

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

НЕУНИВЕРСАЛЬНОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

А.М. Фридман, О.В. Хоружий

(Институт астрономии РАН, Москва)

(Статья поступила 17.11.92 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. В чем состоит неуниверсальность классической концепции тангенциального разрыва (79).
 2. Отличные от классических правила сшивки на однопараметрическом контактном разрыве (80).
 3. О причинах разрывности возмущенного давления и смещения (82).
 4. О зависимости правил сшивки от детальной структуры двухпараметрического тангенциального разрыва (83). 4.1. Пример двухпараметрического разрыва. 4.2. Общий случай.
 5. Выводы (84).
- Список литературы (85).

1. В чем состоит неуниверсальность классической концепции тангенциального разрыва. Традиционно различают два типа гидродинамических разрывов — тангенциальный и ударную волну [1]. Тангенциальный разрыв характеризуется отсутствием переноса вещества через поверхность разрыва. Используя выражение для тензора плотности потока импульса в виде $\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ и запись уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik},$$

из определения тангенциального разрыва $v_i = 0$, где v_i — нормальная к поверхности разрыва компонента скорости, находят, что давление P на разрыве должно быть непрерывной функцией [1]:

$$[P] = 0. \quad (1)$$

Согласно классической концепции [1] разрыв может иметь место на некоторой единой поверхности. В соответствии с таким определением разрыва смещение также обязано быть непрерывно:

$$[\xi] = 0. \quad (2)$$

Отметим, что соотношения (1) и (2) получены без учета внешних сил, действующих на среду, и внешних источников тепла, т.е. для замкнутых систем.

В пионерских работах по устойчивости тангенциального разрыва [2, 3] условия (1) и (2) используют-

ся как условия сшивки для возмущенных величин. Рис. 1 демонстрирует, что в случае, когда исследуемая система является открытой, такое использование оказывается некорректным в силу того, что возмущенные силы вблизи от возмущенной поверхности могут не описываться в рамках линеаризованной системы уравнений.

Действительно, из условия равновесия, вблизи невозмущенной границы (пусть это будет $x = 0$)

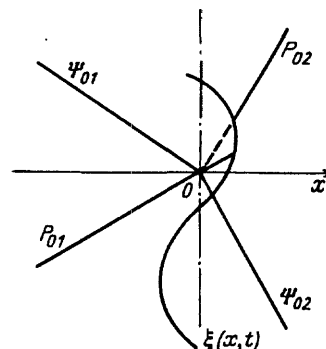


Рис. 1. Классическое представление тангенциального разрыва — поверхность нулевой толщины [1—3]. $|\xi| \gg L$, ξ — смещение, L — характерная ширина разрыва. Невозмущенная поверхность — плоскость $x = 0$ — изображена штрихпунктирной линией, возмущенная поверхность — сплошной кривой $\xi = \xi(x, t)$. В отсутствие возмущения потенциал Ψ_0 и давление P_0 имеют излом на плоскости $x = 0$ и при этом во всей области x выполняется условие равновесия (3). При возмущении разрыва вид гравитационного потенциала $\Psi_0(x)$, определяемого распределением внешних масс, не меняется. Напротив, функция $P_0(x)$ изменится в областях между возмущенной и невозмущенной поверхностями разрыва ($0 \leq x \leq \xi$ при $\xi > 0$ и $\xi \leq x \leq 0$ при $\xi < 0$) так, как показано на рисунке: пунктирная линия в отсутствие возмущения превратится в сплошную в его присутствии. Возникающая таким образом в этих областях сила, нескомпенсированная в нулевом (по амплитуде возмущения) приближении, вызывает такого же порядка величины возмущенные силы (давления, центробежные и т.п.). В результате мы выходим за рамки линейного приближения. В замкнутой системе или при гладком внешнем потенциале Ψ_0 такой нескомпенсированной в нулевом приближении силы не возникает

