

ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко

(Харьковский физико-технический институт АН Украины)

(Статья поступила 13.08.92 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (1).
 2. Сверхтекучая ферми-жидкость (3). 2.1. Энтропия сверхтекучей ферми-жидкости. 2.2. Функционал энергии и его свойства симметрии. 2.3. Вариационный принцип и уравнения самосогласования. 2.4. Кинетическое уравнение и дифференциальные законы сохранения.
 3. Синглетное и триплетное спаривание фермионов (9). 3.1. Диагонализация операторов динамических ферми-жидкостных величин. 3.2. Функционал плотности энергии. 3.3. Синглетное спаривание и теория БКШ. 3.4. Триплетное спаривание и сверхтекучие фазы. 3.5. Модель сверхтекучести с неквадратичным функционалом энергии. 3.6. Термодинамика и гидродинамика ферми-жидкости с синглетным спариванием.
 4. Взаимодействие ферми-жидкости с электромагнитным полем (22). 4.1. Уравнения самосогласования и кинетические уравнения при наличии электромагнитного поля. 4.2. Уравнение Лондонов. 4.3. Уравнение Гинзбурга—Ландау.
 5. Заключение (30).
- Список обозначений (31).
Список литературы (31).

1. Введение. При сильном взаимодействии между частицами и достаточно большой плотности система частиц может находиться в жидком состоянии. Детальная микроскопическая теория жидкого состояния в общем случае в настоящее время не построена. Существует, однако, важное исключение из этого утверждения. Речь идет о газе фермионов, находящемся при температурах ниже температуры вырождения, например, о газе электронов в металле. Систему электронов в металле нельзя рассматривать как идеальный газ, а следует рассматривать как некоторую жидкость, которую, следуя Ландау, мы будем называть ферми-жидкостью. Ферми-жидкость мо-

жет находиться в сверхтекучем состоянии. Если явления сверхтекучести нет, то ферми-жидкость называется нормальной. Теория нормальной ферми-жидкости была построена Ландау в 1956 г. [1].

Отметим, что ферми-жидкость представляет собой квантовую жидкость. Другим примером квантовой жидкости может служить бозе-жидкость, частицы которой являются не фермионами, а бозонами. Квантовая жидкость из бозе-частиц обязательно обладает свойством сверхтекучести. Однако ферми-жидкость в области низких температур может быть как нормальной, так и сверхтекучей.

Настоящий обзор посвящен изложению некоторых вопросов теории сверхтекучей ферми-жидкости. Мы начинаем с краткого обзора теории нормальной ферми-жидкости, а затем переходим к изложению теории сверхтекучей ферми-жидкости. Именно, мы развиваем на основе концепции ферми-жидкости теорию синглетного и триплетного спаривания фермионов и в частности получим результаты теории БКШ. Мы даем фермижидкостную трактовку уравнения Лондонов, уравнения Гинзбурга—Ландау и уравнения двухжидкостной гидродинамики для сверхтекучей жидкости.

Наше рассмотрение является полуфеноменологическим: хотя мы пользуемся такими понятиями микроскопической теории, как нормальная и аномальная функция распределения и матрица плотности, однако взаимодействие между квазичастицами мы задаем феноменологическими амплитудами, ко-

торые для нормальной ферми-жидкости впервые вводил Ландау [1].

В настоящем обзоре мы не рассматриваем вопросов, связанных с микроскопическим обоснованием теории ферми-жидкости. Этим вопросам посвящен ряд работ [2—5].

Исходным предположением теории нормальной ферми-жидкости является представление о том, что в результате взаимодействия каждый фермион превращается в квазичастицу, так что ферми-газ превращается в газ слабо взаимодействующих квазичастиц также являющихся фермионами. Это значит, что парное взаимодействие между квазичастицами является слабым, но существенным является взаимодействие квазичастиц с самосогласованным полем всех остальных квазичастиц. В результате самосогласованного взаимодействия полная энергия системы не равна сумме энергий отдельных квазичастиц. Так как в теории нормальной ферми-жидкости предполагается, что отсутствуют связанные состояния, то общее число квазичастиц совпадает с числом исходных фермионов. Температура ферми-жидкости предполагается достаточно низкой. Именно благодаря этому ферми-жидкость можно рассматривать как совокупность слабо взаимодействующих квазичастиц, поскольку вероятность столкновения между фермионами пропорциональна квадрату температуры (напомним, что область размытости ферми-ступеньки пропорциональна температуре).

Индивидуальное состояние квазичастицы будем характеризовать импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина σ . В основе количественной теории нормальной ферми-жидкости лежат понятие энергии системы $E = E(f)$ как функционала "функции распределения" $f_{\mathbf{p}_1\sigma_1, \mathbf{p}_2\sigma_2} \equiv f_{12}$ (одночастичной матрицы плотности) квазичастиц и комбинаторное выражение для энтропии

$$S = -\text{tr}[f \ln f + (1 - f) \ln(1 - f)]. \quad (1.1)$$

В этой формуле tr — след по одночастичным состояниям $1 \equiv \mathbf{p}_1, \sigma_1, 2 \equiv \mathbf{p}_2, \sigma_2$.

Равновесная одночастичная матрица плотности квазичастиц должна находиться из требования максимума энтропии S при условии, что фиксированы значения функционалов энергии $E(f)$, числа частиц

$$N = \text{tr} f \equiv \sum_{\mathbf{p}, \sigma} f_{\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}\sigma}$$

и импульса

$$\mathcal{P}_i = \text{tr} f \hat{p}_i,$$

где $\hat{p}_i$ — оператор импульса квазичастиц. Вводя множители Лагранжа Y , соответствующие величинам E , N , $\mathcal{P}_i$, приходим к задаче отыскания безусловного минимума функционала:

$$\Omega(f) = -S(f) + Y_0 E(f) + Y_i \text{tr} f \hat{p}_i + Y_4 \text{tr} f \quad (1.2)$$

(так как состояние статистического равновесия предполагается пространственно однородным, то величины Ω , S , E , $\mathcal{P}_i$ и N пропорциональны объему системы V). Из этого вариационного принципа вытекает следующее уравнение самосогласования

$$f = [\exp(Y_0 \hat{\epsilon}(f) + Y_i \hat{p}_i + Y_4) + 1]^{-1}, \quad (1.3)$$

$$\epsilon_{12}(f) = \frac{\partial E(f)}{\partial f_{21}},$$

представляющее собой нелинейное уравнение для определения равновесной одночастичной матрицы плотности ферми-жидкости; здесь

$$Y_0 = T^{-1}, \quad Y_i = -Y_0 v_i, \quad Y_4 = -Y_0 \mu, \quad (1.4)$$

где T — температура, v_i — средняя скорость квазичастиц ферми-жидкости, μ — химический потенциал. Величина $\hat{\epsilon}(f)$, представляющая собой функционал одночастичной матрицы плотности, является энергией или гамильтонианом квазичастицы.

Так как газ квазичастиц в главном приближении является идеальным, неравновесный статистический оператор всей ферми-жидкости может быть представлен в виде [6]

$$\rho_0(f) = \exp(\Omega - \sum_{1,2} a_1^+ A_{12} a_2), \quad (1.5)$$

где a_1^+ , a_1 — операторы рождения и уничтожения квазичастиц в состоянии $1 \equiv \mathbf{p}_1, \sigma_1$. Величина Ω определяется из условия нормировки $\text{Sp} \rho_0(f) = 1$. Матрица A_{12} , характеризующая неравновесное состояние, связана с одночастичной матрицей плотности f_{12} соотношением

$$f_{12} = \text{Sp} \rho_0(f) a_2^+ a_1. \quad (1.6)$$

Используя это соотношение, легко показать (см. [6]), что энтропия системы, определяемая формулой

$$S = -\text{Sp} \rho_0(f) \ln \rho_0(f),$$

совпадает с комбинаторной энтропией (1.1). Подчеркнем, что в формуле (1.1) под tr понимается след в пространстве одночастичных состояний, а в формуле (1.6) под Sp понимается след в пространстве вторичного квантования всей системы.

В неравновесном случае одночастичная матрица плотности f зависит от времени. Эта зависимость определяется кинетическим уравнением. Так как $\hat{\epsilon}(f)$ представляет собой гамильтониан квазичастицы, то это уравнение в пренебрежении столкновениями между квазичастицами имеет вид

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = [\hat{\epsilon}(f), f]. \quad (1.7)$$

Столкновениями между квазичастицами можно пренебречь, если $\omega \tau \gg 1$ ($1/\omega$ — характерное время изменения одночастичной матрицы плотности и τ —

время свободного пробега квазичастиц). Это уравнение аналогично кинетическому уравнению Власова [7], широко используемому в теории плазмы.

Для того чтобы уравнения (1.3), (1.7) приобрели конкретный физический смысл, необходимо задать энергию системы $E(f)$ как функционал одночастичной матрицы плотности. Этот функционал в простейшем случае можно задать в виде

$$E(f) = \sum_{1,2} \varepsilon_{12} f_{21} + \frac{1}{2} (f_0, F_1 f_0) + \frac{1}{2} (f_i, F_2 f_i), \quad (1.8)$$

где

$$(f_0, F_1 f_0) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p}', \mathbf{q}'} f_{0\mathbf{p}\mathbf{q}}(F_1)_{\mathbf{q}\mathbf{p}, \mathbf{p}'\mathbf{q}'} f_{0\mathbf{q}'\mathbf{p}'},$$

$$(f_i, F_2 f_i) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p}', \mathbf{q}'} f_{i\mathbf{p}\mathbf{q}}(F_2)_{\mathbf{q}\mathbf{p}, \mathbf{p}'\mathbf{q}'} f_{i\mathbf{q}'\mathbf{p}'};$$

$f_0 = \text{tr}_\sigma f$, $f_i = \text{tr}_\sigma f \sigma_i$ и F_1 , F_2 представляют собой амплитуды потенциального и обменного взаимодействия квазичастиц, которые называются амплитудами Ландау, σ_i — матрица Паули, tr_σ — след по спиновым переменным квазичастиц. При написании формулы (1.8) предполагалось, что функционал энергии инвариантен по отношению к спиновым вращениям.

