

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ВОЗНИКАЮЩИХ  
ПРИ ЭТОМ НОВЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ В НЕКОТОРЫХ  
ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ*А. В. Кукушкин**(Статья поступила 18.02.92 г., после доработки 16.09.92 г.)*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (81).
  2. Решение Зоммерфельда и выбор способа группировки независимых переменных в двумерном уравнении Гельмгольца (82).
  3. Автомодельные решения приведенного уравнения Гельмгольца (двумерный случай) (87).
  4. Исследование автомодельных решений трехмерного уравнения Гельмгольца (89).
  5. Особенности использования в приложениях двумерных автомодельных решений (90).
  6. Особенности адаптации трехмерных автомодельных решений в приложениях (93).
  7. Заключение (94).
- Примечания (95).  
Список литературы (95).

**1. Введение.** Классическим методом решения дифференциальных уравнений в частных производных вообще и волнового уравнения в частности является, как известно, метод разделения переменных. Этот метод в силу большой его общности доминирует в большинстве соответствующих физических приложений. Что же касается предмета наших исследований, т.е. собственно волнового уравнения, то поиск новых путей его решения, кроме чисто методологического интереса, ввиду той роли, которую играет это уравнение в теоретической физике, был бы интересен и в практическом смысле, так как новые математические методы часто прокладывают дорогу новым физическим результатам.

В отношении способов достижения намеченной цели трудно надеяться на то, что свежие методологические идеи могут возникнуть на пустом месте как нечто совершенно новое. Здесь скорее всего нужны новый взгляд на уже известное и преодоление силы привычки в трактовке этого хорошо известного. Первые наводящие соображения могли бы возникнуть,

например, в связи с возможным новым прочтением некоторого классического и хорошо известного всем результата. Для нас таким классическим образцом будет известное и весьма изящное в математическом отношении решение задачи Зоммерфельда для дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей и бесконечно тонкой полуплоскости [1—3]. Отталкиваясь главным образом от него, а также от недавно опубликованных нами результатов [4,5], обобщающих соответствующие классические формулы Зоммерфельда на случай полуплоскости с “мягкими” граничными условиями, можно обнаружить, как будет показано, такой способ группировки независимых переменных, который переводит двумерное уравнение Гельмгольца, записанное в полярной системе координат, в одно уравнение в полных дифференциалах. Этот способ группировки независимых переменных, который в противоположность методу разделения переменных объединяет последние, и есть ключ к решению методологической проблемы. Подтверждением этому служит распространение найденного способа группировки на случай с тремя пространственными переменными. Здесь, так же как и в двумерном случае, уравнение Гельмгольца (записанное в сферической системе координат) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, но только для аксиально-симметричных волновых функций.

Характеризуя физическую часть работы, следует отметить, что она содержит как чисто методические результаты, что полностью относится к трехмерному случаю и частично — к двумерному, так и оригинальные (что имеет отношение только к двумерным задачам). В частности, методический харак-

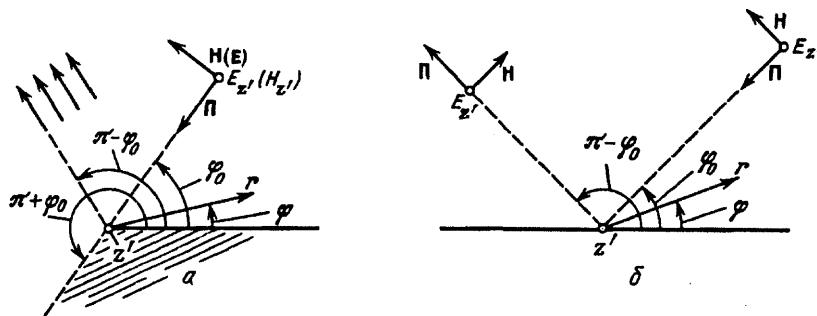


Рис. 1

тер работы в применении к решению трехмерного уравнения Гельмгольца связан с получением новым способом уже известного замкнутого решения задачи о дифракции плоской акустической волны на параболоиде вращения с «жесткими» граничными условиями при аксиально-симметричном возбуждении, когда фронт падающей волны перпендикулярен оси параболоида [6]. В отношении двумерных моделей чисто методические результаты сводятся здесь к тому, что применительно к известному результату Зоммерфельда новый метод не просто упрощает сам процесс получения этого решения, но сравнительно с классическими методами, можно сказать, низводит этот процесс к почти тривиальным по своей сложности действиям.

Что же касается получения каких-либо новых физических результатов под влиянием развиваемых в статье методологических идей, то этот аспект проблемы проявляется наиболее ярко в теории открытых волноведущих структур [4,5] и причем затрагивает там самые общие моменты в физических основаниях теории, о чем также пойдет речь ниже, но с методологических позиций более четкого обоснования формального математического аппарата статьи [5], введенного там нами без должного обоснования, чисто эвристическим способом.

**2. Решение Зоммерфельда и выбор способа группировки независимых переменных в двумерном уравнении Гельмгольца.** Известно, что решение Зоммерфельда для дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей и бесконечно тонкой полуплоскости (рис. 1, а) можно записать в виде [2,3]

$$E_z, H_z = (U(z, \varphi - \varphi_0) \mp U(z, \varphi + \varphi_0))e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где  $z = kr$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве,  $r, \varphi$  — полярные координаты,  $\varphi_0$  — полярный угол падения плоской волны (см. рис. 1, а). Функцию  $U$ , если ввести обозначение  $\psi = \varphi \pm \varphi_0$  можно записать [2] в виде контурного интеграла по угловому спектру плоских волн:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_C [1 - e^{2i(\theta+\psi)}]^{-1} e^{iz \cos \theta} d\theta, \quad (2)$$

где разветвленный контур  $C$  показан на рис. 2.

Известно, что решение Зоммерфельда (1) играет в теории дифракции чрезвычайно важную роль модельного решения, на примере которого можно изучать основные закономерности явления дифракции волн на препятствиях. Это связано с тем, что интеграл (2) точно выражается через табулированные функции:

$$U = \frac{1}{2} e^{iz \cos \psi} \operatorname{erfc}[(2iz)^{1/2} \cos \frac{\psi}{2}], \quad (3)$$

где дополнительная функция ошибок (или интеграл вероятностей)

$$\operatorname{erfc} w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_w^\infty e^{-t^2} dt \quad (4)$$

в данном случае представляет собой комплексный интеграл Френеля, в котором

$$w \equiv (2iz)^{1/2} \cos \frac{\psi}{2} = e^{i\pi/4} (2z)^{1/2} \cos \frac{\psi}{2}, \quad (5)$$

так что решение Зоммерфельда (1) приобретает вид замкнутого математического выражения, которое можно представить в терминах функции

$$U = \frac{1}{2} e^{-iz} e^{w^2} \operatorname{erfc} w. \quad (6)$$

Ясно, что эта последняя удовлетворяет двумерному

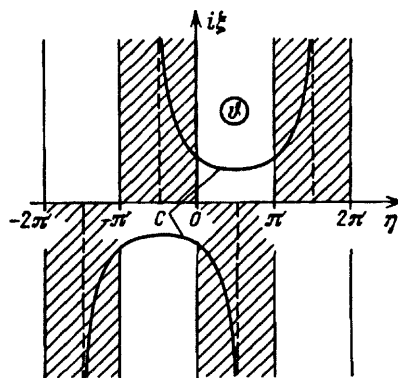


Рис. 2

уравнению Гельмгольца

$$z^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial U}{\partial z} \right) + z^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0, \quad (7)$$

подобно тому, как ему же удовлетворяет и функция, описывающая собой плоскую волну:

$$U \equiv e^{iz \cos \psi} = e^{-iz} e^{w^2}, \quad (8)$$

по которой обычно ведется разложение волновых полей в двумерных краевых задачах, как это сделано, например, в формуле (2) и которая (обратим на это внимание) входит в (6) в качестве множителя перед функцией  $\operatorname{erfc} w$ .

