \alpha^2 M^2 L^2 - \\ & - M^2 \tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Факт сокращения в (39), (40) членов, не параллельных $\nabla_a \Psi$, может быть понят следующим образом. Запишем сохранение энергии-импульса в ортонормированном базисе \mathbf{e}_0 , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_χ , \mathbf{e}_Ψ , где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\chi = \mathbf{B}_p / |\mathbf{B}_p|$, $\mathbf{e}_\Psi = \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|}$, $T^{\tilde{\mu}} \tilde{\nu} ;_{;\tilde{\nu}} = 0$, Т есть сумма (17) и (18). $\mathbf{0}$ - и $\tilde{\varphi}$ -компоненты этого уравнения интегрируются согласно (19) и приводят к соотношениям (21), (22), являющимся определениями

для $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$. Далее, можно показать, что проекция закона сохранения энергии-импульса на 4-скорость плазмы $u_{\tilde{\mu}} T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{;\tilde{\nu}} = 0$ для вырожденного электромагнитного поля $u^{\tilde{\mu}} F_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = 0$ (13) приводит к условию адиабатичности течения (43), которое использовалось при выводе уравнения (44). Таким образом, из четырех компонент $T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{;\tilde{\nu}} = 0$ остается лишь одна — Ψ -компоненты, которая не удовлетворяется тождественно соотношениями (21), (22), (29) и (43). Ее мы и получили в виде (44).

Таким образом, полоидальная компонента уравнения импульса (16) действительно представляет собой уравнение равновесия магнитных поверхностей $\Psi = \text{const}$.

Наконец, раскрывая в (44) члены $\nabla_a M^2$ согласно определению (35), получаем окончательно

$$\begin{aligned} A \left[\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \tilde{\omega}^2} \nabla^k \Psi \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{\nabla^a \Psi \nabla^b \Psi \nabla_a \nabla_b \Psi}{D} \right] + \\ + \frac{1}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} \nabla'_k A \nabla^k \Psi - \\ - \frac{A}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{1}{2D} \nabla'_k E \nabla^k \Psi + \\ + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha^2} \frac{d\Omega^F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 + \\ + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \frac{G}{A} - \\ - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \quad (46) \end{aligned}$$

где опять градиент ∇'_k действует на все величины за исключением M^2 , а производная $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Подчеркнем, что в уравнении (46) концентрация n , температура T и удельная энталпия μ должны быть выражены через уравнения состояния как функции энтропии $s(\Psi)$ и квадрат числа Маха M^2 , причем саму величину M^2 необходимо рассматривать как функцию $(\nabla \Psi)^2$ интегралов движения

$$\begin{aligned} M^2 = M^2 [(\nabla \Psi)^2, E(\Psi), L(\Psi), \eta(\Psi), \\ \Omega^F(\Psi), s(\Psi)]. \quad (47) \end{aligned}$$

Последнее же соотношение, как уже говорилось, неявно содержится в равенстве (29). Уравнение (46) вместе с определениями (30), (34), (36), (45) и является искомым уравнением на полоидальное поле, содержащее лишь потенциал Ψ и зависящие от него пять интегралов движения $\Omega^F(\Psi)$, $E(\Psi)$, $L(\Psi)$, $\eta(\Psi)$ и $s(\Psi)$.

3. Обсуждение результатов.

3.1. Основные свойства уравнения на полоидальное поле. Обсудим прежде всего основные свойства уравнения (46) — квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Оно является уравнением смешанного типа, причем, как легко проверить, в области $D > 0$ — эллиптическим, а в области $D < 0$ — гиперболическим.