Амплитуды Ландау можно ввести несколько более общим образом, не привлекая конкретного вида энергии системы. Именно эти амплитуды можно определить формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial f_{1'2'}} &= \frac{\partial^2 E(f)}{\partial f_{1'2'} \partial f_{21}} = F_{12,2'1'} = \\ &= (F_1)_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_1} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma'_2 \sigma'_1} + \\ &+ (F_2)_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_1} (\sigma_{\sigma_1 \sigma_2}^i \sigma_{\sigma'_2 \sigma'_1}^i), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где после вычисления производных одночастичную матрицу плотности следует считать равновесной. При таком определении амплитуды Ландау будут, строго говоря, функциями термодинамических параметров Y_0 , Y_i , Y_4 (или T , v_i , μ). Эти амплитуды играют фундаментальную роль как при исследовании термодинамических свойств ферми-жидкости, так и при исследовании кинетических высокочастотных свойств ферми-жидкости [8] (нулевой звук [8, 9]).

Основными физическими объектами, к которым относится теория ферми-жидкости, является жидкий ^3He выше температуры перехода в сверхтекучее состояние и электронный газ выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние (если оно существует). Первоначально теория нормальной ферми-жидкости была построена Ландау применительно к жидкому ^3He . Фермижидкостное описание электронного газа в металлах принадлежит В.П. Силину [10].

Нормальная ферми-жидкость может быть неустойчивой по отношению к возмущениям, связанным с магнитным упорядочением. Если такая неустойчивость возникает, то ниже некоторой температуры обычная нормальная ферми-жидкость переходит в нормальную магнитоупорядоченную ферми-жидкость. Условия устойчивости нормальной ферми-жидкости исследовались в работе Померанчука [11]. Магнитоупорядоченная (ферромагнитная) нормальная ферми-жидкость изучалась в работах Стонера [12], Абрикосова [13], И.А. Ахиезера [14] и др. Антиферромагнитная ферми-жидкость изучалась в работах Ахиезера и Чудновского [15]. (См. также обзор [16] и монографию [17].)

Нормальная ферми-жидкость может быть также неустойчива по отношению к возмущениям, связанным с возникновением аномальных средних $\langle aa \rangle$. Это значит, что ниже некоторой температуры устойчивым оказывается сверхтекучее (сверхпроводящее) состояние. Теории сверхтекучей ферми-жидкости и посвящен настоящий обзор.

В 1986 г. [18] были открыты высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП), температуры перехода для которых выше 30 К. Последовательной теории ВТСП, аналогичной теории БКШ, в настоящее время не существует. Тем не менее можно думать, что свойства ВТСП не противоречат концепции ферми-жидкости [19]. Поэтому теория сверхтекучей ферми-жидкости может относиться и к ВТСП, но поскольку эта теория является полуфеноменологической, то она не дает возможности выяснить микроскопический механизм возникновения ВТСП. По этой причине в настоящем обзоре мы специально вопросами ВТСП не занимаемся. Возможно, однако, что некоторое отношение к ВТСП имеет развитая в пункте 3.5 модель сверхтекучести.

2. Теория сверхтекучей ферми-жидкости.

2.1. Энтропия сверхтекучей ферми-жидкости. Во введении была изложена теория нормальной ферми-жидкости, описываемой одночастичной матрицей плотности $f_{12} \equiv f_{\mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2}$. Ниже некоторой температуры ферми-жидкость может находиться в сверхтекучем состоянии. Это значит, что ферми-жидкость состоит из двух компонент: нормальной и сверхтекучей, причем течение сверхтекучей компоненты происходит без трения (вязкости). Однако для описания сверхтекучего состояния ферми-жидкости недостаточно одночастичной матрицы плотности f , а необходимо помимо нее использовать еще аномальные функции распределения g , $g^\dagger$. Как мы уже говорили, нормальная "функция распределения" определяется формулой $f_{12} = \text{Sp} \rho a_2^\dagger a_1$, ано-

мальные функции распределения g_{12}, g_{12}^+ определим формулами $g_{12} = \text{Sp} \rho a_2 a_1, g_{12}^+ = \text{Sp} \rho a_2^+ a_1^+$ (ρ — неравновесный статистический оператор ферми-жидкости, a_1^+, a_1 — операторы рождения и уничтожения фермионов в состоянии $1 \equiv p_1, \sigma_1$). В состоянии статистического равновесия аномальная функция распределения обращается в нуль выше температуры сверхтекучего перехода T_c .

Так как квазичастицы ферми-жидкости слабо взаимодействуют между собой, то состояние неравновесного газа квазичастиц (фермионов) при наличии аномальных средних $g \neq 0$ описывается неравновесным статистическим оператором [6]

$$\rho_0(f, g, g^+) = \exp(\Omega - F), \quad (2.1)$$

$$F = \sum_{1,2} (a_1^+ A_{12} a_2 + \frac{1}{2} a_1^+ B_{12} a_2^+ + \frac{1}{2} a_1 B_{12}^+ a_2),$$

где величины f, g, g^+ и A, B, B^+ связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) a_2^+ a_1 &= f_{12}, \\ \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) a_2 a_1 &= g_{12}, \\ \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) a_2^+ a_1^+ &= g_{12}^+. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина $\Omega(f, g, g^+)$ находится из условия нормировки $\text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) = 1$. Неравновесный статистический оператор (2.1) характеризуется тем, что для средних типа $\text{Sp} \rho_0 a_1^+ \dots a_n^+ a_n \dots a_1$ справедливы правила Вика, в которых в качестве связей фигурируют нормальные и аномальные функции распределения (2.2), например

$$\text{Sp} \rho_0 a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 = f_{32} f_{41} - f_{31} f_{42} + g_{21}^+ g_{43}.$$

Отсутствие корреляций в средних и выражает тот факт, что мы имеем дело с идеальным неравновесным газом квазичастиц.

Энтропия неравновесной ферми-жидкости определяется общей формулой $S = -\text{Sp} \rho_0 \ln \rho_0$. Покажем, что в терминах нормальной и аномальной функций распределения это выражение может быть представлено в виде:

$$S = -\text{Sp} \hat{f} \ln \hat{f}, \quad (2.3)$$

где

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f & g \\ g^+ & 1 - \hat{f} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_{12} = f_{21}, \quad g_{12}^+ = g_{21}^*$$

и Sp берется в расширенном пространстве, в котором действуют матрицы $\hat{f}$. Матрицу $\hat{f}$ будем называть статистическим оператором неравновесной ферми-жидкости. Согласно определению величины f и g , входящие в $\hat{f}$, удовлетворяют соотношениям

$$f^+ = f, \quad \tilde{g} = -g. \quad (2.4)$$

В отсутствие аномальных средних g , выражение для энтропии (2.3) совпадает с энтропией нормальной

ферми-жидкости (см. (1.1)).

Для доказательства соотношения (2.3) представим оператор F в виде

$$F = [(\psi^+ \hat{Q} \psi)/2] + [(\text{tr} A)/2], \quad (2.5)$$

где

$$\psi_1 \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^+ \end{pmatrix}, \quad \psi_1^+ \equiv (a_1^+, a_1), \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & -\tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Введем унитарное преобразование Боголюбова для операторов рождения и уничтожения

$$\begin{aligned} \underline{U}^+ a_1 \underline{U} &= u_{12} a_2 + v_{12} a_2^+, \\ \underline{U}^+ a_1^+ \underline{U} &= u_{12}^* a_2^+ + v_{12}^* a_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Это преобразование можно записать в виде

$$\underline{U}^+ \psi \underline{U} = \hat{U} \psi, \quad \underline{U}^+ \psi^+ \underline{U} = \psi^+ \hat{U}^+, \quad (2.7)$$

где матрица $\hat{U}$ определяется формулой

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

и операторы u, v удовлетворяют соотношениям (условия унитарности матрицы $\hat{U}$)

$$\begin{aligned} uu^+ + vv^+ &= 1, \quad u\tilde{v} + v\tilde{u} = 0, \\ u^+ u + \tilde{v} v^* &= 1, \quad u^+ v + \tilde{v} u^* = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как известно, унитарное преобразование (2.8) можно выбрать таким образом, чтобы квадратичная форма по операторам a^+, a

$$\underline{U}^+ F \underline{U} = \frac{1}{2} \psi^+ \hat{U}^+ \hat{Q} \hat{U} \psi + \frac{1}{2} \text{tr} A$$

приводилась к квазидиагональному виду. Это требование эквивалентно требованию квазидиагональности матрицы $\hat{U}^+ \hat{Q} \hat{U}$

$$\hat{U}^+ \hat{Q} \hat{U} = \hat{Q}_0, \quad \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Учитывая (2.6), (2.10), статистический оператор ρ_0 можно представить в виде

$$\rho_0 = \underline{U} \rho_0^{(0)} \underline{U}^+,$$

где

$$\rho_0^{(0)} = \exp(\Omega - \frac{1}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \underline{Q}), \quad \underline{Q} = \psi^+ \hat{Q}_0 \psi.$$

Поэтому согласно (2.2), (2.7) имеем

$$\hat{f} = \hat{U} \hat{f}_0 \hat{U}^+, \quad (2.11)$$

где

$$\hat{f}_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 1 - \tilde{f}_0 \end{pmatrix},$$

$$(f_0)_{12} = \text{Sp} \rho_0^{(0)} a_2^+ a_1, \quad (g_0)_{12} \equiv \text{Sp} \rho_0^{(0)} a_2 a_1 = 0.$$

Так как энтропию $S = -\text{Sp} \rho_0 \ln \rho_0$ можно представить в виде $S = -\text{Sp} \rho_0^{(0)} \ln \rho_0^{(0)}$, то (см. [6])

$$S = -\text{tr}[f_0 \ln f_0 + (1 - f_0) \ln(1 - f_0)] = -\text{Sp} \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0.$$

Поэтому согласно (2.11) мы и получаем формулу (2.3) $S = -\text{Sp} \hat{f} \ln \hat{f}$.