Кроме уравнения Гельмгольца (7) решение Зоммерфельда (1) удовлетворяет соответствующим граничным условиям на полуплоскости. А именно, в случае  $E$ -поляризации, коща электрический вектор задающей плоской волны ( $E_z$ ) параллелен кромке полуплоскостинаней, т.е. при  $\varphi = 0, 2\pi$ , выполняется условие

$$E_z' \Big|_{\varphi=0, 2\pi} = 0,$$

а в случае  $H$ -поляризации

$$\frac{\partial H_z'}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, 2\pi} = 0.$$

Та особая роль, которую играет решение Зоммерфельда в теории дифракции, вытекает из того обстоятельства, что совершенно строгое решение краевой задачи удается представить здесь через табулированные функции, аналитические свойства которых полностью передают все закономерности явления дифракции волн на препятствиях. Следовательно, основные аналитические свойства дополнительной функции ошибок играют здесь исключительно важную роль. Приведем поэтому сводку основных свойств этой функции.

Во-первых, из теории этих функций [7] известно, что имеет место следующее функциональное соотношение:

$$\operatorname{erfc} x + \operatorname{erfc}(-x) = 2, \quad (9)$$

справедливое для любого комплексного  $x$ . В отличие от него формула

$$e^{x^2} \operatorname{erfc} x \approx (\pi x)^{-1} + o(x^{-3}) \quad (10)$$

для асимптотического поведения этой функции при  $|x| \gg 1$  справедлива лишь при условии

$$|\arg x| < \pi/2. \quad (11)$$

В сущности, этих двух формул вполне достаточно для характеристики всех наиболее существенных особенностей поведения дифрагирующих полей в задаче с полуплоскостью. Условие (11), например, если оно выполняется, свидетельствует о том, что поле, описываемое функцией (6), не содержит никаких других волновых полей, кроме цилиндрической волны.

Следовательно, условие (11) относится к тем, ко-

торые регулируют собой локализацию смежных с препятствием (в виде полуплоскости) теневых областей пространства, поскольку обратное ему условие

$$|\arg x| > \pi/2,$$

побуждающее обратиться к соотношению (9):

$$\frac{1}{2} e^{-iz} e^{w^2} \operatorname{erfc} w = e^{-iz} \left[ e^{w^2} - \frac{1}{2} e^{w^2} \operatorname{erfc}(-w) \right],$$

где уже в его правой части  $|\arg(-w)| < \pi/2$ , относится, очевидно, к формулам, регламентирующим локализацию освещенных областей пространства, потому что, как следует из последнего равенства, интересующее нас поле содержит здесь аддитивный экспоненциальный (геометрооптический) член в виде однородной плоской волны. Таким образом, уравнение

$$|\arg w| = \pi/2, \quad (12)$$

которое в данных обстоятельствах сводится к равенству

$$\cos \frac{\varphi \pm \varphi_0}{2} = 0, \quad (13)$$

регулирует геометрическое положение в пространстве границы света и тени.

Эта граница проходит по прямой линии (полярному лучу), совпадающей с самым крайним световым лучом из всей совокупности лучей геометрооптического пучка отраженных и прошедших лучей (речь идет об одном крайнем луче только потому, что здесь рассматривается не сам пучок, а его сечение плоскостью). Запомним, что именно условие (12) играет фундаментальную аналитическую роль в регламентации наиболее значительных особенностей явления дифракции, изучаемого на модельной задаче с полуплоскостью. При этом нужно иметь в виду, что уравнение (12) благодаря вещественности параметра  $\varphi_0$  сводится здесь к уравнению (13), которое ведет к линейным соотношениям  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$ , связывающим угловые координаты границы света и тени для прошедшего и отраженного световых пучков с полярным углом падения плоской волны. Стоит еще раз подчеркнуть, что линейность этих соотношений обусловлена вещественностью параметра  $\varphi_0$ , входящего, в аргумент  $w$  дополнительной функции ошибок, который при  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$  равен нулю. Подставив это значение в интересующую нас функцию (6), имея в виду, что  $\operatorname{erfc}(0) = 1$  [7], легко находим ее значение на границе света и тени:

$$U \equiv \frac{1}{2} e^{-ikr} = \frac{1}{2} e^{-i \frac{\omega}{c} r}, \quad (14)$$

где  $c$  — скорость света, откуда, собственно, и можно сделать заключение о том, что граница света и тени формируется в пространстве самым крайним световым лучом (отраженным от самого края полуплоско-

сти — ее острия; см. рис. 1,а) из всей совокупности световых лучей, которые излучаются током, индуцированным на полуплоскости падающей плоской волной. Здесь, в случае однородной плоской волны, направление отраженных световых лучей, определяемое соотношением (13), совпадает с направлением переноса ими энергии. Или можно сказать, что направление, вдоль которого фазовая скорость лучей равна скорости света, совпадает с направлением переноса плоской волной энергии. Поэтому определение понятия светового луча как линии, вдоль которой идет перенос энергии [10], совершенно равнозначно здесь другому возможному определению — как линии, вдоль которой фазовая скорость волны равна скорости света в той среде, в которой идет волновой процесс (здесь и далее речь пойдет о вакууме).

Спрашивается теперь, что, собственно, изменится, если уравнение (12) будет содержать не вещественный параметр  $\varphi_0$ , а комплексный  $\theta$ . Ведь функция (6), так же как и (8), по-прежнему будет удовлетворять уравнению Гельмгольца. Последнее связано с тем, что метрические коэффициенты полярной (или цилиндрической) системы координат не зависят от угловой переменной  $\varphi$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно иметь в виду, что экспоненциальная функция (8), которая входит в (6) как множитель, но, несмотря на это, может быть переведена отсюда по формуле (9) и в аддитивное состояние, представляет собой в этом случае неоднородную плоскую волну. Эти волны, как известно [9], играют роль модальных элементов бесконечного волновода в теории открытых волноведущих структур, когда последние моделируются бесконечной импедансной плоскостью. Следовательно, переходя от представления (8) к представлению (6), мы могли бы надеяться, что в случае комплексного параметра  $\theta$  последнее представление будет иметь отношение к описанию волн, направляемых импедансной полуплоскостью, волн открытого волновода, двумерной полубесконечной моделью которого и является полуплоскость с заданными на ней двусторонними граничными условиями импедансного типа. При этом есть основания рассчитывать на то, что, так же как и в случае с идеально проводящей полуплоскостью, где решение Зоммерфельда играет очень важную роль модельного решения для теории дифракции вообще, соответствующие решения для импедансной полуплоскости будут играть примерно такую же роль, но в применении к теории открытых волноводов. Другими словами, так же как и ранее в теории дифракции, соотношение (12) должно играть в теории открытых волноводов фундаментальную

аналитическую роль.

Посмотрим, так ли это и каково физическое содержание применения формулы (12) в теории открытых волноводов.

Впервые эти вопросы были затронуты нами в работах [4,5], где решения вида

$$U = Ae^{-iz}(U(w_+) + U(w_-)), \quad (15)$$

$$U(w_{\pm}) = \frac{1}{2} e^{w_{\pm}^2} \operatorname{erfc} w_{\pm}, \quad (16)$$

$$w_{\pm} = (2iz)^{1/2} \sin \frac{\varphi \pm \theta}{2} = e^{i\pi/4} (2z)^{1/2} \sin \frac{\varphi \pm \theta}{2} \quad (17)$$

(при том, что  $A$  — произвольный амплитудный коэффициент) идентифицированы там, как квазимодальные функции собственных (и несобственных) волн импедансной полуплоскости, соответствующие при  $\operatorname{Re} \theta \equiv \eta \in [0, \arccos(\operatorname{ch}^{-1}\xi)]$ , где  $\xi = \operatorname{Im} \theta$ , медленным собственным (поверхностным) волнам, а при  $\eta \in [\arccos(\operatorname{ch}^{-1}\xi), \pi/2]$  — быстрым несобственным (вытекающим) модам. Сами же числа  $\theta$  при этом играют роль собственных волновых чисел соответствующих мод, причем эти числа определяются из дисперсионного уравнения, вытекающего из импедансных граничных условий на полуплоскости, записанных для экспоненциальных (модальных) составляющих поля [4], поскольку последние аддитивно содержатся в квазимодальных функциях (15). Сделаем оговорку, что здесь, как и в [4,5], рассматриваются только пассивные среды.

Итак, если в общем случае комплексного импеданса найдено комплексное собственное число  $\theta$ , то интересно выяснить, какова в этом случае структура квазимодальных функций (15) и что, собственно, означает тоща уравнение (12), поскольку физическая постановка задачи сравнительно с классической задачей Зоммерфельда радикальным образом меняется.