Рассмотрим прежде всего область вблизи горизонта черной дыры. Если предположить, что квадрат числа Маха M^2 (27) не обращается в ноль на горизонте $r = r_+$, то величина $D(r_+)$ (36) может быть переписана в виде

$$D(r_+) = -1 + \frac{\alpha^2}{M^2 B_p^2} (B_\varphi^2 - E^2), \quad (48)$$

причем второе слагаемое согласно определениям (6), (8) конечно при $\alpha \rightarrow 0$. Однако, как следует из соотношения (29), при $M^2(r_+) \neq 0$ на горизонте должно быть выполнено условие

$$\frac{(E - \Omega^H L)^2}{[(\Omega^F - \Omega^H)^2 \tilde{\omega}^2 - M^2]^2} = \frac{1}{64\pi^4} \frac{(d\Psi/d\theta)^2}{\rho^2 \tilde{\omega}^2}, \quad (49)$$

где $\Omega^H = \omega(r_+)$ — угловая скорость вращения черной дыры. В результате получаем с учетом (6) и (24)

$$B_\varphi(r_+) = E_\theta(r_+). \quad (50)$$

Этот результат находится в полном соответствии с основным положением "мембранный парадигмы" — на горизонте опорный наблюдатель должен зарегистрировать лишь (расходящиеся как $1/\alpha$) φ -компоненту магнитного поля и θ -компоненту электрического поля, причем вектор Пойнтинга ориентирован по направлению к черной дыре [24]. В итоге, на горизонте должно быть выполнено условие

$$D(r_+) = -1; \quad (51)$$

так что для случая $M^2(r_+) \neq 0$ уравнение (46) вблизи горизонта черной дыры является гиперболическим. На рис. 2 области гипербolicности лежат слева от сепаратрисы I , и, в частности, уравнение (46) будет гиперболическим и для внутренней части сепаратрисы II , проходящей через быструю МГД-точку.

Таким образом, мы приходим к важному выводу, что для интегралов движения, соответствующих сепаратрисе II , между горизонтом черной дыры и быстрой МГД-точкой существует область гипербolicности уравнения (46). Поэтому если источник плазмы находится в области эллиптичности, то уравнение (46) для аккрецирующей плазмы является уравнением смешанного типа. Соотношение же (49) в этом случае не имеет смысла граничного условия на горизонте, а представляет собой соотношение, определяющее величину $M^2(r_+)$.

С другой стороны, для области интегралов движе-

ния, при которых траектории на фазовой плоскости $u_p^\wedge - r$ отклоняются в сторону сепаратрисы I , так что $u_p^\wedge \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_+$ (и, соответственно, $M^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_+$), то в этом случае величина D формально остается всегда положительной, а уравнение (46) — эллиптическим. Ясно, однако, что при этом вблизи горизонта будут нарушаться те приближения, в рамках которых было получено уравнение (46), поскольку плотность частиц вблизи горизонта должна была бы стремиться к бесконечности. В результате в этой области должны стать существенными процессы излучения плазмы, а также другие процессы, учет которых выходит за границы применимости уравнения (46). Поэтому обсуждать "граничные условия" на горизонте черной дыры в этом случае вообще не имеет смысла.

Отметим еще несколько важных свойств уравнения на полоидальное поле. Прежде всего необходимо подчеркнуть, что его решение может быть получено лишь в том случае, если известны пять интегралов движения $\Omega^F(\Psi), E(\Psi), L(\Psi), \eta(\Psi)$ и $s(\Psi)$. Эти интегралы движения должны определяться прежде всего конкретным механизмом рождения частиц, т.е. за- даваться, фактически, как граничные условия [15, 16]. Как мы видели, для магнитных силовых линий, проходящих через черную дыру, такой источник должен обеспечить как истечение на бесконечность, так и аккрецию на горизонт. Вместе с тем, поскольку уравнение (46) на полоидальное поле является сильно нелинейным, не исключено, что оно имеет физически разумные решения лишь при определенном выборе самих интегралов движения. Эта проблема, хорошо известная в связи с проблемой построения самосогласованной модели магнитосферы нейтронной звезды, возникает уже для бессилового уравнения (38) в плоском пространстве [16].