Можно показать, что общий класс унитарных преобразований $\hat{U}$, оставляющих операторную структуру $\hat{f}$ инвариантной:

$$\hat{f} \rightarrow \hat{f}' = \hat{U}^+ \hat{f} \hat{U}, \quad \hat{f}' = \begin{pmatrix} f' & g' \\ g'^+ & 1 - \tilde{f}' \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$f'^+ = f', \quad \tilde{g}' = -g',$$

определяется следующими формулами:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^+ & u^+ \end{pmatrix}, \quad uu^+ + vv^+ = 1, \quad u^+u + \tilde{v}\tilde{v}^+ = 1, \quad (2.13)$$

$$u\tilde{v} + v\tilde{u} = 0, \quad u^+v + \tilde{v}u^+ = 0.$$

Эти формулы показывают, что рассматриваемые унитарные преобразования тождественны $u-v$ -преобразованиям Боголюбова [20]. В случае бесконечно-малых унитарных преобразований $\hat{U} = 1 + i\epsilon \hat{T}$ ($\epsilon \ll 1$), где генератор $\hat{T}$, рассматриваемых преобразований, являющийся эрмитовым оператором, имеет структуру

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} t & \tilde{t} \\ \tilde{t}^+ & -t \end{pmatrix}, \quad t = t^+, \quad \tilde{t} = -\tilde{t}^+.$$

Так как физические величины являются генераторами унитарных преобразований, любой физической величине A в теории ферми-жидкости соответствует оператор

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & \tilde{a} \\ \tilde{a}^+ & -a \end{pmatrix}, \quad a = a^+, \quad \tilde{a} = -\tilde{a}^+.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{A}$ при унитарном преобразовании $\hat{U}$ преобразуется согласно формуле

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A}' = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^+, \quad \hat{A}' = \begin{pmatrix} a' & \tilde{a}' \\ \tilde{a}'^+ & -a' \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где

$$a' = uau^+ + v\tilde{a}^+u^+ + u\tilde{a}v^+ - \tilde{v}av^+ \equiv a'^+,$$

$$\tilde{a}' = u\tilde{a}\tilde{v} + v\tilde{a}^+\tilde{v} + u\tilde{a}\tilde{v} - v\tilde{a}\tilde{u} \equiv -\tilde{a}'^+.$$

В частности, при обычном унитарном преобразовании

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^+ \end{pmatrix} \quad (v = 0),$$

$$a' = uau^+, \quad \tilde{a}' = u\tilde{a}\tilde{u}.$$

С помощью унитарного преобразования $\hat{U}$ всегда можно обратить в нуль величину g' в формуле (2.12) или величину $\tilde{a}'$ в формуле (2.14).

В заключение этого раздела покажем, что статистический оператор $\hat{f}$ связан с энтропией S соотношением

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}, \quad (2.15)$$

где

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & -A \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \frac{\partial S}{\partial f_{21}}, \quad B_{12}^+ = 2 \frac{\partial S}{\partial g_{21}}. \quad (2.16)$$

Это утверждение следует из того, что с помощью унитарного преобразования U статистический оператор $\hat{f}$ можно привести к квазидиагональному виду (см. (2.11)):

$$\hat{U}^+ \hat{f} \hat{U} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 1 - \tilde{f}_0 \end{pmatrix} \equiv \hat{f}_0, \quad (2.17)$$

$$\hat{f}_0 = (e^{\hat{Q}_0} + 1)^{-1}, \quad \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_0 \end{pmatrix},$$

или (см. (2.15))

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & -A \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{Q} = \hat{U} \hat{Q}_0 \hat{U}^+.$$

Из (2.17) следует, что вариация энтропии δS имеет вид

$$\delta S = -\text{tr} \delta f_0 \ln \frac{f_0}{1 - f_0} = \frac{1}{2} \text{Sp} \delta f_0 \hat{Q}_0 = \frac{1}{2} \text{Sp} U \delta \hat{f}_0 U^+ \hat{Q}.$$

Но согласно (2.17)

$$\delta \hat{f} = \hat{U} \delta \hat{f}_0 \hat{U}^+ + \delta \hat{U} \hat{U}^+ \hat{f} + \hat{f} \hat{U} \delta \hat{U}^+ =$$

$$= \hat{U} \delta \hat{f}_0 \hat{U}^+ + [\delta \hat{U} \cdot \hat{U}^+, \hat{f}]$$

(мы учли, что $\hat{U} \delta \hat{U}^+ = -\delta \hat{U} \hat{U}^+$). Так как $[\hat{f}, \hat{Q}] = 0$, то

$$\delta S = \text{Sp} \delta \hat{f} \hat{Q} / 2. \quad (2.17')$$

Замечая, что

$$\delta \hat{f} = \begin{pmatrix} \delta f & \delta g \\ \delta g^+ & -\delta f \end{pmatrix},$$

мы и приходим к формулам (2.15), (2.16).

2.2. Функционал, энергии и его свойства симметрии. В основе теории нормальной ферми-жидкости лежит задание энергии как функционала функции распределения f . Аналогичным образом в случае сверхтекучей ферми-жидкости мы считаем, что энергия системы является функционалом как нормальной, так и аномальной функций распределения:

$$E = E(f, g, g^+) \equiv E(\hat{f}).$$

Наряду с полной энергией введем также функционал плотности энергии $\mathcal{E}(\mathbf{x}; f, g, g^+) \equiv \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$:

$$E(\hat{f}) = \int_V d^3x \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}).$$

Сформулируем свойства симметрии функционала $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ (аследовательно, и $E(\hat{f})$) относительно фазовых и спиновых преобразований, а также относительно преобразований пространственных трансляций.

Среднее значение некоторой физической величины

$$\hat{a} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\bar{a} \end{pmatrix} \quad (a = 0),$$

относящейся к фермиону, можно представить в виде

$$a(\hat{f}) \equiv \text{tr } f \hat{a} = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{f} \hat{a} \quad (2.18)$$

(мы при этом пренебрегли слагаемым $\text{tr } a$, которое не зависит от $\hat{f}$ и, следовательно, не дает вклада в изменение величины $a(\hat{f})$). Так как операторами числа частиц, спина и импульса электрона являются операторы 1 , s_i , p_i , соответствующие операторы в фермижидкостном подходе имеют вид

$$\hat{\tau}_3 = \int d^3x \hat{\rho}(\mathbf{x}), \quad \hat{s}_i = \int d^3x \hat{s}_i(\mathbf{x}), \quad \hat{p}_i = \int d^3x \hat{\pi}_i(\mathbf{x}),$$

где операторы плотности числа частиц $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, плотности спина $\hat{s}_i(\mathbf{x})$ и плотности импульса $\hat{\pi}_i(\mathbf{x})$ определяются формулами

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & -\bar{\rho}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_i(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} s_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & -\bar{s}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\pi}_i(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \pi_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & -\bar{\pi}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}), \quad s_i(\mathbf{x}) = s_i \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}),$$

$$\pi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{p_i, \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}})\};$$

здесь $s_i = \sigma_i/2$ и $\underline{\mathbf{x}}$ — оператор координаты, σ_i — матрицы Паули.

Оператор $\hat{\tau}_3$ представляет собой генератор фазового унитарного преобразования

$$\hat{U}_\varphi = \exp(i\varphi \hat{\tau}_3).$$

Оператор $\hat{s}_k$ представляет собой генератор спиновых вращений

$$\hat{U}_\omega = \exp(i\omega \hat{s}_k \hat{s}_k).$$

Наконец, оператор $\hat{p}_k$ представляет собой генератор пространственных трансляций

$$\hat{U}_y = \exp(iy \hat{p}_k \hat{p}_k).$$

В соответствии с (2.13) при этих преобразованиях f , g преобразуются по формулам

$$f \rightarrow f_\varphi = f, \quad g \rightarrow g_\varphi = e^{-2i\varphi} g, \quad (2.19)$$

$$f \rightarrow f_\omega = e^{-i\omega \hat{s}_k f e^{i\omega \hat{s}_k}}, \quad g \rightarrow g_\omega = e^{-i\omega \hat{s}_k g e^{-i\omega \hat{s}_k}},$$

$$f \rightarrow f_y = e^{-iy \hat{p}_k f e^{iy \hat{p}_k}}, \quad g \rightarrow g_y = e^{-iy \hat{p}_k g e^{-iy \hat{p}_k}}.$$

Будем предполагать, что функционал $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ всегда инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{U}_\varphi^+ \hat{f} \hat{U}_\varphi) = \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}). \quad (2.20)$$

В пренебрежении релятивистским взаимодействием функционал $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ инвариантен относительно спиновых вращений:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{U}_\omega^+ \hat{f} \hat{U}_\omega) = \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}). \quad (2.21)$$

Наконец, в отсутствие внешних неоднородных полей функционал $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ инвариантен относительно пространственных трансляций:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x} + \mathbf{y}; \hat{U}_y^+ \hat{f} \hat{U}_y) = \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}). \quad (2.22)$$

Легко получить инфинитезимальную форму соотношений (2.20), (2.21), (2.22). Для этого заметим, что вариацию функционала $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ по статистическому оператору $\hat{f}$ можно представить в виде

$$\delta \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \frac{1}{2} \text{Sp } \delta \hat{f} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad (2.23)$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{x}; \hat{f}) & \Delta(\mathbf{x}; \hat{f}) \\ \Delta(\mathbf{x}; \hat{f}) & -\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial f_{21}}, \quad \Delta_{12}(\mathbf{x}; \hat{f}) = 2 \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial g_{21}^+} \quad (2.24)$$

(оператор $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f})$ представляет собой оператор плотности энергии квазичастицы; см. следующий раздел). Варьируя соотношения (2.20), (2.21), (2.22) по φ , ω , y и используя (2.23), получаем в случае фазовых преобразований

$$i \text{Sp } \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{\tau}_3] = 0, \quad (2.25)$$

в случае спиновых вращений

$$i \text{Sp } \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{s}_i] = 0 \quad (2.26)$$

и в случае пространственных трансляций

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k} = \frac{i}{2} \text{Sp } \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{p}_k]. \quad (2.27)$$

Эти формулы будут в дальнейшем использованы для построения плотностей потоков соответствующих физических величин, которые необходимы для изучения гидродинамического этапа эволюции сверхтекучей жидкости.

Варьируя соотношения (2.20)—(2.22) по статистическому оператору $\hat{f}$ и используя формулу (2.23), получаем соотношения

$$\hat{U}_\varphi^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{U}_\varphi^+ \hat{f} \hat{U}_\varphi) \hat{U}_\varphi = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad (2.28)$$

$$\hat{U}_\omega^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{U}_\omega^+ \hat{f} \hat{U}_\omega) \hat{U}_\omega = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad (2.29)$$

$$\hat{U}_y^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{U}_y^+ \hat{f} \hat{U}_y) \hat{U}_y = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \hat{f}), \quad (2.30)$$

выражающие свойства симметрии плотности энергии $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f})$ квазичастицы.