имеем

$$\rho_0 \frac{d\Psi_0}{dx} = -\frac{dP_0}{dx}. \quad (3)$$

На рис. 1 видно, что в отсутствие возмущения поверхности разрыва функции Ψ_0 и P_0 в точке $x=0$ имеют излом, т.е. их первые производные в этой точке терпят скачок. На возмущенной границе $x = \xi$ функции Ψ_0 и P_0 ведут себя по-разному. На вид функции Ψ_0 сам факт возмущения никак не сказывается, поскольку эта функция задается внешним источником. Поэтому излом функции Ψ_0 по-прежнему происходит в точке $x = 0$. Вместе с тем излом давления P_0 возникает уже на возмущенной границе в точке $x = \xi$. Следовательно, в произвольной точке $0 \leq x \leq \xi$ имеется избыточная сила $\rho_0 d\Psi_0/dx + dP_0/dx$ нулевого порядка малости, которая может быть скомпенсирована только возмущенным давлением dP_1/dx . Таким образом, вблизи от возмущенной границы мы неизбежно выходим за рамки линейного приближения. Это противоречие указывает на невозможность использования для линеаризованных уравнений правил сшивки на поверхности разрыва нулевой толщины, т.е. приближения $|\xi| \gg |L|$, где L — ширина разрыва.

В основе нашего дальнейшего анализа лежит канонический способ получения правил сшивки, состоящий в следующем (см., например, [4—9]). Тангенциальный разрыв рассматривается как малая область $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где градиенты трех параметров отличны от нуля: $\nabla U_0, \nabla \rho_0, \nabla c_s \neq 0$, в то время как вне этой области они равны нулю (последнее предположение вовсе не обязательно, и мы принимаем его, исключительно следуя [2,3]). Интегрируя затем линеаризованные динамические уравнения по слою $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и пренебрегая членами, малыми при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем правила сшивки. При этом нетрудно показать, что при сравнительно простых условиях, принятых в [2, 3], мы приходим к правилам сшивки (1) и (2).

Однако в реальных условиях чаще приходится иметь дело с открытыми системами, когда рассматриваемая гидродинамическая среда находится в поле внешних сил. Например, для подавляющего числа астрофизических объектов такими силами являются гравитационные и (или) магнитные. Отметим также, что практически все астрофизические объекты вращаются.

Естествен вопрос о возможности использования в этих случаях правил сшивки (1) и (2), тем более, что в [1—3] отсутствуют какие-либо замечания об области их применимости. Такой вопрос, насколько нам известно, ставится впервые, хотя ранее при решении задач об устойчивости тангенциального разрыва в газовом галактическом диске получались правила

сшивки, отличные от (1) и (2). Так, правила сшивки на разрыве угловой скорости вращения [8] предполагают разрывность давления (полного), а в работе [9] при учете также и скачка невозмущенного давления была получена, кроме разрывности полного давления, разрывность и смещения. Заметим, что в последнем случае некорректными оказываются не только правила сшивки (1) и (2), но и классическое представление возмущенного тангенциального разрыва в виде одной поверхности.

Основная цель настоящей работы — получение правил сшивки на тангенциальном разрыве для достаточно широкого класса открытых систем и выяснение причин и условий их отличия от классических правил сшивки.

В п. 2 на примере газового диска нашей Галактики со скачком невозмущенного давления получены правила сшивки, отличные от классических [1—3]: возмущенное давление и смещение оказываются разрывными. Причины этого обсуждаются в п. 3. В п. 4 вводится понятие двухпараметрического тангенциального разрыва, характеризуемого скачками двух независимых параметров — угловой скорости вращения и невозмущенного давления. В этом случае правила сшивки уже не являются универсальными, а зависят от конкретной структуры разрыва. В заключение п. 4 рассматривается общий случай двухпараметрического разрыва. В п. 5 сформулированы выводы.

2. Отличные от классических правила сшивки на однопараметрическом контактном разрыве. Во избежание искусственной постановки задачи обратимся к реально наблюдаемым в природе тангенциальным разрывам. В качестве примера рассмотрим газовый диск нашей Галактики, в котором наблюдаются резкие изменения угловой скорости вращения $\Omega_0(r)$, скорости звука $c_{0s}(r)$ и поверхностной плотности газа $\sigma_0(r)$ [10]. Условие равновесия такого диска вдоль координаты r выглядит следующим образом:

$$\Omega_0^2 r = \sigma_0^{-1} P'_0 + \Psi'_0 + \Psi'_{0*}. \quad (4)$$

Штрихом здесь и ниже обозначены производные по r : $(...)' = d(...)/dr$. Все величины относятся к газовому диску Галактики за исключением последнего слагаемого, описывающего ускорение элемента газа во внешнем поле звезд. Масса последних намного превышает массу газового диска, поэтому член $d\Psi_0/dr$ может быть опущен.