Наконец, интересно сравнить сам вопрос о постановке задачи в магнитосфере черной дыры с аналогичной проблемой, возникающей при исследовании магнитосферы радиопульсаров. В магнитосфере нейтронной звезды плазма, как полагают, рождается в вакуумном зазоре вблизи поверхности пульсара [15, 16], а также, возможно, в области внешнего зазора [42]. При этом источник плазмы может задать, вообще говоря, четыре параметра — продольную компоненту скорости $v_{||}$, плотность, электрический ток, а также энтропию, т.е. четыре интеграла движения $E(\Psi), L(\Psi), \eta(\Psi)$ и $s(\Psi)$. Однако, помимо этих четырех интегралов движения, в магнитосфере нейтронной звезды определен также и пятый интеграл $\Omega^F(\Psi)$. Действительно, электрический потенциал, задающий величину Ω^F (и постоянный, как и Ω^F , на магнитной поверхности $\Psi = \text{const}$) однозначно опре-

деляется угловой скоростью вращения нейтронной звезды, а также величиной падения напряжения в зазоре (подробнее см. [15, 16]). В случае же магнитосферы черной дыры ситуация оказывается существенно иной. Дело в том, что горизонт черной дыры причинно не связан с областью генерации плазмы [20, 21]. В результате пятый интеграл движения Ω^F , задающий согласно соотношению (21) поток энергии в магнитосфере, остается как бы свободным параметром задачи (см., однако, [19, 25]).

3.2. Частные случаи уравнения на полоидальное поле.

3.2.1. Бессиловое приближение $\mu \rightarrow 0$. Как непосредственно видно из соотношения (39), уравнение (46) в пределе $\mu \rightarrow 0$ (т.е. в пределе, когда плотность энергии магнитного поля существенно превосходит плотность энергии частиц) переходит в бессиловое уравнение (38). Оно является эллиптическим квазилинейным уравнением второго порядка и в применении к проблеме активных галактических ядер и квазаров анализировалась в работах [43–48].

3.2.2. Гидродинамический предел $M^2 \rightarrow \infty$. В гидродинамическом пределе, когда плотность энергии плазмы намного превосходит плотность энергии магнитного поля, естественно ввести новый потенциал $\Phi(\Psi)$, удовлетворяющий условию

$$\eta(\Psi) = \frac{d\Phi}{d\Psi}. \quad (52)$$

Такая замена соответствует пределу $\Psi \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty$, когда, однако, величина $\eta\Psi$ остается конечной. Согласно определениям (5) и (11), получаем

$$\alpha n u_p = \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}} \nabla \Phi \times \mathbf{e}_\phi^\wedge. \quad (53)$$

Линии $\Phi = \text{const}$ определяют линии тока плазмы.

Как легко проверить, формально замена (52) соответствует условию $\eta = 1$. В результате, в этом приближении система определяется тремя интегралами движения

$$E(\Phi) = \mu(\alpha\gamma + \tilde{\omega}\alpha u_\phi^\wedge), \quad (54)$$

$$L(\Phi) = \mu\tilde{\omega}u_\phi^\wedge \quad (55)$$

и $s(\Phi)$, причем алгебраическая связь (29) перепишется в виде

$$(E - \omega L)^2 = \alpha^2 \mu^2 + \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}^2} L^2 + \frac{\hat{M}^4}{64\pi^4 \tilde{\omega}^2} |\nabla \Phi|^2, \quad (56)$$

где квадрат "числа Маха" \hat{M}^2 есть

$$\hat{M}^2 = \frac{4\pi\mu}{n}. \quad (57)$$

Уравнение же на поле Φ запишется как

$$-\hat{M}^2 \left[\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha\tilde{\omega}^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{1}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Phi)^2} \frac{\nabla^a \Phi \nabla^b \Phi \nabla_a \nabla_b \Phi}{D} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\hat{M}^2 \nabla' k F \nabla^k \Phi}{2\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Phi)^2 D} + \\
 & + \frac{32\pi^4}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 \hat{M}^2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2 \right] - \\
 & - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Phi} = 0,
 \end{aligned} \tag{58}$$

где

$$D = -1 + \frac{1}{u_p^2} \frac{a_s^2}{1 - a_s^2}, \tag{59}$$

$$\hat{F} = \frac{64\pi^4}{\hat{M}^2} [\tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2 - \tilde{\omega}^2 \alpha^2 \mu^2]. \tag{60}$$