Рассмотрим, наконец, вопрос об инвариантности теории по отношению к преобразованиям Галилея. Именно, будем говорить, что функционал плотности энергии инвариантен относительно преобразования Галилея, если выполняется соотношение

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{U}_v^+ \hat{f} \hat{U}_v) = \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}) - v \pi_i(\mathbf{x}; \hat{f}) + \frac{mv^2}{2} \rho(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad (2.31)$$

где унитарный оператор $\hat{U}_v$ определяется формулой

$$\hat{U}_v = e^{-imv\hat{x}_i}$$

и $\pi_i(\mathbf{x}; \hat{f})$, $\rho(\mathbf{x}; \hat{f})$ — средние значения плотности импульса и плотности числа частиц, m — масса частиц. Варьируя это соотношение по v_i , получим

$$\frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{x}_i] = \frac{1}{m} \pi_i(\mathbf{x}; \hat{f}) / m. \quad (2.31')$$

Варьируя же соотношение (2.31) по $\hat{f}$, найдем трансформационные свойства величины $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f})$ при преобразовании Галилея:

$$\hat{U}_v^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) \hat{U}_v \hat{U}_v^+ \hat{U}_v = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) - v_i \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + \frac{mv^2}{2} \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

2.3. Вариационный принцип и уравнения самосогласования. Состоянию статистического равновесия ферми-жидкости соответствует, как мы уже говорили, максимум энтропии при фиксированных интегралах движения: энергии, импульса и числа частиц (при наличии релятивистских взаимодействий спин системы не является интегралом движения). Так же как и в теории нормальной ферми-жидкости вместо отыскания условного максимума функционала $S(\hat{f})$ мы будем находить абсолютный минимум функционала

$$\Omega(\hat{f}) = -S(\hat{f}) + Y_0 E(\hat{f}) + Y_i \text{tr} \hat{p}_i + Y_4 \text{tr} \hat{f}$$

(Y_0 , Y_i , Y_4 — множители Лагранжа, соответствующие интегралам движения $E(\hat{f})$, $\hat{p}_i(\hat{f}) = \text{tr} \hat{p}_i$, $N(\hat{f}) = \text{tr} \hat{f}$). Согласно формулам (2.17), (2.23)

$$\delta \Omega(\hat{f}) = \text{Sp} \delta \hat{f} (-\hat{Q} + Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_i \hat{p}_i + Y_4 \hat{\tau}_3) / 2, \quad (2.31'')$$

где матрица $\hat{Q}$ определяется формулой (2.16) и

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \int_V d^3 x \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta^+ & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = \int_V d^3 x \varepsilon(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad \Delta = \int_V d^3 x \Delta(\mathbf{x}; \hat{f}).$$

Требование $\delta \Omega = 0$ согласно (2.16), (2.31'') приводит к нелинейным уравнениям самосогласования [44]

$$\hat{f} = [\exp(Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_i \hat{p}_i + Y_4 \hat{\tau}_3) + 1]^{-1}. \quad (2.32)$$

Из этой формулы следует, что величину $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ нужно интерпретировать как энергию квазичастицы. Она является функционалом нормальной и аномальной функций распределения.

Сформулируем теперь условие однородности сверхтекучей ферми-жидкости. В случае нормальной ферми-жидкости это условие имело вид: $[\hat{f}, \hat{p}_i] = 0$. В случае систем с нарушенной фазовой инвариантностью ($[\hat{f}, \hat{\tau}_3] \neq 0$), условие пространственной однородности следует формулировать в виде

$$[\hat{f}, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0, \quad (2.33)$$

где q_i — импульс конденсатных частиц (импульс сверхтекучей компоненты жидкости). Отметим, что в

этом случае среднее значение $a(\mathbf{x})$ некоторой физической величины $\hat{a}(\mathbf{x})$, вообще говоря, зависит от $\mathbf{x}$. Однако, если оператор $\hat{a}(\mathbf{x})$ фазово инвариантен, $[\hat{a}(\mathbf{x}), \hat{\tau}_3] = 0$, то среднее $\langle \hat{a}(\mathbf{x}) \rangle$ согласно (2.33), не зависит от $\mathbf{x}$. Именно, в силу этой причины мы и назвали соотношение (2.33) условием пространственной однородности (но не условием трансляционной инвариантности, которая соответствует случаю $[\hat{f}, \hat{p}_i] = 0$).

Таким образом, для определения пространственно однородных состояний сверхтекучей ферми-жидкости мы должны находить совместные решения уравнений (2.32) и (2.33).

Совместность этих уравнений следует из формул (2.30), (2.24'), которые показывают, что если $[\hat{f}, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0$, то $[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0$.

Подчеркнем, что состояние статистического равновесия сверхтекучей ферми-жидкости определяется кроме параметров $Y_0^{-1} = T$ (температура), $-Y_i/Y_0 = v_i$ (нормальная скорость), $-Y_4/Y_0 = \mu$ (химический потенциал), характерных и для нормальной ферми-жидкости, еще дополнительным термодинамическим параметром q_i , который называется сверхтекучим импульсом. В случае галилеево инвариантных систем, когда можно ввести массу фермиона m , величина $q_i/m = u_i$ представляет собой скорость сверхтекучей компоненты (см. раздел 2.2).

Уравнение (2.32) справедливо как для пространственно однородных, так и для пространственно неоднородных систем. Из него следуют как теория БКШ с синглетным и триплетным спариванием (различные сверхтекучие фазы ^3He ; см. раздел 3.4), так и уравнения Лондонов и уравнения Гинзбурга—Ландау. В этом смысле, уравнения самосогласования в форме (2.32) являются универсальными.

Заметим, что уравнения самосогласования в силу свойства фазовой инвариантности функционала энергии допускают решения, для которых $g = 0$, $\Delta = 0$ (это значит, что $[\hat{f}, \hat{\tau}_3] = 0$). Для таких решений все формулы настоящего раздела переходят в формулы теории нормальной ферми-жидкости. Однако в системе может происходить фазовый переход, в результате которого появляются решения с $g \neq 0$, $\Delta \neq 0$ ($[\hat{f}, \hat{\tau}_3] \neq 0$), соответствующие состояниям со спонтанно нарушенной симметрией (симметрия состояния статистического равновесия ниже симметрии функционала $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$). Именно этими состояниями мы будем интересоваться в настоящем обзоре.

2.4. Кинетическое уравнение и дифференциальные законы сохранения. Мы сформулируем теперь кинетические уравнения для нормальной и аномальной функций распределения, или что то же самое, для статистического оператора $\hat{f}$. Так как мы развиваем феноменологический

подход к теории сверхтекучей ферми-жидкости, то, замечая, что $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ можно интерпретировать как энергию квазичастицы, будем считать, что кинетическое уравнение для $\hat{f}$ в пренебрежении столкновениями между квазичастицами имеет вид

$$i\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{f}]. \quad (2.34)$$

В покомпонентной форме это уравнение эквивалентно следующей системе уравнений для нормальной и аномальной функций распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i[f, \varepsilon] + i(g\Delta^+ - \Delta g^+), \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -i(g\tilde{\varepsilon} + \varepsilon g) + i(f\Delta + \Delta\tilde{f}) - i\Delta.$$

Эти уравнения справедливы, когда характерные времена изменения функций распределения значительно меньше времени релаксации квазичастиц τ . Если рассматриваются колебания сверхтекучей жидкости, то частота этих колебаний ω должна удовлетворять условию $\omega\tau \gg 1$. В этих условиях можно пренебречь интегралом столкновений квазичастиц.

Заметим, что уравнениям (2.34), (2.35) удовлетворяют равновесные нормальные и аномальные функции распределения, являющиеся решениями уравнений самосогласования (2.32). В этой связи в разделе 3.6 мы используем уравнения (2.34), (2.35) для вывода уравнений идеальной (в отсутствие диссипации) двухжидкостной гидродинамики (которые справедливы при $\omega\tau \ll 1$). Именно из этих уравнений мы получим уравнения движения для фазы и сверхтекучего импульса.

Уравнения (2.35) легко получить, если исходить из представления о слабом взаимодействии между квазичастицами в ферми-жидкости. Как известно, кинетический этап эволюции [6] описывается статистическим оператором $\rho(f, g, g^+)$, который является функционалом функций распределения f, g, g^+ . Эти функции распределения удовлетворяют кинетическим уравнениям

$$\dot{f}_{12} = i \text{Sp} \rho(f, g, g^+) [H, a_2^+ a_1], \quad (2.36)$$

$$\dot{g}_{12} = i \text{Sp} \rho(f, g, g^+) [H, a_2 a_1],$$

где $H = H_0 + V$ (H_0 — свободный гамильтониан и V — гамильтониан взаимодействия, структура которого может быть совершенно произвольной). Учтем теперь, что согласно определению

$$\text{Sp} \rho(f, g, g^+) a_2^+ a_1 = f_{12},$$

$$\text{Sp} \rho(f, g, g^+) a_2 a_1 = g_{12}.$$

Поскольку свободный гамильтониан квадратичен по операторам a^+, a , то согласно (2.2)

$$i \text{Sp} \rho(f, g, g^+) [H_0, a_2^+ a_1] =$$

$$= i \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [H_0, a_2^+ a_1], \\ i \text{Sp} \rho(f, g, g^+) [H_0, a_2 a_1] = \\ = i \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [H_0, a_2 a_1].$$

Так как в пренебрежении взаимодействием квазичастиц статистический оператор $\rho(f, g, g^+)$ совпадает с $\rho_0(f, g, g^+)$, кинетические уравнения (2.36) с учетом членов, линейных по взаимодействию, можно представить в виде

$$\dot{f}_{21} = i \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [H, a_1^+ a_2],$$

$$\dot{g}_{21} = i \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [H, a_1 a_2].$$

Заметим, что при вычислении средних в состоянии $\rho_0(f, g, g^+)$ справедливы правила Вика, в которых в качестве связей фигурируют нормальные и аномальные средние

$$\underbrace{a_1^+ a_2}_{f_{21}} = \text{Sp} \rho_0 a_1^+ a_2 = f_{21}, \quad \underbrace{a_1 a_2}_{g_{21}} = \text{Sp} \rho_0 a_1 a_2 = g_{21}.$$

