

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА СПИН-СТЕКЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

В.С. Доценко

(Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва)

(Статья поступила 27.01.93 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (1).
Часть I.
2. В чем состоит проблема (2). 2.1. Модель. 2.2. Фрастрации. 2.3. Самоусреднение. 2.4. Нарушение эргодичности. 2.5. Возможные сценарии.
3. Физика спин-стеклового состояния (6). 3.1. Непрерывный каскад фазовых переходов. 3.2. Параметр порядка. 3.3. Ультраметричность.
4. Эксперименты (10). 4.1. Старение. 4.2. Температурные циклы и иерархия состояний. 4.3. Зависимость высоты барьеров от температуры.
- Часть II.
5. Метод реплик (15). 5.1. Модель. 5.2. Реплики. 5.3. Вычисление свободной энергии. 5.4. Реплично-симметричное решение.
6. Нарушение репличной симметрии (19). 6.1. Нарушение репличной симметрии на один шаг. 6.2. Полное нарушение репличной симметрии.
7. Физика нарушения репличной симметрии (23). 7.1. Чистые состояния. 1.2. Физический параметр порядка. 7.3. Параметр порядка $P(q)$ и реплики. 7.4. Решение с нарушенной репличной симметрией вблизи T_c .
8. Ультраметричность (29). 8.1. Доказательство ультраметричности пространства состояний. 8.2. Дерево состояний. 8.3. Итоги.
9. Немного фантазий (33). 9.1. Скейлинг в пространстве состояний. 9.2. Феноменологическая динамика.
10. Заключение (57).
- Список литературы (37).

1. Введение. В значительной степени целью настоящего обзора является идея популяризации совершенно новой физики, возникающей в системах, известных под названием спиновых стекол. В этой области знаний за последние пятнадцать лет уже обнаружено настолько много замечательных и красивых явлений (полученных как теоретически, так и экспериментально), что в последнее время стала вырисовываться довольно цельная и эстетически очень

привлекательная общая картина. К сожалению, известна она лишь относительно небольшому кругу специалистов. Для многих физиков, занимавшихся проблемой спиновых стекол, состояние дел в этой области продолжает оставаться безнадежной путаницей из тысяч разноречивых экспериментов, проведенных на сотнях взаимно не похожих образцах, и десятков сомнительных теорий, ни одна из которых не имеет никакого отношения к эксперименту. Даже для многих тех, кто знает, как, в основном, формулируются основы тех представлений о физике спин-стеклового состояния, которые я намерен изложить в этом обзоре, они продолжают оставаться лишь результатом некоей потусторонней магии, которая называется "нарушением репличной симметрии", не имеющей сколько-нибудь веских обоснований в "реальном" мире теоретической физики.

В этом обзоре я не намерен излагать историю изучения проблемы спиновых стекол, т.е. описывать все те замечательные теоретические и экспериментальные работы, которые заполняли физические журналы на протяжении последних пятнадцати-двадцати лет и благодаря которым и возникли наши современные знания о предмете (в этой связи количество "исторических" ссылок в этом обзоре будет минимальным). На эту тему уже написаны десятки обзоров и книг, и я могу рекомендовать читателю, интересующемуся этой стороной проблемы, обратиться, например, к книге [1] либо к обзору [2]. Однако история и результат истории — это не одно и то же, и в настоящем обзоре я бы хотел изложить именно результат. Это обстоятельство я бы хотел

подчеркнуть по той причине, что, строго говоря, та "физика спин-стекольного состояния", которая здесь излагается, не есть результат теоретического вывода. В определенном смысле — это есть результат "логического скачка" от строгих теоретических результатов, полученных для искусственных и нефизических моделей, к тому, что принято называть "реальным миром". И проблема здесь вовсе не в том, насколько применимы результаты, полученные для нереалистических моделей, к наблюдаемым физическим системам. Концепция физики спин-стекольного состояния теперь может быть сформулирована в отрыве от той модели, на которой она была получена, при этом сама по себе она выглядит настолько естественно и эстетически привлекательно, что было бы чрезвычайно странно, если бы в Природе не существовало ничего подобного. Скорее наоборот: ввиду того, что проблема спиновых стекол оказалась чрезвычайно общей (покрывающих целый спектр проблем, — от описания социальных структур и экономики до биологии), то, что не есть спиновое стекло, скорее является исключением.

Обзор построен таким образом, что разные его части обращены читателям, имеющим разные интересы.

Первая часть представляет собой что-то вроде обширного резюме. Здесь описано, в чем, собственно, состоит проблема, и без обращения к каким-либо вычислениям сформулировано, как в настоящее время мыслится устройство физики спин-стекольного состояния, а также кратко описаны недавние эксперименты, которые подтверждают подобное мироустройство. Читатель, которого интересует лишь результат, может ограничиться чтением только этой части.

Во второй части производится детальная демонстрация "магии" нарушения репличной симметрии с "последующем ее разоблачением". Эта часть представляет собой подробное описание того, каким образом для модели спинового стекла с дальнедействием возникает та физика, которая кратко описана в части I. В заключение этой части мы снова обсудим физическую картину, которую можно получить, несколько абстрагировавшись от конкретной модели и конкретных вычислений. Это как бы некоторое повторение части I, но на несколько более высоком уровне. Эта часть предназначена тем, кого интересует не только результат, но и процесс его получения.

Заключение написано для того, чтобы у тех, кто прочитал весь обзор, не возникло ощущение полной ясности. В действительности, конечно, на нынешней стадии проблема спиновых стекол никак не решена, а лишь, по-видимому, *правильно поставлена*, т.е. появилось лишь очень общее качественное понимание того, что там происходит. Впрочем, это тоже немало, хотя, как это всегда бывает в таких *случаях*, количество вопросов, требующих ответа, от этого только возросло.

Часть I

2. В чем состоит проблема.

2.1. Модель. Существует довольно много различных вариантов систем, которые называют спиновыми стеклами. Наиболее простой и в то же время довольно общий случай описывается моделью изинговского спинового стекла, гамильтониан которого

имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2.1)$$

Это система, состоящая из N изинговских спинов $\{\sigma_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), принимающих значения ± 1 и расположенных в узлах некоторой кристаллической решетки, узлы которой занумерованы индексом i . Парные спин-спиновые взаимодействия J_{ij} случайны как по величине, так и по знаку. Собственно модель задается выбором матрицы спин-спинового взаимодействия J_{ij} , точнее функцией распределения $P(J_{ij})$, и здесь возможны различные варианты. Наиболее простой и тем не менее вполне реалистичный с экспериментальной точки зрения вариант, это когда взаимодействуют лишь ближайшие соседи, т.е. когда $P(J_{ij}) \equiv 0$ для всех пар спинов, не являющихся ближайшими соседями решетки, в узлах которой они расположены, а величина взаимодействия между ближайшими соседями описывается гауссовым распределением:

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} J} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2}{2J^2}\right), \quad (2.2)$$

где параметр J задает характерную величину спин-спинового взаимодействия.

Мотивировка для выбора гамильтониана (2.1) с точки зрения описания реальных экспериментальных систем, а также другие модели спиновых стекол хорошо описаны в обзоре [2]. Однако в этой части настоящего обзора, где мы просто хотим понять, в чем состоит проблема и как на очень общем уровне описывается ее решение, выбор конкретной модели и конкретного гамильтониана не очень важен.

2.2. Ф р а с т р а ц и и . Итак, в чем состоит проблема? Проблема состоит в том, что спин-спиновые взаимодействия J_{ij} являются случайными по знаку и *заморожены*, т.е. в данном конкретном образце они зафиксированы. При этом возникает следующее явление. Рассмотрим три произвольных взаимодействующих между собой спина (рис. 1) и будем считать, что взаимодействия одинаковы по величине, но могут иметь разный знак. Если все три константы взаимодействия J_{12} , J_{23} и J_{13} оказались положительными либо две из них — отрицательными (т.е. когда произведение взаимодействий вдоль треугольника положительно), то основное состояние (минимум энергии) этой трехспиновой системы будет единственным (с точностью до глобального изменения знака всех трех спинов) (рис. 1,а). Однако если произведение взаимодействий вдоль треугольника оказалось отрицательным (одно из взаимодействий отрицательно либо все три взаимодействия от-

рицательны), то основное состояние такой системы оказывается вырожденным: если мы зафиксируем первый спин, скажем, "вверх" и будем совершать обход вокруг треугольника, выставляя ориентацию спинов в соответствии с заданными взаимодействиями, то ориентация последнего, третьего, спина окажется неопределенной — энергии состояния "вверх" и состояния "вниз" — будут одинаковы. На рис. 1, *б* изображена ситуация, когда все три взаимодействия отрицательны: если первый спин смотрит "вверх", то в соответствии с $J_{12} < 0$ второй спин должен смотреть "вниз", однако затем для третьего спина возникает неопределенность: в соответствии с $J_{23} < 0$ он должен смотреть "вверх", а в соответствии с $J_{13} < 0$ он должен смотреть "вниз".

То же самое явление вырождения основного состояния происходит в любой замкнутой цепочке, состоящей из произвольного числа спинов, если произведение спин-спиновых взаимодействий вдоль цепочки отрицательно. Это явление получило название *фрострации* — от английского слова *frustration*.

Frustration означает в буквальном переводе *крушение надежд*. Этот термин представляется вполне удачным, если заметить, что приведенный выше спиновый треугольник можно также интерпретировать и как классический любовный треугольник, а кроме того, наличие этого явления в неупорядоченных многоспиновых системах разрушает (как мы увидим далее) всякую надежду на простое решение проблемы. Этот термин впервые ввел в проблематику спиновых стекол G. Toulouse [3].

Далеко не любой беспорядок является существенным или, как принято говорить, *релевантным* для термодинамического поведения системы, и именно фрострации являются той самой релевантной частью беспорядка, которая существенно изменяет поведение системы по сравнению с соответствующей упорядоченной системой. Другими словами, если беспорядок таков, что он не создает в системе фрострации, то он в некотором смысле не является существенным, т.е. не влияет на свойства основного состояния, а иногда и просто является как бы "фиктивным", т.е. устранимым некоторым преобразованием спиновых переменных.

Тривиальным примером системы с фиктивным беспорядком является маттисовский магнетик, который описывается гамильтонианом (2.1) и в котором спин-спиновые взаимодействия, хотя и случайны по знаку, однако заданы в виде $J_{ij} = \xi_i \xi_j$, где ξ_i случайным образом принимают значения $+1$ или -1 . В такой системе J_{ij} все равно как бы случайны по знаку, однако после простого переобозначения спиновых переменных $\sigma_i \rightarrow \sigma_i \xi_i$ мы получим обычную ферромагнитную модель Изинга. В этом смысле подобный беспорядок является несущественным, и это происходит потому, что при таком определении J_{ij} , как легко проверить, в системе не возникает фрострации. Фрострации — это та часть беспорядка, которая

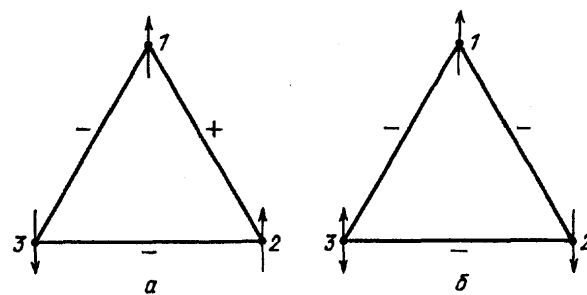


Рис. 1. Фрострация в системе из трех спинов. *а* — Произведение взаимодействий вдоль треугольника положительно, и поэтому фрострация отсутствует: основное состояние не вырождено. *б* — Фрострированный треугольник: произведение взаимодействия вдоль треугольника отрицательно, и поэтому основное состояние системы вырождено

неустранима никаким преобразованием переменных.

В многоспиновых системах можно нарисовать огромное число всевозможных замкнутых многоспиновых цепочек, и если при этом спин-спиновые взаимодействия случайны по знаку, то, соответственно, будет присутствовать большое число фростраций, и это может привести к колоссальному вырождению основного состояния. В действительности, вырождение именно основного состояния, по-видимому, и не очень важно — важно, что в системе может существовать огромное количество состояний с низкой энергией, близкой к энергии основного состояния, которые благодаря своей большой энтропии могут вносить конечный (и даже доминирующий) вклад в термодинамику даже в пределе низких температур. (В изинговских системах, описываемых гамильтонианом (2.1), число таких состояний, по-видимому, порядка $\exp(\lambda N)$, где λ — некоторое число, меньшее $\log 2$, при том, что полное число таких состояний равно $2^N = \exp[(\ln 2)N]$.)

2.3. С а м о у с р е д н е н и е. Вспомним теперь снова, что все это происходит при *фиксированной* случайной матрице спин-спиновых взаимодействий J_{ij} . Поэтому если мы надеемся вычислить, например, спиновые состояния с наиболее низкой энергией либо какие-нибудь наблюдаемые термодинамические величины, то, строго говоря, все это должно зависеть от конкретной реализации матрицы J_{ij} , т.е. ответ будет содержать в качестве параметров $N(N-1)/2$ случайных величин. Понятно, что подобные ответы получать не только невозможно, но и бессмысленно. Очевидно, что то, что принято называть *наблюдаемыми* величинами, должно зависеть от некоторых общих, т.е. усредненных, характеристик распределения случайных спин-спиновых взаимодействий по системе. И здесь мы приходим к понятию *самоусреднения*.

Традиционный способ рассуждения о том, почему должно возникать самоусреднение, состоит в следу-

ющем. Рассмотрим, например, свободную энергию. Свободная энергия, как известно, есть величина экстенсивная, т.е. пропорциональная объему системы, в данном случае величине N . Мы рассматриваем термодинамический предел, когда $N \rightarrow \infty$. Как правило, в такой *макроскопической* системе главный вклад в термодинамику происходит от объема, а не от границы, т.е. влияние границы есть эффект следующего порядка малости по параметру $1/N$. Далее, любую макроскопическую систему мы можем условно разбить на опять же макроскопическое число частей, каждая из которых тоже будет макроскопической. Тогда полная свободная энергия системы может быть представлена в виде суммы свободных энергий ее частей плюс вклад от взаимодействий этих частей на их границах. Если взаимодействия в системе короткодействующие (а это имеет место всегда в нормальных физических системах), то эффект взаимодействия частей полной системы есть эффект границы, и в термодинамическом пределе он исчезает. Поэтому полная свободная энергия системы может быть представлена в виде суммы макроскопического числа членов, каждый из которых, как мы помним, содержит в качестве параметров случайные элементы матрицы спин-спиновых взаимодействий и поэтому сам является величиной случайной. Далее, в соответствии с законом больших чисел, сумма большого количества случайных величин может быть представлена (в главном порядке) как их среднее, вычисленное в соответствии с их статистическим распределением, умноженное на их число (разумеется, если их распределение удовлетворяет определенным требованиям в пределе $N \rightarrow \infty$). В силу этого рассуждения свободная энергия макроскопической системы должна самоусредняться *по реализациям* случайных спин-спиновых взаимодействий в соответствии с их статистическим распределением.

Как известно, свободная энергия есть логарифм статистической суммы, поэтому, казалось бы, все, что нам нужно для вычисления всей термодинамики рассматриваемой системы, — это научиться вычислять среднее от логарифма статистической суммы по заданному распределению взаимодействий J_{ij} одновременно с вычислением самой статистической суммы. Понятно, что вычислять среднее от логарифма — это дело нелегкое (и именно в связи с этим и были придуманы и метод реплик, и многое другое, о чем будет идти речь в части II), однако на уровне приведенных выше рассуждений все это представляется как чисто технические трудности, пусть очень серьезные, но не более того.

2.4. Нарушение эргодичности.
Приведенные выше рассуждения очень поучитель-

ны, во-первых, потому, что на простом качественном уровне показывают, как должна была бы выглядеть *обычная* физика случайных систем, и, во-вторых, потому, что для спиновых стекол все эти рассуждения, вообще говоря, неправильны (не исключено, впрочем, что они всегда неправильны, во всяком случае при наличии фрустраций). В чем особенность ситуации в спиновых стеклах, более конкретно будет говориться в следующем разделе 3, а сейчас просто замечание общего характера.

Все было бы, безусловно, правильно, если бы свободная энергия была аналитической функцией температуры (и других параметров, если таковые имеются), т.е. если бы в системе не происходило фазовых переходов, связанных со спонтанным нарушением какой-нибудь симметрии. Вот простой пример того, как простые качественные и, безусловно, формально правильные рассуждения в реальной жизни оказываются неправильными. Рассмотрим обычную ферромагнитную модель Изинга, которая, как известно, описывается гамильтонианом (2.1), в котором все спин-спиновые взаимодействия равны некоторой положительной константе. В силу того, что гамильтониан такой системы инвариантен относительно глобального изменения знаков всех спинов $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$, любая термодинамическая величина, нечетная по спинам, должна быть всегда тождественно равной нулю, в том числе, разумеется, и средняя намагниченность. При любом конечном N это утверждение, безусловно, правильно. Формально оно остается правильным и в пределе $N \rightarrow \infty$, однако в этом пределе возникает некоторая особая критическая температура T_c , в которой свободная энергия становится неаналитической, и вот в результате мы заявляем, что в реальной жизни ниже T_c происходит явление спонтанного нарушения симметрии и возникает ненулевая средняя намагниченность. Формальный аргумент, указывающий, почему приведенные выше симметричные соображения могут оказаться неправильными, состоит в том, что в пределе $N \rightarrow \infty$ статистическая сумма становится формально расходящейся, а с расходящимися величинами могут происходить самые разные неожиданности. В действительности, конечно, происходит очень простая вещь. Ниже T_c пространство всех состояний системы разделяется на две равные части, разделенные бесконечным (в пределе $N \rightarrow \infty$) барьером свободной энергии. По этой причине в *наблюдаемую* термодинамику вносит вклад лишь половина состояний, тех, которые находятся по одну сторону от барьера, и именно они дают ненулевую среднюю намагниченность. В этой простой системе и выше, и ниже T_c все вычисления происходят как бы автоматически, однако и здесь иногда

полезно помнить, что ниже T_c мы вычисляем не полную статистическую сумму, а лишь ее половину, и именно эта половина, а вовсе не полная статистическая сумма, дает наблюдаемую физику. По-другому это явление можно назвать нарушением эргодичности, что есть свойство любого фазового перехода.

В примере с ферромагнетиком все очень просто потому, что мы заранее можем догадаться, какая симметрия может нарушаться при низких температурах, а именно, знак намагниченности, и в соответствии с этим знанием мы можем определить, какая часть состояний должна учитываться в статистической сумме, а какая нет. В спиновых стеклах тоже происходит спонтанное нарушение симметрии, однако какой именно и каким образом — объяснить намного сложнее (затем и написан этот обзор). Прежде всего симметрия, которая нарушается, непосредственно привязана к случайному замороженному беспорядку. Но главное — это то, что, в отличие от "нормальных" магнетиков, здесь фазовый переход происходит не при некоторой одной критической температуре T_c , а при *любой* температуре ниже T_c . Другими словами, ниже T_c происходит *непрерывный* каскад фазовых переходов нарушения эргодичности и соответственно свободная энергия является неаналитической при любой температуре ниже T_c .

Таким образом, даже если мы и сумели бы каким-то образом вычислить усредненную по беспорядку полную свободную энергию системы (которая есть логарифм полной статистической суммы), почти наверняка мы получили нечто, не имеющее никакого отношения к реальной наблюдаемой физике. В отличие от примера с ферромагнетиком, проблема здесь состоит в том, что для вычисления наблюдаемой физики мы должны вычислять статсумму лишь по некоторой части фазового пространства (в соответствии с тем, какого сорта нарушения симметрии мы ожидаем), но эта часть фазового пространства почти наверняка зависит от конкретной реализации случайных взаимодействий, а наблюдаемая физика (пусть, может быть, и не вся) все-таки должна как-то самоусредняться.

Более конкретно обо всех этих проблемах пойдет речь в следующем разделе 3, а сейчас рассмотрим, исходя просто из обычных физических соображений, какого сорта эффекты можно было бы ожидать увидеть в спиновых стеклах при низких температурах.

2.5. Возможные сценарии. Единственное, что мы пока знаем, не прибегая ни к каким вычислениям, это то, что в спиновом стекле может существовать большое количество состояний, которые реализуют локальные минимумы энергии и, возможно (хотя и не обязательно), что основное состояние

сильно вырождено. Исходя из этого, при низких температурах можно было бы ожидать трех возможных типов поведения системы.

Первое. Если барьеры свободной энергии, разделяющие локальные минимумы при низких температурах, остаются конечными, то наблюдаемая термодинамика будет соответствовать обычному парамагнитному состоянию, хотя и, возможно, с аномально медленными временными релаксациями. А именно, термодинамические средние спинов в каждом узле будут равны нулю: $\langle \sigma_i \rangle = 0$ (скобки $\langle \dots \rangle$ означают термодинамическое усреднение), и соответственно все временные корреляторы типа $\langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Второе. Может случиться так, что какое-то спиновое состояние обладает энергией существенно более низкой, чем все другие состояния, и при достаточно низких температурах происходит фазовый переход, при котором система "замерзает" в этом состоянии, т.е. если мы будем вычислять термодинамические средние спинов в узлах, то обнаружим, что величины $\langle \sigma_i \rangle$ не равны нулю, хотя, разумеется, от узла к узлу они будут различными как по величине, так и по знаку. По этой величине параметр, описывающий среднюю намагниченность системы,

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle,$$

как и в парамагнетике, останется равным нулю, однако другой параметр порядка (обычно называемый параметром порядка Эдвардса—Андерсона [4])

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle^2 \quad (2.3)$$

будет не равным нулю. При этом, естественно, вся термодинамика системы в этом состоянии (наблюдаемые типа восприимчивости, теплоемкости и др.) будет существенно отличаться от парамагнитной. Временные релаксации, разумеется, могут оказаться, как и в первом случае, аномально медленными, так как в той области фазового пространства, где система "замерзла", может оказаться множество метастабильных состояний, разделенных барьерами различной (конечной) высоты.

Третье. Нечто, существенно более сложное. Это тот случай, когда при низких температурах состояний, в которых система может замерзнуть, не одно, а много, точнее — в макроскопической системе бесконечно много.