Из условия равновесия (4) и численных значений входящих в него параметров следует, что газовое давление может меняться на заметную величину на расстоянии L_p , много меньшем характерных (вдоль r) масштабов задачи — радиуса R и длины волны

возбуждаемых возмущений λ_r [9]:

$$\Lambda_P \ll 1 < \Lambda_w, \quad \Lambda_P \equiv L_P/R, \quad \Lambda_w \equiv \lambda_r/R. \quad (5)$$

Действительно, соотношения силы давления и центробежной силы можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &\equiv P'/\sigma_0 \Omega_0^2 R \approx c_{s0}^2 (L_P R \Omega_0^2)^{-1} \approx \\ &\approx (\text{Ma}^2 \Lambda_P)^{-1} \approx \Lambda_h^2 \Lambda_P^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $\text{Ma} \equiv \Omega_0 R/c_{s0}$ — число Маха, $\Lambda_h = h/R \approx \text{Ma}^{-1}$; последнее соотношение получено с учетом того, что характерная толщина диска оценивается по порядку величины так [7]: $h \approx c_{s0}/\Omega_0$. В нашей Галактике скачок газового давления на 2,5 порядка (поверхностная плотность σ_0 меняется от $300 M_\odot \cdot \text{пс}^{-2}$ до $5 M_\odot \cdot \text{пс}^{-2}$, скорость звука c_{s0} — от 80 до $9 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$) наблюдается на расстоянии $R = 0,35 \text{ кпс}$ от центра, что соответствует краю так называемого “ядерного” диска. Из наблюдений пока не установлена величина “размазки” края диска, но естественно предположить, что она порядка толщины диска, т.е. $\Lambda_P \approx \Lambda_h \ll 1$. Из (6) видно, что в этом случае $\xi \approx \Lambda_h \ll 1$, т.е. в уравнении равновесия (4) слагаемым $\sigma_0^{-1} P'_0$ можно пренебречь, несмотря на резкое изменение (фактически — “скачок”) давления на расстояниях $h \ll R$.

Заметим, однако, что условие равновесия (4) не запрещает величине L_P быть даже меньше h . Действительно, если $\xi \approx 1$, то $L_P \approx h \Lambda_h \ll h$ и становится еще меньше, если $\xi \gg 1$. В последнем случае градиент давления уравнивается внешним гравитационным полем звезд. Итак, при любой величине параметра $\xi \geq \Lambda_h$ сохраняется приближение “скачка” давления: $\Lambda_P \ll 1$.

Край ядерного диска в Галактике совпадает также с узкой областью скачка производной угловой скорости вращения Ω'_0 . Кроме того в этом месте галактического диска начинается область резкого изменения самой угловой скорости вращения. Хотя в общем случае соотношение ширин скачков давления и угловой скорости может быть произвольным, в нашей Галактике последняя существенно превышает первую [10] (рис. 2). Поэтому в качестве первого шага мы рассмотрим относительно простой случай, когда угловая скорость может считаться непрерывной, а ее производная и давление терпят разрыв:

$$\begin{aligned} P_0(r) &= P_{01} = \text{const при } r \leq R - (L_P/2), \\ &= P_{02} = \text{const при } r \geq R + (L_P/2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Omega'_0(r) &= \Omega'_{01} = \text{const при } r \leq R - (L_\delta/2), \\ &= \Omega'_{02} = \text{const при } r \geq R + (L_\delta/2), \\ \Lambda_P &\approx \Lambda_\delta \ll \Lambda_\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагаемая в формулах (7) и рис. 2 симметрия скачков функций $P_0(r)$ и $\Omega'_0(r)$ относительно точки