На формально-математическом уровне эти изменения сводятся к тому, что уравнение (12) уже нельзя свести к уравнению типа (13), так как благодаря комплексности параметра  $\theta$ , оно может теперь принимать одну из двух форм

$$\arg w_{+,-} = \pi/2, \quad (18)$$

$$\arg w_{+,-} = 3\pi/2. \quad (19)$$

При этом оказалось [4], что если рассматривать лишь те волны, которые возбуждаются на острие полуплоскости, то уравнение (18) выполняется только применительно к поверхностным волнам, когда  $\eta \in [0, \arccos(\operatorname{ch}^{-1}\xi)]$ , а (19) — к вытекающим, т.е. при  $\eta \in [\arccos(\operatorname{ch}^{-1}\xi), \pi/2]$ .

Рассмотрим теперь физическое содержание урав-

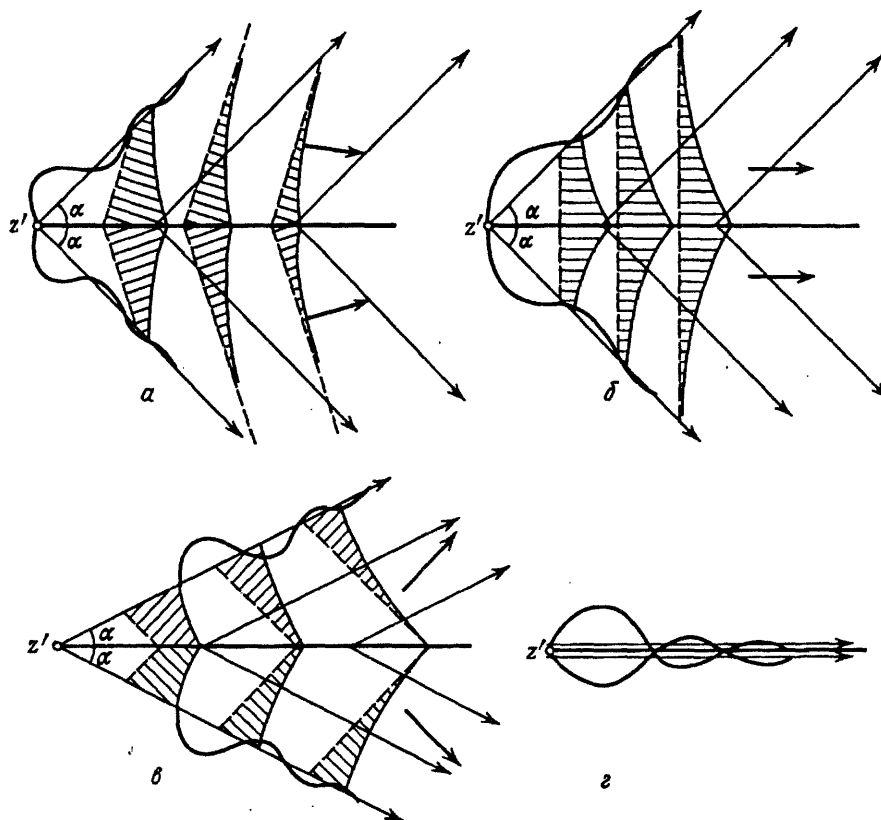


Рис. 3

нений (18) и (19).

Если параметр  $\theta$  известен, то, как это следует из соотношения (17), уравнения (18) и (19) должны решаться относительно угловой координаты  $\varphi$  и ее найденные значения будут, как и ранее, соответствовать угловым координатам границы света и тени для неоднородной плоской волны, возбужденной на краю импедансной полуплоскости и бегущей от этого края вдоль ее поверхности. Другими словами, согласно соотношениям (18) и (19) направляемая полуплоскостью неоднородная плоская волна содержится в некотором угловом секторе пространства, смежном с самой полуплоскостью (рис. 3).

Размеры этого углового сектора, обозначенные на рис. 3 буквой  $\alpha$ , как раз и определяются из соотношений (18) и (19). А именно, угловые координаты границы света и тени для поверхностной волны, распространяющейся над полуплоскостью, вычисляются из уравнения (18), в которое подставляется выражение для  $w_+$ . Заменяя в этом уравнении  $w_+$  на  $w_-$ , мы можем вычислить угловые координаты той же волны, но локализованной под полуплоскостью. Следовательно, в пределах полярного угла  $\alpha$  над полуплоскостью существует неоднородная плоская волна вида

$$U = Ae^{-iz \cos(\varphi + \theta)}$$

а в пределах того же угла  $\alpha$ , но под полуплоскостью —

$$U = e^{-iz \cos(\varphi - \theta)}.$$

Если  $\theta = i\xi$ , то при этом мы имеем дело с незатухающей поверхностной волной, направляемой реактансной полуплоскостью. Эпюры поля, соответствующие этим двум случаям, изображены соответственно на рис. 3, а, б. То же самое относится и к вытекающим волнам, с той только разницей, что уравнение (19), взятое со знаком "+", дает нам угловую координату границы света и тени в нижнем полупространстве, а взятое со знаком "-", — в верхнем. Следовательно, в верхнем угловом секторе локализована экспонента

$$U = e^{-iz \cos(\varphi - \theta)},$$

в нижнем

$$U = e^{-iz \cos(\varphi + \theta)}.$$

С этой переменной знаков связано то, что амплитуда поля вытекающей волны в пределах сектора ее локализации нарастает, если точка наблюдения перемещается в поперечном направлении от поверхности полуплоскости. Эпюра поля для этого вида волн изображена на рис. 3, в, где, в частности, как и на рис. 3, а, б, показано экспоненциальное амплитудное распределение волны по поверхности равных фаз, которые изображены на рисунках штриховыми линиями. Жирной стрелкой показано также направление пе-

реноса энергии волной, перпендикулярное поверхностям равных фаз. На рис. 3 показаны также мгновенные снимки реальной части распределения напряженности поля вдоль световых лучей, которые изображены на рисунке тонкими линиями со стрелками, указывающими направление их распространения.

Для того чтобы определить напряженность поля квазимодальной функции на границе света и тени неоднородной плоской волны, достаточно подставить в выражение (15) соответствующие значения аргументов  $w_+$  и  $w_-$  из (18) и (19), равные либо  $\pi/2$ , либо  $3\pi/2$ . Это означает, что аргумент функции  $\operatorname{erfc} w_{\pm}$  в (15) принимает здесь чисто мнимые значения:  $\pm i\chi$ , где  $\chi$  — вещественное положительное число. Воспользуемся далее еще одним отмеченным в [5] аналитическим свойством дополнительной функции ошибок от мнимого аргумента

$$\operatorname{erfc}(\pm i\chi) = 1 \pm i \operatorname{Im} \operatorname{erfc}(i\chi),$$

имея в виду асимптотическое (при  $\chi \gg 1$ ) поведение ее мнимой части:

$$\operatorname{Im} \operatorname{erfc}(i\chi) \approx e^{-\chi^2} [(i\sqrt{\pi}\chi)^{-1} + o(\chi^{-3})].$$

Отсюда нетрудно вычислить и интересующее нас “полутеневое” (при  $\varphi = \alpha$ ) значение функции (15)

$$U = Ae^{-iz} \left( \frac{1}{2} e^{-\chi^2} + f_{\pm}(z, \alpha) \right), \quad (20)$$

где функция  $f_{\pm}$ , вне зависимости от того, какая именно волна имеется здесь в виду — поверхностная или вытекающая, — при  $z \gg 1$  имеет асимптотику амплитуды цилиндрической волны, т.е. пропорциональна  $z^{-1/2}$ . Однако для нас здесь важно, что поскольку

$$\chi^2 = kr\beta(\eta, \xi),$$

где  $\beta$  — некоторая функция, зависящая от действительной и мнимой части собственного значения волнового числа данной моды, модальная (экспоненциальная) часть выражения (20)

$$U_M = \frac{1}{2} Ae^{-i\frac{\omega}{c}r} e^{-\chi^2} \quad (21)$$

( $\chi$  — действительное положительное число) ясно указывает на существование комплексно затухающих световых лучей, как бы стекающих с поверхности полуплоскости (см. рис. 3).

Подобно тому как ранее в теории дифракции можно было, воспользовавшись уравнением (12), однозначно установить направление распространения всей совокупности отраженных от полуплоскости световых лучей, хотя само это уравнение имеет отношение всего лишь к одному из них (самому крайнему), точно так же и здесь: по одному крайнему лучу мы можем однозначно восстановить направление распространения всей совокупности параллель-

ных друг другу, но уже комплексно затухающих, согласно (21), световых (распространяющихся со световой фазовой скоростью) лучей, что и показано на рис. 3.