Первый случай обычно реализуется, если система так устроена, что в ней сильны термодинамические флуктуации. Это происходит в низкоразмерных системах (например, в двумерной модели Изинга) либо если спиновые переменные в системе не дискретные

изинговские, а непрерывные типа гейзенберговских, т.е. допускающие существование мягких голдстоуновских мод, могущих легко "размывать" любое "замерзание".

Когда может реализоваться второй сценарий, сказать несколько труднее, однако он тоже вполне может иметь место. Вся термодинамика, которая должна возникать, если допустить осуществление второго сценария, систематически и очень детально описана в работах Фишера и Хьюза [5].

Тем не менее, и первый, и второй случаи здесь рассматриваться не будут. И не потому, что это как бы слишком просто, или что в них есть что-то неправильное, или что они трудно осуществимы (не исключено, что как раз наоборот), а потому что это в каком-то смысле *неинтересно* — в этих вариантах не возникает никакой новой физики.

Второй вариант, являющийся, в принципе, новым явлением в физике фазовых переходов в магнитных системах, тем не менее, по большому счету, представляет собой просто сильно усложненный вариант ферромагнитного фазового перехода. В обычном ферромагнетике система "замерзает" в состоянии, в котором все спины смотрят в одну сторону, а здесь она "замерзает" в некотором другом состоянии, определяемом конкретной реализацией матрицы спин-спиновых взаимодействий. Можно, в принципе, представлять себе, что существует некоторый очень хитрый (зависящий от конкретной реализации J_{ij}) поворот в пространстве состояний, после которого состояние, в котором система замерзает, станет "упорядоченным". Существующие вокруг многочисленных метастабильные состояния, разумеется, сильно усложняют картину по сравнению с ферромагнетиком, но качественно это ничего не меняет (кроме того, что временные релаксации становятся аномально медленными).

В дальнейшем мы будем рассматривать только третий вариант, при котором, как мы увидим, возникает совершенно новая физика. Вопрос о том, насколько он реализуем в Природе, остается открытым, хотя последние эксперименты (которые проводились на совершенно обычных — нисколько не экзотичных — случайных магнетиках), которые мы рассмотрим в разделе 4, указывают на то, что, возможно, именно этот сценарий Природа, как правило, реализует в "повседневной" жизни.

3. Физика спин-стекольного состояния.

3.1. Непрерывный каскад фазовых переходов. Как известно, при обычном фазовом переходе из парамагнитного состояния в ферромагнитное ниже температуры перехода T_c происходит

спонтанное нарушение симметрии, т.е. система может находиться либо в состоянии, в котором $\langle \sigma_i \rangle = +m$, либо в состоянии $\langle \sigma_i \rangle = -m$, где средняя намагниченность m — это параметр порядка, который обращается в нуль при $T \rightarrow T_c$. Между этими двумя "долинами" в пространстве состояний имеется бесконечный (в макроскопической системе) барьер свободной энергии, поэтому если ниже T_c система оказалась в одной из этих "долин", то ни за какое конечное время в другую "долину" она не попадет. В этом смысле любой такой переход можно назвать переходом нарушения эргодичности. При дальнейшем понижении температуры никаких других спонтанных нарушений симметрии (и эргодичности) в обычном ферромагнетике не происходит.

В спиновом стекле также существует некоторая T_c , выше которой система находится в парамагнитном состоянии и эргодичность не нарушена (хотя, в принципе, временные релаксации могут отличаться от обычных парамагнитных). При понижении температуры ниже T_c происходит фазовый переход нарушения эргодичности, при котором фазовое пространство разделяется не на две, как в ферромагнетике, а на много (бесконечно много в макроскопической системе) "долин", разделенных бесконечными барьерами свободной энергии. Сразу ниже точки перехода, при $T = T_c - \delta T$ (для простоты описания здесь удобно ввести дискретность температуры, хотя на самом деле этот процесс непрерывный), каждая такая долина характеризуется тем, что в каждом узле существуют ненулевые термодинамические средние $\langle \sigma_i \rangle_{(\alpha)}$ (которые от узла к узлу случайны как по знаку, так и по величине); здесь $\langle \dots \rangle_{(\alpha)}$ обозначает термодинамическое усреднение внутри долины номер α . (Заметим, что, как мы видели на примере ферромагнетика, если произошел фазовый переход нарушения эргодичности, только подобные термодинамические средние "внутри долины" и имеют физический смысл.) При этом физический параметр порядка

$$q = \frac{1}{N} \sum_i (\langle \sigma_i \rangle_{(\alpha)})^2, \quad (3.1)$$

описывающий степень "замерзания" спинов в каждой из долин, оказывается одинаковым во всех долинах. При $T \rightarrow T_c$ $q \rightarrow 0$.

При дальнейшем понижении температуры на δT в каждой из долин происходит новый фазовый переход нарушения эргодичности: каждая долина дробится на много (бесконечно много в макроскопической системе) новых долин, разделенных бесконечными барьерами свободной энергии (рис. 2). При этом состояние системы в каждой из вновь образо-

ванных долин описывается соответствующим параметром порядка (3.1), который при понижении температуры, естественно, увеличивается.

Этот процесс дробления фазового пространства продолжается *непрерывно* вплоть до нуля температуры. В этом смысле при любой температуре ниже T_c система находится в точке фазового перехода нарушения эргодичности.

Однако это еще не все. При любой температуре ниже T_c внутри каждой из долин, имеющих при этой температуре, существует бесконечно много метастабильных состояний, разделенных между собой *конечными* барьерами. Внутри каждой долины имеются барьеры любой высоты, и, таким образом, спектр высот этих барьеров простирается вплоть до бесконечности. Это приводит к тому, что за любое конечное время внутри этих долин, строго говоря, настоящего термодинамического равновесия никогда не наступает. Хотя, с другой стороны, эксперимент показывает, что часть наблюдаемых термодинамических величин, таких, например, как теплоемкость, ведет себя так, как будто термодинамическое равновесие существует: они не зависят от времени и воспроизводимы (т.е. к тому же одинаковы во всех долинах). С другой стороны, существуют наблюдаемые, поведение которых явно зависит от времени на любом, масштабе доступных современному эксперименту времен (об этом пойдет речь в следующем разделе 4). В связи с этим возможность применения методов традиционной статистической механики (распределение Гиббса и т.п.) представляется весьма загадочной: как бы в некотором смысле и можно, но понятно, что не вполне, хотя и не вполне понятно, когда можно, а когда не вполне.

3.2. Параметр порядка. В связи со всем вышеизложенным возникает вопрос, как нужно определить параметр порядка, который наиболее полно отражал бы такую физическую картину спин-стеклового состояния. Понятно, что параметр q (3.1), определяемый лишь для отдельной долины, не содержит никакой информации ни о существовании других долин, ни, тем более, о структуре их расположения по фазовому пространству.

Проведем следующую серию мысленных экспериментов. При заданной температуре ниже T_c , начиная каждый раз из произвольного и каждый раз нового спинового состояния, будем отпускать систему релаксировать к равновесному состоянию. Таким образом, в каждом таком эксперименте мы будем получать некоторые средние значения намагниченности в узлах $\langle \sigma_i \rangle_{(\alpha)}$, где α обозначает номер эксперимента. Ввиду того, что состояний (долин), в которых система может "застрять" при релаксации, очень мно-

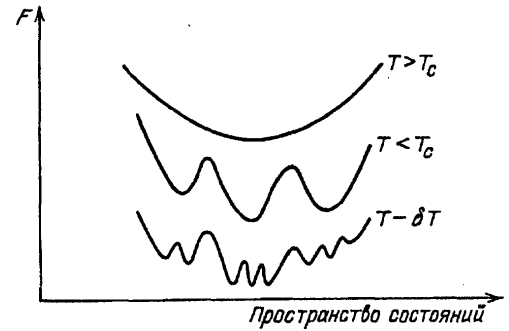


Рис. 2. Поведение структуры рельефа свободной энергии при понижении температуры

го, значения этих средних узельных намагниченностей от эксперимента к эксперименту будут различаться. "Равновесное состояние" здесь понимается несколько условно, так как настоящее термодинамическое равновесие внутри долин все равно никогда не наступает, — просто подразумевается, что намагниченности в узлах — это такие величины, значения которых устанавливаются относительно быстро.

Проведем бесконечно много таких экспериментов, записывая каждый раз значения средних намагниченностей в узлах. Затем введем величину, которая описывает перекрытие (похожесть) состояний в разных экспериментах:

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_{(\alpha)} \langle \sigma_i \rangle_{(\beta)}. \quad (3.2)$$

Очевидно, что $|q_{\alpha\beta}| \leq 1$, причем максимальное значение $q_{\alpha\beta}$ достигается, когда состояния в эксперименте α и в эксперименте β совпадают, и тогда перекрытие (3.2) совпадает с введенным в предыдущем разделе параметром q для одной долины (3.1). Очевидно также, что чем меньше скоррелированы (похожи) между собой состояния, тем меньше значение $q_{\alpha\beta}$, а если состояния никак между собой не скоррелированы, то для них $q_{\alpha\beta} = 0$ (имеется в виду предел $N \rightarrow \infty$). Поэтому параметр $q_{\alpha\beta}$ может служить чем-то вроде метрики в пространстве состояний (величину, обратную к $q_{\alpha\beta}$, можно назвать "расстоянием" в пространстве состояний).

Теперь для описания всех возможных перекрытий между всеми существующими при этой температуре состояниями (долинами) удобно ввести функцию распределения значений $q_{\alpha\beta}$. Формально ее можно определить следующим образом:

$$P(q) = \sum_{\alpha, \beta} \delta(q_{\alpha\beta} - q). \quad (3.3)$$

Если иметь в виду, что δ -функция не равна нулю не строго в точке, а в некотором малом конечном интер-

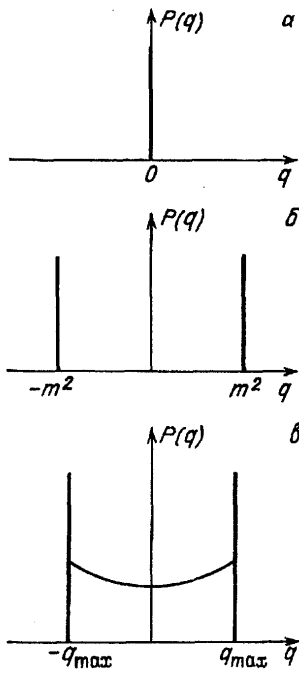


Рис. 3. Функция распределения $P(q)$ в парамагнитной фазе (а), в ферромагнитной фазе (б) и в спиновом стекле (в)

вале Δq , то так определенная функция распределения будет давать относительное число состояний, перекрытие между которыми находится в интервале от q до $q^+ \Delta q$.

Функция распределения $P(q)$ и есть тот физический параметр порядка (пусть введенный пока чисто умозрительно), который существенно отличает спиновое стекло от других более ординарных состояний.

Возможные типы функции $P(q)$ показаны на рис. 3. В парамагнетике имеется единственное состояние с нулевой намагниченностью в узлах, поэтому $P(q)$ представляет собой δ -функцию при $q = 0$ (рис. 3,а). В ферромагнетике ниже T_c возникают два состояния с намагниченностью в узлах $\pm m$, поэтому $P(q)$ представляет собой две δ -функции при $q = +m^2$ и при $q = -m^2$ (рис. 3,б). В случае, если реализуется, условно говоря, "ненастоящее" спиновое стекло ("вариант второй" раздела 2.5), функция $P(q)$ выглядит точно так же, как в ферромагнетике. Более того, даже если ниже T_c возникает не два неупорядоченных состояния, а сразу (бесконечно) много, случайным образом (нескоррелированно) расположенных по фазовому объему, однако при дальнейшем понижении температуры последующих нарушений эргодичности не происходит (фазовый объем больше не дробится), функция $P(q)$ все равно будет выглядеть аналогично ферромагнетике, и лишь добавится лишняя δ -функция при $q = 0$ — это связано с тем, что перекрытия (3.2) между различными нескоррелированными состояниями равны нулю.

Существенно иначе $P(q)$ выглядит, если реализуется сценарий спин-стекольного состояния, описан-

ный выше в разделе 3.1 (рис. 3,в). Между δ -функциями при $q = \pm q_{\max}(T)$ здесь имеется непрерывная гладкая функция. Величина $q_{\max}(T)$ — это максимально возможное значение $q_{\alpha\beta}$, которое равно "самоперекрытию" (3.1), характеризующее каждую отдельную долину. Так как состояний (долин) в системе макроскопически много и каждое из них характеризуется одним и тем же значением $q_{\max}(T)$, то в функции распределения $P(q)$ (3.3) при $q = \pm q_{\max}(T)$ возникают δ -функции (симметричность функции $P(q)$ связана с исходной симметрией модели относительно глобального изменения знаков всех спинов: если мы говорим, что в системе имеется некоторое неупорядоченное состояние, то это автоматически означает, что существует аналогичное состояние, в котором все спины смотрят в обратную сторону). Наличие непрерывной функции на интервале $(0, \pm q_{\max}(T))$ связано с непрерывным дроблением каждой вновь возникшей долины на все более мелкие — так возникающие иерархическим образом состояния внутри каждой конечной долины не могут быть не скоррелированными.

Заметим, что несмотря на кажущуюся условность своего определения, функция $P(q)$ является в действительности хорошо определенной в терминах статистической механики величиной, а для модели спинового стекла с дальним действием ее можно даже вычислить явно (этот результат, собственно, и изображен на рис. 3,в). Обо всем этом более подробно пойдет речь в части II этого обзора.

3.3. У л ь т р а м е т р и ч н о с т ь . Согласно качественной картине низкотемпературной фазы спинового стекла, изложенной в разделе 3.1, очевидно, что возникает что-то вроде иерархической организации спин-стекольных состояний (см. рис. 2): внутри каждой долины возникают более мелкие долины, внутри каждой мелкой долины — еще более мелкие, и т.д. Оказывается, что все это можно описать в терминах относительно строгих определений.

В разделе 3.2 мы рассмотрели функцию $P(q)$, которая дает вероятность того, что два произвольных состояния имеют перекрытие, равное q . Введем теперь более сложную функцию $P(q_1, q_2, q_3)$, которая дает вероятность того, что три произвольных состояния имеют взаимные перекрытия, равные q_1, q_2 и q_3 :

$$P(q_1, q_2, q_3) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \delta(q_{\alpha\beta} - q_1) \delta(q_{\alpha\gamma} - q_2) \delta(q_{\beta\gamma} - q_3). \quad (3.4)$$

Для модели спинового стекла с дальним действием эту функцию тоже можно вычислить явно (это будет сделано в части II обзора), и результат может показаться на первый взгляд удивительным. Оказывает-

ся, что $P(q_1, q_2, q_3)$ не равна нулю только в том случае, когда два из трех перекрытий равны между собой и при этом их величина не превосходит третье, т.е. либо $q_1 = q_2 \leq q_3$, либо $q_1 = q_3 \leq q_2$, либо $q_3 = q_2 \leq q_1$. Во всех остальных случаях $P(q_1, q_2, q_3)$ тождественно равна нулю. В частности, это означает, что в пространстве спин-стекловых состояний не существует таких "треугольников", которые имели бы все стороны (перекрытия) разные: все треугольники здесь либо равнобедренные, либо равносторонние. Пространства, метрика которых обладает таким свойством, называются *ультраметричными*. Математикам подобные пространства известны еще с конца прошлого века, а в физике они появились совсем недавно в связи со спиновыми стеклами. Ультраметричность с точки зрения современной физики хорошо и подробно описана в обзоре [6].

Проще всего ультраметричное пространство иллюстрируется с помощью иерархического дерева (рис. 4). Пространство спин-стекловых состояний представляет собой множество *концевых* точек дерева, причем метрика в этом пространстве определяется так, что перекрытие (расстояние) между двумя состояниями зависит только от числа поколений до ближайшего общего "предка" (с увеличением числа поколений величина перекрытия уменьшается). Легко проверить, что описанное выше свойство ультраметричности выполняется в этом пространстве автоматически.

На самом деле такое дерево состояний является вовсе не вспомогательной иллюстрацией ультраметричности — оно в точности соответствует иерархическому дроблению пространства состояний на долины, которое описано в разделе 2.5 (см. рис. 2). Если в "вертикальном" направлении откладывать величину q , то при данной температуре T уровню концевых точек дерева соответствует $q = q_{\max}(T)$, а уровню верхнего общего предка всех лежащих внизу состояний $q = 0$. При понижении температуры к $T' < T$ каждое из лежащих на уровне $q_{\max}(T)$ состояний разветвляется на множество "потомков", которые дают новые концевые состояния на уровне $q_{\max}(T') > q_{\max}(T)$. При $T \rightarrow 0$ $q_{\max}(T) \rightarrow 1$, и это есть самый нижний возможный уровень дерева. Соответственно при повышении температуры до некоторой T'' все семейства состояний, имеющие общих предков на уровне $q_{\max}(T'')$, сливаются в эти предпочтительные состояния.

Так как $q_{\max}(T)$ есть совершенно определенная функция температуры (ее, в принципе, можно вычислить), то, таким образом, температура однозначно устанавливает тот уровень высоты дерева, на котором должен быть проведен горизонтальный

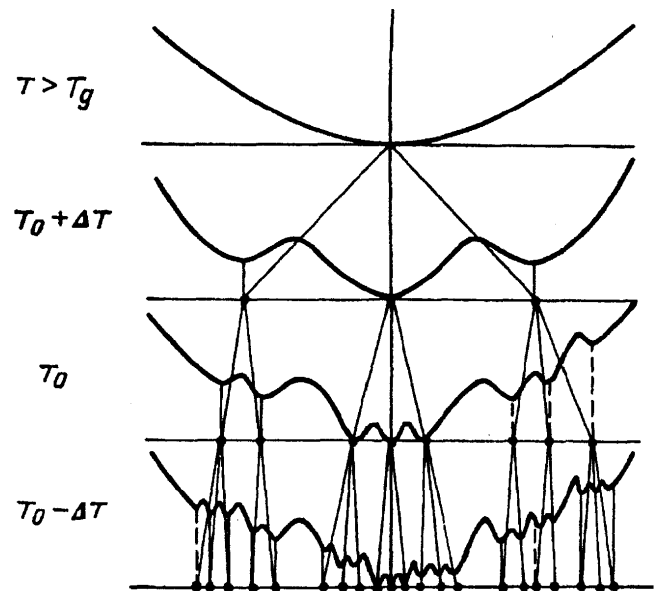


Рис. 4. Иерархическое дерево состояний спинового стекла

"срез", который и определяет все существующие при этой температуре состояния. Все, что лежит ниже этого уровня, при этой температуре "не видно", а все, что выше, — это "история происхождения" существующих при этой температуре состояний. Таким образом, в низкотемпературной фазе спинового стекла температура задает *масштаб* в пространстве состояний (все состояния, которые перекрываются больше, чем $q_{\max}(T)$, становятся неразличимыми), и поэтому можно говорить о своеобразном *скейлинге*: изменение температуры есть как бы просто изменение характерного масштаба в пространстве состояний.

Может показаться, что подобное устройство пространства состояний является каким-то сугубо специальным свойством модели спинового стекла с дальнедействием (которая сама по себе довольно экзотична с точки зрения реальной физики); тем более, что ни для каких других более реалистичных моделей существование подобного свойства доказано пока еще не было. В действительности существуют аргументы весьма общего характера, заставляющие думать, что, скорее, как раз отсутствие ультраметричности является исключением, а не наоборот.

Допустим, мы имеем систему, которая по своему устройству из-за большого числа фрустраций должна содержать макроскопическое число метастабильных состояний (локальных минимумов энергии), и допустим, что к тому же эти состояния достаточно "сильны", чтобы при понижении температуры приводить к фазовым переходам, факторизующим фазовое пространство на соответствующие долины, разделенные бесконечными барьерами, — именно это является основным предположением, которое может выполняться, а может (как в низкоразмерных

системах) и нет. Тогда наиболее естественным путем "дробления" фазового пространства является тот, который описан в разделе 3.1: сначала факторизуются наиболее удаленные группы состояний, затем при понижении температуры внутри этих групп происходит факторизация на более мелкие подгруппы и т.д. Это есть не что иное, как процесс случайного ветвления, которое происходит в бесконечномерном пространстве (пространство состояний в пределе $N \rightarrow \infty$ становится бесконечномерным!). При этом ультраметричность возникает автоматически, просто благодаря тому совершенно общему факту, что при случайном ветвлении в бесконечномерном пространстве однажды разошедшиеся ветви потом больше никогда близко друг к другу не подходят. Так что, возможно, иерархия состояний и ультраметричность являются совершенно общим свойством случайных систем (как мы знаем, даже неупорядоченные социальные системы всегда образуют строгую иерархичность).

Результаты экспериментов, которые мы рассмотрим в следующем разделе 4, также говорят в пользу этого предположения.

4. Эксперименты. В этом разделе мы рассмотрим результаты последних экспериментов, проводившихся именно с целью выяснить, насколько справедлива описанная в предыдущем разделе 3 общая физическая картина спин-стекольного состояния для *реальных* спиновых стекол. Понятно, что, как это обычно бывает, те величины и объекты, которые так удобны для теоретических построений, весьма далеки от экспериментальных реалий, и требуется особое искусство, чтобы с помощью косвенных измерений суметь убедительно подтвердить (или опровергнуть) общую теоретическую схему.

Серия этих блестящих по своей простоте и остроумию экспериментов была выполнена М. Осю, J. Hammann, F. Lefloch и E. Vincent из Saclay и M. Lederman и R. Orbach из UCLA [7].

Большинство экспериментальных результатов были получены на кристаллах $\text{CdCr}_{1,7}\text{In}_{0,3}\text{S}_4$. Неупорядоченность в этой системе возникает из-за конкуренции ферромагнитных взаимодействий между ближайшими соседями и антиферромагнитных взаимодействий следующих за ближайшими соседями. Это спиновое стекло было ранее систематически изучено [8], и, в частности, для него хорошо установлена температура фазового перехода в спин-стекольную фазу $T_c = 16,7$ К. Некоторые измерения проводились также и на "классических" металлических спиновых стеклах типа AgMn [9], и при этом результаты

получались качественно те же самые. Таким образом, по-видимому, физические явления, которые были обнаружены, не зависят от конкретной реализации спинового стекла.

4.1. Старение. Явление *старения* в спиновых стеклах известно уже довольно давно [10]. К иерархии спин-стекольных состояний оно прямого отношения не имеет, но зато явно демонстрирует отсутствие истинного термодинамического равновесия в спиновых стеклах.