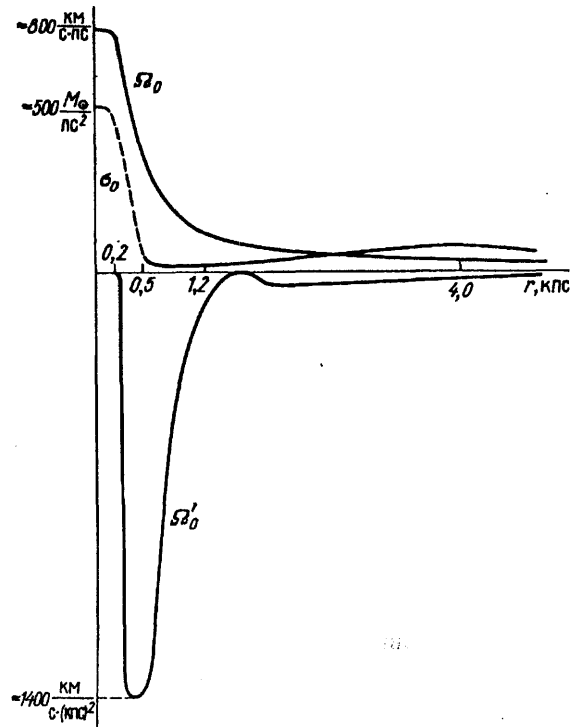


Рис. 2. Профили угловой скорости вращения Ω_0 , поверхностной плотности σ_0 и производной угловой скорости вращения Ω'_0 газовой компоненты нашей Галактики (в пределах точности наблюдений). Узкие скачки поверхностной плотности и производной угловой скорости соответствуют краю молекулярного газового кольца (0,2—0,5 кпс). Область, где существенно меняется угловая скорость относительно велика (0,2—1,2 кпс)

$r = R$ весьма условна, поскольку малое число точек наблюдений не позволяет сделать какой-либо вывод о поведении этих функций в области скачка. Ниже мы увидим, что отличные от (7) виды функций $P_0(r)$ и $\Omega'_0(r)$ не меняют основного утверждения данной статьи.

Как показано в [9], система линеаризованных уравнений гидродинамики может быть сведена к следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r\sigma_0\xi) &= -r\sigma_0[2m\Omega_0r^{-1}\hat{\omega}^{-1}\xi + \\ &+ (1 - m^2c_{g0}^2r^{-2}\hat{\omega}^{-2})\tilde{\eta}], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr}(c_{g0}^2\tilde{\eta}) = 2m\Omega_0r^{-1}\hat{\omega}^{-1}c_{g0}^2\tilde{\eta} + (\hat{\omega}^2 - x^2)\xi. \quad (10)$$

Уравнение (9) есть уравнение непрерывности, а к уравнению (10) могут быть сведены уравнения движения. В (9) и (10) использованы обозначения [9]:

$$\eta \equiv \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \hat{\omega} = \omega - m\Omega_0, \quad x^2 = 2\Omega_0(2\Omega_0 + r\Omega'_0), \quad (11)$$

$$v_r \equiv \frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \xi = -\hat{\omega}\xi.$$

Все стационарные величины обозначены индексом 0, остальные возмущенные величины — функции вида $A(r, \varphi, t) = \tilde{A}(r) \exp[i(m\varphi - \omega t)]$. c_{g0} — скорость звука в самогравитирующей среде, всегда меньшая, чем

c_{s0} . Внутри скачка величина силы самогравитации относительно мала, поэтому там можно считать $c_{g0} \approx c_{s0}$. Требуемое для условий сшивки значение c_{g0} вне скачка вычислено в [9]: $c_{g0}^2 \equiv c_{s0}^2 - 2\pi G \sigma_0 (|k| R_g)^{-1}$, $R_g \approx [1 + |k| h/2]^{-1}$, $c_{s0}^2 \equiv dP_0/d\sigma_0$, где k — радиальное волновое число, появившееся здесь в результате решения линеаризованного уравнения Пуассона (см. [9]), G — гравитационная постоянная.

Самогравитация диска учитывается исключительно для общности: в отсутствие самогравитации полученные ниже результаты не меняются.

Используемая для вывода (9), (10) исходная система линеаризованных динамических уравнений замыкалась уравнением состояния изоэнтропической среды ($S = \text{const}$, $\tilde{S} = 0$)

$$\tilde{P} = c_{s0}^2 \tilde{\sigma}. \quad (12)$$

Последнее является частным случаем (для $S'_0 = 0$) более общего уравнения состояния адиабатических возмущений ($dS/dt=0$):

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= c_{s0}^2 \tilde{\sigma} - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\sigma S'_0 \tilde{\xi} = \\ &= c_{s0}^2 \tilde{\sigma} + (c_{s0}^2 \sigma'_0 - P'_0) \tilde{\xi}; \end{aligned} \quad (13)$$

здесь мы использовали термодинамическое равенство $\tilde{P} = (\partial P/\partial \sigma)_S \tilde{\sigma} + (\partial P/\partial S)_\sigma \tilde{S}$ и определение смещения в виде (11).