Ясно, что коллинеарность лучей в пучке и в том, и в другом случае (и при комплексном параметре  $\theta$  и при вещественном  $\varphi_0$ ) вытекает из того факта, что сам пучок относится здесь к плоской волне, и неважно, к какой именно — однородной или неоднородной. Именно поэтому положение в пространстве самого крайнего луча играет здесь столь важную роль. Но уравнение (12) регулирует не только направление распространения этого луча. Сверх того оно позволяет также сделать однозначный выбор между двумя возможными определениями светового луча.

Первое определение его как линии, вдоль которой идет распространение энергии, совершенно не годится здесь, потому что никоим образом не согласуется с принципами, изложенными выше, в основание которых положены аналитические свойства решений уравнения Гельмгольца, записанных в терминах функций (6) в общем случае комплексного параметра  $\theta$ . Этим принципам соответствует другое, предложенное в [5], определение светового луча как линии, вдоль которой фазовая скорость волны равна скорости света в той среде (в данном случае это вакуум), в которой протекает волновой процесс. В самом деле, такое определение, являющееся (повторим это) простым следствием интерпретации аналитических свойств соответствующего решения уравнения Гельмгольца, в наибольшей степени, чем первое, удовлетворяет требованию общности, так как самым естественным образом охватывает собой и случай комплексного параметра  $\theta$ , и вещественного  $\varphi_0$  являющегося просто предельной формой первого, когда в формуле (21)  $\chi \rightarrow 0$ . Но при этом возникает, конечно, совершенно естественный вопрос об обоснованности тех принципов, которыми мы руководствовались выше, давая иное определение понятию светового луча, исходя при этом из аналитических свойств соответствующего решения волнового уравнения.

Следовательно, вопрос этот сводится к вопросу выбора базового решения волнового уравнения. Если им является экспоненциальное решение

$$U = e^{-iz} e^{\chi^2}, \quad (22)$$

то, вообще говоря, каких-либо априорных оснований в пользу выбора того или иного определения понятия световых лучей не существует. Если же им будет решение вида

$$U = e^{-iz} e^{\chi^2} \operatorname{erfc} \chi, \quad (23)$$

то здесь уравнение (12) ведет к единственно возможному определению световых лучей как линий, вдоль

которых фазовая скорость волны равна скорости света. Разрешение этой дилеммы в пользу представления (23) (чему отчасти и посвящена настоящая работа) играет, как показано в [4,5], в теории открытых волноводов центральную роль, так как ведет в конце концов к изменениям в физических основаниях современной теории открытых волноводов, приводя ее к стандартному виду, где единственным требованием к модальным элементам поля является требование удовлетворения стандартным граничным условиям на границе раздела сред. Однако в отличие от теории закрытых волноводов само понятие моды относится здесь не к бесконечному волноводу, а к другой идеализированной модели — к модели полубесконечного волновода [4,5]. Мы еще вернемся к этому вопросу, но после того, как докажем формальную равноправность решений (22) и (23), поскольку отдать предпочтение тому или иному решению, выбрав именно это, а не другое в качестве базисного, по которому ведется разложение поля, можно, очевидно, лишь при условии их равнозначности.

Нельзя не сказать о том, что мы затрагиваем здесь очень тонкий аспект проблемы. Ведь с формальной точки зрения все частные решения волнового уравнения, которых у него как у дифференциального уравнения в частных производных может быть бесчисленное множество, равноправны. Тем не менее имеются серьезные аргументы достаточной степени общности, основанные главным образом на свойствах пространственно-временной симметрии [11], чтобы среди всех возможных решений в качестве базисного выбрать экспоненциальное (22). Поэтому, в принципе, для замены этого базисного решения на такое-то другое должны быть найдены очень веские основания.

Одна из главных целей, которую мы преследуем здесь, заключается в том, чтобы найти эти основания, потому что замена базисного решения (22) на (23) со всеми вытекающими отсюда изменениями формально-математического свойства, была уже показана в работе [5], но это было сделано там чисто эвристическим способом.

Сравнивая решения (22) и (23), нетрудно заметить их структурную однородность, которая, по-видимому, не может быть простой случайностью. Но тогда сама структура решений (22) и (23) дает нам ключ для правильного решения поставленной задачи.

Во-первых, совершенно очевидно, что важнейшей особенностью этой структуры является присутствие в ней быстроосциллирующего фазового множителя  $e^{-iz}$ , так что его лучше сразу же выделить в написании волновой функции

$$U = e^{-iz} V(z, \varphi), \quad (24)$$

о которой нам пока известно лишь то, что она должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (7).

Прежде чем пойти дальше, напомним, что нас интересует сейчас не только аналитическая сторона дела, но также и геометрическая, поскольку выше уже обращалось внимание на то, что экспоненциальное решение (22) обладает такими собственными геометрическими свойствами, которые позволяют выделить его среди всех других решений. И поскольку вопросы их геометрической интерпретации могут обладать самостоятельной силой, то рассматривая решения уравнения Гельмгольца (7), мы не будем придерживаться обычных ограничений на область определения его независимых переменных:  $r \in [0, \infty]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . расширив ее для угловой переменной  $\varphi$  до полного одномерного континуума:  $\varphi \in [-\infty, +\infty]$ . Таким образом, мы намерены предложить более широкие возможности геометрической интерпретации самих решений уравнения (7) как сугубо математического объекта. И только сопоставив затем геометрическую область определения полученного результата с обычным двумерным геометрическим пространством, для которого  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , мы сможем сделать те или иные заключения по поводу физического смысла соответствующих решений.

Итак, подставив теперь выражение (24) в уравнение (7), получим уравнение для амплитудной функции  $V$ :

$$z^2 V_{zz} + z(1 - 2iz)V_z + V_{\varphi\varphi} - izV = 0, \quad (25)$$

которое назовем приведенным уравнением Гельмгольца.

Обратим внимание затем на то, что аргумент амплитудной функции  $V$ , взятой либо из решения (22), либо из решения (23), один и тот же

$$x = (2iz)^{1/2} \sin \frac{\psi}{2},$$

где  $\psi = \varphi + \theta$ ,  $\theta$  — произвольный параметр, который, не ограничивая общности рассмотрения, можно приравнять к нулю, так что положим сразу

$$x = (2iz)^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (26)$$

Мы видим теперь, что в переменной  $x$  сгруппированы обе независимые переменные  $r$  и  $\varphi$ , так как  $z = kr$ .

Мы видим также, что способ группировки (26) имеет отношение к обоим решениям (22) и (23) в равной мере, так что он обладает, таким образом, некоторой общностью, что прямо ведет к мысли использовать этот способ группировки для образования новой независимой переменной по формуле (26), объединяющей переменные  $r$  и  $\varphi$ .

Фактически это означает отказ от применения классической схемы разделения переменных.

**3. Автомодельные решения приведенного уравнения Гельмгольца (двумерный случай).** Итак, полагая  $x$  (см. формулу (26)) новой независимой переменной для амплитудной функции  $V$  из приведенного уравнения Гельмгольца (25), выразим входящие в него члены через эту новую переменную:

$$\begin{aligned} z^2 V_{zz} &= -\frac{1}{4} x V_x + \frac{1}{4} x^2 V_{xx}, \\ z(1 - 2iz)V_z &= \frac{1}{2} x V_x - (iz)x V_x, \\ V_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{4} x V_x - \frac{1}{4} x^2 V_{xx} + (iz)\frac{1}{2} V_{xx}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь все это в (25), получим

$$iz(V_{xx} - 2xV_x - 2V) = 0,$$

откуда приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$V_{xx} - 2xV_x - 2V = 0. \quad (27)$$

Если в нем выполнить подстановку

$$V = e^{x^2} W,$$

то (27) переходит в уравнение

$$W_{xx} - 2xW_x = 0, \quad (28)$$

имеющее общее решение

$$W = A \operatorname{erfc} x + B, \quad (29)$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой (29) в

(28), учитывая, что

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

и что поэтому согласно формуле дифференцирования Лейбница

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erfc} x = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Подразумевая под функцией  $\operatorname{erfc} x$  целую функцию, нетрудно понять, что, вообще говоря, существуют еще две совершенно эквивалентные (29) формы записи решений уравнения (28):

$$\begin{aligned} W &= A \operatorname{erfc} x + B \operatorname{erfc}(-x), \\ W &= A \operatorname{erfc}(-x) + B, \end{aligned}$$

также содержащие только целые функции. Это свойство решений уравнения (28) обязано своим существованием отмеченному выше функциональному свойству (9) дополнительной функции ошибок. Поэтому наш выбор формы записи общего решения уравнения (28) не имеет принципиального значения.