Эксперимент производится следующим образом. Система охлаждается из парамагнитной фазы в спин-стекольное состояние в слабом постоянном магнитном поле h и затем поддерживается при заданной температуре $T < T_c$ в этом поле в течение некоторого времени t_w . Затем магнитное поле выключается, и производится измерение релаксации магнитного момента. Результаты измерений для различных значений t_w показаны на рис. 5 (заметим, что величина t_w вполне макроскопическая: это минуты, часы, сутки).

Из этих графиков прежде всего видно, что релаксация является медленной и неэкспоненциальной (именно поэтому результаты показаны в логарифмической шкале). Однако намного важнее то, что релаксация является *нестационарной*: изменения, происходящие с системой после выключения магнитного поля, существенным образом зависят от времени t_w , когда это произошло. Со временем спиновое стекло становится "тверже": чем больше t_w , тем медленнее происходит релаксация. Поэтому любой подобный эксперимент зависит от двух временных параметров: это время наблюдения t , в течение которого производились измерения, и время после перехода в спин-стекольную фазу, предшествовавшее эксперименту, — время "старения" t_w . Важно также подчеркнуть, что ни за какое достижимое эксперименту время t_w никаких признаков установления термодинамического равновесия не наблюдается: тенденции выхода кривых релаксации на какую-то предельную (соответствующую $t_w = \infty$) кривую не видно.

Заметим, что само по себе магнитное поле к феномену "старения" никакого отношения не имеет — это всего лишь инструмент его наблюдения. Можно произвести "зеркальный" эксперимент: система охлаждается в спин-стекольное состояние без магнитного поля и поддерживается при постоянной температуре $T < T_c$ в течение времени t_w . Затем включается слабое магнитное поле и измеряется релаксация магнитного момента. Результат состоит в том, что для любого значения t_w измеряемая величина намагниченности оказывается совершенно "симметричной" ее значению в предыдущем эксперименте: в

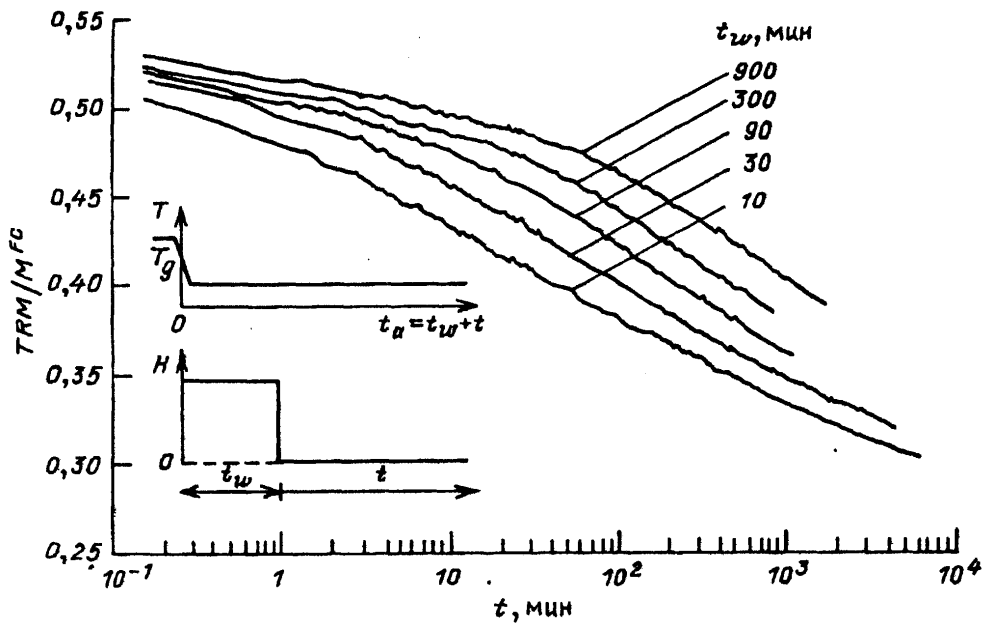


Рис. 5. Релаксация намагниченности после выключения магнитного поля в экспериментах по старению в ненулевом магнитном поле

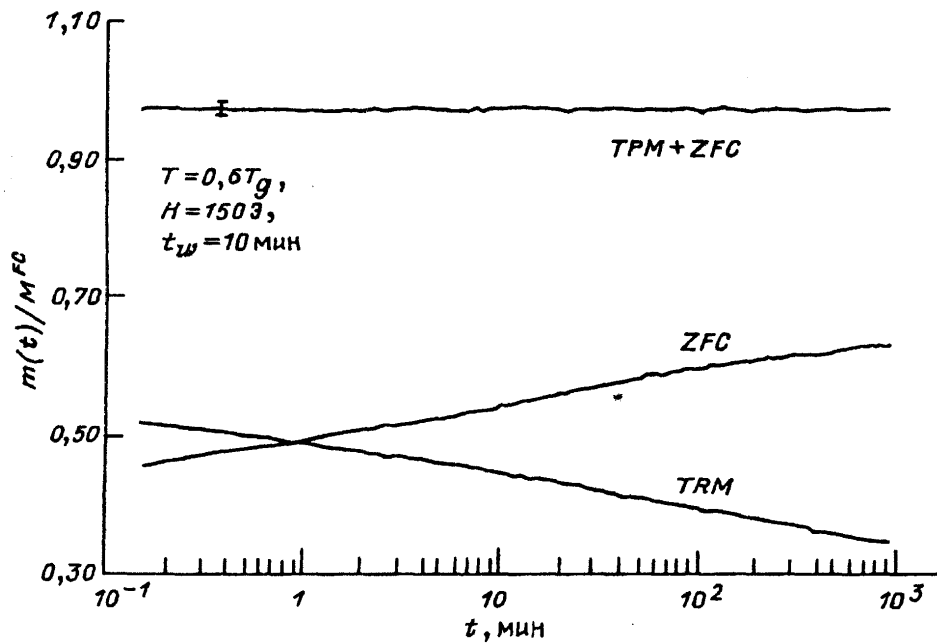


Рис. 6. Релаксация намагниченности после включения магнитного поля в эксперимента по старению в нулевом магнитном поле

пределах экспериментальных ошибок их сумма не зависит от времени и равна значению намагниченности охлажденного в магнитном поле спинового стекла в предыдущем эксперименте (рис. 6).

4.2. Температурные циклы и иерархия состояний. Рассмотрим два класса экспериментов, которые хорошо вписываются в представление о существовании иерархического дерева спин-стекловых состояний и которые, по-видимому, чрезвычайно трудно объяснить каким-либо другим способом.

В первом классе экспериментов образец охлаждается в слабом магнитном поле до температуры $T < T_c$. После некоторого времени ожидания t_{w1} температура понижается до $T - \Delta T$ (где ΔT мало), и при этой температуре образец выдерживается время t_{w3} . После этого температура снова поднимается до величины T , при которой образец выдерживается еще время t_{w2} . Затем магнитное поле выключается, и начинаются измерения релаксации магнитного момента. Результаты измерений для различных значений ΔT изображены на рис. 7.

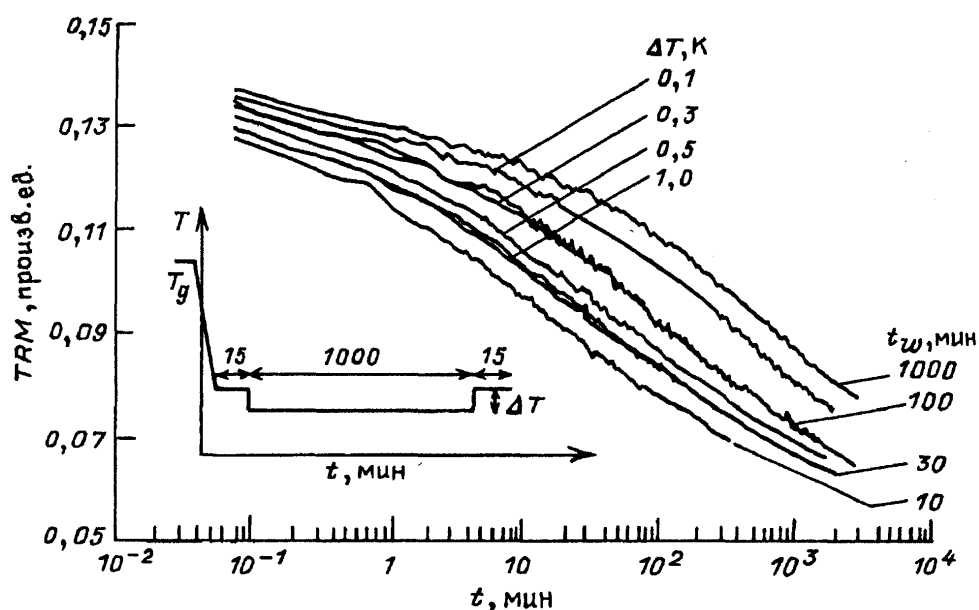


Рис. 7. Релаксация намагниченности в экспериментах по старению спинового стекла с температурным циклом охлаждения

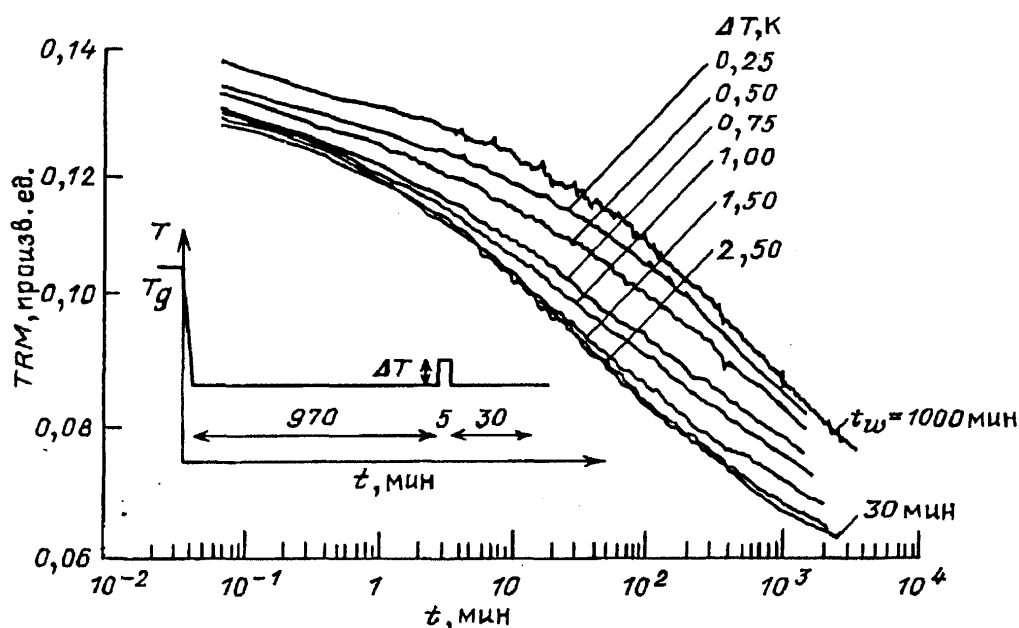


Рис. 8. Релаксация намагниченности в экспериментах по старению спинового стекла с температурным циклом подогреве

Самым главным в этих результатах является то, что, если температурная ступенька ΔT не слишком мала, все получаемые релаксационные кривые оказываются *идентичными* соответствующим кривым релаксации, получаемым в обычных экспериментах старения с $t_w = t_{w1} + t_{w2}$. Таким образом, что касается процесса установления равновесия при температуре T , то, начиная с некоторой (малой) величины ΔT , система как бы эффективно остается полностью "замороженной" все то время, что она проводит при температуре $T - \Delta T$.

Во втором классе экспериментов образец снова охлаждается в слабом магнитном поле до температу-

ры $T < T_c$, однако затем, после некоторого времени ожидания t_{w1} , температура на короткое время повышается до $T + \Delta T$ (где опять ΔT мало). После этого температура снова понижается до величины T , при которой образец выдерживается еще время t_{w2} . Затем магнитное поле выключается, и начинаются измерения релаксации магнитного момента. Результаты измерений для различных значений ΔT изображены на рис. 8.

В этом случае, если величина ΔT не слишком мала, кривые релаксации оказываются идентичными соответствующим кривым, получаемым при обычном старении с $t_w = t_{w2}$. Таким образом, совсем

небольшого подогрева достаточно, чтобы разрушить все то старение, которое было "достигнуто" при температуре T за все предшествующее время, и начать процесс старения с самого начала. (Заметим, что температура $T + \Delta T$, до которой подогревается система, все равно остается существенно ниже T_c .)

Такое асимметричное поведение системы при температурных циклах подогрева и охлаждения хорошо соответствует представлению о существовании иерархического дерева состояний (см. рис. 4) и непрерывному каскаду фазовых переходов при $T < T_c$.

Качественная интерпретация этих экспериментов состоит в следующем. Процесс старения, или установления термодинамического равновесия, состоит в том, что система со временем преодолевает всё более высокие потенциальные барьеры. За время t_w "занятой" части фазового объема будут соответствовать максимальные барьеры, характерная высота которых $\Delta_{\max}(T, t_w) \sim T \log(t_w/\tau)$ (здесь τ — некоторое микроскопическое время). В этих рассуждениях подразумевается, что каждому масштабу в пространстве состояний соответствует некоторая характерная максимальная высота барьеров, разделяющих состояния на этом масштабе.

В первом классе экспериментов за время t_{w1} при температуре T система занимает некоторую ограниченную часть пространства состояний. После понижения температуры до $T - \Delta T$ эта часть фазового объема может раздробиться на несколько долин, разделенных бесконечными барьерами. Соответственно, каждое из занятых ранее состояний дробится на множество новых, барьеры, разделяющие состояния, становятся выше, а часть этих барьеров становятся бесконечной. В течение времени t_{w3} система начинает занимать эти вновь образованные состояния, при этом оставаясь запертой бесконечными барьерами в более ограниченной (чем при температуре T) области фазового объема. Поэтому за время, проведенное при температуре $T - \Delta T$, система может занимать лишь состояния, которые являются "потомками" тех состояний, которые она уже заняла при температуре T . Подчеркнем, что все это есть не более чем простое следствие фазового перехода, который происходит в системе при переходе от температуры T к температуре $T - \Delta T$ (как и при любой другой температуре ниже T_c). Затем после повышения температуры опять до величины T все эти состояния "потомки" сливаются в своих "предках" (уничтожив, таким образом, все то, что было "достигнуто" при температуре $T - \Delta T$), и процесс заполнения фазового объема при температуре T будет продолжаться, как будто промежутка времени, который система

провела при температуре $T - \Delta T$, и не существовало.

Во втором классе экспериментов состояния, занятые за время t_{w1} при температуре T , после повышения температуры до $T + \Delta T$ будут сливаться в существенно меньшее число своих "предочных" состояний. Если при этом ΔT таково, что $q(T + \Delta T) < q'$, где функция $q(T)$ задает самоперекрытие состояний при температуре T (3.1), а q' — самоперекрытие ближайшего общего предка тех состояний, которые были заняты за время t_{w1} при температуре T , то все старение, которое было достигнуто за это время, при температуре $T + \Delta T$ будет полностью уничтожено, ибо все состояния, которые система заняла за время t_{w1} , сольются в одного — общего предка (для этой части фазового объема это выглядит так, как будто произошел фазовый переход в парамагнитное состояние). Поэтому после понижения температуры снова до T процесс старения начнется сначала.

В упрощенном виде описанные выше эксперименты могут быть резюмированы следующим образом. После охлаждения системы в спин-стекльную фазу до температуры $T < T_c$ и выдерживания вблизи этой температуры в течение длительного времени слабый короткий подогрев "стирает" все накопленное ранее старение, а при любом охлаждении на любое время процесс старения при этой температуре приостанавливается.

4.3. Зависимость высоты барьеров от температуры. Оказывается, несколько изменив схему эксперимента и основываясь на философии иерархического дерева состояний и непрерывной цепи фазовых переходов, можно оценить зависимость характерной высоты барьеров между состояниями от температуры (разумеется, пока эти барьеры остаются конечными).

Рассмотрим еще одну серию экспериментов, которые проводились с металлическими спиновыми стеклами AgMn ($T_c = 10,4$ К). В этих экспериментах спиновое стекло стареет в слабом магнитном поле при температуре $T - \Delta T$ в течение времени t_w . Затем скачком производится подогрев до температуры T , после этого магнитное поле немедленно выключается, и производятся измерения релаксации магнитного момента. Результаты показаны на рис. 9. Из этих кривых видно, что если ΔT не слишком мало, то наблюдаемая релаксация практически идентична релаксации, происходящей после обычного старения при температуре T в течение некоторого эффективного времени старения $t_w^{\text{eff}} < t_w$.

Это явление также хорошо укладывается в схему иерархической структуры состояний. При температуре $T - \Delta T$ барьеры на рельефе свободной энергии

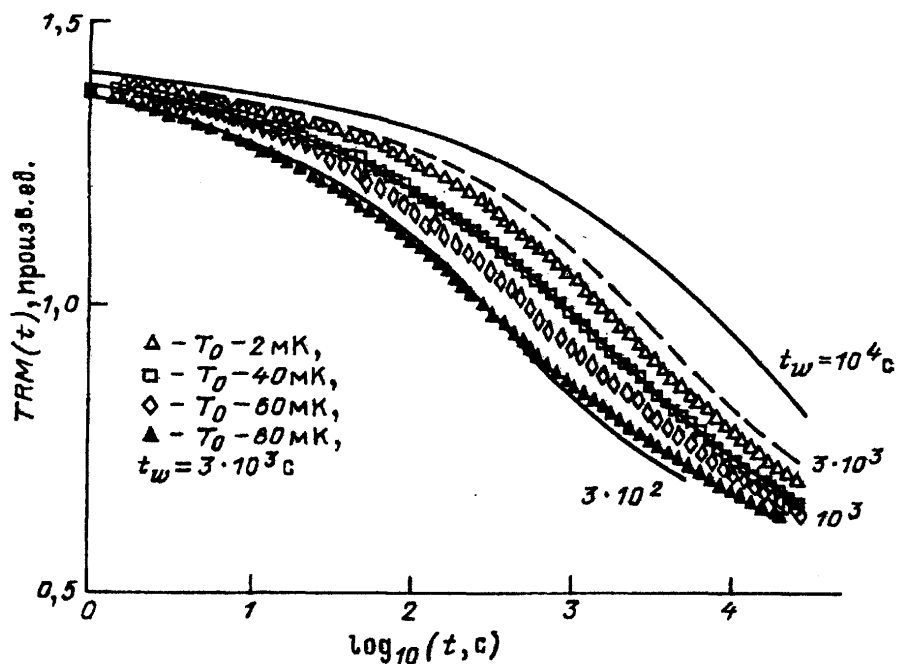


Рис. 9. Релаксация намагниченности при температуре T после выключения магнитного поля, при старении в магнитном поле при температуре $T-\Delta T$

выше, чем при температуре T . Соответственно, область фазового объема, занятая при старении при температуре $T-\Delta T$, ограничена барьерами, высота которых при температуре T меньше, поэтому меньше и время, необходимое, чтобы занять эту область при температуре T .

Отметим теперь следующее обстоятельство. В момент выключения магнитного поля величина этого поля и температура во время измерения релаксации являются такими же, как и в эксперименте при обычном старении при температуре T . При правильном выборе величины t_w^{eff} соответствующие кривые релаксации также становятся одинаковыми. Из этого

следует вывод, что область фазового пространства, занятая системой к моменту выключения поля (к моменту начала измерений), в обоих экспериментах должна быть та же самая. Эта область характеризуется максимальной высотой барьеров, которые система преодолела во время старения при температуре T :

$$\Delta(T, t_w^{\text{eff}}) = T \log \frac{t_w^{\text{eff}}}{\tau}, \quad (4.1)$$

и, соответственно, во время старения при температуре $T-\Delta T$:

$$\Delta(T-\Delta T, t_w) = (T-\Delta T) \log \frac{t_w}{\tau}. \quad (4.2)$$

Таким образом, если релаксация при температуре T является одинаковой, как после старения при температуре T в течение времени t_w^{eff} , так и после старения при температуре $T-\Delta T$ в течение времени t_w , то, значит, начальное состояние системы в момент начала измерений (сразу после выключения магнитного поля) в обоих случаях является одинаковым. Это означает, что $\Delta(T-\Delta T)$ и $\Delta(T)$ — это характерные высоты того же самого барьера при различных температурах.

Исходя из этого представления и используя экспериментальные данные, показанные на рис. 9, можно получить зависимость величины Δ от Δ при данной температуре. На рис. 10 показана зависимость $\Delta(T)$ от $\Delta(T-\Delta T)$ при температурах $T = 9$ К, 9,5 К и 10 К при фиксированной величине $\Delta T = 20$ мК. Из этих данных видно, что в пределах экспериментальных ошибок результаты, полученные при различных T совпадают. На рис. 11 показана

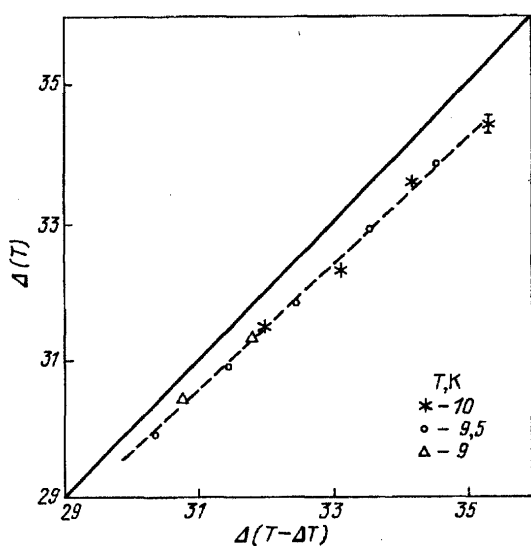


Рис. 10. Зависимость высоты барьеров при температуре T от высоты этих же барьеров при температуре $T-\Delta T$, полученная из результатов, показанных на рис. 9

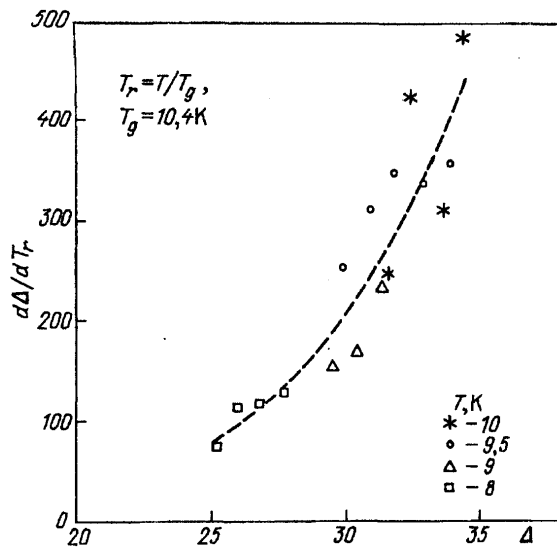


Рис. 11. Зависимость скорости возрастания барьеров с температурой $d\Delta/dT$ от величины этих барьеров

на полученная из этих данных зависимость $\partial \Delta/\partial T$ от величины Δ . В пределах экспериментальных ошибок $\partial \Delta/\partial T$ зависит лишь от величины Δ и не зависит непосредственно от температуры. Пунктирная линия на этом рисунке — это степенная аппроксимация экспериментальных данных:

$$\frac{d\Delta}{dT} \approx a \Delta^6, a = 2,9 \cdot 10^{-7}. \tag{4.3}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\Delta(T) \approx \left(\frac{T - T^*}{T_c} \right)^{-1/5}, T > T^*; \tag{4.4}$$

здесь T^* — это интеграционная константа, которая маркирует рассматриваемый барьер и представляет собой ту предельную температуру, при которой этот конкретный барьер расходится.