Интегрируя по радиальному слою ($R - L_p, R + L_p$) уравнения (9) и (10) и используя (8), получаем следующие условия “сшивки” [9]:

$$\text{При } [\sigma_0 \tilde{\xi}] = 0, [c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = 0. \quad (14)$$

условие $\text{Ma}^2 \Lambda_p^{-2} \ll 1$. Мы видим, что смещение $\tilde{\xi}$ не является непрерывной функцией, так же как и давление \tilde{P} . В отсутствие самогравитации из второго условия сшивки имеем

$$[\tilde{P} \sigma_0^{-1}] = 0. \quad (15)$$

3. О причинах разрывности возмущенного давления и смещения. Причина разрывности возмущенного давления при наличии внешнего гравитационного поля звезд, обеспечивающего резкое изменение невозмущенного давления, проиллюстрирована на рис. 3. На рис. 3,а изображены скачки невозмущенных давления P_0 и плотности σ_0 , создаваемые невозмущенной гравитационной силой, показанной на рис. 3,б. Профиль возмущенной гравитационной силы (рис. 3,в), в общих чертах повторяя предыдущий, характеризуется уменьшенной в $\tilde{\sigma}/\sigma_0$ раз амплитудой. Соответствующие ему профили скачков возмущенного давления и плотности изображены на рис. 3,г. Итак, причина скачка возмущенного давления определяется необходимостью баланса сил:

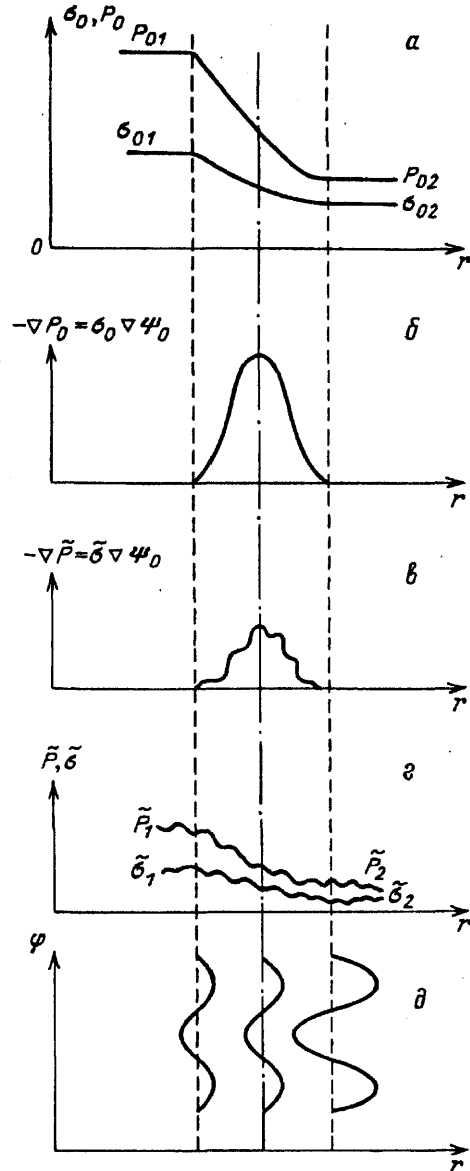


Рис. 3. Иллюстрация причины скачков возмущенного давления \tilde{P} и смещения $\tilde{\xi}$. а — Скачки невозмущенных давления P_0 и плотности σ_0 . б — Профиль невозмущенной гравитационной силы, создающей показанные на предыдущем рисунке скачки P_0 и σ_0 . в — Профиль возмущенной гравитационной силы, в общих чертах повторяющий предыдущий, но уменьшенный в отношении $\tilde{\sigma}/\sigma_0$. г — Профили возмущенного давления и плотности, построенные путем интегрирования функции $\tilde{V}\tilde{P}$ с предыдущего рисунка для нахождения \tilde{P} и уравнения состояния $\tilde{\sigma} = \tilde{P}/c_{s0}^2$ для нахождения $\tilde{\sigma}$. д — Представление тангенциального разрыва обратное по сравнению с “классическим” [1—3]: $\tilde{\xi} \ll L$ (ср. с подписью к рис. 1). В этом случае линейное приближение при описании возмущенных величин оказывается корректным. Иллюстрируется “скачок” смещения $\tilde{\xi}(r, t)$ по разные стороны “разрыва”. Возмущенные границы области “разрыва” обозначены штриховыми линиями, возмущенные — сплошными. Вне области “разрыва” стационарные параметры среды можно считать однородными (в соответствии с [2, 3]). Через возмущенные поверхности перенос вещества отсутствует. Поскольку плотность с радиусом падает, растет вытесняемый каждым следующим слоем слева направо объем вещества, т.е. растет смещение $\tilde{\xi}$. Из формулы (14) следует, что $\tilde{\xi}_1 \sigma_{01} = \tilde{\xi}_2 \sigma_{02}$. На рисунках рассмотрен случай $\sigma_{01} \gg \sigma_{02}$; следовательно, $\tilde{\xi}_1 \ll \tilde{\xi}_2$.