Итак, мы видим, что решение двумерного уравнения Гельмгольца, построенное на основе автомодельных решений<sup>(1\*)</sup> приведенного уравнения Гельмгольца (25), имеет вид

$$\begin{aligned} U &= A e^{-iz \cos \varphi} \operatorname{erfc} \left[ e^{i\pi/4} (2z)^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] + \\ &+ B e^{-iz \cos \varphi}, \end{aligned} \quad (30)$$

где под  $(2z)^{1/2}$  подразумевается арифметическое значение радикала. Таким образом, решения уравнения Гельмгольца (22) и (23) действительно выделяются среди всех других возможных решений тем, что оба они построены из соответствующих автомодельных решений приведенного уравнения Гельмгольца (25). В этом смысле оба интересующие нас решения совершенно равноправны. И поскольку одно из них (экспоненциальное) играет исключительно важную роль в математической физике, то, по-видимому, у нас имеются теперь некоторые основания, чтобы полнее исследовать возможность расширения роли второго, имея в виду его использование в качестве базисного решения волнового уравнения, по которому ведется разложение поля в двумерных задачах соответствующих разделов математической физики. Для того чтобы выявить условия замены базисного решения (22) на (23), нужно сначала провести сравнительный анализ их наиболее общих геометрических свойств. С этой целью рассмотрим сначала экспоненциальное решение, т.е. второе слагаемое в выражении (30), которое будем называть для краткости общим автомодельным решением уравнения Гельмгольца.

Поскольку экспоненциальная функция — это целая функция своего аргумента, период которого равен  $2\pi$ , то сама она обладает тем же периодом по переменной  $\varphi$ . В определенном контексте это есть ее главное аналитическое свойство, поскольку оно позволяет идентифицировать интервал  $\varphi \in [0, 2\pi]$  как нетривиальную область определения этой функции в том смысле, что дальнейшее расширение этой области ведет к тавтологии. Геометрическая интерпретация этого свойства, следовательно, может заключаться в том, что собственным геометрическим пространством данного автомодельного решения волнового уравнения является полная плоскость. Отметим, что в данном случае собственное геометрическое пространство решения, определенное выше чисто аналитическими средствами, совпадает с обычным двумерным геометрическим пространством, хотя такое совпадение в общем случае совсем не обязательно. В чем легко убедиться, рассмотрев с этих же позиций первое слагаемое в (30).

Здесь мы имеем дело уже с произведением целых функций, которое, таким образом, представляет собой также целую функцию  $\varphi$ . Как видно из выражения (30), аргумент каждого из сомножителей этого произведения обладает своим собственным периодом по  $\varphi$ . Причем период аргумента дополнительной функции ошибок, равный  $4\pi$ , вдвое больше, чем у экспоненты. Следовательно, именно он определяет период произведения функций. Отсюда следует вы-



вод о том, что собственным геометрическим пространством второго автомодельного решения (23) является уже двулистная риманова поверхность, листы которой — верхний:  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , и нижний:  $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$  — склеены по полярному лучу  $\varphi = 0, 2\pi (4\pi)$ . Причем на верхнем листе римановой поверхности исследуемое решение ведет себя в соответствии с формулой (10) при  $z \gg 1$  как цилиндрическая волна, расходящаяся (при временной зависимости  $e^{i\omega t}$ ) от точки ветвления  $z = 0$  собственного геометрического пространства этого решения. На нижнем листе, как это следует из комбинации формул (9) и (10), к этой цилиндрической волне добавляется однородная плоская волна  $\exp(-iz \cos \varphi)$ . Таким образом, мы видим, что собственное геометрическое пространство второго автомодельного решения отнюдь не совпадает с обычным двумерным геометрическим пространством, где это решение, а вернее его частные производные, начиная с первого порядка, имеют разрывы первого рода на полярном луче  $\varphi = 0(2\pi)$ . Естественно, что это свойство изучаемого здесь автомодельного решения не может не отразиться на условиях его физической применимости в приложениях в качестве базисного решения волнового уравнения, о чем речь пойдет ниже. Пока же вместо резюме мы ограничимся лишь констатацией того факта, что в самом деле преобразование (26), объединяя независимые переменные двумерного уравнения Гельмгольца, переводит его приведенную Форму (25) в уравнение второго порядка в полных дифференциалах, два частных решения которого выделяются среди бесчисленного множества других решений уравнения Гельмгольца как дифференциального уравнения в частных производных признаком автомодельности.

Для того чтобы выяснить, предлагает ли преобразование (26) аналогичные возможности для решений в случае трех пространственных независимых переменных или раскрытая выше роль этого преобразования ограничена только двумерным случаем и, следовательно, самим своим появлением она обязана простой случайности, нужно, очевидно, попытаться распространить обнаруженную выше схему решения на трехмерное уравнение Гельмгольца.

**4. Исследование автомодельных решений трехмерного уравнения Гельмгольца.** Уравнение Гельмгольца для скалярной волновой функции или вектора Герца в сферической системе координат имеет, как известно, вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( z^2 \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \sin^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \sin^{-2} \theta \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + z^2 U = 0, \quad (31)$$

где  $z = kr$ ;  $r$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$  — соответствующие сферические координаты (рис. 4). Совершенно очевидно, что роль полярной угловой координаты переходит здесь к переменной  $\theta$ . И далее, поскольку преобразование (26), принимающее здесь форму

$$x = (2iz)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (32)$$

по-прежнему объединяет только две независимые переменные, то желая проверить его применимость к трехмерной дифференциальной форме уравнения Гельмгольца (31), мы тем не менее должны ограничиться здесь аксиально-симметричными волновыми функциями  $U$ , не зависящими от переменной  $\alpha$ . В этом случае приведенная форма уравнения Гельмгольца для амплитудной функции  $V(z, \theta)$ , связанной с волновой функцией  $U$  соотношением

$$U = e^{-iz} V(z, \theta),$$

имеет вид

$$z^2 V_{zz} + 2z(1 - iz)V_z + V_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V_\theta - 2izV = 0. \quad (33)$$

Вводя далее новую независимую переменную  $x$  по формуле (32), приводим уравнение (33) по той же схеме к уравнению в полных дифференциалах

$$V_{xx} - (2x - x^{-1})V_x - 4V = 0.$$

После подстановки сюда

$$V = e^{x^2} W$$

приходим, наконец, к уравнению

$$W_{xx} + (2x + x^{-1})W_x = 0 \quad (34)$$

с общим решением

$$W = A \operatorname{Ei}(-x^2) + B, \quad (35)$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой (35) в (34), если иметь в виду, что

$$\operatorname{Ei}(-x^2) = \int_{-x^2}^{\infty} e^t t^{-1} dt.$$

Таким образом, интеграл уравнения (31), построенный на основе общего автомодельного решения приведенного уравнения (33), выражается как

$$U = A e^{-iz \cos \theta} \operatorname{Ei}[-iz(1 - \cos \theta)] + B e^{-iz \cos \theta}. \quad (36)$$

Отсюда видно, что наибольший интерес для нас представляет здесь первое слагаемое выражения (36), содержащее множитель в виде интегральной показательной функции  $\operatorname{Ei}(-x^2)$ , экспоненциальный множитель которой обладает тем же периодом

по  $\theta$  (равным  $2\pi$ ), что и аргумент  $(-x^2)$  этой функции. Поэтому от ее собственных аналитических свойств зависит все остальное.

Эта функция, как известно [12], является (в отличие от дополнительной функции ошибок) бесконечнолистной функцией  $\chi$  с единственной конечной точкой ветвления  $x = 0$  ( $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ), где сама функция  $Ei(-x^2)$  имеет логарифмическую особенность:

$$Ei(-x^2) \approx \ln \gamma x \quad (|x^2| \ll 1), \tag{37}$$

$\gamma$  — постоянная Эйлера.