Легко видеть, что справедливы формулы типа

$$\underbrace{[a_1^+ a_2, A a_3^+ B a_4 C]}_{f_{21}} = (-1)^B (f_{41} \delta_{23} - f_{23} \delta_{41}) ABC, \\ \underbrace{[a_1^+ a_2, A a_3 B a_4 C]}_{f_{21}} = (-1)^B g_{24} \delta_{13} ABC, \quad (2.37) \\ \underbrace{[a_1 a_2, A a_3 B a_4^+ C]}_{g_{21}} = (-1)^B (-\delta_{24} \delta_{13} + \\ + \delta_{24} f_{13} + \delta_{13} f_{24}) ABC,$$

где $A a_3^+ B a_4 C$ — некоторые нормальные упорядоченные операторы; $(-1)^B = 1$, если оператор B содержит четное число операторов a, a^+ , и $(-1)^B = -1$, если оператор B содержит нечетное число этих операторов. Вводя функционал энергии

$$E(f, g, g^+) = \text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) H$$

и величины

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial E}{\partial f_{21}}, \quad \Delta_{12} = 2 \frac{\partial E}{\partial g_{21}^+}, \quad \Delta_{12}^+ = 2 \frac{\partial E}{\partial g_{21}}$$

и используя соотношения типа (2.37), получаем

$$\text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [a_1^+ a_2, H] = (\varepsilon, f] - g\Delta^+ + \Delta g_{21},$$

$$\text{Sp} \rho_0(f, g, g^+) [a_1 a_2, H] = \\ = (\varepsilon g + g\tilde{\varepsilon} + \Delta - \Delta\tilde{f} - f\Delta)_{21}.$$

Таким образом,

$$i\dot{f} = [\varepsilon, f] - g\Delta^+ + \Delta g^+,$$

$$i\dot{g} = \varepsilon g + g\tilde{\varepsilon} - \Delta\tilde{f} - f\Delta + \Delta.$$

Эти уравнения полностью совпадают с уравнением (2.35).

Исходя из кинетического уравнения (2.34) и используя свойства симметрии функционала энергии $\mathcal{E}$, можно сформулировать законы сохранения и определить плотности потоков сохраняющихся физических величин. (Эти результаты будут использованы далее при построении гидродинамики сверхтекучей жидкости.)

Временную производную среднего значения

плотности физической величины a , $a(\mathbf{x}; \hat{f}) = \text{Sp} \hat{f} \hat{a}(\mathbf{x})/2$ можно представить в виде

$$\frac{\partial a(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial a_k(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k} + \frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{A}], \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_k(\mathbf{x}) &= i \int d^3 x' x'_k \times \\ &\times \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}), \hat{a}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \quad (2.39) \\ \hat{A} &= \int d^3 x \hat{a}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из кинетического уравнения (2.34), согласно которому

$$\frac{\partial a(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = \frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{a}(\mathbf{x})],$$

и из очевидного соотношения

$$i[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{a}(\mathbf{x})] = i[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}), \hat{A}] - \frac{\partial \hat{a}_k(\mathbf{x})}{\partial x_k}. \quad (2.40)$$

Полагая в формуле (2.38) $\hat{a}(\mathbf{x}) = \hat{\rho}(\mathbf{x})$ и используя формулу (2.25), являющуюся следствием фазовой инвариантности $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$, находим закон сохранения плотности числа частиц

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial j_k(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k}, \quad (2.41)$$

где оператор плотности потока частиц определяется формулой

$$\begin{aligned} j_k(\mathbf{x}) &= i \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}), \\ &\hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \quad (2.42) \end{aligned}$$

Полагая в формуле (2.38) $\hat{a}(\mathbf{x}) = \hat{s}_i(\mathbf{x})$ и используя (2.26), находим закон сохранения плотности спина

$$\frac{\partial s_i(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial j_{ik}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k}, \quad (2.43)$$

где оператор плотности потока спина определяется формулой

$$\begin{aligned} j_{ik}(\mathbf{x}) &= i \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}), \\ &\hat{s}_i(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Наконец, полагая в формуле (2.39) $\hat{a}(\mathbf{x}) = \hat{\pi}_i(\mathbf{x})$ и используя (2.27), находим закон сохранения плотности импульса

$$\frac{\partial \pi_i(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial t_{ik}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k}, \quad (2.45)$$

где среднее значение тензора натяжения определяется формулой

$$t_{ik}(\mathbf{x}; \hat{f}) = -\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}) \delta_{ik} + \frac{i}{2} \int d^3 x' x'_k \times$$

$$\times \int_0^1 d\xi \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}), \hat{\pi}_i(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \quad (2.46)$$

Сформулируем теперь закон сохранения энергии. Согласно (2.23), (2.34) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{Sp} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f})].$$

Поэтому, полагая в формуле (2.40) $\hat{a}(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f})$, находим

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial W_k(\mathbf{x}; \hat{f})}{\partial x_k}, \quad (2.47)$$

где оператор плотности потока энергии определяется формулой

$$\begin{aligned} \hat{W}_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}), \\ &\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}'; \hat{f})]. \quad (2.48) \end{aligned}$$

3. Синглетное и триплетное спаривание фермионов.

3.1. Диагонализация операторов динамических фермижидкостных величин. Вернемся к уравнению самосогласования (2.32) и покажем, как из этой формулы можно получить основные результаты теории БКШ. Задача заключается прежде всего в поблочной диагонализации матрицы

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta^+ & -\bar{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

определяющей энергию квазичастицы. С этой целью заметим, что произвольная физическая величина $\hat{A}$, имеющая структуру

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & \underline{a} \\ \underline{a}^+ & -\bar{a} \end{pmatrix},$$

при унитарных преобразованиях (2.13) преобразуется согласно формулам (2.14).

Поблочная диагонализация означает, что мы подбираем унитарное преобразование таким образом, чтобы обратить в нуль оператор $\underline{a}'$ (см. (2.14))

$$\hat{A}' = \hat{U}^+ \hat{A} \hat{U} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & -\bar{a}' \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Иными словами, мы требуем, чтобы было

$$u^+ a v + u^+ \underline{a} u^* + \bar{v} \underline{a}^+ v - \bar{v} \bar{a} u^* = 0$$

или

$$aX + \underline{a} + \bar{X} \underline{a}^+ X - X \bar{a} = 0, \quad (3.2)$$

где $v = Xu^*$. Из условия унитарности ($\hat{U}^+ \hat{U} = 1$, см. (2.13)) легко найти

$$uu^+ = (1 - \bar{X}X^+)^{-1}, \quad uu^+ \bar{X} + X(uu^+)^* = 0. \quad (3.3)$$

Подставив первое соотношение во второе, получим уравнение

$$(1 - \bar{X}X^+)(X + \bar{X}) = 0,$$

из которого следует, что

$$\tilde{X} = -X, uu^+ = (1 + XX^+)^{-1} \equiv K. \quad (3.4)$$

Поэтому уравнение для нахождения X принимает вид

$$aX + \underline{a} + X\tilde{a} - X\underline{a}^+X = 0. \quad (3.5)$$

Найдем теперь оператор a' . Из (2.14), (3.4) имеем

$$a' = u^+ Du, \quad (3.6)$$

$$D = a - \underline{a}X^+ - X\tilde{a}X^+ - X\underline{a}^+ = D^+.$$

Величину D с помощью уравнения (3.5) можно представить в виде

$$D = (a - X\underline{a}^+)(1 + XX^+), \quad (3.7)$$

и, следовательно, согласно (3.6)

$$a' = u^+(a - X\underline{a}^+)u^{+1}. \quad (3.8)$$

Отметим, что из эрмитовости матрицы D и формулы (3.7) следует, что

$$K(a - X\underline{a}^+) = (a - \underline{a}X^+)K. \quad (3.9)$$

Справедлива также формула

$$X\tilde{K} = KX = -\tilde{K}X. \quad (3.10)$$

Формула (3.4) определяет матрицу u с точностью до преобразования $u \rightarrow u\lambda$, где λ — некоторая унитарная матрица $\lambda\lambda^+ = 1$. Этим произволом в определении матрицы u можно воспользоваться для того чтобы произвести диагонализацию матрицы a' в импульсном и спиновом пространствах.

Перепишем уравнение самосогласования (2.32) в виде

$$\hat{f} = [\exp(Y_0 \hat{\xi}) + 1]^{-1},$$

где

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi & \underline{\xi} \\ \underline{\xi}^+ & -\xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \varepsilon + \frac{Y_4}{Y_0} + \frac{Y_k}{Y_0} p_k, \quad \underline{\xi} = \Delta. \quad (3.11)$$

Согласно сказанному, величину ξ можно привести к квазидиагональному виду с помощью унитарного преобразования

$$\hat{U}^+ \hat{\xi} \hat{U} = \begin{pmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & -\xi' \end{pmatrix},$$

где

$$\xi' = u^+(\xi - X\underline{\xi}^+)u^{+1}$$

и матрица X удовлетворяет уравнению

$$\xi X + X\underline{\xi}^+ + \underline{\xi} - X\underline{\xi} + X = 0, \quad \tilde{X} = -X. \quad (3.12)$$

Так как

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \hat{U} \hat{f}' \hat{U}^+,$$

где

$$\hat{f}' = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & -f' \end{pmatrix}, \quad f' = (e^{Y_0 \xi'} + 1)^{-1}, \quad (3.13)$$

то

$$f = u f' u^+ + v(1 - \tilde{f}')v^+, \quad g = u f' \tilde{v} + v(1 - \tilde{f}')\tilde{u}.$$

Замечая, что согласно (3.13), (3.8)

$$f' = u^+ n u^{+1}, \quad (3.14)$$

$$n = \{\exp[Y_0(\xi - X\underline{\xi}^+)] + 1\}^{-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} f &= K n + X(1 - \tilde{n})X^+ K, \\ g &= \tilde{K} n X + K(1 - n)X, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где (см. (3.4))

$$K = (1 + XX^+)^{-1}. \quad (3.16)$$

При выводе этих формул мы учли, что $v = Xu^*$ и $X\tilde{K} = KX$ (см. (3.10)). Матрица f в силу соотношения (3.9) является эрмитовой, а матрица g в силу того, что $\tilde{K}X = -KX$, — антисимметричной.

Уравнения (3.15) эквивалентны уравнению самосогласования (2.32). Мы видим, что при переходе к операторам, действующим в спиновом и импульсном пространствах, уравнение самосогласования потеряло свою физическую наглядность (именно, уравнение (2.32) наглядно демонстрирует принцип самосогласования). Однако уравнения (3.15) более удобны для конкретных приложений.