$-\nabla\tilde{P} \approx \tilde{\sigma}\nabla\Phi_0$, где $\nabla\Phi_0$ должен быть резким, чтобы компенсировать резкий градиент невозмущенного давления. В отсутствие такого баланса возникали бы сколь угодно большие ускорения среды.

Причина разрывности смещения $\tilde{\xi}$ поясняется на рис. 3,б, где на плоскости (r, φ) изображена внутренность скачков невозмущенных давления и плотности. Волнистые линии — возмущенные поверхности, через которые нет движения вещества (вещество движется только вдоль этих линий). Поскольку плотность с радиусом падает, растет вытесняемый каждым следующим слоем слева направо объем вещества, т.е. растет смещение $\tilde{\xi}$. Таким образом, оказывается постоянным произведение $\tilde{\xi}\sigma_0$ согласно первому правилу сшивки (14) — скачок σ_0 вызывает скачок $\tilde{\xi}$.

В этом случае тангенциальный разрыв уже не сводится к возмущенной поверхности, а представляет собой малую пространственную область, ограниченную непараллельными друг другу поверхностями.

4. О зависимости правил сшивки от детальной структуры двухпараметрического тангенциального разрыва.

4.1. ПРИМЕР ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РАЗРЫВА. В качестве следующего шага рассмотрим новые аспекты, возникающие при сравнимой ширине скачков плотности и угловой скорости вращения.

Этот случай можно рассматривать как частный пример двухпараметрического тангенциального разрыва: поведение характеристик среды в области разрыва задается поведением двух независимых параметров, в данном случае плотности и угловой скорости вращения. Такое положение становится возможным, благодаря появлению “свободного” параметра (внешней силы) в уравнении равновесия. В общем случае число независимых параметров, необходимых для описания разрыва, на единицу превышает число внешних факторов, воздействующих на систему. Так, например, при учете кроме внешних сил сторонних источников тепла разрыв может оказаться трехпараметрическим. В соответствии с такой классификацией разрывы в замкнутых системах являются однопараметрическими.

Правила сшивки для рассматриваемого в этом разделе случая можно получить аналогично вышеприведенным. Правило сшивки для смещения не меняется, а в уравнении (10) необходимо учитывать в области разрыва член $(\Omega_0^2)' \tilde{\xi}$. Когда скачок давления отсутствует, учет этого члена не представляет труда и приводит к скачку возмущенного давления [8]:

$$[\tilde{P}] = -[\Omega_0^2]\sigma_0\tilde{\xi}R. \quad (16)$$

В случае двухпараметрического разрыва (со скачком P_0) результат интегрирования уравнения (10) по слою $(-\varepsilon, \varepsilon)$ не столь очевиден. Действительно, учитывая согласно (14) непрерывность $\tilde{\xi} \equiv \sigma_0 r \xi$, получим

$$[c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = -\bar{\xi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_0^{-1} (\Omega_0^2)' dr \right]. \quad (17)$$

Значение предела в правой части зависит от детальной структуры скачков и не может быть вычислено в общем виде. Продемонстрируем это на нескольких примерах.

Наиболее прост случай, когда узкие скачки Ω_0 и σ_0 не совпадают, но разнесены так мало, что это не различимо с точки зрения наблюдений. В такой ситуации значение предела легко вычисляемо, что приводит к условию сшивки

$$[c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = -\bar{\xi} \sigma_{01}^{-1} [\Omega_0^2], \quad (18)$$

если скачок плотности лежит дальше от центра, чем скачок угловой скорости, и

$$[c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = -\bar{\xi} \sigma_{02}^{-1} [\Omega_0^2] \quad (19)$$

при обратном их расположении.