Уравнение (58) содержит лишь одну особую точку — звуковую, определяемую из условия $D = 0$. Как и следовало ожидать, в звуковой точке $r = r_s$ [2]

$$u_p^2 = \frac{a_s^2}{1 - a_s^2}.$$

Уравнение (58) описывает осесимметричное стационарное гидродинамическое течение в окрестности керровской черной дыры. В частном случае шварцшильдовской метрики, когда $L(\Phi) \equiv 0$ (и для сферически симметричных граничных условий) оно имеет тривиальное решение, соответствующее сферически симметричной акреции. В этом случае решением уравнения (58) является монопольное поле

$$\Phi = \Phi_0 (1 - \cos \theta). \tag{61}$$

Что же касается условия прохождения через звуковую точку (которая в этом случае является седлом), то оно определяет, фактически, скорость акреции $\dot{M} = 2m\Phi_0$:

$$\dot{M} = 4\pi m M^2 \frac{n_s}{u_s} \left(1 + \frac{1}{4u_s}\right). \tag{62}$$

Соотношение (62) совпадает, естественно, с условием Бонди для сферически симметричной акреции [1, 2].

3.3. Границы применимости уравнения на полоидальное поле. В заключение сделаем несколько замечаний относительно области применимости обсуждаемых выше уравнений. Прежде всего ясно, что в рамках рассматриваемого подхода невозможно учесть взаимодействие частиц с полем излучения, которое, безусловно, может играть заметную роль в активных галактических ядрах и квазарах [17]. Прежде всего такое взаимодействие скажется на силе, действующей на каждую заряженную частицу. Поэтому ясно, что уравнение (46) может быть применено лишь к системам с достаточно малой светимостью L (и, соответственно, с малой плотностью фотонов U). Для электронно-протонной плазмы таким естественным ограничением будет эд-

дингтоновская светимость $L_{\text{Ed}} \simeq 10^{38} \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\odot}$ эрг/с. Для электронно-позитронной же плазмы условие $L < L_{\text{Ed}}$ уже не справедливо, поскольку сила, действующая со стороны фотонов, будет одинаковой для электронов и позитронов, в результате чего не произойдет разделения зарядов и не возникнет, связанное с этим процессом поляризационное электрическое поле [49].

Вместе с тем, независимо от состава плазмы в фотонном поле частицы будут испытывать энергетические потери, связанные с обратным комптоновским рассеянием [50]. Так, для электронно-позитронной плазмы условие малости этих потерь $\sigma_T U \gamma^2 \epsilon_{\text{ph}}$ по сравнению со скоростью приобретения энергии $\epsilon_{\text{ph}} d\gamma/dr \sim \epsilon_{\text{ph}} \delta\gamma/r_+$, $\delta \lesssim 1$ запишется в виде

$$L \lesssim \frac{4\pi \epsilon_{\text{ph}} R_L^2 c}{\gamma \sigma_T r_+} \sim 10^{40} \frac{\epsilon_{\text{ph}}}{100 \text{эВ}} \left(\frac{R_L}{r_+} \right)^2 \frac{\mathcal{M}}{10^8 \mathcal{M}_{\odot}} \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right], \tag{63}$$

где $L \approx 4\pi \epsilon_{\text{ph}} U R_L^2 c$ — светимость фотонного газа с энергией ϵ_{ph} и плотностью фотонов U , занимающего область с размером R_L . По-видимому, условие (63) наиболее сильно ограничивает область применимости рассматриваемого в работе приближения. При нарушении же условия (63) значительную роль в динамике плазмы начинает играть торможение (или ускорение) частиц в фотонном поле, в результате чего энергия $E(\Psi)$ (21) и момент импульса $L(\Psi)$ (22) перестают быть интегралами движения. Большое значение в этой области параметров должны иметь и чисто кинетические эффекты [51].

Подчеркнем, что для случая достаточно разреженной плазмы $M^2 \ll 1$, когда плотность энергии частиц много меньше плотности энергии электромагнитного поля, нарушение алгебраических соотношений (24)–(31) не приводит к заметному искажению бессилового уравнения (38). Вместе с тем, в окрестности особых точек, где величина M^2 сравнивается с разницей $\alpha^2 - (\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2$, взаимодействие частиц с фотонным полем становится существенным независимо от величины M^2 . На движение плазмы в окрестности особых точек должны также оказывать влияние давление и температура.