Заметим, что из (3.12) следует, что если X есть решение уравнения (3.12), то и $X' = -X^{+1}$ есть решение уравнения (3.12). Используя формулы (3.9), (3.10), можно преобразовать уравнения (3.15) к симметричной форме

$$f = Kn + K'n', \quad g = -KnX - K'n'X', \quad (3.17)$$

где

$$K = (1 + XX^+)^{-1}, \quad K' = (1 + X'X'^+)^{-1},$$

$$n = \{\exp[Y_0(\xi - X\underline{\xi}^+)] + 1\}^{-1},$$

$$n' = \{\exp[Y_0(\xi - X'\underline{\xi}^+)] + 1\}^{-1}.$$

Из этих формул следует, что

$$f|_{X \rightarrow X'} = f, \quad g|_{X \rightarrow X'} = g,$$

т.е. матрицы f и g не зависят от того, выбираем ли мы в качестве решения уравнения (3.12) матрицу X или матрицу $X' = -X^{+1}$.

3.2. Функционал плотности энергии.

В этом разделе мы конкретизируем функционал энергии $E(\hat{f})$. Если мы находимся вблизи точки фазового перехода в сверхтекучее состояние, то величины g и g^+ являются малыми и функционал $E(f, g, g^+)$ можно разложить в ряд по степеням g и g^+ . В этом разложении в силу фазовой симметрии будут отсутствовать линейные по g и g^+ члены, а также квадратичные члены типа gg, g^+g^+ . Поэтому функционал $E(f, g, g^+)$ в случае малых g имеет следующую структуру

$$E(f, g, g^+) = E(f) + V^{-1}(g^+, Lg), \quad (3.18)$$

где $E(f)$ — ферми-жидкостной функционал энергии нормальной жидкости и $L \equiv \{L_{12;34}\}$ — оператор, переводящий величины типа g_{34} в величины такого же

типа (этот оператор, в принципе, может быть функционалом f). Учтем теперь спиновую инвариантность. Заметим, что при унитарном преобразовании u_ω матрица спина s_i преобразуется согласно формуле

$$u_\omega^\dagger s_i u_\omega = a_{ik}(\omega) s_k, \quad (3.19)$$

где $a_{ik}(\omega)$ — ортогональная матрица. Оператор g , согласно (2.19), при унитарном преобразовании u_ω преобразуется по формуле $g \rightarrow g_\omega = \tilde{u}_\omega g u_\omega$. Из (3.19) легко видеть, что $\tilde{u}_\omega \sigma_2 u_\omega = \sigma_2$, $\tilde{u}_\omega \sigma_2 s_i u_\omega = a_{ik}(\omega) \sigma_2 s_k$. Поэтому инвариантная относительно поворотов спина энергия $(g^+, Lg)/V$ имеет вид

$$(g^+, Lg) = (g_0^+, L_1 g) + (g_i^+, L_2 g_i), \quad (3.20)$$

где

$$g_0 = \text{Sp}_\sigma \sigma_2 g, \quad g_i = \text{Sp}_\sigma \sigma_2 s_i g,$$

и характеризуется двумя аномальными фермижидкостными амплитудами L_1 , L_2 , которые являются операторами, действующими только на трансляционные степени свободы

$$(g_0^+, L_1 g_0) = \sum_{p_1, p_2; p_3, p_4} g_{0p_1 p_2}^* L_{1p_1 p_2; p_3 p_4} g_{0p_3 p_4}.$$

Если функционал энергии $E(f)$ характеризуется двумя фермижидкостными амплитудами Ландау F_i , F_2 (см. (1.8)):

$$E(f) = \sum_1 \varepsilon_1 f_{11} + \frac{1}{2}(f_0, F_1 f_0) + \frac{1}{2}(f_i, F_2 f_i), \quad (3.21)$$

где

$$f_0 = \text{Sp}_\sigma f, \quad f_i = \text{Sp}_\sigma s_i f,$$

то мы видим, что сверхтекучая ферми-жидкость характеризуется четырьмя амплитудами взаимодействия F_i , L_i ($i = 1, 2$). В формуле (3.21) ε_1 представляет собой энергию квазичастицы в пренебрежении фермижидкостными взаимодействиями.

К нахождению фермижидкостной энергии E можно подойти с точки зрения теории возмущения. Если микроскопический гамильтониан H имеет вид

$$H = \sum_1 \varepsilon_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \sum_{1,2,3,4} \Phi(12; 34) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4, \quad (3.22)$$

то в главном приближении по взаимодействию $E = \text{Sp} \rho_0 H$, где ρ_0 — неравновесный статистический оператор, определяемый формулой (2.1). Поэтому, учитывая (3.22), имеем

$$E(\hat{f}) = \sum_1 \varepsilon_1 f_{11} + \sum_{1,2,3,4} \Phi(12; 34) \times \\ \times (f_{32} f_{41} - f_{31} f_{42} + g_{21}^* g_{43}). \quad (3.23)$$

В этой формуле $\Phi(12; 34)$ — спиново-инвариантная амплитуда взаимодействия, отличная от нуля только при $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ (мы учли, что среднее значение оператора $a_1^\dagger a_2$ точно определяется уже нулевым приближением, т.е. статистическим оператором

(2.1) (см. [6]). В этом случае величины $\Phi(12; 34)$ определяют как обычные фермижидкостные амплитуды F_i , так и фермижидкостные амплитуды L_i , характерные для сверхтекучей ферми-жидкости.

3.3. Синглетное спаривание и теория БКШ. Уравнения (3.15) (или (3.17)) могут служить основой изучения различных сверхтекучих систем, соответствующих той или иной физической фазе. Различным фазам соответствуют различные решения уравнений (3.15) (или (3.17)). Отбор решений должен происходить с помощью учета свойств симметрии фазы.

В этом разделе мы рассмотрим случай синглетного спаривания, когда оператор $\hat{f}$ коммутирует с оператором спина $\hat{s}_i$:

$$[\hat{f}, \hat{s}_i] = 0. \quad (3.24)$$

Как следует из формулы (2.33), статистический оператор $\hat{f}_q \equiv \hat{U}_q^\dagger \hat{f} \hat{U}_q$, где $\hat{U}_q = \exp(iq_i \hat{x}_i)$ является трансляционно-инвариантным, т.е. он коммутирует с оператором импульса: $[\hat{f}_q, \hat{p}_i] = 0$. Из (2.32) следует, что этот оператор удовлетворяет уравнению самосогласования

$$\hat{f}_q = \{\exp[Y_0 \hat{\varepsilon}_q(\hat{f}_q) + Y_1 \hat{p}_i + (Y_4 + Y_i q_i) \hat{\tau}_3] + 1\}^{-1},$$

где

$$\varepsilon_q(\hat{f}_q) = \hat{U}_q^\dagger \varepsilon(\hat{U}_q \hat{f}_q \hat{U}_q^\dagger) \hat{U}_q.$$

В дальнейшем мы положим $q = 0$. Для того чтобы найти оператор $\hat{f}_q$, а тем самым и оператор $\hat{f}$ при $q \neq 0$, необходимо в полученных ниже формулах сделать подстановку

$$\hat{f} \rightarrow \hat{f}_q, \quad \hat{\varepsilon}(\hat{f}) \rightarrow \hat{\varepsilon}_q(\hat{f}_q), \quad Y_4 \rightarrow Y_4 + Y_i q_i.$$

Из условий (3.24) и (2.33) следует, что $[f, \sigma_i] = 0$, $[f, p_i] = 0$, $\sigma_i g + g \tilde{\sigma}_i = 0$, $p_i g + g \tilde{p}_i = 0$. Таким образом,

$$f_{12} = f_{p_1} \delta_{p_1 p_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad g_{12} = g_{p_1} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (3.25)$$

где $f_p^* = f_p$, $g_p = g_{-p}$. Отсюда и из (2.24) следует, что

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{p_1} \delta_{p_1 p_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \Delta_{12} = \Delta_{p_1} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Поэтому $X_{12} = X_{p_1} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma_2}$, где X_p согласно (3.12) удовлетворяет уравнению

$$\xi_p X_p + \xi_{-p} X_p + \Delta_p - \Delta_p^* X_p^2 = 0,$$

откуда

$$X_p = \frac{\xi_p + \xi_{-p} - 2E_p}{2\Delta_p^*}, \quad (3.26)$$

$$E_p = \left[\left(\frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right)^2 + |\Delta_p|^2 \right]^{1/2}.$$

Из формул (3.4), (3.14) следует, что

$$n_p = \left\{ \exp \left[Y_0 \left(\frac{\xi_p - \xi_{-p}}{2} + E_p \right) \right] + 1 \right\}^{-1},$$

$$K_p = \frac{1}{2E_p} \left(E_p + \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right), \quad (3.27)$$

$$K_p X_p^2 = \frac{1}{2E_p} \left(E_p - \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right).$$

Таким образом,

$$f_p = \frac{1}{2E_p} \left[\left(E_p + \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right) n_p + \left(E_p - \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right) (1 - n_{-p}) \right], \quad (3.28)$$

$$g_p = \frac{\Delta_p}{2E_p} (n_p + n_{-p} - 1).$$

Замечая, что

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial f_p}, \quad \Delta_p = \frac{\partial E}{\partial g_p^*}, \quad (3.29)$$

мы видим, что уравнения (3.28) вместе с уравнениями (3.29) образуют замкнутую систему уравнений для определения Δ и ε , если известен функционал энергий $E(\hat{f})$.