Если  $|x| \gg 1$ , то для основной ветви функции  $Ei(-x^2)$ , которую мы будем отличать от многолистной функции заменой в ее написании прописной буквы  $E$  на строчную, справедлива асимптотика [12]

$$ei(-x^2) \approx x^{-2} e^{-x^2} \left( 1 - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^4} - \frac{3!}{x^6} + \dots \right). \tag{38}$$

Рассмотрим теперь произведение амплитудной функции  $Ei[-iz(1 - \cos \theta)]$  на оси  $\theta$ .

При  $\theta = 0$  эта функция согласно (37) имеет особенность. На интервале и  $\theta \in (0, \pi]$ , как это следует из формул (36) и (38), если при этом условиться, что здесь реализуется главная ветвь функции, она представляет собой амплитуду сферической волны. На интервале  $[\pi, 2\pi)$  поведение этой функции в точности повторяет закон ее изменения на подвергнутом инверсии интервале  $(0, \pi]$ . Последнее, являясь следствием симметрии функции  $1 - \cos \theta$  относительно точки  $\theta = \pi$ , свидетельствует о том, что расширение области определения координатного угла  $\theta$  сферической системы координат до интервала  $[0, 2\pi]$  не ведет ни к чему новому<sup>(2\*)</sup>. Пересекая далее координату  $\theta = 2\pi$ , мы при этом пересекаем также и точку ветвления функции  $Ei(-x^2)$  и попадаем поэтому при  $\theta \in [2\pi, 4\pi]$  на другой лист этой функции. Переход на следующий лист реализуется, очевидно, при  $\theta = 4\pi$  и т.д. Точно такой же процесс будет иметь место и в точках  $\theta = -2\pi, -4\pi, \dots$ . Так что саму амплитудную функцию, имеющую циклическую константу  $2\pi i$  [12], можно представить на введенном, таким образом, одномерном континууме  $\theta$ , разбитом на интервалы  $\theta \in [2\pi m, 2\pi(m + 1)]$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , как

$$Ei[-iz(1 - \cos \theta)] = ei[-iz(1 - \cos \theta)] + 2\pi m i. \tag{39}$$

Отсюда следует, что нетривиальной областью определения первого члена автомодельного решения (36) является вся ось  $\theta$ . Геометрическая интерпретация этого свойства состоит, очевидно, в том, что собственным геометрическим пространством интересую-

щего нас автомодельного решения уравнения Гельмгольца является расслоенное пространство, состоящее из счетного множества экземпляров трехмерного пространства, склеенных на полярных лучах  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Это расслоенное пространство (своего рода риманов объем) является трехмерным аналогом бесконечнолистной римановой поверхности. Именно в этом пространстве соответствующее автомодельное решение непрерывно вместе со всеми своими частными производными любого порядка. В этом как раз и состоит главное отличие этого автомодельного решения от второго, экспоненциального, обладающего собственным геометрическим пространством, совпадающим с обычным трехмерным геометрическим пространством. Объединяет же их вместе то, что они составляют пару автомодельных решений дифференциального уравнения второго порядка, которая тем самым выделяется среди бесчисленного множества других решений трехмерного уравнения Гельмгольца как дифференциального уравнения в частных производных.

**5. Особенности использования в приложениях двумерных автомодельных решений.** Будем называть в дальнейшем экспоненциальное решение простым автомодельным решением, а неэкспоненциальное — составным, имея в виду, что оно состоит из множителей.

Очевидно, что адаптация обоих этих решений в физических приложениях предполагает прежде всего наличие геометрического пространства трех измерений (геометрического пространства наблюдателя). В этом случае двумерные автомодельные решения следует рассматривать в качестве решений трехмерного уравнения Гельмгольца, записанного в цилиндрической системе координат притом, что волновая функция  $U$  полагается (по той или иной причине) не зависящей от координаты  $z'$  этой системы трех координат:  $z', r, \varphi$  (см. рис. 1, а). Все остальные особенности адаптации обоих решений будут определяться, по-видимому, аналитическими (равно как и геометрическими) свойствами каждого.

Отметим прежде всего свойство, общее для обоих решений. Состоит оно в том, что решения вида

$$U_{1,2} = A_{1,2}(\gamma) e^{-iz \cos(\varphi \pm \gamma)} \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \sin \frac{\varphi \pm \gamma}{2} \right], \tag{40}$$

$$\tilde{U}_{1,2} = \tilde{A}_{1,2}(\gamma) e^{-iz \cos(\varphi \pm \gamma)} \tag{41}$$

с ненулевым и в общем случае комплексным параметром  $\gamma$ , являются такими же автомодельными ре-

шениями, что и решения с  $\gamma = 0$ . Как уже подчеркивалось ранее, связано это с тем, что метрические коэффициенты полярной или цилиндрической системы координат не зависят от угловой переменной.

Но на этом, пожалуй, свойства, сближающие простое и составное решения, в общем, исчерпываются. Все дальнейшее будет, по-видимому, зависеть как раз от различий в аналитических и геометрических свойствах двух этих решений, а эти различия, как уже отмечалось выше, носят радикальный характер.

Если простое автомодельное решение в пространстве наблюдателя, где  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , непрерывно вместе со всеми своими частными производными, то составное решение, а точнее его частные производные, претерпевают разрывы первого рода на координатной полуплоскости  $\varphi = 0$  ( $2\pi$ ). Связано это, как отмечалось выше, со структурными особенностями собственного геометрического пространства этого решения. Эта особенность составного решения должна, конечно, учитываться при его адаптации в приложениях.

Наиболее естественный шаг состоит здесь в постановке на этой полуплоскости каких-либо граничных условий, которые применительно к волновой функции вносили бы элемент физической оправданности для появления у нее соответствующих разрывов на этой полуплоскости, которая после задания на ней граничных условий, моделировала бы собой некоторый материальный объект (например, «тонкий» полуграниченный лист металла или диэлектрика).

Таким образом, главной предпосылкой использования составного автомодельного решения в качестве базисного решения волнового уравнения в приложениях является постановка какой-либо краевой задачи на полуплоскости. Здесь имеется в виду то, что совершенно подобно тому, как в самом общем случае произвольной геометрии краевой задачи строится ее полная система функций на основе простого автомодельного решения в виде смешанного спектра волн:

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \sum_k A_k \exp[-iz \cos(\varphi + \gamma_k)] + \\ & + \sum_k B_k \exp[iz \cos(\varphi + \delta_k)] + \\ & + \int A(\gamma) \exp[-iz \cos(\varphi + \gamma)] d\gamma + \\ & + \int B(\delta) \exp[iz \cos(\varphi + \delta)] d\delta, \end{aligned} \quad (42)$$

у нас имеются теперь, по крайней мере, достаточные формальные основания строить полную систему функций краевой задачи на полуплоскости с использованием составного автомодельного решения

$$\begin{aligned} U = & \sum_k A_k \exp[-iz \cos(\varphi + \gamma_k)] \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \sin \frac{\varphi + \gamma_k}{2} \right] + \\ & + \sum_k B_k \exp[iz \cos(\varphi + \delta_k)] \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \cos \frac{\varphi + \delta_k}{2} \right] + \\ & + \int A(\gamma) \exp[-iz \cos(\varphi + \gamma)] \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \sin \frac{\varphi + \gamma}{2} \right] d\gamma + \\ & + \int B(\delta) \exp[iz \cos(\varphi + \delta)] \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \cos \frac{\varphi + \delta}{2} \right] d\delta. \end{aligned} \quad (43)$$

Далее, точно так же как конкретный вид представления (42) в каждом конкретном случае зависит от особенностей геометрии граничных условий, способа возбуждения, соображений пространственной симметрии и других аналогичных физических факторов, так что в исходном представлении (42) могут исчезнуть один, два или даже три из четырех его членов, конечная форма представления (43) может испытывать аналогичные видоизменения по тем же самым причинам.

Приведем один простейший пример из области дифракции электромагнитных волн. Заметим сначала, что в цилиндрической системе координат, когда потенциал  $U$  не зависит от координаты  $z'$ , под ним можно подразумевать либо непосредственно электрическую компоненту поля  $E_z$ , либо магнитную  $H_z$ , в зависимости от типа поляризации поля.