К заметному искажению обсуждаемой здесь картины может привести и излучение самой плазмы, что в свою очередь привело бы к изменению энтропии с вдоль магнитной силовой линии. Отметим, правда, что член $n T ds/d\Psi$ в уравнении (46) должен играть заметную роль лишь для нерелятивистской плазмы. Действительно, как легко проверить, градиент давления $\nabla_a P$ в уравнении (41) оказывается одного порядка с членами, связанными с единицей в соотношении $\gamma^2 - u^2 = 1$ (т.е. с членом $\alpha^2 \eta^2 \mu^2$ в уравнении (29) и с последним слагаемым в уравнении (41)),

которыми можно пренебречь в ультратрелиativистском пределе. Поэтому в области $\gamma \gg 1$, и, в частности, вблизи горизонта черной дыры, изменение энтропии s вдоль силовой линии не должно приводить к сильному нарушению рассматриваемого приближения.

Наконец, как показывают, в частности, наблюдения, проведенные на гамма-обсерватории КОМПТОН, многие активные галактические ядра и квазары являются источниками жесткого гамма-излучения [52], генерация которого может быть связана, например, с эффективным разогревом внутренних областей аккрецирующего вещества [53]. Достаточно же большая плотность гамма-квантов с энергией больше $m_e c^2$ может привести к прямому рождению электронно-позитронной плазмы за счет процесса фоторождения $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ e^-$ [54]. В этом случае картина аккреции при $M^2 \gtrsim 1$ будет существенно отличаться от обсуждаемой здесь модели, поскольку число частиц N будет теперь изменяться вдоль магнитной силовой линии.

Ясно, что рождение вторичных частиц будет достаточно эффективным, если оптическая толщина по процессу фоторождения $\tau \sim \sigma_T U_\gamma R_L$ окажется больше единицы. В результате получаем для предельного значения гамма-светимости L_γ

$$L_\gamma < \frac{\epsilon_\gamma R_L c}{\sigma_T} \approx 10^{43} \text{ эрг/с} \cdot \frac{M}{10^8 M_\odot}, \quad (64)$$

так что $L_\gamma \leq 10^{43}$ эрг/с для активных галактических ядер и квазаров, для которых можно положить $R_L \sim 10^{14}$ см, и $L_\gamma \leq 10^{35}$ эрг/с для черных дыр солнечной массы. Мы видим, что ограничение (64) также является достаточно жестким.

Следующее возможное ограничение области применимости уравнения (46) связано с тем, что оно не описывает турбулентные движения плазмы и, в том числе, различные плазменные неустойчивости. В результате, за рамками рассмотрения оказываются области турбулентного α -диска [53, 55, 56], а также процессы генерации и турбулентной диффузии магнитного поля [57, 59]. В частности, на аккреционном диске, как и в случае бессилового поля, должны быть поставлены граничные условия. Конкретный же вид ограничений, определяемый составом плазмы, граничными условиями на аккреционном диске, а также геометрической структурой диска и плотностью фотонного газа, зависит от физических условий в источнике, обсуждение которых выходит за рамки настоящей работы.

Возможные ограничения области применимости уравнения (46) связаны также с нарушением условия вмогренности (13). Прежде всего ясно, что уравнение (46) неприменимо в области генерации

плазмы, где возможно существование сильного продольного электрического поля (см., например, [48]). Здесь, как уже говорилось, необходимо поставить граничные условия, определяемые конкретным механизмом генерации частиц.

Кроме того, естественная граница применимости может возникнуть и в том случае, если электрическое поле сравняется по величине с магнитным. Такое нарушение МГД-подхода возникает, если продольный ток I (и, следовательно, торoidalное магнитное поле B_ϕ) оказывается недостаточным, чтобы полное магнитное поле $|\mathbf{B}| = (B_p^2 + B_\phi^2)^{1/2}$ оставалось больше электрического поля $|\mathbf{E}| \sim \Omega^F \tilde{\omega} B_p$ [16]. Этот случай был подробно исследован для внешней световой поверхности в магнитосфере нейтронной звезды. В результате в переходном слое вблизи световой поверхности $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ происходит резкое увеличение энергии частиц, связанное с нарушением условия вмогренности (13), вследствие чего частица начинает пересекать экипотенциальные магнитные поверхности. На рис. 2 траектории, соответствующие малым значениям тока I имеют в результате бесконечную производную du'/dr . Физически же условия $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ и $du'/dr \rightarrow \infty$ означают, что в переходном слое необходимо учитывать массу частиц в уравнении движения

$$\frac{dp}{dt} = e (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}), \quad (65)$$