Рассмотренные эксперименты приводят к следующему выводу. Существование эффекта старения при всех температурах ниже T_c во всем диапазоне наблюдаемых времен означает существование непрерывного спектра высот барьеров и, соответственно, существование расходящихся барьеров при любой температуре $T < T_c$. Именно это явление приводит к непрерывному процессу факторизации фазового пространства на все более мелкие долины (т.е. непрерывной цепи фазовых переходов нарушения эргодичности) при понижении температуры ниже T_c . Критическая температура T_c является просто наибольшим возможным значением для T^* .

Часть II

В последующих трех разделах 5—7 будут проделаны формальные вычисления для специальной модели спинового стекла с дальнедействием, которую называют моделью Шеррингтона—Киркпатрика.

Будет последовательно изложена система вычислений, которая обычно называется схемой нарушения репличной симметрии. В результате будет получена та самая физическая картина спин-стекольного состояния, которая была изложена в первой части этого обзора.

5. Метод реплик.

5.1 Модель. Модель Шеррингтона—Киркпатрика [11] описывается изинговским гамильтонианом

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j. \tag{5.1}$$

В этой системе спин-спиновые взаимодействия J_{ij} являются независимыми для любой пары узлов (i, j) и описываются гауссовым распределением:

$$P [J_{ij}] = \prod_{i < j} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{J_{ij}^2 N}{2} \right), \tag{5.2}$$

т.е. каждый спин взаимодействует с каждым спином. Поэтому можно считать, что в этой модели все спины являются ближайшими соседями, и в этом смысле это есть модель Изинга со случайными взаимодействиями в бесконечной (при $N \rightarrow \infty$) размерности пространства. Очевидно, что

$$\langle\langle J_{ij} \rangle\rangle = 0, \langle\langle J_{ij}^2 \rangle\rangle = \frac{1}{N}, \tag{5.3}$$

где $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ означает усреднение по реализациям J_{ij} с распределением (5.2):

$$\begin{aligned} \langle\langle (\dots) \rangle\rangle &\equiv \int DJ P[J] (\dots) = \\ &= \prod_{i < j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dJ_{ij}}{(2\pi/N)^{1/2}} \exp \left(- \frac{1}{2} J_{ij}^2 N \right) \right] (\dots). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Поэтому полная средняя энергия системы, вычисленная с помощью гамильтониана (5.1), пропорциональна объему системы N , как и должно быть.

Понятно, что эта модель по своему устройству совершенно нефизична. Однако она обладает одним чрезвычайно важным достоинством: она является в некотором смысле точно решаемой, и те результаты, которые получаются из этого решения, оказываются вполне нетривиальными, эстетически очень привлекательными и на качественном уровне легко обобщаемыми на "обычный" мир неупорядоченных систем. Поэтому, если окажется, что реальные спиновые стекла действительно описываются той физикой, которая изложена в первой части этого обзора (а последние эксперименты указывают именно на это), то уже и не так важно, насколько нефизична была та исходная модель, в которой эта физика была впервые обнаружена.

Аррешаемой эта модель является по очень простой причине: в бесконечной размерности пространства нет флуктуаций, и поэтому теория среднего поля здесь является точной.

5.2. Р е п л и к и . Формальная схема введения реплик состоит в следующем. Как мы уже знаем, для получения физической (самоусредняющейся) свободной энергии системы мы должны усреднить ее по реализациям случайных взаимодействий:

$$F \equiv \langle \langle F_J \rangle \rangle = -\frac{1}{\beta} \langle \langle \ln Z_J \rangle \rangle, \quad (5.5)$$

где

$$Z_J = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H[\sigma]) \quad (5.6)$$

— статистическая сумма системы, вычисленная с гамильтонианом (5.1) при фиксированных взаимодействиях J_{ij} .

Для того чтобы произвести усреднение логарифма в (5.5), производится следующий трюк. Возведем статистическую сумму (5.6) в *целую* степень n . В результате мы получим статистическую сумму системы, состоящей из n не взаимодействующих *идентичных* реплик исходной модели (т.е. имеющих идентичные фиксированные спин-спиновые взаимодействия J_{ij}):

$$Z_J^n = \left(\prod_{a=1}^n \sum_{\sigma} \right) \exp \left(\beta \sum_{a=1}^n \sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i^a \sigma_j^a \right); \quad (5.7)$$

здесь индекс a нумерует реплики. Введем теперь величину

$$F_n = -\frac{1}{\beta n} \ln Z_n, \quad (5.8)$$

где

$$Z_n \equiv \langle \langle Z_J^n \rangle \rangle. \quad (5.9)$$

Если теперь в выражении (5.8) перейти к *формальному* пределу $n \rightarrow 0$, то получим нужное нам выражение для свободной энергии (5.5):

$$\lim_{n \rightarrow 0} F_n = -\frac{1}{\beta} \langle \langle \ln Z_J \rangle \rangle = F. \quad (5.10)$$

Таким образом, схема метода реплик состоит в следующем. Требуется вычислить величину F_n для целого n . Затем полученную функцию n аналитически продолжить на нецелые n и перейти к пределу $n \rightarrow 0$.

Эта процедура, хотя и может на первый взгляд показаться весьма сомнительной, в действительности является вполне осмысленной (хотя, разумеется, нужно иметь в виду, что в общем случае никому еще не удалось найти сколько-нибудь убедительное доказательство правильности метода реплик). В пользу этого утверждения существует несколько

аргументов:

во-первых, если свободная энергия может быть представлена в виде ряда по степеням β (это имеет место в высокотемпературной области), то легко видеть, что метод реплик является правильным в строгом смысле этого слова; в низкотемпературной области свободная энергия этим свойством не обладает; тем не менее,

во-вторых, во всех случаях, когда можно провести вычисления каким-либо другим методом, результаты, полученные методом реплик, подтверждаются;

в-третьих (и это, как мне кажется, самое главное), — это, в действительности, не просто некоторый вычислительный трюк, а в самом деле *физически осмысленная* процедура. К этому тезису мы будем раз за разом возвращаться по ходу изложения последующих разделов более конкретно. Пока же можно высказаться лишь в самом общем виде (хотя едва ли на этом довольно абстрактном уровне обсуждения это кому-то что-то прояснит): если в системе с беспорядком имеется альтернативность в выборе основного состояния, и сами эти состояния случайны и определяются конкретной реализацией замороженного беспорядка, то при вычислении термодинамики, для того чтобы отсуммировать по всем этим альтернативам, мы в некотором смысле должны много раз брать одну и ту же систему с одной и той же реализацией беспорядка (т.е. множество реплик одной и той же системы). Что касается предела $n \rightarrow 0$, то, как мы увидим далее, он в некотором смысле соответствует пределу $n \rightarrow \infty$, что вполне естественно, так как число основных состояний в рассматриваемых системах бесконечно.

Репличный формализм можно ввести и по-другому, исходя из чисто физических соображений [19]. Рассмотрим общую спиновую систему, описываемую некоторым гамильтонианом $H[\mathbf{J}; \sigma]$, который зависит от спиновых переменных $\{\sigma_i\}$ и спин-спиновых взаимодействий J_{ij} (конкретный вид гамильтониана сейчас не важен). Если взаимодействия J_{ij} являются замороженными, то формально свободная энергия системы будет зависеть от конкретной реализации параметров J_{ij} :

$$F[\mathbf{J}] = -\frac{1}{\beta} \log Z[\mathbf{J}], \quad (5.11)$$

где

$$Z[\mathbf{J}] = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H[\mathbf{J}; \sigma]) \quad (5.12)$$

— статсумма системы.

Теперь предположим, что спин-спиновые взаимодействия не являются строго замороженными, т.е.

что они тоже могут изменять свои значения, но характерный временной масштаб их динамики много больше временного масштаба, на котором в спиновых степенях свободы устанавливается термодинамическое равновесие. В этом случае свободная энергия (5.11) по-прежнему будет иметь смысл, и она теперь станет функцией энергии (гамильтонианом) для степеней свободы J_{ij} .

Поскольку спин-спиновые взаимодействия становятся переменными, должно быть установлено пространство, в котором они принимают свои значения. К примеру, связи J_{ij} могут быть переменными, принимающими значения $\pm J_0$, или они могут быть непрерывными переменными, принимающими значения в некотором ограниченном интервале, или что-нибудь еще. В случае замороженных связей пространство взаимодействий J_{ij} задается статистической функцией распределения $P[J]$. В обсуждаемом случае частично расплавленных связей эта функция $P[J]$ имеет смысл внутреннего потенциала для переменных взаимодействий J_{ij} , которая ограничивает пространство их значений.

Предположим теперь, что спиновые степени свободы и степени свободы спиновых взаимодействий *не находятся в состоянии термодинамического равновесия*. А именно, предположим, что температура T' в системе спиновых взаимодействий отличается от температуры T спиновых переменных. В этом случае полная статистическая сумма системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int DJP[J] \exp(-\beta' F[J]) = \\ &= \int DJP[J] \exp\left(\frac{\beta'}{\beta} \log Z[J]\right) = \\ &= \int DJP[J] (Z[J])^n, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $n = T/T'$. Соответственно, для полной свободной энергии системы получаем

$$\mathcal{F} = -T' \log \langle\langle (Z[J])^n \rangle\rangle, \quad (5.14)$$

где

$$\langle\langle (Z[J])^n \rangle\rangle \equiv \int DJP[J] (Z[J])^n. \quad (5.15)$$

Таким образом, мы возвратились к обычному репличному формализму, в котором "число реплик" $n = T/T'$ является *конечным* параметром.

В случае замороженных взаимодействий J_{ij} физическая (самоусредняющаяся) свободная энергия получается в пределе $n \rightarrow 0$. С точки зрения рассмотренного выше подхода эта ситуация соответствует пределу бесконечной температуры T' в системе взаимодействия J_{ij} . И это естественно в том смысле, что термодинамика спиновых степеней свободы не производит никакого воздействия на статистику спин-

спиновых взаимодействий.

В случае, если спиновые переменные и переменные взаимодействий находятся в термодинамическом равновесии, т.е. $T' = T$ ($n = 1$), возникает тривиальная ситуация полностью расплавленного беспорядка, какова бы ни была разница характерных времен в динамике взаимодействий J_{ij} и спинов. Это тоже естественно, поскольку термодинамическое описание формально соответствует бесконечным временам и характерные временные масштабы динамики внутренних степеней свободы не играют никакой роли.

Если же $n \neq 0$ и $n \neq 1$, то возникает промежуточная ситуация, которую можно условно назвать частично расплавленным беспорядком (детальное обсуждение этого случая см. в работе [19]).

5.3. Вычисление свободной энергии. Итак, чтобы вычислить усредненную свободную энергию, мы должны вычислить усредненную по беспорядку статистическую сумму системы, состоящей из n невзаимодействующих реплик исходной модели:

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{\sigma_i^a} \int DJ_{ij} \exp \left(\beta \sum_{a=1}^n \sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i^a \sigma_j^a - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i<j} J_{ij}^2 N \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

(здесь и далее всевозможные предэкспоненциальные множители опускаются ввиду их несущественности). Интегрирование по J_{ij} дает

$$Z_n = \sum_{\sigma_i^a} \exp \left[\frac{\beta^2}{2N} \sum_{i<j} \left(\sum_{a=1}^n \sigma_i^a \sigma_j^a \right)^2 \right], \quad (5.17)$$

или

$$Z_n = \sum_{\sigma_i^a} \exp \left[\frac{1}{4} \beta^2 N n + \frac{\beta^2 N}{2} \sum_{a<b} \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^a \sigma_i^b \right)^2 \right]. \quad (5.18)$$

Суммирование по пространственному индексу в экспоненте линеаризуется введением репличной матрицы Q_{ab} :

$$\begin{aligned} Z_n &= \prod_{a<b} \left(\int dQ_{ab} \right) \sum_{\sigma_i^a} \exp \left(\frac{1}{4} \beta^2 N n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta^2 N}{2} \sum_{a<b} Q_{ab}^2 + \beta^2 \sum_{a<b} \sum_i Q_{ab} \sigma_i^a \sigma_i^b \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Параметр Q_{ab} имеет вполне определенный физический смысл. Согласно (5.19) термодинамически равновесное значение Q_{ab} , которое получается из

уравнения $\delta Z_n / \delta Q_{ab} = 0$, есть

$$Q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_i^N \langle \sigma_i^a \sigma_i^b \rangle. \quad (5.20)$$

Ввиду того, что выражение в экспоненте уравнения (5.19) линейно по пространственному суммированию, полная статсумма факторизуется на отдельные "министатсуммы" в узлах, и все проблемы переносятся в репличное пространство:

$$Z_n = \prod_{\alpha < b}^n \left(\int dQ_{ab} \right) \exp \left(\frac{1}{4} \beta^2 N n - \frac{\beta^2 N}{2} \sum_{\alpha < b} Q_{ab}^2 \right) \times \prod_i^N \left[\sum_{\sigma_i^a} \exp \left(\beta^2 \sum_{\alpha < b} Q_{ab} \sigma_i^a \sigma_i^b \right) \right], \quad (5.21)$$

или

$$Z_n = \prod_{\alpha < b}^n \left(\int dQ_{ab} \right) \exp \left\{ \frac{1}{4} \beta^2 N n - \frac{\beta^2 N}{2} \sum_{\alpha < b} Q_{ab}^2 + N \log \left[\sum_{\sigma_a} \exp \left(\beta^2 \sum_{\alpha < b} Q_{ab} \sigma_a \sigma_b \right) \right] \right\}. \quad (5.22)$$

Это выражение можно представить в виде

$$Z_n = \int D\hat{Q} \exp(-\beta n N f[\hat{Q}]), \quad (5.23)$$

где

$$f[\hat{Q}] = -\frac{1}{4} \beta + \frac{\beta}{2n} \sum_{\alpha < b} Q_{ab}^2 - \frac{1}{\beta n} \log \left[\sum_{\sigma_a} \exp \left(\beta^2 \sum_{\alpha < b} Q_{ab} \sigma_a \sigma_b \right) \right]. \quad (5.24)$$

В термодинамическом пределе в главном порядке по N интеграл для статсуммы Z_n (5.23) определяется перебором в точке минимума функции $f[\hat{Q}]$:

$$Z_n \approx \left(\det \frac{\delta^2 f}{\delta \hat{Q}^2} \right)^{-1/2} \exp(-\beta n N f[\hat{Q}^*]), \quad (5.25)$$

где \hat{Q}^* — это матрица, реализующая минимум функции f и определяемая из условий экстремума

$$\frac{\delta f}{\delta Q_{ab}} = 0. \quad (5.26)$$

При этом согласно общей идеологии метода реплик (5.10) $f[\hat{Q}^*]$ представляет собой искомую плотность свободной энергии системы (в случае, если минимумов несколько, свободная энергия есть сумма по всем этим минимумам).

Казалось бы, все, что нужно теперь сделать, — это вычислить выражение (5.24), затем решить уравнения (5.26), подставить найденное решение \hat{Q}^* в выражение для f и перейти к пределу $n \rightarrow 0$. Однако проблема состоит в том, что в общем случае эта про-

цедура неосуществима: для произвольной матрицы \hat{Q} вычислить выражение (5.24) невозможно. Кроме того, как мы увидим далее, в действительности в пределе $n \rightarrow 0$ вклад в свободную энергию возникает не от минимумов, а от максимумов функции f (это связано с тем, что в этом пределе число независимых параметров матрицы \hat{Q} становится, отрицательным — мы обсудим это обстоятельство немного позже).

Поэтому предлагается следующая последовательность действий: нужно просто угадать конкретную форму экстремальной матрицы \hat{Q}^* , которая будет определяться некоторым ограниченным числом параметров, и затем эти параметры найти из уравнений (5.26). Тем самым мы найдем минимум в некотором подпространстве пространства всех матриц \hat{Q} . Если при этом окажется, что гессиан $\delta^2 f / \delta \hat{Q}^2$ в этой точке положительно определен, то это и будет истинный минимум в пространстве всех матриц, а не только внутри того подпространства, которое было взято в качестве исходного анзаца.

5.4. Реплично-симметричное решение.

Ввиду того, что все реплики в нашей системе совершенно эквивалентны, можно было бы наивно предположить, что все элементы матрицы Q_{ab}^* должны быть одинаковыми, т.е. что в основном состоянии спиновые перекрытия (5.20) между различными репликами одинаковы для любой пары реплик:

$$Q_{ab} = q \text{ для всех } a \neq b. \quad (5.27)$$

Этот анзац называется приближением репличной симметрии. В действительности это есть гипотеза о том, что в системе существует лишь одно основное состояние.

Все вычисления в приближении репличной симметрии очень просты. Для f (5.24) с учетом (5.27) имеем

$$f(q) = -\frac{1}{4} \beta + \frac{\beta}{2n} \frac{n(n-1)}{2} q^2 - \frac{1}{\beta n} \log \left\{ \sum_{\sigma_a} \exp \left[\frac{1}{2} \beta^2 \left(\sum_a^n \sigma_a \right)^2 q - \frac{1}{2} \beta^2 n q \right] \right\}, \quad (5.28)$$

или

$$f(q) = -\frac{1}{4} \beta + \frac{1}{2} \beta q + \frac{1}{4} (n-1) \beta q^2 - \frac{1}{\beta n} \log \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \times \prod_{a=1}^n \left[\sum_{\sigma_a = \pm 1} \exp(\beta \sigma_a q^{1/2} z) \right] \right\}. \quad (5.29)$$

Переходя к пределу $n \rightarrow 0$, получаем

$$f(q) = -\frac{1}{4} \beta (1-q)^2 -$$

$$-\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \ln [2 \operatorname{ch}(\beta q^{1/2} z)]. \quad (5.30)$$

Из условия экстремума $f(q)$ относительно q получаем

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \operatorname{th}^2(\beta q^{1/2} z). \quad (5.31)$$

Легко видеть, что это уравнение при $T > 1$ имеет единственное решение $q = 0$. Однако при $T < 1$ появляется нетривиальное решение $q \neq 0$:

$$q(\tau) \approx \tau \text{ при } 1 - T \equiv \tau \ll 1,$$

$$q \rightarrow 1 \text{ при } T \rightarrow 0.$$

Согласно (5.20) найденное решение для $q(T)$ — это физический параметр порядка:

$$q = \frac{1}{N} \sum_i^N \langle \sigma_i \rangle^2. \quad (5.32)$$

Если величина q не равна нулю, это означает, что спины системы замерзают в некотором случайном состоянии, причем это состояние единственное. Далее, следуя той же схеме, нетрудно вычислить все остальные наблюдаемые термодинамические величины: теплоемкость, восприимчивость, энтропию и др., и, таким образом, полностью описать фазовый переход и низкотемпературную фазу.

И все было бы просто и понятно, если бы это было правильно. В действительности то, что с найденным решением что-то не в порядке, можно увидеть почти сразу, если вычислить энтропию: при достаточно низких температурах энтропия становится отрицательной! (При $T = 0$ энтропия $S = -1/2\pi \approx -0,17$.)

Детальные вычисления показывают, что $\det(\delta^2 f / \delta Q^2)$ для найденного реплично-симметричного решения становится отрицательным при $0 < T < 1$ [12]. Таким образом, это решение неустойчиво во всей низкотемпературной области. Это означает, что истинное решение находится где-то за пределами реплично-симметричного подпространства матриц \hat{Q} .

6. Нарушение репличной симметрии. Стратегия нахождения истинного решения для матрицы \hat{Q} называется схемой нарушения репличной симметрии Паризи. Она состоит в следующем.

Сначала попробуем угадать, хотя бы приблизительно, нужную структуру матрицы \hat{Q} , которая осуществляет экстремум, и вычислим свободную энергию f . Затем в этом подпространстве матриц \hat{Q} найдем экстремум. После этого нужно вычислить гессиан $\delta^2 f / \delta Q^2$ и посмотреть, насколько найденное решение устойчиво. В предыдущем разделе мы обнаружили, что реплично-симметричный анзац не проходит,

и поэтому нужно попробовать матрицу \hat{Q} с более сложной структурой и, соответственно, с **большим** числом параметров.

В действительности, как мы увидим далее, ситуация оказывается чрезвычайно сложной, так как никакой анзац, содержащий *конечное* число параметров, не проходит. Тем не менее, пробуя различные формы матрицы \hat{Q} , можно судить, какой анзац лучше, а какой хуже, глядя просто на собственные значения гессиана: анзац тем лучше (менее неустойчив), чем меньше абсолютная величина тех его собственных значений, которые оказываются отрицательными. Эта процедура может указать правильное "направление" в пространстве матриц, в котором нужно двигаться.