Пусть теперь на бесконечно тонкий и идеально проводящий бесконечный лист металла падает сверху под некоторым углом  $\varphi_0$   $E$ - поляризованная плоская волна с единичной амплитудой (см. рис. 1,б). Решение этой задачи, записанное в цилиндрической системе координат (при опущенной зависимости поля от времени:  $e^{i\omega t}$ , будет иметь, очевидно, вид

$$E_z = \exp[iz \cos(\varphi - \varphi_0)] - \exp[iz \cos(\varphi + \varphi_0)].$$

Мы видим, что оно набирается здесь всего двумя слагаемыми второй суммы из (42) при  $\delta_1 = -\varphi_0$ ,  $\delta_2 = +\varphi_0$ ,  $B_1=1$ ,  $B_2=-1$ . Решаем теперь почти ту же задачу, «срезав», однако, половину металлической плоскости таким образом, чтобы электрический вектор падающей плоской волны был параллелен образовавшейся кромке среза.

Замечаем при этом, что все четыре члена в порядке их следования в выражениях (42) и (43) попарно подобны друг другу. Воспользовавшись этим, предполагаем, что так же, как и ранее, для решения по-

ставленной краевой задачи достаточно только двух соответствующих слагаемых из суммы второго члена выражения (43);

$$E_z = \frac{1}{2} e^{iz \cos(\varphi - \varphi_0)} \operatorname{erfc} \left[ e^{i\pi/4} (2z)^{1/2} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] - \frac{1}{2} e^{iz \cos(\varphi + \varphi_0)} \operatorname{erfc} \left[ e^{i\pi/4} (2z)^{1/2} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right]. \quad (44)$$

Единственное несущественное отличие от рассмотренной выше задачи с плоскостью состоит в том, что здесь принято  $B_1 = 1/2$ ,  $B_2 = -1/2$  что просто связано с нормировкой дополнительной функции ошибок.

Итак, мы видим, что решение задачи (44) есть классическое решение Зоммерфельда [1]. Однако получено оно здесь в виде тривиального набора дискретных членов разложения по составному автомодельному решению. Вообще говоря, эту задачу следует решать, как и любую другую краевую задачу, начиная с записи полного поля в виде суперпозиции падающей и рассеянной волн:

$$E_z = e^{iz \cos(\varphi - \varphi_0)} + B_1 e^{iz \cos(\varphi - \varphi_0)} \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] + B_2 e^{iz \cos(\varphi + \varphi_0)} \operatorname{erfc} \left[ (2iz)^{1/2} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right]. \quad (45)$$

Нетрудно показать, что граничное условие  $E_z(\varphi = 0, 2\pi) = 0$ , примененное к выражению (45), ведет, с учетом соотношения (9), к решению (44). Точно так же решается и задача для  $H$  — поляризованной плоской волны.

Можно, конечно, как это и делалось везде [1 — 3] до сих пор, рассеянное поле записывать в виде интеграла плоских волн, т.е. использовать интегральные члены в разложении по простому автомодельному решению (42), и решать затем интегральное уравнение с применением довольно сложных и сравнительно громоздких математических методов типа метода Винера — Хопфа [3]. Другой путь, показанный нами здесь и связанный с использованием уже готового разложения по составному автомодельному решению (43), низводит процесс получения решения задачи с полуплоскостью к буквально тривиальному по своей сложности процессу. Какие-либо другие комментарии пр поводу методологических преимуществ разложения (43) здесь, по нашему мнению, совершенно излишни.

Относительно дискретных членов разложения (43) с комплексными параметрами мы уже говорили в самом начале. Поэтому некоторая неясность оста-

ется пока в отношении интегральных членов в (43). Чтобы рассеять ее, нужно вновь вернуться к вопросам описания собственных волн полубесконечного “тонкого” незранированного волновода, естественной моделью которого может служить полуплоскость с указанными на ней соответствующими (двухсторонними) граничными условиями. Применительно к задаче, когда эта полуплоскость заменяет собой “тонкий” планарный полубесконечный диэлектрический волновод, в статье [5] показано, что интегральные члены разложения (43) играют в теории открытых волноводов роль квазимодальных функций непрерывного спектра волн полубесконечного волновода. При этом модальные элементы этого спектра представляют собой континуум скользких по поверхности полуплоскости (как верхней, так и нижней) световых лучей, источником которых является кромка среза полуплоскости, играющая здесь роль возмущающей “неоднородности”. Дело в том, что, как показано в [5], интегральные члены в (43) содержат модельные элементы непрерывного спектра волн открытого волновода лишь тогда, когда угол  $\alpha$  (полярный угол локализации неоднородной плоской волны, направляемой полуплоскостью; см. рис. 3) стремится к нулю. Этот случай графически изображен на рис. 3,2. Здесь показан один из световых лучей континуума (и относящийся к этому лучу мгновенный снимок реальной части поля), состоящего из световых лучей, напряженность поля которых описывается функцией (21), являющейся подинтегральной функцией несобственного интеграла, определенного на интервале  $\chi \in [0, \infty]$ , где  $\chi$  — переменная интегрирования, входящая в выражение (21). Нужно отметить, что направление распространения световых лучей, соответствующее состоянию скольжения по поверхности полуплоскости, есть вообще предельное по отношению к другим возможным направлениям, показанным на рис. 3, а—в, если, конечно, при этом иметь в виду существование причинноследственных отношений между токами полуплоскости и световыми лучами<sup>(3\*)</sup> [4]. Замечательным свойством разложения (43) является как раз то, что оно не содержит в принципе модальных элементов со световыми лучами, «втекающими» в поверхность полуплоскости. Этого нельзя, конечно, сказать о представлении (42). Эта разница представлений играет в теории открытых волноводов принципиальную роль. В самом деле, решая дилемму выбора между базовыми представлениями (42) и (43), применительно к теории открытых волноводов мы решаем, по существу, задачу выбора идеализированной физической модели бесконечного или полубесконечного волновода, соответственно. Если мы выбираем вто-

рое, то такие волны (по современной терминологии [9], связанной с моделью бесконечного волновода) как быстрые собственные (экспоненциально затухающие на поперечной бесконечности) и медленные несобственные (экспоненциально нарастающие на поперечной бесконечности), световые лучи которых “втекают” в поверхность полуплоскости, автоматически исключаются из рассмотрения. Заметим, кстати, что предсказанная в свое время на базе представления (42) так называемая волна Ценнека (быстрая собственная волна) так и не обнаружена до сих пор, хотя поле ее удовлетворяет всем условиям теории, идеализированной базовой моделью которой является бесконечный волновод. Таким образом, представление (43) изначально содержит внутренний информационный механизм, ограничивающий избыточные возможности, предоставляемые разложением (42). Наличие этих избыточных возможностей ведет, в частности, к тому, что теория открытых волноводов, сформулированная применительно к модальным элементам бесконечного волновода, также избыточна. Физические основания этой теории, кроме полагающихся стандартных граничных условий, содержат такие условия, как условие на бесконечности (поперечной или радиальной). Несмотря на это (а точнее, благодаря этому) в теории отсутствуют четкие критерии, по которым можно было бы освободиться а priori от лишних решений, — как собственных, так и несобственных. С другой стороны, эта проблема, с выбором представления (43) в качестве базового, решается самым естественным образом и без каких-либо различий относительно того, какая мода рассматривается — собственная или несобственная. Единственное требование, предъявляемое при этом к моде полу бесконечного волновода есть стандартное требование выполнения граничных условий для ее поля. Таким образом, модель полубесконечного волновода с точки зрения создания «экономной» теории открытых волноводов оказывается предпочтительней модели бесконечного волновода. Сверх того, как показано в [5], еще одним следствием приведения физических оснований теории к стандартному виду является связанность дискретной и непрерывной спектральных составляющих рассеянного поля, что означает логическую замкнутость построенного, таким образом, варианта теории открытых волноводов.

Нам осталось подчеркнуть только, что все эти следствия вытекают из простых аналитических свойств (9) и (10) составного автомодельного решения уравнения Гельмгольца, — свойств, повышающих степень информативности математического аппарата, построенного на этом решении, сравнительно с традиционным формализмом, основу которого составляет простое (экспоненциальное) решение волнового уравнения.

**6. Особенности адаптации трехмерных автомодельных решений в приложениях.** Несмотря на то, что вывод автомодельных решений производится по одной и той же схеме вне зависимости от числа независимых переменных в уравнении Гельмгольца, особенности адаптации этих решений в приложениях весьма заметно зависят от этого фактора. Например, из-за зависимости метрических коэффициентов сферической системы координат от переменной  $\theta$ , функции, построенные по типу формул (40) и (41), здесь уже не имеют никакого смысла, так как не будут удовлетворять уравнению Гельмгольца. Следовательно, вопросы использования в каких-либо приложениях (в теории электромагнитных или акустических волн) составного автомодельного решения

$$U = Ae^{-iz \cos \theta} \text{Ei}[-iz(1 - \cos \theta)], \quad (46)$$

где  $\text{Ei}(-x^2)$  — главная ветвь интегральной показательной функции,  $\theta \in (0, \pi]$ , будут решаться совсем иначе, чем в отношении его двумерного аналога.