так что здесь, вообще говоря, возникает область многопотокового течения. Как показано в [16] для случая внешней световой поверхности, в этой же области происходит и замыкание электрического тока, циркулирующего в магнитосфере. Ясно, что такая же ситуация может быть реализована и вблизи внутренней F -точки. За областью же ускорения частиц и замыкания тока, по-видимому, генерируется магнитогидродинамическая волна, в которой энергия частиц составляет значительную долю от полной энергии. Здесь, естественно, для описания аккреции на черную дыру также должны быть рассмотрены совершенно другие уравнения.

4. Заключение. Уравнение (46) на полоидальное магнитное поле, полученное теперь в общем случае метрики Керра, позволяет описать широкий класс МГД-течений в окрестности вращающейся черной дыры. Тем самым открывается возможность последовательного изучения процессов, происходящих в компактных источниках и, в частности, становится возможным построение самосогласованной модели магнитосферы таких объектов.

Конечно, за рамками настоящей работы остался ряд важных явлений, которые могут играть заметную роль в реальной картине акреции. В частности, мы совершенно не обсуждали вопрос о разрывах, которые, не исключено, также могут существовать в магнитосфере компактных объектов [30, 39, 40].

Кроме того, в этой работе не обсуждалась роль кинетических эффектов, а также проблема внешних областей магнитосферы (внешние особые точки, проблема образования струйных выбросов), для исследования которой достаточно использовать уравнение (46) без эффектов общей теории относительности [18, 31–34]. Требует отдельного исследования вопрос о физических условиях в области генерации плазмы, а также вопрос о генерации регулярного магнитного поля [57–59]. Ясно, что ответы на все эти вопросы могут быть получены лишь в рамках конкретной постановки задачи. Можно, однако, надеяться, что использование уравнения (46) позволит понять основные характеристики и специфику акреции вещества на черные дыры, происходящую, как полагают, в активных галактических ядрах и квазарах (если в них, конечно, действительно осуществляется магнитогидродинамический режим акреции!).