Схема нарушения репличной симметрии Паризи представляет собой бесконечную последовательность анзацев, которые шаг за шагом все лучше аппроксимируют истинное решение. Затем это истинное решение можно сформулировать и адекватно описать в терминах непрерывных функций, как предел некоторой последовательности. В этом пределе оказалось возможным доказать его устойчивость (точнее, маргинальную устойчивость: в этом пределе самое отрицательное собственное значение обращается в нуль) и определить простые (условно говоря) наблюдаемые величины, которые позволяют дать ясную физическую интерпретацию найденного решения.

Рассмотрим теперь, как шаг за шагом строится решение. Заметим только, что на этом этапе, возможно, не стоит пытаться сразу понять, почему у матрицы \hat{Q} строится именно такая структура, а не другая. Немного позже, переварив все эти сугубо формальные построения и увидев за этим реальную физику, ощущение, что это самое естественное решение, какое только можно себе представить, возникает само собой.

6.1. Нарушение репличной симметрии на один шаг. На первом шаге "естественно" разделить все n реплик на n/m групп по m реплик в каждой (разумеется, числа m и n/m должны быть целыми). После этого, матрицу \hat{Q} определим в следующем виде: $Q_{ab} = q_1$, если реплики a и b принадлежат одной группе, и $Q_{ab} = q_0$, если реплики a и b принадлежат разным группам (диагональные элементы матрицы, по определению, остаются равными тождественно нулю). В компактной форме эту структуру можно записать в следующем виде:

$$Q_{ab} = q_1, \text{ если } I\left(\frac{a}{m}\right) = I\left(\frac{b}{m}\right), \\ = q_0, \text{ если } I\left(\frac{a}{m}\right) \neq I\left(\frac{b}{m}\right), \quad (6.1)$$

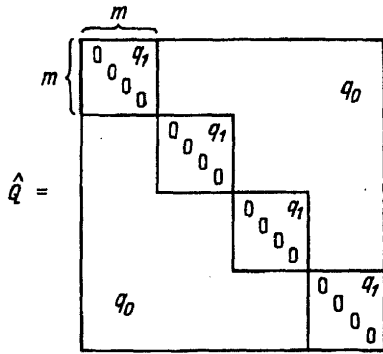


Рис. 12. Матрица Q_{ab} при нарушении репличной симметрии на один шаг

где $I(x)$ — это целочисленная функция, равная наименьшему целому, которое больше или равно x . Структура такой матрицы показана на рис. 12.

В таком анзаце мы имеем три параметра: q_1 , q_0 и m (в отличие от реплично-симметричного приближения, где был только один параметр). Эти параметры должны определяться из уравнений на экстремум.

Используя явный вид матрицы \hat{Q} , вычислим теперь свободную энергию (5.24):

$$f[\hat{Q}] = -\frac{1}{4}\beta + \frac{\beta}{2n} \sum_{a<b}^n Q_{ab}^2 - \frac{1}{\beta n} \log Z([\hat{Q}]), \quad (6.2)$$

где

$$Z([\hat{Q}]) = \sum_{\sigma_a} \exp \left(\beta^2 \sum_{a<b}^n Q_{ab} \sigma_a \sigma_b \right). \quad (6.3)$$

Имеем

$$\sum_{a<b}^n Q_{ab} \sigma_a \sigma_b = \frac{1}{2} \left[q_0 \left(\sum_{a=1}^n \sigma_a \right)^2 + (q_1 - q_0) \sum_{k=1}^{n/m} \left(\sum_{c_k=1}^m \sigma_{c_k} \right)^2 - nq_1 \right], \quad (6.4)$$

где k нумерует блоки реплик, а c_k нумерует реплики внутри блоков. Произведя гауссово преобразование в $Z[\hat{Q}]$ для каждого из квадратов в выражении (6.4), получим

$$Z[q_1, q_0, m] = \int \frac{dz}{(2\pi q_0)^{1/2}} \exp \left(-\frac{z^2}{2q_0} \right) \times \prod_{k=0}^{n/m} \left\{ \int \frac{dy_k}{[2\pi(q_1 - q_0)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{y_k^2}{2(q_1 - q_0)} \right] \right\} \times \sum_{\sigma_a} \exp \left\{ \beta \left[z \sum_a^n \sigma_a + \sum_{k=0}^{n/m} y_k \left(\sum_{c_k=1}^m \sigma_{c_k} \right) \right] - \frac{1}{2} \beta^2 n q_1 \right\}. \quad (6.5)$$

Суммирование по спиновым переменным приводит к выражению

$$Z[q_1, q_0, m] = \int \frac{dz}{(2\pi q_0)^{1/2}} \exp \left(-\frac{z^2}{2q_0} \right) \times \left[\int \frac{dy}{[2\pi(q_1 - q_0)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{y^2}{2(q_1 - q_0)} \right] \right] \times \left\{ 2 \operatorname{ch} [\beta(z + y)] \right\}^{n/m} \exp \left(\frac{1}{2} \beta^2 n q_1 \right). \quad (6.6)$$

Для второго члена в уравнении (6.2) получаем

$$\frac{\beta}{2n} \sum_{a<b}^n Q_{ab}^2 = \frac{\beta}{4n} \left[q_1^2 m(m-1) \frac{n}{m} + q_0^2 (n^2 - m^2 \frac{n}{m}) \right] = \frac{\beta}{4} \left[q_1^2 (m-1) + q_0^2 (n-m) \right]. \quad (6.7)$$

Теперь мы должны перейти к пределу $n \rightarrow 0$. По определению, m было целым числом, заданным на интервале $1 \leq m \leq n$. Формальное аналитическое продолжение $n \rightarrow 0$ превращает этот интервал в $0 \leq m \leq 1$, где m , естественно, перестает быть целым числом. Поскольку сколько-нибудь надежного математического обоснования процедуры нарушения репличной симметрии все равно не существует, то, видимо, не стоит сейчас тратить слова и время на то, чтобы как-то оправдать это чудесное превращение. В этом обзоре я не собираюсь обосновывать схему нарушения репличной симметрии — я лишь хочу сообщить, в чем она состоит. Так вот, я сообщаю: в репличном формализме в пределе $n \rightarrow 0$ параметр m , введенный изначально как целочисленный делитель n , принимает значения на интервале $0 \leq m \leq 1$.

В этом мире нет совершенства, и репличный формализм в этом смысле не является исключением. Во всей этой процедуре нужно лишь, по возможности, придерживаться здравого смысла, а главной поддержкой всей этой конструкции является тот факт, что после того, как "правила игры" были прочно установлены, всякий раз, когда они применяются на практике для самых разных систем, они приводят к внутренне непротиворечивым и интересным результатам (которые к тому же часто проверяются разными другими способами). Идеальное отсутствие каких-либо логических скачков может привести лишь к тривиальности. К процедуре нарушения репличной симметрии это явно не относится.

Таким образом, переходя к пределу $n \rightarrow 0$ в уравнениях (6.7) и (6.6), для свободной энергии (6.2)

получаем

$$f(q_1, q_0, m) = -\frac{1}{4}\beta [1 + mq_0^2 + (1 - m)q_1^2 - 2q_1] - \frac{1}{m} \int \frac{dz}{(2\pi q_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2q_0}\right) \ln \left[\int \frac{dy}{[2\pi(q_1 - q_0)]^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{y^2}{2(q_1 - q_0)}\right] \left\{ \text{ch}[\beta(z + y)] \right\}^m \right] - \ln 2. \quad (6.8)$$

Легко проверить, что в случаях $m = 0$ и $m = 1$ восстанавливается реплично-симметричное решение (раздел 5.4) с $q = q_0$ и $q = q_1$ соответственно.

Отметим теперь еще одно существенное обстоятельство. Дело в том, что в репличном формализме нужно искать не минимум, а максимум свободной энергии. Формальной причиной этого странного явления служит тот факт, что в пределе $n \rightarrow 0$ число компонент параметра порядка становится отрицательным, и это переворачивает все с ног на голову. Например, в рассматриваемом случае нарушения репличной симметрии на один шаг после перехода к пределу $n \rightarrow 0$ каждая строка матрицы \hat{Q} содержит $m - 1 < 0$ компонент, равных q_1 , и $n - m \rightarrow -m < 0$ компонент, равных q_0 . Легко также увидеть, как этот феномен проявляется в том случае, если свободная энергия содержит только квадратичный член вида

$$\frac{\beta}{n} \sum_{a < b} Q_{ab}^2$$

(это происходит в высокотемпературном пределе):

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\beta}{n} \sum_{a < b} Q_{ab}^2 \right) = -\frac{\beta}{2} [(1 - m)q_1^2 + mq_0^2]. \quad (6.9)$$

Очевидно, что в случае $0 \leq m \leq 1$ "правильный экстремум", в котором гессиан неотрицателен, это максимум, а не минимум f по отношению к q_1 и q_0 .

Для того чтобы в рассматриваемом случае получить уравнения на экстремум, нужно просто продифференцировать выражение (6.8) для свободной энергии по q_1 , q_0 и m . Мы опустим это небольшое алгебраическое упражнение, чтобы не перегружать статью слишком громоздкими формулами (которые на имеющемся уровне обсуждения едва ли добавят ясности). Результат численного решения этих уравнений состоит в следующем:

- 1) В низкотемпературной фазе при $T < 1$, где ожидается нарушение репличной симметрии, функция f действительно имеет максимум в определенной точке: $0 \leq m(T) \leq 1$, $0 \leq q_0(T) \leq 1$, $0 \leq q_1(T) \leq 1$ (причем $m \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 1$ и при $T \rightarrow 0$).

2) Хотя энтропия при низких температурах все равно становится отрицательной, величина этого отрицательного значения уменьшается по сравнению с



Рис. 13. Разделение реплик на группы при нарушении репличной симметрии на два шага

реплично-симметричным решением ($S(T = 0) \approx -0,001$, тогда как для реплично-симметричного решения $S(T = 0) \approx -0,17$).

3) Вычисление гессиана показывает, что вблизи T_c его наиболее отрицательное собственное значение равно $-c(T - T_c)^2/9$ (c — некоторое положительное число), тогда как для реплично-симметричного решения то же самое собственное значение равно $-c(T - T_c)^2$. Таким образом, неустойчивость уменьшается, условно говоря, в 9 раз.

Таким образом, мы видим, что построенное решение с нарушением репличной симметрии на один шаг, хотя и не совершенно, тем не менее существенно лучше, чем реплично-симметричное решение. Поэтому продолжим движение в выбранном направлении.

6.2. Полное нарушение репличной симметрии. Попробуем обобщить предложенную в предыдущем разделе структуру матрицы \hat{Q} , нарушая репличную симметрию на большее число шагов. Для этого введем набор целых чисел $m_i (i = 1, 2, \dots, k + 1)$, таких, что $m_0 = n$, $m_{k+1} = 1$ и все отношения m_i/m_{i+1} являются целыми числами. Затем разделим имеющиеся n реплик на n/m_1 групп, состоящих из m_1 реплик; каждую группу из m_1 реплик разделим на m_1/m_2 групп по m_2 реплик в каждой и т.д. (рис. 13). При этом все недиагональные элементы матрицы \hat{Q} определим следующим образом:

$$Q_{ab} = q_i,$$

если

$$I\left(\frac{a}{m_i}\right) \neq I\left(\frac{b}{m_i}\right), I\left(\frac{a}{m_{i+1}}\right) = I\left(\frac{b}{m_{i+1}}\right), \quad (6.10)$$

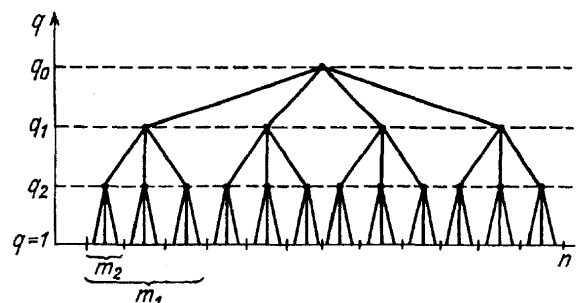


Рис. 14. Определение элементов матрицы Q_{ab} при нарушении репличной симметрии на два шага с помощью иерархического дерева

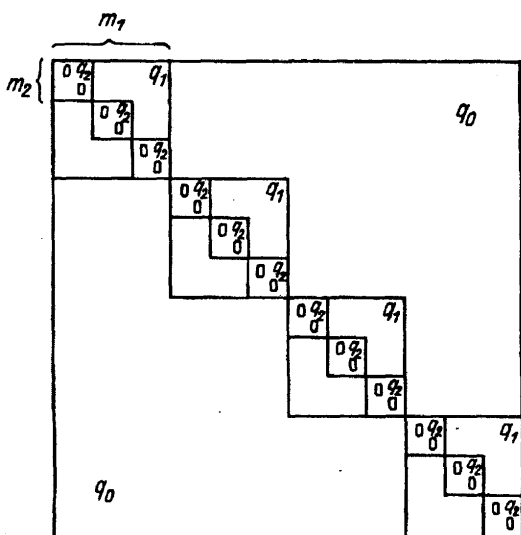


Рис. 15. Явный вид матрицы \$Q_{ab}\$ при нарушении репличной симметрии на два шага

где \$q_i\$ — это набор из \$k + 1\$ параметров (\$k = 1\$ соответствует рассмотренному в предыдущем разделе нарушению репличной симметрии на один шаг).

Определение элементов матрицы \$\hat{Q}\$ можно также представить с помощью иерархического дерева, изображенного на рис. 14: произвольный матричный элемент \$Q_{ab}\$ равен тому значению \$q_i\$, соответствующему \$i\$-му уровню дерева в "вертикальном" направлении, на котором линии, выходящие из \$a\$ и \$b\$, впервые встречаются.

В явном виде структура матрицы \$\hat{Q}\$ для случая \$k = 2\$ показана на рис. 15.

Теперь мы должны вычислить свободную энергию (6.2), (6.3), которая будет зависеть от \$k + 1\$ параметров \$q_i\$ и \$k\$ параметров \$m_i\$. После этого нужно перейти к пределу \$n \to 0\$. По определению, параметры \$m_i\$ вводились так, что \$1 \le m_{i+1} \le m_i \le n\$. Аналогично тому, как это было в случае нарушения репличной симметрии на один шаг, в пределе \$n \to 0\$ эти условия превращаются в \$0 \le m_i \le m_{i+1} \le 1\$. После вычисления свободной энергии параметры \$q_i\$ и \$m_i\$ определяются решением уравнений экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial f}{\partial m_i} = 0. \tag{6.11}$$

Вычисление свободной энергии проводится аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Результат выглядит следующим образом:

$$f[q_0, q_1, \dots, q_k; m_1, m_2, \dots, m_k] = -\frac{1}{4}\beta \left[1 + \sum_{i=1}^k (m_{i+1} - m_i) q_i^2 - 2q_k \right] - \frac{1}{m_1} \int \frac{dz_0}{(2\pi q_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z_0^2}{2q_0}\right) \times$$

$$\times \ln \left\{ \int \frac{dz_1}{[2\pi(q_1 - q_0)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{z_1^2}{2(q_1 - q_0)}\right] \times \right. \\ \times \left. \left\{ \int \frac{dz_2}{[2\pi(q_2 - q_1)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{z_2^2}{2(q_2 - q_1)}\right] \right\} \dots \right. \\ \dots \left. \left[\int \frac{dz_k}{[2\pi(q_k - q_{k-1})]^{1/2}} \exp\left[-\frac{z_k^2}{2(q_k - q_{k-1})}\right] \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\text{ch}\left(\beta \sum_{i=0}^k z_i\right) \right]^{m_k} \dots \right]^{m_2/m_3} \dots \left. \right]^{m_1/m_2} \Big\} - \ln 2. \tag{6.12}$$

К сожалению, для произвольного \$k\$ найти решение соответствующих уравнений на экстремум едва ли возможно (для \$k = 3\$ численное решение дает величину энтропии \$S(T = 0) \approx -0,003\$).

Для построения точного решения мы теперь должны перейти к пределу \$k \to \infty\$. В этом смысле предел \$n \to 0\$ достигается через взятие предела \$n \to \infty\$ (в действительности, в этом нет ничего сверхъестественного: на языке \$p\$-адических чисел, которые мы здесь не рассматриваем, хотя именно этот язык, возможно, наиболее адекватен для описания подобных конструкций, такой переход происходит совершенно естественным образом).

В пределе \$k \to \infty\$ вместо бесконечного набора параметров \$\{q_i\}\$ в качестве параметра порядка удобно ввести функцию \$q(x)\$, определяемую следующим образом:

$$q(x) = q_i, \text{ если } m_i \leq x \leq m_{i+1}. \tag{6.13}$$

В такой формулировке свободная энергия становится функционалом \$q(x)\$, и проблема состоит в том, чтобы найти максимум этого функционала по отношению к \$q(x)\$:

$$\frac{\delta f}{\delta q(x)} = 0. \tag{6.14}$$

Это уравнение определяет параметр порядка, которым является функция \$q(x)\$. К сожалению, решение этого уравнения при произвольной температуре может быть найдено только численно. Однако вблизи точки перехода \$T_c\$ все может быть сделано аналитически от начала и до конца, и это очень полезное упражнение, которое качественно демонстрирует, как устроена функция \$q(x)\$ и что происходит при понижении температуры и при включении внешнего магнитного поля. Тем не менее мы отложим рассмотрение этого упражнения до следующего раздела 7, где сначала (дабы разрядить возможно накапливающиеся недоумения) мы постараемся ответить на вопрос: "Что все это значит?"

Однако, прежде чем обратиться к этому неизбежному вопросу, я бы хотел закончить эту формальную главу следующей любопытной интерпретацией про-

блемы нахождения параметра порядка $q(x)$, рассмотренной выше. Оказывается (см. [13, 14]), что функционал $f[q(x)]$ (в присутствии внешнего магнитного поля h) может быть записан в компактном виде следующим образом:

$$f[q(x)] = -\frac{1}{4}\beta \left(1 + \int_0^1 dx q^2(x) - 2q(1)\right) - \frac{1}{\beta} A[q(x)], \quad (6.15)$$

где

$$A[q(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(2\pi q(0))^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2q(0)}\right) \times \\ \times g(0; z+h) \quad (6.16)$$

и функция $g(x; y)$ удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial g(x; y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{dq(x)}{dx} \left[\frac{\partial^2 g(x; y)}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + x \left(\frac{\partial g(x; y)}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (6.17)$$

с граничным условием

$$g(1; y) = \ln [2\text{ch}(\beta y)]. \quad (6.18)$$

Если $q(x)$ является монотонной функцией (а это, как можно доказать, действительно имеет место), то можно определить обратную функцию $x(q)$. Тогда уравнения на экстремум $\delta f/\delta q(x) = 0$ можно записать в компактном виде следующим образом:

$$q = \int dy m^2(q; y), \quad (6.19)$$

где функция $m(q; y) \equiv \partial g/\partial y$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial m(q; y)}{\partial q} = \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 m(q; y)}{\partial y^2} + 2x(q)m(q; y) \frac{\partial m(q; y)}{\partial y} \right). \quad (6.20)$$

Тем самым проблема формально сводится просто к решению дифференциальных уравнений. На практике, разумеется, это мало помогает (из-за закона неумножения неприятностей), хотя, возможно, кто-то может чувствовать себя более комфортно, зная о существовании подобной компактной математической формулировки.

7. Физика нарушения репличной симметрии. Забудем на время о репликах. Будем иметь в виду лишь тот общий факт, следующий из результатов предыдущей главы, что в низкотемпературной фазе, где реализуется состояние с нарушенной репличной симметрией, существует множество решений, соответствующих локальным экстремумам свободной

энергии. Этот вывод следует из того простого обстоятельства, что если только существует какое-либо нетривиальное решение ζ нарушенной репличной симметрией для матрицы \mathbf{Q} , то автоматически любая другая матрица, получаемая пермутацией строк и столбцов, также будет решением.

В этом разделе 7 мы попытаемся сконструировать такие физические величины и представления, которые могли бы объяснить физический смысл той довольно формальной и абстрактной конструкции, которую мы рассмотрели в предыдущем разделе 6.

7.1. Чистые состояния. Отвлечемся ненадолго от спиновых стекол и посмотрим, что происходит в простом и понятном ферромагнетике. Принято говорить, что при понижении температуры ниже T_c в ферромагнетике происходит спонтанное нарушение симметрии, которое проявляется в том, что в каждом узле возникают ненулевые термодинамические средние $\langle \sigma_i \rangle = \pm m$. Тем не менее в любой конечной системе (до перехода к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$) из-за симметрии гамильтониана все средние $\langle \sigma_i \rangle$ тождественно равны нулю, так как два состояния с намагниченностью m и $-m$ дают равный вклад в термодинамическое состояние системы. Однако если объем системы стремится к бесконечности, в термодинамическом пределе эти два состояния оказываются разделенными бесконечным барьером. Поэтому, если система оказалась в одной из них, она никогда не перейдет в другое, и в этом смысле реально наблюдаемым состоянием является не гиббсовское, а одно из таких двух состояний. Эти два состояния, характеризующиеся ненулевой намагниченностью в узлах $\pm m$ (и, соответственно, конечным магнитным моментом всей системы), можно назвать "чистыми" состояниями, чтобы отличать их от гиббсовского состояния, которое есть сумма чистых состояний.

Чистые состояния характеризуются, в частности, тем свойством, что связанные корреляционные функции, такие, например, как $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \equiv \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$, на больших расстояниях обращаются в нуль. Заметим в связи с этим, что в модели с дальним действием, которую мы рассматриваем в этой части обзора, все точки можно рассматривать как находящиеся на больших расстояниях друг от друга.

Исходя из наших упражнений по нахождению решений с нарушенной репличной симметрией, мы можем ожидать, что в спиновом стекле при низких температурах имеется много (бесконечно много в пределе $N \rightarrow \infty$) чистых состояний. Естественно, что эти состояния являются решениями репличных уравнений экстремума для свободной энергии (которые в действительности — просто усложненный ва-

риант обычных уравнений среднего поля для системы с беспорядком).

Настоящее гиббсовское состояние в спиновом стекле нужно поэтому рассматривать как сумму по чистым состояниям, взятым, естественно, с некоторыми весами в соответствии с их энергиями. В частности, такая величина, как термодинамическое среднее спиновой намагниченности в узле, может быть тогда представлена в следующем виде:

$$\langle \sigma_i \rangle = m_i = \sum_{\alpha} w_{\alpha} m_i^{\alpha}; \quad (7.1)$$

здесь α нумерует чистые состояния, а w_{α} — их статистические веса, которые можно представить в виде

$$w_{\alpha} = \exp(-F_{\alpha}), \quad (7.2)$$

где F_{α} — свободная энергия чистого состояния номер α .