Выберем теперь в качестве функционала энергии функционал (3.18), (3.21). Тогда для распределений (3.25) имеем

$$E(f, g, g^+) = \sum_p \varepsilon_p f_p + \frac{2}{V} \sum_{p, p_1} f_{p_1} F_1(p_1, p) f_p + \frac{2}{V} \sum_{p, p_1} g_{p_1}^* L_1(p_1, p) g_p$$

и, следовательно,

$$\xi_p = \varepsilon_p + \frac{Y_4}{Y_0} + \frac{Y_i}{Y_0} p_i + \frac{2}{V} \sum_{p_1} F_1(p, p_1) f_{p_1},$$

$$\Delta_p = \frac{2}{V} \sum_{p_1} L_1(p, p_1) g_{p_1}.$$

Таким образом, согласно (3.28) уравнения для определения ξ_p, Δ_p имеют вид

$$\xi_p = \varepsilon_p + \frac{Y_4}{Y_0} + \frac{Y_i}{Y_0} p_i + \frac{2}{V} \sum_{p_1} F_1(p, p_1) \cdot \frac{1}{2E_{p_1}} \left[\left(E_{p_1} + \frac{\xi_{p_1} + \xi_{-p_1}}{2} \right) n_{p_1} + \left(E_{p_1} - \frac{\xi_{p_1} + \xi_{-p_1}}{2} \right) (1 - n_{-p_1}) \right], \quad (3.30)$$

$$\Delta_p = \frac{1}{V} \sum_{p_1} L_1(p, p_1) \frac{\Delta_{p_1}}{E_{p_1}} (n_{p_1} + n_{-p_1} - 1).$$

Если в качестве фермижидкостной амплитуды L_1 взять выражение, получающееся из формулы (3.23) и пренебречь фермижидкостной амплитудой F_1 , то мы придем к основному уравнению теории сверхтекучих систем БКШ [21]. В этой теории величину

$g_p = \langle a_{-p} a_p \rangle$, которую мы называли аномальной функцией распределения, можно интерпретировать как волновую функцию двух спариваемых электронов в импульсном представлении. (Эта волновая функция называется волновой функцией куперовской пары.) Функция g_p согласно формуле (3.28) обращается в нуль при $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_F| \gg \Delta/v_F$. Поэтому величину $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta$ можно интерпретировать как размер куперовской пары.

Если в уравнении самосогласования (3.30) (при $F_1 = 0$) в качестве амплитуды $L_1(p, p')$ взять величину, отличную от нуля в узком слое вблизи поверхности Ферми:

$$L_1(p, p') = -L, \quad |\xi_p| \leq \theta, \quad |\xi_{p'}| \leq \theta, \\ = 0, \quad |\xi_p| > \theta \text{ или } |\xi_{p'}| > \theta,$$

где для электрон-фононного механизма взаимодействия θ — величина порядка температуры Дебая, то, как известно, для температуры перехода T_c , определяемой из уравнения (3.30) при $\Delta \rightarrow 0$:

$$1 = L\nu(\mu) \int_0^\theta \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T},$$

получим следующее хорошо известное выражение

$$T_c = \frac{1}{2} \gamma \theta \exp \left(-\frac{1}{L\nu(\mu)} \right), \quad (3.31)$$

$$\ln \gamma = - \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \gamma = 2,268...$$

где

$$\nu(\mu) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon_p - \mu)$$

— плотность состояний на поверхности Ферми. Если в уравнении самосогласования (3.30) наряду с линейными слагаемыми учесть и кубические слагаемые по Δ и считать, что T близко к T_c , то мы получим следующее выражение для величины $\Delta(T)$:

$$\Delta(T) = 3,06 T_c \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2}.$$

Величина $\Delta(T)$ при $T \ll T_c$ определяется формулой $\Delta(0) = 4T_c/\gamma$.

Уравнение самосогласования (3.30) при $\mu > 0$ имеет нетривиальное решение при сколь угодно малой фермижидкостной амплитуде L , если только эта амплитуда положительна. Представляет формальный интерес выяснить особенности, которые возникают при решении уравнения самосогласования (3.30), если $\mu < 0$.

Будем считать для простоты, что $L_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -L$, если $|\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{q}|$ меньше p_0 и $L(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ в противном случае (L — положительная постоянная). Тогда уравнение самосогласования (3.30) принимает вид

$$1 = \frac{L}{2} \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{E} \operatorname{th} \frac{E}{2T}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(p_0).$$

Отсюда следует уравнение для определения критической температуры

$$1 = \frac{L}{2} \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{\varepsilon + |\mu|} \operatorname{th} \frac{\varepsilon + |\mu|}{2T}. \quad (3.32)$$

Так как

$$\operatorname{th} \frac{\varepsilon + |\mu|}{2T} < 1, \quad \frac{1}{\varepsilon + |\mu|} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

это уравнение, определяющее критическую температуру T_c , не будет иметь решения ни при каком $\mu < 0$, если

$$L < L_0,$$

где

$$L_0^{-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

(заметим, что $\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, в отличие от случая $\mu > 0$, при $\mu < 0$ сверхтекучесть может возникать только при достаточно сильном взаимодействии. Из уравнения (3.32) следует, что решение, соответствующее $T_c = 0$, появляется при химическом потенциале $\mu = \mu^*$, удовлетворяющем условию

$$1 = \frac{L}{2} \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{\nu(\varepsilon)}{\varepsilon + |\mu^*|}.$$

Отсюда следует, что если $|\mu| > |\mu^*|$, то уравнение (3.32) не имеет решения.

В заключение этого пункта заметим, что основные уравнения теории БКШ на основе модифицированной теории возмущений (принцип компенсации опасных диаграмм) были получены Боголюбовым [22]. Им же были введены в методе квазисредних и равновесные аномальные функции распределения [23]. Формулировка основных уравнений теории БКШ в методе температурных функций Грина была дана в работе Горькова [24]. Формулировка основных уравнений сверхпроводимости на основе полевых уравнений Дайсона для нормальных и аномальных функций Грина была дана в работах Элиашберга [25] и Намбу [26].

3.4. Триpletное спаривание и сверхтекучие фазы ^3He . В предыдущем разделе мы изучали синглетное спаривание фермионов, при котором суммарный спин спариваемых квазичастиц равен нулю. Так как спин каждой из квазичастиц равен $1/2$, то возможен в принципе еще один вид спаривания, при котором суммарный спин спариваемых частиц равен 1. Такое спаривание называется

триpletным. Если механизмом синглетного спаривания электронов обычно является обмен фононом, то в основе tripletного спаривания, которое реализуется в ^3He , лежит ван-дер-ваальсовское взаимодействие атомов ^3He . На возможность такого спаривания впервые указал Л. Питаевский [27].

Проанализируем уравнения самосогласования (2.32) в случае tripletного спаривания [41]. При этом мы будем предполагать выполненным условие пространственной однородности (2.33) с $q_i = 0$. Для того чтобы получить уравнения самосогласования при $q_i \neq 0$, необходимо воспользоваться такими же заменами, как и в случае синглетного спаривания. Аномальная функция распределения q_{12} в случае tripletного спаривания является симметричным спинором второго ранга и, следовательно, может быть разложена по базису из симметричных унитарных матриц второго порядка $\sigma_i \sigma_j$. Таким образом,

$$g_{12} = g_{ip} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_i \sigma_j)_{\sigma_1 \sigma_2},$$

где в силу антисимметрии аномальной функции распределения $g_{i, -p} = -g_{i, p}$. Отсюда и из (2.24) следует, что

$$\Delta_{12} = \Delta_{ip} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_i \sigma_j)_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \Delta_{i, -p} = -\Delta_{i, p}. \quad (3.33)$$

Так же как и в случае синглетного спаривания, воспользуемся общими формулами (3.14), (3.15). Решение уравнения (3.12) для матрицы X будем искать в виде

$$X_{12} = X_{ip} \delta_{p_1, -p_2} (\sigma_i \sigma_j)_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad X_{i, -p} = -X_{i, p}.$$

В результате уравнение (3.12) приобретает вид

$$X_{ip} (\xi_p + \xi_{-p}) - 2X_{ip} (X_{jp} \Delta_{jp}) + (X_{jp} X_{jp}) \Delta_{ip}^* + \Delta_{ip} = 0. \quad (3.34)$$

Мы предполагаем, что $F_2 = 0$ (см. (3.21)), так что $\xi_{12} = \xi_{p_1} \delta_{p_1, p_2} \delta_{\sigma_1, \sigma_2}$. Введем обозначения

$$\alpha_p \equiv X_{jp} X_{jp}, \quad \xi_p = X_{ip} \Delta_{ip}^* - \frac{1}{2} (\xi_p + \xi_{-p}). \quad (3.35)$$

Тогда

$$X_{ip} = \frac{1}{2\xi_p} (\Delta_{ip} + \alpha_p \Delta_{ip}^*), \quad (3.36)$$

и система уравнений для определения величин α_p , ξ_p согласно (3.35) имеет вид

$$\alpha_p = \frac{1}{2\xi_p} \left[\frac{\Delta_{ip} \Delta_{ip} + \alpha_p \Delta_{ip} \Delta_{ip}^*}{2\xi_p} + \alpha_p \left(\xi_p + \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right) \right], \quad (3.37)$$

$$\xi_p = \frac{1}{2\xi_p} (\Delta_{ip} \Delta_{ip}^* + \alpha_p \Delta_{ip}^* \Delta_{ip}) - \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2}.$$

Решая (3.37) и учитывая (3.36), получим

$$X_{ip} = \frac{1}{2\xi_p} \left\{ \Delta_{ip} + \frac{2\xi_p [\xi_p + (1/2)(\xi_p + \xi_{-p})] - \Delta_{jp} \Delta_{jp}^*}{\Delta_{jp}^* \Delta_{jp}} \Delta_{ip}^* \right\}, \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} (\xi_p)_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} [\Delta_{ip} \Delta_{ip}^* + \frac{1}{4} (\xi_p + \xi_{-p})^2 + (G_p)_{1,2}^2], \\ (G_p)_{1,2} &= \pm \{ [\Delta_{ip} \Delta_{ip}^* + \frac{1}{4} (\xi_p + \xi_{-p})^2]^2 - \\ &\quad - |[\Delta_p, \Delta_p^*]|^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Таким образом, с учетом соотношений (3.17), (3.38) для аномальных функций распределения g_{ip} будем иметь

$$\begin{aligned} g_{ip} &= \frac{1}{4} [(1 - n_p^0(\xi_1) - n_{-p}^0(\xi_1)) (\chi_p(\xi_1) \Delta_{ip} + \\ &\quad + \varphi_p(\xi_1) \Delta_{ip}^*) + (1 - n_p^0(\xi_2) - n_{-p}^0(\xi_2)) \times \\ &\quad \times (\chi_p(\xi_2) \Delta_{ip} + \varphi_p(\xi_2) \Delta_{ip}^*)]; \end{aligned} \quad (3.40)$$