В качестве промежуточного между двумя вышеприведенными можно рассмотреть случай, когда скачки Ω_0^2 и σ_0^{-1} совпадают в том смысле, что

$$\Omega_0^2 = (\Omega_0^2)_+ + f(r-R)(\Omega_0^2)_-, \quad (20)$$

$$\sigma_0^{-1} = (\sigma_0^{-1})_+ + g(r-R)(\sigma_0^{-1})_-, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} (\Omega_0^2)_+ &\equiv \frac{1}{2}(\Omega_{01}^2 + \Omega_{02}^2), \quad (\Omega_0^2)_- \equiv \frac{1}{2}(\Omega_{01}^2 - \Omega_{02}^2), \\ (\sigma_0^{-1})_+ &\equiv \frac{1}{2}(\sigma_{01}^{-1} + \sigma_{02}^{-1}), \quad (\sigma_0^{-1})_- \equiv \frac{1}{2}(\sigma_{01}^{-1} - \sigma_{02}^{-1}), \end{aligned} \quad (22)$$

f и g — узколокализованные нечетные функции своих аргументов, принимающие вне скачка значения +1 и -1. В этом случае интеграл в (17) сводится к сумме двух интегралов, подынтегральная функция одного из которых четная, а у другого — нечетная. Вклад в значение предела в (17) дает только первый интеграл, откуда получаем условие сшивки

$$[c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = -\bar{\xi} [\Omega_0^2] (\sigma_0^{-1})_+. \quad (23)$$

Из приведенных примеров отчетливо видно, что для рассматриваемого тангенциального разрыва само условие сшивки в классическом смысле, т.е. условие, связывающее величины по разные стороны разрыва и не зависящее от его детальной структуры, отсутствует. В общем случае условие сходное с условием сшивки можно получить, воспользовавшись теоремой о среднем:

$$[c_{g0}^2 \tilde{\eta}] = -\bar{\xi} \int \sigma_0^{-1} (\Omega_0^2)' dr =$$

$$= -\bar{\xi} \int \sigma_0^{-1} d\Omega_0^2 = -\bar{\xi} [\Omega_0^2] \sigma_0^{-1}(\bar{r}), \quad (24)$$

где $R - \varepsilon \leq \bar{r} \leq R + \varepsilon$ — некоторая промежуточная точка и, соответственно, $\sigma_0(\bar{r}) \in [\sigma_{01}, \sigma_{02}]$ — некоторое промежуточное значение поверхностной плотности, которое может быть точно вычислено лишь при известной структуре скачков σ_0 и Ω_0 .

Рассмотренный пример показывает, что в общем случае к одной поверхности не сводим не только возмущенный, но и исходный невозмущенный тангенциальный разрыв.

4.2. Общий случай. В заключение покажем, что рассмотренные выше эффекты не являются специфической чертой тангенциальных разрывов с резким перепадом (“скачком”) давления. Для этого рассмотрим поведение тангенциальных разрывов во вращающейся неоднородной среде с непрерывным профилем давления. Эта система удобна тем, что позволяет разом проследить роль неинерционных эффектов, неоднородности плотности среды и внешних силовых воздействий, приводящих, например, к изломам давления на скачках плотности среды.

Пусть F_0 — внешняя сила на единицу массы, действующая в радиальном направлении, и выполняет условие равновесия

$$P'_0 = \rho_0 \Omega_0^2 r + \rho_0 F_0. \quad (25)$$

Уравнения для возмущений, аналогичные (9) и (10) в рассматриваемом случае приобретают вид [10]

$$\begin{aligned} \rho_0 c_0^2 r^{-1} ((r\xi)') + 2m\Omega_0 \hat{\omega}^{-1} \xi - P'_0 \xi = \\ = (\bar{k}^2 c_0^2 \hat{\omega}^{-2} - 1) \tilde{P}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}' - 2m\Omega_0 r^{-1} \hat{\omega}^{-1} \tilde{P} - P'_0 (\rho_0 c_0^2)^{-1} \tilde{P} = \\ = \rho_0 (\hat{\omega}^2 - \kappa_0^2) \xi + \beta T_0 C_P^{-1} S'_0 P'_0 \xi; \end{aligned} \quad (27)$$

здесь ρ_0 , T_0 , β и C_P — объемная плотность, температура, температурный коэффициент объемного расширения и теплоемкость при постоянном давлении соответственно, $\bar{k}^2 = k_z^2 + (m^2/r^2)$, все возмущенные величины обозначены волной.

Из первого уравнения видна тесная связь скачка смещения и скачка невозмущенного давления. Если последний отсутствует — смещение непрерывно:

$$[\xi] = 0. \quad (28)$$

Интегрирование же второго уравнения по слою приводит к классическим условиям сшивки лишь для узкого класса разрывов. Указание на это можно увидеть в том, что “сингулярное” (на разрыве) слагаемое $\rho_0 (\Omega_0^2)' \tilde{\xi}$, содержащееся в $\rho_0 \kappa_0^2 r \tilde{\xi}$, приводит к полной производной лишь в случае непрерывного профиля плотности, в противном случае результат его интегрирования зависит от детальной структуры скачков ρ_0 и Ω_0 .