Далее, совершенно независимо от конкретной сферы применения выражения (46), — то ли в качестве потенциала Дебая применительно к описанию электромагнитных колебаний, то ли под видом потенциала скоростей в теории звуковых волн, — на вопрос об условиях применимости этого выражения в соответствующих приложениях можно, по-видимому, дать ответ после ответа на вопрос: что, собственно, представляют собой поверхности равных амплитуд волны, описываемой потенциалом (46).

Из выражения (46) следует, что эти поверхности задаются уравнением

$$z(1 - \cos \theta) = \rho, \quad (47)$$

где  $\rho$  — вещественный параметр. Нетрудно увидеть, что уравнение (47) это уравнение поверхности параболоида вращения (показана на рис. 4), записанное в терминах сферической системы координат. При

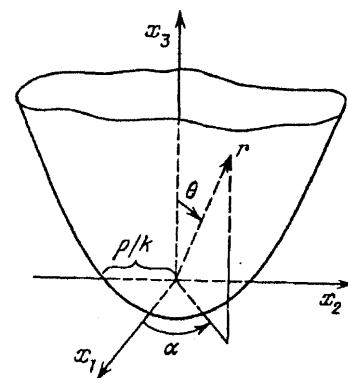


Рис. 4

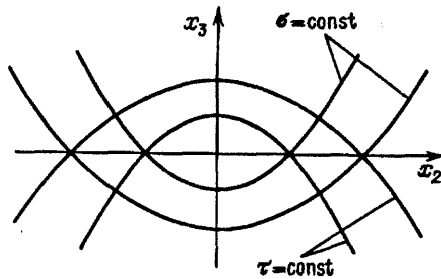


Рис. 5

этом параметр  $\rho$  играет роль фокального параметра (выражен в долях длины волны) параболоида.

Отсюда следует, что использовать формулу (46) для описания пространственно-временного распределения поля в теории звуковых или электромагнитных волн лучше всего в краевых задачах с граничными условиями на поверхности параболоидов вращения, за исключением описания внутренних параболических областей пространства, содержащих ось  $\theta = 0$ , где потенциал (46) имеет особенность.

Хорошо известно, однако, что решение подобного рода задач лучше сразу вести в параболической системе координат, представляющей собой ортогональную систему софокусных параболоидов вращения (координатные поверхности) с фокусом в начале координат. На рис. 5 показано сечение такой координатной системы плоскостью  $x_2 O x_3$ . Легко показать, что параболические координаты связаны со сферическими следующими соотношениями:

$$\sigma^2 = r(1 - \cos \theta), \quad \tau^2 = r(1 + \cos \theta), \quad \alpha' = \alpha. \quad (48)$$

При этом еще

$$r \cos \theta = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2). \quad (49)$$

Подставляя (48) и (49) в (46), нетрудно получить выражение для потенциала  $U$  в параболической системе координат:

$$U = e^{-\frac{k}{2}(\tau^2 - \sigma^2)} \text{Ei}(-ik\sigma^2), \quad (50)$$

которое, как это следует из него самого, можно вывести традиционным методом разделения переменных в уравнении Гельмгольца, записанном в параболической системе координат [13]

$$\sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) + \tau^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + k^2(\sigma^2 + \tau^2)U = 0, \quad (51)$$

в котором опущена зависимость от координаты  $\alpha'$ .

Общая теория решений уравнения (51) была разработана еще Фоком, опубликовавшим свои результаты, в частности, в статье [13], где выражение (50) было получено как одно из частных решений уравнения (51). В этой же статье были указаны также средства, позволяющие использовать соответствующие решения в теории дифракции электромагнитных

волн на идеально проводящем параболоиде вращения. Однако самое непосредственное отношение к применению решения (50) в приложениях имеет работа [6], где как раз с помощью потенциала (50) получено, в частности, строгое замкнутое выражение для рассеянной на параболоиде вращения с жестко закрепленной поверхностью звуковой плоской волны, падающей на внешнюю (выпуклую) поверхность параболоида в направлении, параллельном его оси.

Легко видеть, что решение этой задачи с граничными условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=(\rho')^{1/2}} = 0,$$

где  $\rho' = \rho/k$  (фокальный параметр параболоида, выраженный в единицах длины), будет иметь вид:

$$U = \exp\left[-\frac{k}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right] [1 + \text{Ei}(-ik\sigma^2)],$$

$$\Gamma = i\rho / [2 \exp(-i\rho) - i\rho \text{Ei}(-i\rho)].$$

**7. Заключение.** Общий методологический смысл работы состоит, очевидно, в том, что в ней показана схема решения уравнения Гельмгольца, которая переводит его в уравнение в полных дифференциалах. При этом возникает пара так называемых автомодельных решений, которые как раз этим и выделяются среди счетного множества всех остальных решений волнового уравнения как уравнения в частных производных. Но это только внешняя, формальная сторона дела. Главное, что это влечет за собой отнюдь не формальные следствия, что особенно четко прослеживается на примере двумерных задач. Основной результат здесь сводится к демонстрации тех аналитических свойств составного автомодельного решения, которые, если использовать последнее для моделирования волновых процессов в теории открытых волноводов в качестве базисного решения волнового уравнения, ведут здесь (применительно к современному варианту этой теории) к поправкам достаточно общего характера. Что является уже практическим свидетельством своего рода выделенности автомодельных решений.

В трехмерном случае показанная в статье роль составного автомодельного решения не обладает такой степенью общности, как его двумерный аналог. Однако это еще не основание, чтобы делать на этот счет окончательные выводы. Просто здесь, по нашему мнению, требуются дополнительные исследования, направление которых может сильно отличаться от того, которому мы следовали в этой работе, носящей методологический характер.

Заметим только в этой связи, что направление таких исследований не может быть совсем произвольным, но должно вытекать из собственных

свойств трехмерного решения, которые, как показано в этой статье, действительно весьма существенно отличаются от свойств своего двумерного аналога.

#### ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>(1)</sup> Термин автомодельное решение заимствован здесь из гидродинамики [10] по формальному признаку автомодельности, когда математическое описание физического процесса сводится к задаче с одной независимой переменной.

<sup>(2)</sup> Для сферической системы координат такое расширение просто означает, что если  $\theta$  непрерывно пробегает весь интервал  $[0, 2\pi]$ , то конец единичного радиус-вектора при  $\alpha \in [0, 2\pi]$  дважды описывает полную сферу. Неоднозначности представления пространственного распределения при этом не возникает из-за указанной симметрии множителя  $(1 - \cos \theta)$ , входящего в аргумент функции  $E_i(-x^2)$ .

<sup>(3)</sup> Как было показано в [4,5], существование причинно-следственных отношений между токами полуплоскости (если это полуограниченная «тонкая» диэлектрическая пластина [5], то под токами в этом случае следует подразумевать соответствующие поляризационные токи в диэлектрике) и световыми лучами играет центральную роль в образовании самого понятия мод полубесконечного волновода. В теории экранированных волноводов, например, образование этого понятия не имеет никакого смысла как раз в силу того, что здесь принцип причинности в применении к модальным элементам поля бесконечного волновода никогда не нарушается из-за наличия двух, а не одной, плоскостей, которые постоянно «обмениваются» двумя отраженными световыми лучами. В силу чего наличие «втекающих» лучей здесь не противоречит причинно-следственным отношениям, принятым в электродинамике.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зоммерфельд А. // Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: ОНТИ, 1937. Гл. 20. С. 849.
2. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
3. Вайштейн Д.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио 1966.
4. Кукушкин А. В. // Известия вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, №10. С. 1138.
5. Кукушкин А.В. // Известия вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 11. С. 1242.
6. Horton C.W., Karal F.C. // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V.22, No. 6. P.855.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1977.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
9. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969.
10. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1983.
- [11] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. // Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
12. Янке Е., Эмде Ц; Леш Ц. // Специальные функции. М.: Наука. 1977.
13. Фок В.Б. Теория дифракции от параболоида вращения // Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М.: Сов. радио, 1957.