Авторы выражают благодарность В.Л. Гинзбургу и А.В. Гуревичу за интерес к работе, полезное обсуждение и поддержку, а также С.В. Боговалову, К.П. Зыбину, А.Ф. Илларионову, Я.Н. Истомину, М.В. Конюкову, Ю.Э. Любарскому, И.Д. Новикову и В.П. Фролову за плодотворные дискуссии. Наконец, авторы благодарят Американское Астрономическое общество за финансовую помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bondi H. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1952. V. 112. P. 195.
2. Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т. 1,2. М.:Мир, 1985.
3. Parker E.N. // Astophys. J. 1958. V. 128. P. 664.
4. Weber E.J., Davis L., Jr. // Astrophys. J. 1967. V. 148. P. 217.
5. Mestel L. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1968. V.138. P. 359.
6. Michel F.C. // Astrophys. J. 1969. V. 158. P. 127.
7. Lada C.J. // Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1985. V. 2. P. 267.
8. Ardavan H. // Astrophys. J. 1976. V. 204. P. 889.
9. Okamoto I. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1978. V.185. P.69.
10. Kennel C.F., Fujimura F.S., Okamoto I. // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics. 1983. V. 26. P. 147.
11. Боговалов С.В. // Письма Астрон. ж. 1989. Т. 15. С. 1081.
12. Takahashi M. // Publ. Astron. Soc. Japan. 1991. V. 43. P. 569.
13. Mirabel I.F., Rodriguez L.F., Cordier B. et al. // Nature. 1992. V. 358. P. 215.
14. Сюняев Р.А., Арефьев В.А., Бороздин К.Н. и др. // Письма Астрон. ж. 1991. Т. 17. С. 975.
15. Michel F.C. Theory of Neutron Star Magnetosphere. Chicago: The University of Chicago Press, 1991.
16. Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N. Physics of the Pulsar Magnetosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
17. Begelman M.K., Blandford R.D., Ricci M.Дж. // Физика внегалактических источников радиоизлучения/Под ред. Р.Д. Дагкесаманского. М.: Мир, 1987.
18. Pelletier G., Pudritz R.E. // Asbophys. J. 1992. V. 394. P. 117.
19. Phinney E.S. // Astrophysical Jets/Ed. A. Ferrari, A.G. Pacholczyk, Dordrecht: D. Reidel 1983
20. Camenzind M. // Astron. Astrophys. 1986. V. 162. P. 32.
21. Punsly B., Coroniti F.C. // Astrophys. J. 1990. V. 354. P. 583.
22. Takahashi M., Nitta S., Tatematsu Ya., Tomimatsu A. // Astrophys. J. 1990. V. 363. P. 206.
23. Sol H., Pelletier G., Asseo E. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1989. V.237. P. 411.
24. Торн К., Прайс Р., Макдональд Д. Черные дыры. Мембранный подход. М.:Мир, 1988.
25. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. М.:Наука, 1986.
26. Ландау Л.Д., Лишиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
27. Aradav H. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1979. V.189. P. 397.
28. Sakurai T. // Astron. and Astrophys. 1985. V. III. P. 121.
29. Sakurai T. // Computer Phys. Rep. 1990. V. 12. P. 247.
30. Боговалов С.В. // Письма Астрон. ж. 1990. Т. 16. С. 844.
31. Blandford R.D., Payne D.G. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1982. V. 199. P. 883.
32. Lovelace R.V.E., Wang J.C.L., Sulkhanen M.E. // Astrophys. J. 1987. V. 315. P. 504.
33. Heyvaerts J., Norman J. // Astrophys. J. 1989. V. 347. P. 1055.
34. Li Zh.-Yu., Chuen T., Begelman M.C. // Astrophys. J. 1992. V. 394. P. 459.
35. Camenzind M. // Astron. and Astrophys. 1986. V. 156. P. 137.
36. Lovelace R.V.E., Mehanian C., Mabarry C.M., Sulkhanen M.E. // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1986. V. 62. P. 1.
37. Mabarry C.M., Lovelace R. V.E. // Astrophys. J. 1986. V. 309. P. 455.
38. Camenzind M. // Astron. and Astrophys. 1987. V. 184. P. 341.
39. Боговалов С.В. // Астрон. ж. 1991. Т. 68. С. 1227.
40. Боговалов С.В. // Письма Астрон. ж. 1992. Т. 18. С. 832.
41. Nitta S., Takahashi M., Tomimatsu A. // Phys. Rev. 1991. V. 44, P. 2295.
42. Cheng K.S., Ho C., Ruderman M.A. // Astrophys. J. 1986. V. 300. P.500.
43. Blandford R. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1976. V.176. P. 465.
44. Blandford R., Znajek R.L. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1977 V.179. P. 433.
45. Macdonald D.A., Thorne X.S. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc 1982. V.198. P. 345.
46. Macdonald D.A. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1984. V.211. P 313.
47. Okamoto I. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1992. V. 254. P. 192.
48. Beskin V.S., Istomin Ya.N., Pariev V.I. // Extragalactic Radio Sources — From Beams to Jets/Ed. J. Roland, H. Sol, G. Pelletier. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
49. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
50. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.:Наука, 1975.
51. Гуревич А.В., Димант Я.С., Зыбин К.П. // ЖЭТФ. 1993 (в печати).
52. Meegan C.A., Fishman G.J., Wilson R.B. et al. // Nature 1992. V. 355. P. 143.
53. Shapiro S.L., Lightman A.P., Eardley D.M. // Astrophys. J. 1976. V. 204. P. 187.
54. Кардашев Н.С., Новиков И.Д., Полнарев А.Г., Штерн Б.Е. // Астрон. ж. 1983. Т. 60. С. 209.
55. Shakura N.L., Sunyaev R.A. // Astron. and Astrophys. 1973. V. 24. P. 337.
56. Abramowicz M.A. // Nature. 1981. V. 294. P. 235.
57. Pudritz R.E. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 195. P. 881.
58. Pudritz R.E. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1981. V.195. P. 887.
59. Camenzind M. // Rev. Mod. Astron. 1990. V. 3. P. 234.