Представление равновесного термодинамического состояния в виде линейной комбинации чистых состояний, в которых интенсивные величины имеют исчезающие на больших расстояниях флуктуации, является в действительности центральным моментом в точном определении спонтанного нарушения симметрии в статистической механике.

Точно так же можно представить двухточечный коррелятор:

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{\alpha}, \quad (7.3)$$

где $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{\alpha} = \langle \sigma_1 \rangle_{\alpha} \langle \sigma_2 \rangle_{\alpha}$ — двухточечная корреляционная функция в чистом состоянии номер α . Аналогичные выражения можно написать для любой многоточечной корреляционной функции.

7.2. Физический параметр порядка.

Естественно спросить, как чистые состояния отличаются друг от друга? Для этого можно ввести понятие расстояния в пространстве состояний. Расстояние между состоянием α и состоянием β можно определить, например, следующим образом:

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i^N (m_i^{\alpha} - m_i^{\beta})^2, \quad (7.4)$$

где $m_i^{\alpha} = \langle \sigma_i \rangle_{\alpha}$ и $m_i^{\beta} = \langle \sigma_i \rangle_{\beta}$. Комплементарной величиной к расстоянию является перекрытие между состояниями

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i^N m_i^{\alpha} m_i^{\beta}. \quad (7.5)$$

Очевидно, что $0 \leq |q_{\alpha\beta}| \leq 1$.

Для того чтобы описать статистику перекрытий между всеми возможными чистыми состояниями, введем функцию распределения перекрытий

$$P_j(q) = \sum_{\alpha\beta} w_{\alpha} w_{\beta} \delta(q_{\alpha\beta} - q). \quad (7.6)$$

Заметим, что функция $P_j(q)$ может зависеть (и действительно зависит) от конкретной реализации взаимодействий J_{ij} . Усредненная величина получается из $P_j(q)$ усреднением по случайным взаимодействиям:

$$P(q) = \langle \langle P_j(q) \rangle \rangle. \quad (7.7)$$

Функция $P(q)$ дает вероятность найти в системе два чистых состояния, имеющих перекрытие, равное q , при условии, что эти состояния берутся с их вероятностями появления в статистическом ансамбле.

Легко понять, что в обычном ферромагнетике функция $P(q)$ представляет собой δ -пик в точке $q = 0$ при $T > T_c$ и два δ -пика в точках $q = \pm m^2$ при $T < T_c$ (см. рис. 3).

В спиновом стекле, можем иметь при низких температурах множество чистых состояний, функция $P(q)$ может оказаться существенно менее тривиальной. Более того, поскольку веса w_{α} могут сильно флуктуировать в зависимости от конкретной реализации взаимодействий J_{ij} (благодаря дальнодействию, имеющемуся в модели Шеррингтона—Киркпатрика, добавление единственного спина существенно изменяет величину w_{α}), функция $P(q)$ может также сильно флуктуировать в зависимости от J_{ij} .

Именно функция $P(q)$ является тем параметром порядка, который наиболее полно описывает главные особенности спин-стекольной фазы. Нетривиальная структура этой функции (которую, как мы увидим далее, можно вычислить репличным методом) демонстрирует существенное отличие спинового стекла от нормальных магнетиков. Если, скажем, имеется случайная спиновая система, которая при низких температурах "замерзает" в случайном состоянии и если таких состояний только два (связанных глобальным изменением знаков спинов), т.е. это глобальные минимумы энергии, то в такой системе: функция $P(q)$ при низких температурах будет представлять собой, как и в ферромагнетике, сумму двух дельта-функций. В этом смысле такая система, хотя на вид и случайная, относится к "нормальным" магнетикам (условно говоря, находится в том же классе систем, что и ферромагнетик) и к спиновым стеклам отношения не имеет. Фазовый переход в таких системах в терминах параметра порядка "функция $P(q)$ " характеризуется тем, что при понижении температуры ниже T_c происходит бифуркация одной дельта-функции на две.

Функция распределения $P(q)$ представляет собой намного более общее понятие, чем обычный пара-

метр порядка (скалярный, векторный, матричный, или более сложный), которыми обычно описываются традиционные фазовые переходы. Эта функция есть реализация того факта, что для описания спин-стеклоного состояния требуется бесконечное число параметров порядка.

7.3. Параметр порядка $P(q)$ и реплики. Посмотрим теперь, как этот физический параметр порядка — функция распределения $P(q)$ — может быть вычислен в рамках репличного подхода.

Рассмотрим следующий ряд корреляционных функций:

$$\begin{aligned}
 q_J^{(1)} &= \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle^2, \\
 q_J^{(2)} &= \frac{1}{N^2} \sum_{i_1 i_2} \langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \rangle^2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_J^{(k)} &= \frac{1}{N^k} \sum_{i_1 \dots i_k} \langle \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \rangle^2.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Используя представление гиббсовских средних в терминах чистых состояний, корреляторы (7.8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 q_J^{(1)} &= \frac{1}{N} \sum_i \left(\sum_\alpha w_\alpha \langle \sigma_i \rangle_\alpha \right) \left(\sum_\beta w_\beta \langle \sigma_i \rangle_\beta \right) = \\
 &= \sum_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta q_{\alpha\beta} = \int dq P_J(q) q, \\
 q_J^{(2)} &= \frac{1}{N^2} \sum_{i_1 i_2} \left(\sum_\alpha w_\alpha \langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \rangle_\alpha \right) \times \\
 &\times \left(\sum_\beta w_\beta \langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \rangle_\beta \right) = \\
 &= \sum_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta \left(\frac{1}{N} \sum_{i_1} \langle \sigma_{i_1} \rangle_\alpha \langle \sigma_{i_1} \rangle_\beta \right) \times \\
 &\times \left(\frac{1}{N} \sum_{i_2} \langle \sigma_{i_2} \rangle_\alpha \langle \sigma_{i_2} \rangle_\beta \right) = \\
 &= \sum_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta (q_{\alpha\beta})^2 = \int dq P_J(q) q^2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_J^{(k)} &= \int dq P_J(q) q^k.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

При выводе уравнений (7.9) был использован тот факт, что в чистых состояниях связанные корреляци-

онные функции исчезают в пределе $N \rightarrow \infty$. Например, для двухточечной корреляционной функции разность $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_\alpha - \langle \sigma_i \rangle_\alpha \langle \sigma_j \rangle_\alpha$ должна быть порядка $N^{-\delta}$, где $\delta > 0$ и, таким образом,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{ij} (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_\alpha - \langle \sigma_i \rangle_\alpha \langle \sigma_j \rangle_\alpha)^2 \right] = 0. \tag{7.10}$$

Из (7.8) и (7.9) легко получить результаты для соответствующих корреляционных функций, усредненных по J_{ij} , а именно,

$$\begin{aligned}
 q^{(1)} &\equiv \langle \langle q_J^{(1)} \rangle \rangle = \\
 &= \langle \langle \langle \sigma_i \rangle^2 \rangle \rangle = \int dq P(q) q, \\
 &\dots\dots\dots \\
 q^{(k)} &\equiv \langle \langle q_J^{(k)} \rangle \rangle = \\
 &= \langle \langle \langle \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \rangle^2 \rangle \rangle = \int dq P(q) q^k,
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

где $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$.

Ключевым моментом в изложенной выше схеме является то, что, по крайней мере в принципе, функция $P(q)$, которая по своему определению описывает чистые состояния, может быть вычислена из средних многоточечных спиновых корреляторов в *гиббсовском состоянии*. Таким образом, можно как бы обойти стороной то деликатное обстоятельство, что каждое в отдельности чистое состояние, которым мы оперируем, не вполне по-настоящему определено.

Теперь, если мы вычислим многоточечные спиновые корреляторы в гиббсовском состоянии с помощью репличного подхода, то, тем самым, мы установим связь между репликами и физическим параметром порядка.

Если немного подумать, то довольно легко увидеть, что согласно определению (7.6) функция распределения $P(q)$ может быть записана в терминах распределения Гиббса для *двух* идентичных систем (реплик) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_J(q) &= \\
 &= \frac{1}{Z^2} \sum_\sigma \sum_s \exp(-\beta H[\sigma]) \times \\
 &\times \exp(-\beta H[s]) \delta \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i s_i - q \right),
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$P(q) = \langle \langle P_J(q) \rangle \rangle.$$

Очевидно, что это выражение дает относительное число пар термодинамически релевантных состояний, имеющих перекрытие, равное q .

Теперь можно выписать в репликах выражения для спиновых корреляционных моментов (7.8). Для

$q^{(1)}$ имеем

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \\ &= \langle\langle \frac{1}{Z^2} \sum_{\sigma} \sum_s (\sigma_i s_i) \exp(-\beta H[\sigma] - \beta H[s]) \rangle\rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\prod_{a=1}^n \sum_{\sigma^a} \right) \langle\langle \sigma_i^b \sigma_i^c \rangle\rangle \exp\left(-\beta \sum_{a=1}^n H[\sigma^a]\right) \equiv \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow 0} \langle\langle \langle \sigma_i^b \sigma_i^c \rangle \rangle \rangle \quad (b \neq c); \end{aligned} \quad (7.13)$$

здесь b и c — две фиксированные различные реплики (суммирование по спинам остальных $n - 2$ реплик в (7.13) дает фактор Z^{n-2} , который превращается в Z^2 в пределе $n \rightarrow 0$).

Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned} q^{(2)} &= \lim_{n \rightarrow 0} \langle\langle \langle \langle \sigma_{i_1}^a \sigma_{i_2}^a \sigma_{i_1}^b \sigma_{i_2}^b \rangle \rangle \rangle \rangle \\ &(i_1 \neq i_2; a \neq b), \\ &\dots\dots\dots \\ q^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow 0} \langle\langle \langle \langle \langle \sigma_{i_1}^a \dots \sigma_{i_k}^a \sigma_{i_1}^b \dots \sigma_{i_k}^b \rangle \rangle \rangle \rangle \\ &(i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k; a \neq b). \end{aligned} \quad (7.14)$$

В предыдущем разделе 6 мы видели, что в пределе $N \rightarrow \infty$ при вычислении усредненной по беспорядку свободной энергии происходит ее факторизация на независимые репличные свободные энергии в каждом узле. Поэтому результат (7.14) для $q^{(k)}$ можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow 0} [\langle\langle \langle \langle \sigma_i^a \sigma_i^b \rangle \rangle \rangle \rangle]^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} [Q_{ab}]^k, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где (см. раздел 5.3)

$$Q_{ab} = \langle\langle \langle \langle \sigma_i^a \sigma_i^b \rangle \rangle \rangle \rangle. \quad (7.16)$$

Это та самая репличная матрица, рассматривавшаяся в предыдущем разделе 6, которая определяет структуру спин-стекольного состояния и должна находиться из уравнений экстремума свободной энергии.

Поскольку в решении с нарушенной репличной симметрией матричные элементы Q_{ab} не равны между собой, следует учитывать, что при термодинамическом усреднении нужно суммировать по всем имеющимся решениям для матрицы Q_{ab} . Все имеющиеся решения получают друг из друга пермутациями строк и столбцов этой матрицы: если найдено какое-то решение для Q_{ab} , то любая другая матрица, получающаяся пермутациями строк и столбцов, также автоматически является решением. Суммирование по пермутациям в данном случае есть просто суммирование по индексам a и b . Поэтому правильный

результат для коррелятора $q^{(k)}$ выглядит следующим образом:

$$q^{(k)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{a < b} [Q_{ab}]^k; \quad (7.17)$$

здесь $2/n(n-1)$ — нормировочный фактор, который равен числу всех пар репличных индексов.

Результаты (7.17) и (7.11) показывают, что решение для матрицы Q_{ab} , найденное в предыдущем разделе 6, позволяет, по крайней мере в принципе, полностью определить функцию распределения $P(q)$ для чистых состояний (введенную первоначально из чисто физических соображений вне всякой связи с нарушением репличной симметрии). Из этих двух уравнений следует, что в явном виде функцию распределения $P(q)$ можно представить следующим образом:

$$P(q) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{a < b} \delta(Q_{ab} - q). \quad (7.18)$$

Вычислим теперь, как выглядит эта функция для конкретного решения с нарушенной репличной симметрией, найденного в предыдущем разделе 6. Согласно общей схеме при нарушении репличной симметрии на k шагов (раздел 6.2) можно легко убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{a,b} [Q_{ab}]^l = - \sum_{i=0}^k (m_{i+1} - m_i) q_i^l. \quad (7.19)$$

В непрерывном пределе, при $k \rightarrow \infty$, это приводит к результату

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{a,b} [Q_{ab}]^l = - \int_0^1 dx q^l(x). \quad (7.20)$$

Таким образом, для коррелятора $q^{(k)}$ (7.17) получаем

$$q^{(k)} = \int_0^1 dx q^k(x). \quad (7.21)$$

Если $q(x)$ — монотонная функция, то можно ввести обратную функцию $x(q)$. Тогда результат (7.21) для $q(x)$ можно представить в виде

$$q^{(k)} = \int_0^1 dq \frac{dx(q)}{dq} q^k. \quad (7.22)$$

С другой стороны, как мы уже знаем (7.11),

$$q^{(k)} = \int_0^1 dq P(q) q^k. \quad (7.23)$$

Таким образом, мы получаем

$$P(q) = \frac{dx(q)}{dq}. \quad (7.24)$$

Это и есть та самая ключевая формула, которая ус-

танавливает связь между физическим параметром порядка — функцией распределения $P(q)$ — и формальным решением с нарушенной репличной симметрией, которое описывается функцией $q(x)$. Результат (7.24) можно представить и по-другому:

$$x(q) = \int_0^q dq' P(q'). \quad (7.25)$$

Таким образом, если спросить, какой непосредственный смысл у функции $q(x)$, то ответить можно следующим образом: обратная к $q(x)$ функция $x(q)$ дает вероятность найти в системе пару чистых состояний, перекрытие между которыми не больше q .

Чтобы понять теперь, хотя бы на качественном уровне, как устроена функция $P(q)$ для спинового стекла, очень поучительно найти в явном виде решение с нарушенной репличной симметрией, т.е. функцию $q(x)$ вблизи температуры перехода T_c .

7.4. Решение с нарушенной репличной симметрией вблизи T_c . Вблизи температуры перехода $T_c = 1$, когда имеется малый параметр $\tau = 1 - T \ll 1$, решение для функции $q(x)$ можно найти аналитически. Связано это с тем, что вблизи точки фазового перехода второго рода параметр порядка мал, и можно устроить разложение по его степеням. В рассматриваемом случае можно предположить, что все матричные элементы Q_{ab} малы, и это позволяет разложить по степеням \hat{Q} свободную энергию (6.2):

$$f[\hat{Q}] = -\frac{1}{4}\beta + \frac{b}{2n} \sum_{a < b}^n Q_{ab}^2 - \frac{1}{\beta n} \log \left[\sum_{\sigma_a} \exp \left(\beta^2 \sum_{a < b}^n Q_{ab} \sigma_a \sigma_b \right) \right]. \quad (7.26)$$

Разложение этого выражения по степеням \hat{Q} не представляет никаких трудностей (требуется лишь немного терпения). Результат разложения до четвертого порядка имеет вид

$$f[\hat{Q}] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{2} \tau \text{Tr}(\hat{Q})^2 - \frac{1}{6} \text{Tr}(\hat{Q})^3 - \frac{1}{12} \sum_{a,b} (Q_{ab})^4 + \frac{1}{4} \sum_{a,b,c} Q_{ab}^2 Q_{ac}^2 - \frac{1}{8} \text{Tr}(\hat{Q})^4 \right]. \quad (7.27)$$

В этом выражении везде, кроме первого члена, подставлено $T = T_c = 1$, а Tr — это стандартный трейс в n -мерном векторном пространстве.

Изучение устойчивости реплично-симметричного решения показывает, что к неустойчивости этого решения приводит член четвертого порядка $\sum_{a,b} Q_{ab}^4$, и поэтому именно он приводит к нарушению

репличной симметрии. Выражается это в том, что при нахождении решения в главном порядке по τ два последних члена четвертого порядка в (7.27) оказываются более высокого порядка по τ , чем все остальные. Таким образом, предлагается следующая последовательность действий: мы отбросим два последних члена в (7.27), найдем решение для $q(x)$ и затем легко проверим, используя это решение, что эти два члена действительно оказываются более высокого порядка по τ .

Следуя общей схеме нарушения репличной симметрии (раздел 6.2), легко убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{a,b} (Q_{ab})^l = \sum_{i=0}^k (m_i - m_{i+1}) q_i^l - \int_0^1 dx q^l(x), \quad (7.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \text{Tr}(\hat{Q})^3 = \int_0^1 dx \left(x q^3(x) + 3q(x) \int_0^x dy q^2(y) \right). \quad (7.29)$$

Таким образом, для свободной энергии получаем

$$f[q(x)] = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx (\tau q^2(x) - \frac{1}{3} x q^3(x) - q(x) \int_0^x dy q^2(y) + \frac{1}{6} q^4(x)). \quad (7.30)$$

Варьирование этого выражения по $q(x)$ приводит к уравнению

$$2\tau q(x) - x q^2(x) - 2q(x) \int_x^1 dy q(y) - \int_0^x dy q^2(y) + \frac{2}{3} q^3(x) = 0. \quad (7.31)$$

Решить это уравнение несложно. Продифференцируем (7.31) по x :

$$q'(x) (2\tau - 2xq(x) - \int_x^1 dy q(y) + 2q^2(x)) = 0. \quad (7.32)$$

Из этого уравнения следует, что либо

$$2\tau - 2xq(x) - 2 \int_x^1 dy q(y) + 2q^2(x) = 0, \quad (7.33)$$

либо

$$q'(x) = 0. \quad (7.34)$$

Последнее уравнение означает, что $q(x) = \text{const}$, что

соответствует реплично-симметричному решению. Рассмотрим поэтому, что дает уравнение (7.33). Дифференцируя его еще один раз по x , получаем

$$q(x) = \frac{1}{2} x. \tag{7.35}$$

Таким образом, если мы предполагаем, что функция $q(x)$ непрерывна, то общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0, & 0 \leq x \leq x_0, \\ &= \frac{1}{2} x, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ &= q_1, & x_1 \leq x \leq 1, \end{aligned} \tag{7.36}$$

где

$$x_1 = 2q_1, \quad x_0 = 2q_0. \tag{7.37}$$

Подставляя это решение в исходное уравнение, в точках $x = x_0$ и $x = x_1$, получаем

$$\begin{aligned} q_0(2\tau - 2q_1 + 2q_1^2) - \frac{4}{3} q_0^3 &= 0, \\ q_1(2\tau - 2q_1 + 2q_1^2) - \frac{4}{3} q_0^3 &= 0. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\begin{aligned} q_0 &= 0, \\ q_1 &= \tau + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{7.39}$$

Теперь можно легко убедиться, даже не производя никаких вычислений, что последние два члена в разложении свободной энергии (7.27) дают вклад более высокого порядка по τ , чем все остальные. Связано это с тем, что они содержат дополнительные суммирования по репличным индексам: каждое лишнее суммирование по репличным индексам в пределе $n \rightarrow 0$ приводит к дополнительному интегрированию по x (либо клишней степени x), что, как легко видеть из решения (7.36), (7.37), (7.39), приводит к дополнительной степени τ .

Заметим, что все полученные результаты легко обобщаются на случай ненулевого внешнего магнитного поля h (см., например, [1]). Если магнитное поле мало, то в главном порядке величина q_1 и сама функция $q(x)$ на интервале $x_0 \leq x \leq x_1$ не изменяются, а

$$q_0 \approx \frac{3}{4} h^{2/3},$$

и, соответственно,

$$x_0 \approx \frac{3}{2} h^{2/3}.$$

Это приводит к тому, что если магнитное поле достигает величины

$$h_c(\tau) \approx \left(\frac{4}{3}\tau\right)^{2/3}, \tag{7.40}$$

когда $x_0 = x_1$, решение для $q(x)$ становится реплично-симметричным. Линия $h_c(T)$, уравнение которой можно вычислить для произвольной величины магнитного поля и температуры, называют линией de

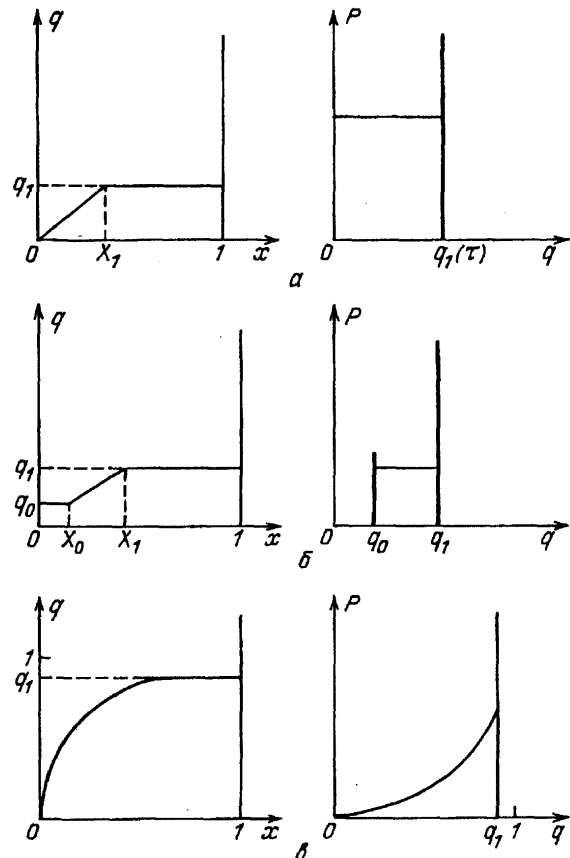


Рис. 16. Поведение функций $q(x)$ и $P(q)$ в нулевом магнитном поле и $1 - T \ll 1$ (а), при $0 < h < h_c(T)$ и $1 - T \ll 1$ (б) и при $h = 0$ и $T \ll 1$ (в)

Almeida—Thouless [12]. Можно показать, что при $h > h_c(T)$ реплично-симметричное решение становится устойчивым.