Для более аккуратного анализа преобразуем два последних члена в уравнении (27), считая профиль давления непрерывным (профиль P_0' может рваться):

$$\begin{aligned} \rho_0 \kappa_0^2 \tilde{\xi} - \beta T_0 C_P^{-1} S'_0 P'_0 \xi \approx \rho_0 (\Omega_0^2)' r \xi + \\ + \rho_0^{-1} \rho'_0 P'_0 \xi \approx (\rho_0 \Omega_0^2 r \xi)' + \rho'_0 F_0 \xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, что интегрирование полученного выражения сводится к классическому условию $[\tilde{P} + P'_0 \xi] = 0$ только для случая постоянной массовой силы F_0 , как это имеет место, например, в традиционной задаче о гравитационных волнах (или рэлей-тэйлоровской неустойчивости): $F_0 = g = \text{const}$. В противном случае справедливо все сказанное в п. 4.1.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что получение правил сшивки не зависящих от детальной структуры скачков возможно лишь для однопараметрических тангенциальных разрывов. Для двух и более параметрических разрывов для получения правил сшивки необходимо знание детальной структуры скачков отдельных параметров.

5. Выводы.

I. В открытых системах классическое представление о тангенциальном разрыве, основанное на анализе замкнутых систем [1—3], меняется следующим кардинальным образом:

1) Возмущенный тангенциальный разрыв представляет собой не единую поверхность [1—3], а малую пространственную область, ограниченную непараллельными друг другу поверхностями.

Мы имеем в виду те границы области, вне которых параметры среды можно считать однородными (в соответствии с [2, 3]).

2) Традиционное приближение нулевой толщины разрыва [1—3], $|\xi| \gg L$ (ξ — смещение, L — ширина разрыва), и линейное приближение при исследовании устойчивости тангенциального разрыва являются несовместимыми.

3) Универсальные правила сшивки можно получить, когда тангенциальный разрыв является однопараметрическим. В случае двухпараметрического тангенциального разрыва правила сшивки зависят от конкретной детальной структуры скачков отдельных параметров.

II. Исследование различных частных случаев тангенциального разрыва в присутствии внешнего поля (при наличии скачка потенциала) привело к следующим результатам, качественно отличным от аналогичных результатов в замкнутых системах [1—3].

4) В изоэнтропической среде возмущение давления \tilde{P} и смещение $\tilde{\xi}$ не являются непрерывными функциями, а терпят скачки в соответствии со скачком невозмущенной плотности σ_0 : $[\sigma_0 \tilde{\xi}] = 0$, $[\tilde{P}/\sigma_0] = 0$.

Это пример однопараметрического скачка» и полученные правила сшивки не зависят от детальной структуры разрыва.

5) В случае двухпараметрического разрыва со скачками плотности и угловой скорости вращения получены следующие условия сшивки: $[\sigma_0 \tilde{\xi}] = 0$, $[c_{g0}^2 \tilde{\sigma} / \sigma_0] = -R \tilde{\xi}_i [\Omega_0^2]$, $i = 1, 2$. Здесь $i = 1$, когда скачок плотности ближе к центру, чем скачок угловой скорости, и $i = 2$ — в противоположном случае. При совпадении локализации скачков условие сшивки имеет вид $[c_{g0}^2 \tilde{\sigma} / \sigma_0] = -R \tilde{\xi}_i [\Omega_0^2] (\sigma_{01}^{-1} - \sigma_{02}^{-1}) / 2$.

Благодарим А.Б. Михайловского за многочисленные полезные советы и А.Т. Тимофеева за плодотворное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Ландау Л.Д. // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 151.
3. Сыроватский С.И. // ЖЭТФ. 1954. Т. 28. С. 121.
4. Михайловский А.Б., Фридман А.М. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 457.
5. Морозов А.Г., Файнштейн В.Г., Фридман А.М. // ДАН СССР. 1976. Т. 228. С. 1072.
6. Морозов А.Г., Файнштейн В.Г., Фридман А.М. // Динамика и эволюция звездных систем. М.; Л.; ВАГО, 1975. С. 238.
7. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
8. Морозов А.Г. // Письма Астрон. ж. 1977.3. С. 177.
9. Фридман А.М. // ЖЭТФ. 1990. 96. С. 1121.
10. Сумин А.А., Фридман А.М., Хауд У.А. // Письма Астрон. ж. 1991.17. С. 698.85