Итак, используя полученный результат для функции $q(x)$ и зная соотношение (7.24), легко вычислить функцию распределения $P(q)$:

$$P(q) = x_0 \delta(q - q_0) + x_1 \delta(q - q_1) + p(q), \tag{7.41}$$

где $p(q)$ — гладкая функция на интервале $q_0 \leq q \leq q_1$. В рассматриваемом случае $\tau \ll 1$ легко видеть, что $p(q) = 2$.

Результат (7.41) показывает, что если мы будем случайным образом в соответствии с их термодинамическими весами выбирать пары чистых состояний, то:

1) существует конечная вероятность x_1 того, что эти состояния окажутся одним и тем же состоянием, и в этом случае перекрытие окажется максимально возможным, равным q_1 ;

2) если магнитное поле $h \neq 0$, существует конечная вероятность x_0 , что эти два состояния окажутся "максимально удаленными" друг от друга, и перекрытие между ними будет равно минимально возможному значению q_0 ;

3) существует конечная вероятность, равная $1 - x_1 - x_0$ промежуточной ситуации; эту промежуточную ситуацию можно описать следующим образом; если мы возьмем некоторое число q , принадлежа-

шее интервалу (q_0, q_1) , и рассмотрим некоторый малый интервал $(q, q + \delta q)$ возле этого числа, существует конечная вероятность $p(q) \delta q$ найти два состояния, имеющих перекрытие в этом малом интервале.

Хотя при произвольных значениях температуры и магнитного поля вычислить аналитически $q(x)$ и $P(q)$ очень трудно, качественно их поведение остается таким же. Единственная разница состоит в том, что на интервалах $x_0 \leq x \leq x_1$ и $q_0 \leq q \leq q_1$ функции $q(x)$ и $P(q)$ не столь тривиальны, как те, что мы вычислили вблизи T_c , и значения x_0, x_1, q_0, q_1 зависят от температуры и магнитного поля более сложным образом.

Качественное поведение $q(x)$ и $P(q)$ при различных значениях температуры и магнитного поля изображено на рис. 16.

8. Ультраметричность. Результаты решения с нарушенной репличной симметрией и вычисление функции распределения $P(q)$ показывают, что пространство состояний в спиновом стекле имеет весьма нетривиальную структуру. К сожалению, самой функции $P(q)$ недостаточно для того, чтобы понять, какова эта структура. Для этого нужно вычислить свойства, условно говоря, более высоких корреляций в пространстве состояний. Результат этого вычисления показывает, что пространство состояний спинового стекла обладает ультраметричной топологией и может быть описано в терминах иерархического дерева. Этим мы и займемся в настоящем разделе 8.

8.1. Доказательство ультраметричности пространства состояний. По аналогии с тем, как вводилась функция $P(q)$ для описания статистики перекрытий пар состояний, введем функцию $P(q_1, q_2, q_3)$, которая описывала бы совместную статистику парных перекрытий для *трех состояний*. А именно, рассмотрим распределение вероятности того, что для произвольных трех чистых состояний α, β и γ три их взаимные парные перекрытия $q_{\alpha\beta}, q_{\alpha\gamma}$ и $q_{\beta\gamma}$ равны q_1, q_2 и q_3 :

$$P(q_1, q_2, q_3) = \langle \langle \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w_\alpha w_\beta w_\gamma \delta(q_1 - q_{\alpha\beta}) \delta(q_2 - q_{\alpha\gamma}) \delta(q_3 - q_{\beta\gamma}) \rangle \rangle. \quad (8.1)$$

Вычисления, совершенно аналогичные тем, что привели к результату (7.18) для функции $P(q)$, позволяют представить эту вероятность в терминах репличного решения \hat{Q} следующим образом:

$$P(q_1, q_2, q_3) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \times \sum_{a \neq b \neq c} \delta(Q_{ab} - q_1) \delta(Q_{ac} - q_2) \delta(Q_{bc} - q_3). \quad (8.2)$$

Удивительное свойство функции $P(q_1, q_2, q_3)$, которое можно вывести непосредственно из решения с нарушенной репличной симметрией для матрицы \hat{Q} , состоит в том, что она тождественно равна нулю, если все три перекрытия q_1, q_2 и q_3 разные, и не равна нулю, только когда, по крайней мере, два из трех этих перекрытий равны между собой и при этом не превосходят по величине третье. Другими словами, пространство состояний устроено таким образом, что треугольники в нем могут быть только равнобедренными или равносторонними.

Проделаем эти простые вычисления. Произведем преобразование Фурье:

$$g(y_1, y_2, y_3) = \int dq_1 dq_2 dq_3 P(q_1, q_2, q_3) \times \exp(iq_1 y_1 + iq_2 y_2 + iq_3 y_3). \quad (8.3)$$

В результате из уравнения (8.2) получим

$$g(y_1, y_2, y_3) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \times \sum_{a \neq b \neq c} \exp(iQ_{ab} y_1 + iQ_{ac} y_2 + iQ_{bc} y_3) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \text{Tr}(\hat{A}(y_1) \hat{A}(y_2) \hat{A}(y_3)), \quad (8.4)$$

где

$$A_{ab}(y) = \exp(iQ_{ab} y), \quad a \neq b, \\ = 0, \quad a = b. \quad (8.5)$$

Подставим теперь в (8.4) решение для матрицы \hat{Q} с нарушенной репличной симметрией. Согласно общей схеме, матрица \hat{Q} в пределе $n \rightarrow 0$ превращается в функцию $q(x)$. Легко проверить, что при этом матрица $A_{ab}(y)$ превращается в функцию $A(x; y)$:

$$A(x; y) = \exp(iq(x)y). \quad (8.6)$$

Простые вычисления (см. также (7.29)) дают

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \text{Tr}(\hat{A}(y_1) \hat{A}(y_2) \hat{A}(y_3)) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx (xA(x; y_1) A(x; y_2) A(x; y_3) + A(x; y_1) \int_0^x dz A(z; y_2) A(z; y_3) + A(x; y_2) \int_0^x dz A(z; y_1) A(z; y_3) + A(x; y_3) \int_0^x dz A(z; y_1) A(z; y_2)). \quad (8.7)$$

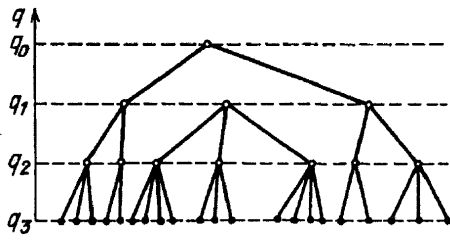


Рис. 17. Ультраметричное дерево состояний спинового стекла

Соответственно, для исходной функции

$$P(q_1, q_2, q_3) = \int dy_1 dy_2 dy_3 g(y_1, y_2, y_3) \exp(-iq_1 y_1 - iq_2 y_2 - iq_3 y_3) \quad (8.8)$$

получаем

$$P(q_1, q_2, q_3) = \int_0^1 dx (x \delta(q(x) - q_1) \delta(q(x) - q_2) \delta(q(x) - q_3) + \delta(q(x) - q_1) \int_0^x dz \delta(q(z) - q_2) \delta(q(z) - q_3) + \delta(q(x) - q_2) \int_0^x dz \delta(q(z) - q_1) \delta(q(z) - q_3) + \delta(q(x) - q_3) \int_0^x dz \delta(q(z) - q_1) \delta(q(z) - q_2)). \quad (8.9)$$

Заменяя интегрирование по x на интегрирование по q и с учетом, что $dx(q)/dq = P(q)$, получаем окончательный результат

$$P(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2} P(q_1) x(q_1) \delta(q_1 - q_2) \delta(q_1 - q_3) + \frac{1}{2} P(q_1) P(q_2) \theta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \frac{1}{2} P(q_2) P(q_3) \theta(q_2 - q_3) \delta(q_3 - q_1) + \frac{1}{2} P(q_3) P(q_1) \theta(q_3 - q_1) \delta(q_1 - q_2). \quad (8.10)$$

Из этого выражения очевидным образом следует то свойство, которое было объявлено в начале главы: $P(q_1, q_2, q_3)$ не равна нулю, только если, по крайней мере, два из трех перекрытий равны между собой и при этом не больше, чем треть. Хотелось бы подчеркнуть, что результат (8.10) есть прямое следствие той иерархической блочной структуры матрицы \hat{Q} , которая осуществляет решение с нарушенной репличной симметрией.

Итак, мы пришли к понятию *ультраметричности*. Ультраметричным называют пространство, метрика в котором такова, что для любых трех точек a , b и c расстояния между этими точками удовлетворяют неравенству

$$d_{ab} \leq \max(d_{ac}, d_{bc}), \quad (8.11)$$

в отличие от "обычных" пространств, где выполняется неравенство треугольника

$$d_{ab} \leq d_{ac} + d_{bc}. \quad (8.12)$$

Легко видеть, что свойство (8.11) автоматически означает, что все треугольники в ультраметричном пространстве либо равнобедренные, либо равнобедренные.

Проще всего ультраметричное пространство можно представить с помощью иерархического дерева (рис. 17). Множество точек, которые образуют такое пространство, нужно привести во взаимно однозначное соответствие с концевыми точками дерева. Метрику в этом пространстве нужно ввести следующим образом: расстояние между любыми двумя точками пространства зависит только от числа "поколений", которые отделяют последний уровень дерева, на котором находятся эти точки, от того уровня, на котором "ветви", выходящие из концевых точек, впервые встречаются. Каждый может легко проверить, что при таком определении расстояния, пространство концевых точек дерева ультраметрично.

Хотя на первый взгляд может показаться, что вся эта ультраметричная структура есть нечто чрезвычайно искусственное, очень специальное и невообразимое, дальнейшее изучение этого феномена убеждает скорее в обратном. Подробное описание ультраметричных пространств читатель может найти в прекрасном обзоре [6]. Здесь мы ограничимся общим описанием лишь тех моментов, которые имеют непосредственное отношение к физической картине; спин-стекольного состояния.

8.2. Дерево состояний. Имея в виду, что пространство состояний спинового стекла может быть представлено в виде иерархического дерева, попробуем "построить" такое дерево по возможности в наиболее общем виде с тем, чтобы просто понять, какими параметрами и степенями свободы оно может быть описано. (Разумеется, в рассматриваемом здесь модели с дальнодействием имеется совершенно определенное дерево состояний, и конкретные параметры, задающие его структуру, известны, но об этом немного позже.)

Рассмотрим следующий дискретный стохастический процесс, состоящий из L шагов и происходящий *независимо* на каждом узле i решетки:

1. На первом шаге с некоторой вероятностью $P_0(y)$

выберем n_1 случайных чисел y^{α_1} ($\alpha_1 = 1, 2, \dots, n_1$), принадлежащих интервалу $[-1, +1]$.

2. На втором шаге для каждого из чисел y^{α_1} с некоторой условной вероятностью $P_1(y^{\alpha_1}|y)$ выберем n_2 случайных чисел $y^{\alpha_1\alpha_2}$ ($\alpha_2 = 1, 2, \dots, n_2$), принадлежащих тому же интервалу $[-1, +1]$.

3. На третьем шаге опять для каждого из чисел $y^{\alpha_1\alpha_2}$ с некоторой условной вероятностью $P_2(y^{\alpha_1\alpha_2}|y)$ выберем n_3 случайных чисел $y^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ ($\alpha_3 = 1, 2, \dots, n_3$), принадлежащих тому же интервалу $[-1, +1]$.

.....

Продолжим этот процесс вплоть до L -го шага. В результате мы получим иерархическое дерево из $n_1 n_2 \dots n_L$ чисел, принадлежащих интервалу $[-1, +1]$ и описываемых набором некоторых функций вероятности

$$P_{l-1}(y^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} | y^{\alpha_1 \dots \alpha_l}) \quad (l = 1, 2, \dots, L). \quad (8.13)$$

Прделаем этот стохастический (марковский) процесс *независимо* в каждом узле i нашей системы и для каждого полученного набора чисел определим спиновое состояние системы следующим образом:

$$\sigma^{\alpha_1 \dots \alpha_L} = \text{sign} y^{\alpha_1 \dots \alpha_L}. \quad (8.14)$$

В результате этого построения мы получим набор из $n_1 n_2 \dots n_L$ спиновых состояний, однако занумерованы они не "подряд", а специальным иерархическим образом с, помощью своеобразного индексного "адреса" $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L$, который непосредственно указывает на степень близости состояний в соответствии с "историей" их происхождения: чем длиннее совпадающее начало "адреса" у двух состояний, тем ближе их "родство".

Простые вероятностные соображения приводят к выводу, что перекрытие между любыми двумя состояниями в так построенном дереве зависит только от степени их "родства", т.е. только от номера того порядка в "адресе", начиная с которого адреса состояний начинают отличаться. Допустим, мы имеем два состояния, адреса которых имеют вид

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \alpha_{l+1} \alpha_{l+2} \dots \alpha_L$$

и

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \beta_{l+1} \beta_{l+2} \dots \beta_L,$$

т.е. они отличаются, начиная с уровня l . В этом случае перекрытие между этими двумя состояниями

$$q_{\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_{l+1} \dots \beta_L}^{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L} \sigma_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_{l+1} \dots \beta_L} \quad (8.15)$$

в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, ввиду независимости стохастических процессов в узлах может

быть представлено в виде

$$\int_{-1}^{+1} dy_1 \dots dy_l P_0(y_1) P_1(y_1 | y_2) \dots P_{l-1}(y_{l-1} | y_l) \times \int_{-1}^{+1} dy_{l+1} \dots dy_L P_l(y_l | y_{l+1}) P_{l+1}(y_{l+1} | y_{l+2}) \dots \dots P_{L-1}(y_{L-1} | y_L) \text{sign } y_L \Big)^2 \equiv q_l. \quad (8.16)$$

Таким образом, это перекрытие зависит *только* от номера l , на котором произошло разветвление адресов состояний, и не зависит от самих этих конкретных состояний. Легко понять, что это автоматически означает, что так построенное дерево спиновых состояний является ультраметричным.

Подчеркнем, что это совершенно общее свойство подобной стохастической процедуры построения дерева состояний, и оно выполняется, каковы бы ни были конкретные распределения вероятностей (8.13), задающие конкретное дерево. Связано это с очень простым обстоятельством. Дело в том, что описанная выше процедура "выращивания" дерева есть процесс случайного ветвления, которое происходит в бесконечномерном (в пределе $N \rightarrow \infty$) пространстве. А в бесконечномерном пространстве ветви, которые однажды разошлись, больше никогда близко друг к другу не подходят. Поэтому нет ничего удивительного, что ультраметричность в Природе наблюдается сплошь и рядом — будь то в пространстве видов биологической эволюции или в иерархической государственной структуре, построенной в неупорядоченном обществе.

Рассмотрим построенное дерево состояний более подробно. Уравнения для перекрытий между состояниями дерева (8.15), (8.16) можно выразить в терминах так называемых *предпочных* состояний $m^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$.

$$q_l = \frac{1}{N} \sum_i^N (m_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l})^2, \quad (8.17)$$

где узельные намагниченности в предпочном состоянии уровня l определяются следующим образом:

$$m_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \langle \sigma_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L} \rangle_{(\alpha_{l+1} \dots \alpha_L)} \equiv m_l(y_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l}); \quad (8.18)$$

здесь $\langle \dots \rangle_{(\alpha_{l+1} \dots \alpha_L)}$ означает усреднение по всем состояниям (ветвям) дерева, выходящим из ветви $\alpha_1 \dots \alpha_l$ на уровне l . Очевидно, что

$$m_l(y_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l}) = \int_{-1}^{+1} dy_{l+1} \dots dy_L P_l(y_i^{\alpha_1 \dots \alpha_l} | y_{l+1}) \times \dots P_{l+1}(y_{l+1} | y_{l+2}) \dots P_{L-1}(y_{L-1} | y_L) \text{sign } y_L. \quad (8.19)$$

Это уравнение для величины $m_l(y)$ можно также пе-

реписать в следующем рекуррентном виде:

$$m_l(y) = \int_{-1}^{+1} dy' P_{ll'}(y|y') m_{l'}(y'), \quad (8.20)$$

где

$$P_{ll'}(y|y') = \int_{-1}^{+1} dy_{l+1} \dots dy_{l-1} P_l(y|y_{l+1}) \times \\ \times P_{l+1}(y_{l+1}|y_{l+2}) \dots P_{l'-1}(y_{l'-1}|y'). \quad (8.21)$$

Таким образом, все конкретные статистические свойства дерева состояний, в том числе значения $\{q_l\}$ полностью определяются набором функций вероятности (8.13) или (8.21). Для того чтобы сказать, что мы полностью описали какую-либо спин-стекольную систему, эти функции должны быть вычислены или, по крайней мере, должны быть заданы какие-то конкретные алгоритмы, их определяющие. В частности, это можно сделать для модели Шеррингтона—Киркпатрика, которую мы здесь рассматриваем. Однако, к сожалению, конкретные вычисления, которые для этого необходимо проделать, достаточно болезненны и трудоемки, поэтому мне кажется, что всем будет лучше, если я их опущу и сообщу только результат, тем более что этот результат довольно прост (детали этих вычислений можно найти в оригинальных работах [15], [16]).

Итак, ультраметрическое дерево чистых состояний, которое имеется в модели Шеррингтона—Киркпатрика, описывается случайным процессом ветвления, который (при $N \rightarrow \infty$) должен рассматриваться в непрерывном пределе, так что число шагов иерархии $L \rightarrow \infty$. В этом пределе для описания дерева более естественно пользоваться не целыми числами l , которые указывают просто номер поколения, а самими перекрытиями q , соответствующими этим поколениям. В пределе $L \rightarrow \infty$ дискретные параметры q_l превращаются в непрерывную переменную $0 \leq q \leq 1$. Кроме того, в этом пределе все числа n_q , показывающие степень ветвления на каждом уровне, также расходятся.

Вместо функций (8.13), которые сугубо дискретные, в непрерывном пределе более естественно описывать дерево в терминах функций (8.21), $P_{qq'}(y|y')$, которые задают эволюцию дерева с уровня q на уровень q' . Можно доказать (и именно это требует большой работы), что эти функции удовлетворяют нелинейному уравнению диффузии во "времени" q

$$-\frac{\partial}{\partial q} P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P + x(q) m_q(y) \frac{\partial}{\partial y} P \quad (8.22)$$

с начальным условием

$$\lim_{q \rightarrow q'} P_{qq'}(y|y') = \delta(y - y'); \quad (8.23)$$

здесь $x(q)$ — это функция, которая задается решением с нарушенной репличной симметрией (см. раздел 6), а дополнительная функция $m_q(y)$ есть непрерывный предел дискретной функции (8.20), которая задает распределение узельных намагниченностей в предпочтительных состояниях на уровне q . Стоит отметить, что эта функция (имеющая, как мы теперь видим, вполне реальный физический смысл), в точности совпадает с функцией $m_q(y)$, введенной чисто формально в разделе 6 (уравнения (6.19)—(6.20)) для описания решения с нарушенной репличной симметрией в терминах нелинейных дифференциальных уравнений. Действительно, с помощью уравнений (8.22) и (8.20) легко доказать, что функция $m_q(y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial q} m_q(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_q(y) + (q) m_q(y) \frac{\partial}{\partial y} m_q(y), \quad (8.24)$$

которое совпадает с (6.20).

8.3. И т о г и . Теперь мы постараемся собрать воедино все накопившиеся к этому времени результаты, чтобы попробовать увидеть, по возможности, цельную картину.

Итак:

1) В результате формальных вычислений свободной энергии методом реплик (см. раздел 6) мы можем представить ее в виде функционала $F[\hat{Q}]$, зависящего от некоторой репличной $n \times n$ -матрицы \hat{Q} . Главный вклад в свободную энергию происходит от тех матриц \hat{Q}^* , которые реализуют экстремумы (максимумы) этого функционала, и при этом физическая свободная энергия (так же, как и любая другая наблюдаемая термодинамическая величина) дается пределом $n \rightarrow 0$. Оказывается, что в этом пределе, матрица \hat{Q}^* , осуществляющая экстремум, содержит бесконечное число параметров, которые можно представить в виде некоторой непрерывной функции $q(x)$, определенной на интервале $0 \leq x \leq 1$. Эту функцию, по крайней мере в принципе, можно вычислить, а вблизи точки перехода $T_c = 1$ и в малом внешнем поле ее можно найти в явном виде (см. рис. 16).

2) С другой стороны (см. раздел 7), из чисто физических соображений мы можем ввести в качестве параметра порядка функцию распределения $P(q)$, которая описывает вероятность найти в системе пару чистых состояний, имеющих наперед заданное перекрытие q . Далее, следуя той же схеме нарушения репличной симметрии, которая позволяет вычислить функцию $q(x)$, можно показать, что $q(x)$ одно-

значно определяет функцию распределения $P(q)$, а именно, $P(q) = dx(q)/dq$, где $x(q)$ — это функция, обратная к $q(x)$. Решение с нарушенной репличной симметрией для $q(x)$, и, соответственно, для $P(q)$, показывает, что в фазе спиновой стекла в определенном интервале величины q существует непрерывный спектр перекрытий различных чистых состояний.

3) Далее можно ввести совместную функцию распределения $P(q_1, q_2, q_3)$, которая дает вероятность того, что три парные перекрытия между тремя чистыми состояниями одновременно равны q_1 , q_2 и q_3 . Следуя схеме нарушения репличной симметрии, эту функцию распределения можно вычислить, чтобы увидеть, что пространство чистых состояний обладает ультраметричной топологией.

4) Затем для описания пространства спин-стекляных состояний можно построить ультраметричное пространство в общем виде, как случайный процесс ветвления, который описывается некоторыми функциями вероятности, и для данной конкретной модели эти функции вероятности можно, в принципе, вычислить (точнее, вывести те уравнения эволюции, которым они подчиняются). Таким образом, можно увидеть, что структура спин-стекляных состояний описывается иерархическим деревом, которое возникает в результате случайного процесса ветвления в пространстве состояний.

В результате всех этих вычислений возникает следующая физическая картина спин-стекляной фазы.

Сразу же при переходе по температуре немного ниже T_c пространство состояний разделяется на множество чистых состояний (долин). Эти состояния описываются средними спиновыми намагниченностями в узлах $\{m_i\}$, конфигурации которых различны в различных состояниях. Тем не менее величина "самоперекрытия"

$$q(T) = \sum_i^N m_i^2 \quad (8.25)$$

во всех этих состояниях оказывается одинаковой. Величина q есть просто некоторая функция температуры (вблизи T_c ее можно вычислить в явном виде).

Кроме этого, оказывается, что взаимные перекрытия между всеми этими чистыми состояниями покрывают своими значениями целый непрерывный интервал $0 \leq q^{ab} \leq q(T)$ (в присутствии внешнего поля h этот интервал начинается не с нуля, а с некоторой конечной величины: $q_0(T, h) \leq q^{ab} \leq q_1(T, h)$, где $q_0(T, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$). Спектр значений q^{ab} описывается некоторой функцией распределения $P(q)$,

зависящей от температуры (и внешнего поля). Структура этого пространства состояний описывается ультраметричным иерархическим деревом, рассматриваемом выше.

При небольшом понижении температуры $T \rightarrow T' = T - \delta T$ каждое из чистых состояний разделяется на множество новых чистых состояний, которые можно назвать "потомками". Эти новые состояния характеризуются новой величиной самоперекрытия $q(T') > q(T)$. Соответственно увеличивается интервал спектра взаимных перекрытий между имеющимися при этой температуре чистыми состояниями: $0 \leq q^{ab} \leq q(T')$.

При дальнейшем понижении температуры каждое из появляющихся чистых состояний непрерывно разделяется на множество новых и новых потомков. Этот процесс ветвления, который полностью описывается уравнениями диффузии (8.22), продолжается вплоть до нуля температур, причем $q(T \rightarrow 0) \rightarrow 1$. Это дерево состояний обладает свойством самоподобия, и естественный масштаб в пространстве состояний при любой данной температуре задается величиной $q(T)$.

Если, наоборот, температура увеличивается, происходит непрерывный процесс слияния семейств чистых состояний в их общие "предпочные" состояния. Таким образом, во всем интервале температур $0 \leq T \leq T_c$ происходит непрерывная цепь фазовых переходов второго рода.

9. Немного фантазий.

9.1. Скейлинг в пространстве состояний. Рассмотрим снова качественную картину низкотемпературной спин-стекляной фазы, немного сместив при этом акценты, имея в виду обобщить ее для обычных физических спин-стекляных систем с короткодействующими взаимодействиями.

Предположим, что качественная картина с деревом состояний остается правильной и для спин-стекляных систем с короткодействием. В пользу этого предположения есть только два аргумента: последние эксперименты на реальных спиновых стеклах (см. раздел 4) и эстетическая привлекательность этой физической картины. Проблема тогда состоит в следующем: можно ли, как бы зная на качественном уровне ответ, построить физическую теорию (основанную на этом предположении), которая позволяла бы по-настоящему вычислить всю *наблюдаемую* термодинамику для нормальных спин-стекляных систем с короткодействием, по-настоящему объяснять эксперименты и делать конкретные предсказания о поведении конкретных физических систем, исходя из их конкретных параметров. Короче, можно ли

превратить все то, что описано в части I обзора, из рисования абстрактных деревьев и размахивания руками в нормальную науку в обычном понимании этого слова? Ответ на этот вопрос остается открытым.

Один из подходов может состоять в следующем. Как мы видели, при данной температуре T ниже T_c спиновое стекло находится в одном из чистых состояний, которые в терминах иерархического дерева являются "предпочными" состояниями, находящимися на уровне (масштабе) $q(T)$. Их можно увидеть, если произвести горизонтальное сечение полного дерева состояний на уровне $q = q(T)$. В реальном эксперименте при фиксированной температуре система, однажды оказавшись в одном из таких состояний (долин), в другие состояния (долины) никогда не переходит, потому, что они отделены бесконечными барьерами свободной энергии. Поэтому реальная наблюдаемая физика определяется только этой ограниченной областью фазового объема. Соответственно, если мы хотим вычислить что-то наблюдаемое, при суммировании по состояниям в статистической сумме нужно ограничиться только этой частью пространства состояний. При этом, по-видимому, все равно, в какой именно долине мы находимся, ибо эксперимент демонстрирует воспроизводимость наблюдаемых величин — в этом смысле все долины должны обладать одинаковыми статистическими свойствами.

Каким образом можно было бы производить реальные вычисления? Мы знаем, что внутри данной долины, которая существует при температуре T , скрыто целое "мини"-дерево состояний, которое проявляется, если опустить температуру до нуля. В связи с этим можно было бы опять же *предположить*, что главный вклад в термодинамику в этой долине вносят именно эти состояния. Другими словами, это предположение означает, что при вычислении статсуммы мы можем ограничиться суммированием только по этим состояниям-потомкам.

В действительности, все эти рассуждения относятся к главной проблеме любой задачи статистической механики, а именно, какие степени свободы данной системы являются *релевантными*, т.е. вносят главный вклад в наблюдаемую термодинамику? Если такие степени свободы найдены, то все остальные проблемы носят уже чисто технический характер. Следует помнить, что ни в каких статистических системах, за исключением тривиальных, никогда не суммируют по всем степеням свободы.

Таким образом, в рассматриваемом подходе делается предположение, что главный вклад в наблюдаемую термодинамику при данной температуре T вносят те состояния, которые образуют ультраметрич-

ное дерево и которые можно "увидеть", если опустить температуру до нуля. Другими словами, все релевантные степени свободы спинового стекла могут быть расклассифицированы в виде иерархического дерева. Правильно это или нет, далеко не очевидно, однако давайте предположим, что это правильно, и посмотрим, что из этого может получиться.

Пусть для простоты иерархическое дерево состояний будет снова дискретным (раздел 8.2). Тогда свободная энергия $f_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}$ чистого состояния на уровне $l(T)$, соответствующем масштабу $q_l = q(T)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \exp(-\beta f_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}) &= \\ &= \sum_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_L} \exp(-\beta H[\sigma^{\alpha_1} \dots \sigma^{\alpha_{k+1}} \dots \sigma^{\alpha_L}]). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Очевидно, что для выполнения подобного суммирования наиболее естественный способ — это последовательные итерации, т.е. суммирование шаг за шагом, переходя с одного уровня дерева на следующий — более высокий. По-другому эту процедуру можно назвать ренормгруппой в пространстве состояний: мы суммируем по самым мелким семействам состояний на уровне L и в результате получаем новый эффективный гамильтониан, зависящий теперь от состояний уровня $L - 1$ с какими-то новыми перенормированными параметрами. Далее мы суммируем по семействам состояний на уровне $L - 1$ и переходим на следующий уровень, и т.д. На некотором промежуточном уровне $k (l < k < L)$ этот переход на один шаг можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(-\beta H_k[m^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}]) &= \\ &= \sum_{\alpha_{k+1}} \exp(-\beta H_{k+1}[m^{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}}]). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Если при таком переходе изменение масштаба в пространстве состояний мало: $\delta q = q_{k+1} - q_k \ll 1$, то соответствующие изменения параметров гамильтониана тоже должны быть малы по параметру δq . В результате мы могли бы написать что-то вроде уравнений эволюции на параметры гамильтониана и вычислить их зависимость от масштаба в пространстве состояний.

В обычном ренормгрупповом подходе производится суммирование по быстрым степеням свободы, соответствующим более мелкому пространственному масштабу, в результате чего получается новый гамильтониан с перенормированными параметрами, соответствующими большему пространственному масштабу. В зависимости от того, какова асимптотика гамильтониана на больших масштабах, можно судить, каково термодинамическое состояние системы

при тех или иных температурах, размерностях пространства и пр. Таким же ренормгрупповым способом можно вычислять и наблюдаемые термодинамические величины.

Здесь основная идея такая же, но только предлагается устраивать скейлинг не в реальном пространстве (где его, очевидно, нет), а в пространстве состояний. В действительности, в спиновых стеклах все оказывается намного сложнее. Конкретные вычисления показывают, что перенормируемый спин-стекольный гамильтониан содержит бесконечное число параметров, и все они, так же как и исходные параметры J_{ij} , являются случайными. Детали этих конкретных вычислений можно найти в оригинальных работах [17]. Здесь мы их не приводим, во-первых, потому, что они достаточно громоздки, а, во-вторых, потому, что полученные результаты пока не поддаются простой и ясной интерпретации (в таких случаях принято говорить, что "требуется дальнейшее изучение").

Тем не менее в некоторых случаях кое-что конкретное из этих вычислений получить можно. Прежде всего оказывается, что если температура выше некоторой критической T_c , то все эффективные (перенормированные) взаимодействия в гамильтониане стремятся к нулю при $q \rightarrow 0$ (напомним, что в этом подходе микроскопическому масштабу соответствует $q = 1$, а макроскопический предел соответствует $q \rightarrow 0$), что очевидным образом указывает, что при этих температурах система находится в парамагнитной фазе. С другой стороны, если $T < T_c$, то возникает некоторый масштаб $q(T) > 0$, такой, что при $q \rightarrow q(T)$ некоторые параметры перенормированного гамильтониана, описывающие взаимодействия между определенными степенями свободы, расходятся. Это, по-видимому, указывает на то, что состояния на масштабе $q(T)$ становятся "замерзшими", и, таким образом, на этом масштабе наша ренормгрупповая процедура должна быть остановлена. То, что мы таким образом вычислили, должно интерпретироваться как свободная энергия чистых состояний при температуре T . Кроме того, зависимость характерной величины этих эффективных взаимодействий от масштаба q на интервале $q(T) \leq q \leq 1$, по-видимому, может интерпретироваться, как зависимость от масштаба (и, соответственно, от температуры) характерной высоты *конечных* барьеров, разделяющих метастабильные состояния (см. раздел 4.3).

Следует подчеркнуть, что состояния, с которыми мы имеем дело в таком подходе, *не суть* те состояния, которые получаются путем прямых вычислений в модели Шеррингтона—Киркпатрика. Там при данной температуре вычисляется ультраметричное де-

рево чистых состояний, которое существует на масштабах $0 \leq q \leq q(T)$. Здесь, наоборот, мы имеем дело с состояниями на масштабах $q(T) \leq q \leq 1$: мы как раз хотим *получить* чистые состояния на масштабе $q(T)$, суммируя по состояниям, начиная с масштаба $q = 1$ и приближаясь к масштабу $q = q(T)$ "снизу".

К сожалению, пока эта конструкция еще далека от того, чтобы предоставить возможность вычислять наблюдаемую физику, а только это и позволит судить, насколько правильны те предположения, которые лежат в ее основе. Хотя не исключено и другое, что хотя предположения и правильны, но вычислительные трудности, которые возникают при ее осуществлении, вовсе не "технические", как это кажется сейчас, а вполне реальные, и это будет означать, что требуются какие-то новые физические идеи.

9.2. Феноменологическая динамика. Рассмотрим в заключение чисто феноменологическую картину динамики, которая на качественном уровне иллюстрировала бы релаксационные процессы в спиновых стеклах [18].

Допустим, что в низкотемпературной фазе свободная энергия спинового стекла представляет собой фрактальный рельеф типа того, что изображен на рис. 2, т.е. в каждой большой яме находится много более мелких ям, разделенных меньшими барьерами, в каждой мелкой — еще более мелкие, и т.д. В этом случае такой рельеф можно характеризовать, например, характерной величиной потенциальных барьеров $\Delta(q)$, разделяющих ямы (состояния) на масштабе q . Если предположить, что такой потенциальный рельеф обладает свойством самоподобия (что есть вполне естественное свойство всех структур фрактального типа), то зависимость характерных барьеров от масштаба можно представить в простом скейлинговом виде:

$$\Delta(q) = \Delta_0(q - q(T))^{-\nu} \quad (q > q(T), \nu > 0), \quad (9.3)$$

где $q(T)$ (если вспомнить все, о чем говорилось в предыдущих главах) — это величина самоперекрывания чистых состояний при температуре T , т.е. это характерный масштаб в пространстве состояний (масштаб долин), на котором барьеры, разделяющие состояния, становятся бесконечными. Заметим также, что такая зависимость характерных барьеров от масштаба вполне соответствует представлениям, полученным в эксперименте (см. раздел 4.3).

Посмотрим теперь, как происходили бы процессы релаксации, если бы имела место зависимость вида (9.3). Так как характерное время, необходимое для преодоления барьера высоты Δ , есть

$$\tau(\Delta) \sim \tau_0 \exp \frac{\Delta}{T} \quad (9.4)$$

(τ_0 — некоторое характерное микроскопическое время), то спектр времен релаксации внутри долины на масштабах $q(T) < q \leq 1$ имеет вид

$$\tau(q) \sim \tau_0 \exp [\beta \Delta_0 (q - q(T))^{-\nu}]. \quad (9.5)$$

Тогда релаксацию, например, параметра порядка

$$q(t) = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle \quad (9.6)$$

можно оценить следующим образом:

$$q(t) \sim \int_{q(T)}^1 dq q \exp \left(-\frac{t}{\tau(q)} \right). \quad (9.7)$$

С помощью уравнения (9.5) получаем

$$q(t) \sim \int_{q(T)}^1 dq \exp \left\{ \ln q - \frac{t}{\tau_0} \exp [-\beta \Delta_0 (q - q(T))^{-\nu}] \right\}. \quad (9.8)$$

На больших временах $t \gg \tau_0$ этот интеграл легко оценить методом перевала:

$$q(t) \sim q(T) + \left[\frac{\beta \Delta_0}{\ln(t/\tau_0)} \right]^{1/\nu}. \quad (9.9)$$

Таким образом, мы видим, что $q(t)$ приближается к равновесной величине $q(T)$ логарифмически медленно. Релаксация других наблюдаемых будет, очевидно, такой же медленной.

В рамках подобной феноменологии можно предложить два возможных сценария фазового перехода в спин-стекольную фазу. Первый, и, видимо, наиболее естественный, состоит в том, что спин-стекольная фаза "вырастает" из парамагнитной при приближении к T_c сверху. Вблизи T_c при $T > T_c$ высота энергетических барьеров при увеличении масштаба в фазовом пространстве вырастает до большого, но конечного значения Δ_∞ . Эту ситуацию можно представить в виде, аналогичном (9.3):

$$\Delta_{T>T_c}(q) = \Delta_0 [q + \tilde{q}(T)]^{-\nu'} \quad (\nu' > 0); \quad (9.10)$$

здесь $\tilde{q}(T) > 0$ — что-то вроде параметра беспорядка, который определяет предельную высоту барьеров:

$$\Delta_\infty = \Delta_0 (\tilde{q}(T))^{-\nu'}. \quad (9.11)$$

Индекс ν' при $T > T_c$ может, в принципе, отличаться от индекса ν при $T < T_c$. Соответственно, спектр времен релаксации в этом случае будет конечным, и максимальное время релаксации будет

$$\tau_\infty \sim \tau_0 \exp(\beta \Delta_\infty). \quad (9.12)$$

Поэтому логарифмически медленная спин-стекольная релаксация параметра порядка

$$q(t) \sim \left[\frac{\beta \Delta_0}{\ln(t/\tau_0)} \right]^{1/\nu'} - \tilde{q}(T) \quad (9.13)$$

будет иметь место только на временах $\tau_0 \ll t \ll \tau_\infty$. А на самых больших временах $t \gg \tau_\infty$ будет происходить обычная парамагнитная релаксация:

$$q(t) \sim \exp \left(-\frac{t}{\tau_\infty} \right). \quad (9.14)$$

При $T \rightarrow T_c$ сверху величина параметра беспорядка $\tilde{q}(T)$ стремится к нулю. Поскольку во всех рассуждениях мы здесь предполагаем наличие скейлинга, вполне естественно ожидать, что при $T \rightarrow T_c$

$$\tilde{q}(T) \sim \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^\alpha \rightarrow 0 \quad (9.15)$$

с некоторым критическим индексом $\alpha > 0$. Соответственно, для величины максимального барьера и для максимального времени релаксации мы получим

$$\Delta_\infty(T) \sim \Delta_0 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^{-\alpha/\nu'} \rightarrow \infty, \quad (9.16)$$

$$\tau_\infty(T) \sim \tau_0 \exp \left[\beta \Delta_0 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^{-\alpha/\nu'} \right] \rightarrow \infty. \quad (9.17)$$

Возможен, однако, и другой сценарий, когда парамагнитная фаза "вырастает" из спин-стекольной при приближении T к температуре стекольного перехода T_g снизу. А именно, при $T \rightarrow T_g$ на любом фиксированном масштабе q величина барьера уменьшается, хотя спектр все равно остается расходящимся при $q \rightarrow q(T)$. Эту ситуацию легко смоделировать с помощью анзаца (9.3) для $\Delta(q)$, в котором индекс $\nu \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_g$:

$$\nu(T \rightarrow T_g) \sim \left(1 - \frac{T}{T_g} \right)^\delta. \quad (9.18)$$

Заметим, что в таком сценарии нет никаких причин ожидать, что спин-стекольный параметр порядка $q(T)$ и индекс ν обращаются в нуль при одной и той же температуре. По этой причине и введены две критических температуры: T_c , при которой обращается в нуль $q(T)$, и T_g , при которой обращается в нуль ν .

Если $T_c < T_g$, т.е. при увеличении температуры сначала обращается в нуль параметр порядка $q(T)$, то T_c будет точкой фазового перехода в парамагнитную фазу в обычном термодинамическом смысле ($q \neq 0$ при $T < T_c$ и $q = 0$ при $T > T_c$). Тем не менее, хотя в области $T_c < T < T_g$ параметр $q = 0$, индекс ν здесь не равен нулю, и это приводит к тому, что релаксационные свойства системы в этой области температур не будут обычными парамагнитными.

Временное поведение параметра легко получить из оценочного интеграла (9.8) (в котором нужно полагать $q(T) = 0$, $t \gg \tau_0$ и $\nu \ll 1$). При приближении температуры к T_g снизу релаксация будет парамагнитной ($\sim \exp(-t/\tau_0)$), только пока времена не

очень большие: $\tau_0 \ll t \ll \tau^*(T)$. Оценивая интеграл в (9.3) методом перевала, легко показать, что

$$\tau^*(T) \sim \frac{1}{\nu} \sim \left(1 - \frac{T}{T_g}\right)^{-\delta}, \quad (9.19)$$

т.е. $\tau^*(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow T_g$. Однако на самых больших временах $t \gg \tau^*(T)$ релаксация все равно становится логарифмически медленной (спин-стекольной):

$$q(t) \sim [\ln(\nu t)]^{-1/\nu}. \quad (9.20)$$

При $T \rightarrow T_g$ времена, на которых наблюдается эта медленная релаксация, сдвигаются в бесконечность.

10. Заключение. В заключение хотелось бы сказать совсем немного. Физика спин-стекольного состояния, изложенная в этом обзоре, это не более чем *чисто качественное* (и в значительной степени гипотетическое) представление о том, что происходит в низкотемпературной фазе спиновых систем со случайными взаимодействиями. За всем этим скрывается, по-видимому, совершенно новая физика, и это тем более интересно, что речь идет о явлении общего характера, имеющем отношение далеко не только к неупорядоченным магнетикам, с которых начались все эти исследования. Последние годы проблематика спиновых стекол стала включать в себя такие, на первый взгляд, непохожие друг на друга проблемы, как моделирование биологической эволюции, статистические модели памяти (нейронные сети), проблемы оптимизации. (По-видимому, проблема $1/f$ -шума тоже имеет к этому самое прямое отношение.) В результате наука, которая раньше называлась просто "спиновые стекла", в настоящее время раздробилась на множество отдельных ветвей, которые живут теперь своей отдельной жизнью, а понимание того, что есть собственно физика спин-стекольного состояния, осталось, к сожалению, на чисто качественном уровне.

Проблема в том, что если мы действительно хотим утверждать, что все это есть некая новая физика, ее еще нужно построить. Не рисовать ветвящиеся

деревья и фрактальные рельефы в абстрактном бесконечномерном пространстве состояний, размахивая руками и говоря, как это ново и красиво, а построить самосогласованную систему алгоритмов, которая позволяла бы, по крайней мере в принципе, вычислять *наблюдаемые* величины и делать конкретные предсказания для конкретных систем. Тогда это станет наукой. А пока все это еще находится на уровне, условно говоря, "описательной зоологии". Это, впрочем, тоже немало, если вспомнить, что было раньше, но нужно двигаться дальше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mezard M., Parisi G., Virasoro M. Spin-Glass Theory and Beyond. Singapore a.o.: World Scientific, 1987.
2. Binder K., Young A.P. Spin Glasses: Experimental Facts, Theoretical Concepts and Open Questions // Rev. Mod. Phys. **58**, 801 (1986).
3. Toulouse G. // Commun. Phys. **2**, 115 (1977).
4. Edwards S.F., Anderson P.W. // J. Phys. **F5**, 965 (1975).
5. Fisher D.S., Huse D.A. // Phys. Rev. **B38**, 373, 386 (1988).
6. Rammal R., Toulouse G., Virasoro M.A. // Rev. Mod. Phys. **58**, 765 (1986).
7. Lederman M. et al. // Phys. Rev. **B44**, 7403 (1991); Vincent E. et al. Slow Dynamics in Spin Glasses and Other Complex system. Saclay Report SPEC/91-080. Hammann J. et al. Barrier Heights versus Temperature in Spin Glasses. Preprint 23/0016. Letloch F. et al. Can Aging Phenomena Discriminate Between the Hierarchical and the Droplet Model in Spin Glasses? Saclay Report SPEC/91-098.
8. Alba M. et al. // J. Phys. **C15**, 5441 (1982). Vincent E. I Hammann J. // J. Phys. **C20**, 2659 (1987).
9. Alba M. et al. // Europhys. Lett. **2**, 45 (1986).
10. Lundgren L. et al. // Phys. Rev. Lett. **51**, 911 (1983).
11. Sherrington D., Kirkpatrick S. // Phys. Rev. Lett. **35**, 1972 (1975).
12. De Almeida J.R.L., Thouless D.J. // J. Phys. **A11**, 983 (1978).
13. Parisi G. // J. Phys. **A13**, L115 (1980).
14. Duplantier B. // J. Phys. **A14**, 283 (1981).
15. Mezard M. et al. // J. Phys. **45**, 843 (1984).
16. Mezard M., Virasoro M.A. // J. Phys. **46**, 1293 (1985).
17. Dotsenko V.S. // J. Phys. **C20**, 5473 (1987); J. Phys.: Condens. Matter. **2**, 2721 (1990).
18. Dotsenko V.S. // J. Phys. **C18**, 6023 (1985).
19. Dotsenko V.S. // Partial Annealing in Spin-Glasses and Neural Networks / Eds. M. Mezard, S. Franz (to be published).