здесь

$$\begin{aligned} \chi_p(\xi) &= \frac{2\xi_p^2 - \Delta_{ip} \Delta_{ip}^*}{\xi_p G_p}, \quad \varphi_p(\xi) = \frac{\Delta_{ip} \Delta_{ip}^*}{\xi_p G_p}, \\ n_p^0 &= \frac{1}{2} (n_p^+ + n_p^-), \\ n_p^\pm &= \left[\exp \left[Y_0 \left(-\xi_p + \frac{\xi_p - \xi_{-p}}{2} \pm \frac{|[\Delta_p, \Delta_p^*]|}{2\xi_p} \right) \right] + 1 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Результат (3.40) приведен в форме, из которой явно видна инвариантность функций g_α относительно выбора корня в (3.39), при этом под ξ_1, ξ_2 может пониматься или взятое со знаком "плюс", или взятое со знаком "минус" арифметическое значение корня из (3.39). Структура нормальной функции распределения f в импульсном и спиновом пространствах определяется выражением

$$f_{12} = (f_{0p_1} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} + f_{ip}(\sigma_i)_{\sigma_1 \sigma_2}) \delta_{p_1 p_2}, \quad (3.41)$$

где, как следует из (3.17), (3.35), функции f_{0p}, f_{ip} имеют вид

$$\begin{aligned} f_{0p} &= \frac{1}{2} [1 + n_p^0(\xi_{1,2}) - n_{-p}^0(\xi_{1,2}) + 2(\xi_p^2)_1 \psi_p(\xi_1) \times \\ &\quad \times (1 - n_p^0(\xi_1) - n_{-p}^0(\xi_1)) + 2(\xi_p^2)_2 \psi_p(\xi_2) \times \\ &\quad \times (1 - n_p^0(\xi_2) - n_{-p}^0(\xi_2))] , \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} f_p &= -\frac{1}{2} [\psi_p(\xi_1) (1 - n_p^0(\xi_1) - n_{-p}^0(\xi_1)) + \psi_p(\xi_2) \times \\ &\quad \times (1 - n_p^0(\xi_2) - n_{-p}^0(\xi_2)) + |[\Delta_p, \Delta_p^*]|^{-1} \times \\ &\quad \times (n_p''(\xi_{1,2}) - n_{-p}''(\xi_{1,2}))] i [\Delta_p, \Delta_p^*], \end{aligned}$$

$$\psi_p(\xi) = \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{4\xi_p G_p}, \quad n_p'' = \frac{1}{2} (n_p^+ - n_p^-). \quad (3.43)$$

Если в некоторых комбинациях в (3.42), (3.43) в качестве аргумента фигурирует величина $\xi_{1,2}$, то это означает, что эти комбинации инвариантны сами по себе относительно выбора корня и в них в качестве аргумента можно выбрать либо первый корень ξ_1 , либо второй ξ_2 .

Из выражений (3.20), (3.21) для функционала

энергии следует, что

$$\begin{aligned} \xi_p &= \varepsilon_p + \frac{Y_i}{Y_0} p_i + \frac{Y_4}{Y_0} + \frac{1}{V} \sum_{p_1} F_1(p, p_1) f_{0p_1}, \\ \Delta_{ip} &= \frac{2}{V} \sum_{p_1} L_2(p, p_1) g_{ip_1}. \end{aligned}$$

Поэтому согласно (3.40), (3.42), (3.43) уравнения самосогласования для величины ξ_p, Δ_{ip} имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_p &= \varepsilon_p + \frac{Y_i}{Y_0} p_i + \frac{Y_4}{Y_0} + \frac{1}{V} \sum_{p_1} F_1(p, p_1) \times \\ &\quad \times [1 + n_{p_1}^0(\xi_{1,2}) - n_{-p_1}^0(\xi_{1,2}) + \psi_{p_1}(\xi_1) \times \\ &\quad \times (1 - n_{p_1}^0(\xi_1) - n_{-p_1}^0(\xi_1)) + \psi_{p_1}(\xi_2) \times \\ &\quad \times (1 - n_{p_1}^0(\xi_2) - n_{-p_1}^0(\xi_2))] , \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ip} &= \frac{1}{V} \sum_{p_1} L_2(p, p_1) [(1 - n_{p_1}^0(\xi_1) - n_{-p_1}^0(\xi_2)) \times \\ &\quad \times (\chi_{p_1}(\xi_1) \Delta_{ip_1} + \varphi_{p_1}(\xi_1) \Delta_{ip_1}^*) + (1 - n_{p_1}^0(\xi_2) - \\ &\quad - n_{-p_1}^0(\xi_2)) (\chi_{p_1}(\xi_2) \Delta_{ip_1} + \varphi_{p_1}(\xi_2) \Delta_{ip_1}^*)] . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Эти уравнения полностью решают общую задачу о триплетном спаривании и аналогичны уравнениям (3.30) в случае синглетного спаривания. Отметим, что если векторное произведение $[\Delta_p, \Delta_p^*]$ отлично от нуля, то в сверхтекучей жидкости существует спонтанная намагниченность M_i , возникающая в результате перехода в сверхтекучую фазу, которая определяется выражением

$$\begin{aligned} M_i &= -\beta \sum_p [\psi_p(\xi_1) (1 - n_p^0(\xi_1) - n_{-p}^0(\xi_1)) + \psi_p(\xi_2) \times \\ &\quad \times (1 - n_p^0(\xi_2) - n_{-p}^0(\xi_2))] \cdot i [\Delta_p, \Delta_p^*]_i, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $\beta = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора.

Рассмотрим состояния сверхтекучей ферми-жидкости, для которых произведение $\Delta \Delta^+$ пропорционально единичной матрице в спиновом пространстве (что эквивалентно выполнению условия $[\Delta_p, \Delta_p^*] = 0$). Такие состояния, согласно [28], будем называть унитарными состояниями. Ясно, что в случае унитарных состояний спонтанная намагниченность при переходе в сверхтекучую фазу не возникает.

Уравнения самосогласования (3.44), (3.45) для унитарных состояний имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_p &= \varepsilon_p + \frac{Y_i}{Y_0} p_i + \frac{Y_4}{Y_0} + \\ &\quad + \frac{1}{V} \sum_{p_1} F_1(p, p_1) \cdot \frac{1}{2E_{p_1}} \left[\left(E_{p_1} + \frac{\xi_{p_1} + \xi_{-p_1}}{2} \right) n_{p_1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(E_{p_1} - \frac{\xi_{p_1} + \xi_{-p_1}}{2} \right) (1 - n_{-p_1}) \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\Delta_{ip} = \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{p}_1} L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \frac{\Delta_{ip_1}}{E_{p_1}} (n_{\mathbf{p}_1} + n_{-\mathbf{p}_1} - 1);$$

здесь

$$E_p = \left[\frac{1}{4} (\xi_p + \xi_{-p})^2 + \Delta_{ip} \Delta_{ip}^* \right]^{1/2},$$

$$n_p = \left\{ \exp \left[Y_0 \left(E_p + \frac{\xi_p + \xi_{-p}}{2} \right) \right] + 1 \right\}^{-1}.$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями (3.30) теории БКШ. Различие заключается лишь в том, что функции Δ_{ip} и $L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ являются нечетными по аргументу $\mathbf{p}$.

К унитарным состояниям относятся, в частности, состояния с проекцией спина на ось квантования, равной нулю. Для таких состояний $\Delta_{ip} = d_i \Delta_p$, где d_i — вещественный единичный вектор вдоль спиновой оси квантования. Зависимость от импульсов величины Δ_p должна находиться из уравнения, аналогично (3.47), в котором необходимо только заменить Δ_{ip} на Δ_p . При $Y_i = 0$ угловая зависимость величины Δ_p определяется только структурой зависимости от углов амплитуды взаимодействия $L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p})$. Если система в целом вращательно инвариантна (как в случае ^3He), то амплитуда взаимодействия в общем случае имеет вид

$$L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \eta \eta_1)$$

(η — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$) и может быть разложена по полиномам Лежандра:

$$L_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \eta \eta_1) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) V_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) P_l(\cos \theta) \quad (3.48)$$

(θ угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$). Разложение (3.48) приводит к разложению параметра порядка в виде

$$\Delta_p = \sum_{l,m} \Delta_{lm} Y_{lm}$$

(в случае триплетного спаривания L_2 и Δ_p содержат суперпозицию сферических функций с нечетными l). Если в разложении (3.48) фигурирует только одно слагаемое, соответствующее некоторому значению момента l_0 , то и угловая зависимость Δ_p будет описываться комбинацией сферических функций только с $l = l_0$.

Примером унитарных состояний являются так называемые А- и В-фазы ^3He . Различным сверхтекучим фазам соответствуют различные свойства симметрии равновесных функций распределения по отношению к вращениям в спиновом и орбитальном пространстве. Например, в случае электронов с синглетным спариванием оператор $\hat{f}$ должен коммутировать с оператором спина

$$[\hat{f}, \hat{s}_i] = 0.$$

Кроме того, в обычной теории сверхпроводимости

предполагается, что спаривание происходит в состоянии с $l = 0$ и поэтому должно иметь место соотношение

$$[\hat{f}, \hat{\mathcal{L}}_k] = 0,$$

где

$$\hat{\mathcal{L}}_k = \hat{l}_k - i \varepsilon_{kli} \left(q_l \frac{\partial}{\partial q_i} + Y_l \frac{\partial}{\partial Y_i} \right); \quad (3.48')$$

здесь второй член описывает вращение в пространстве векторных термодинамических параметров Y_i, q_i ;

$$\hat{l}_k = \begin{pmatrix} l_k & 0 \\ 0 & -\tilde{l}_k \end{pmatrix}$$

— оператор орбитального момента сверхтекучей ферми-жидкости.

В случае А-фазы ^3He спаривание имеет место в состоянии с $s = 1, l = 1$ (в силу принципа Паули триплетное спаривание с $l = 0$ невозможно). Оператор $\hat{f}$ должен удовлетворять следующим условиям симметрии:

$$[\hat{p} - q \hat{\tau}_3, \hat{f}] = 0, \quad [d_i \hat{s}_i, \hat{f}] = 0, \quad (3.49)$$

$$[k_i \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{1}{2} \hat{\tau}_3, \hat{f}] = 0,$$

где d_i — единичный вектор, определяющий ось квантования в спиновом пространстве, и k_i — единичный вектор, определяющий ось квантования в импульсном пространстве. Эти соотношения показывают, что проекция спина на направление d_i равна нулю, а проекция орбитального момента на направление k_i равна единице.

Если проекция спина на ось d_i равна $m_s = \pm 1, 0$, а проекция орбитального момента на ось k_i равна $m_l = \pm 1, 0$, то соотношения (3.49) должны быть заменены на соотношения

$$[d_i \hat{s}_i - \frac{1}{2} m_s \hat{\tau}_3, \hat{f}] = 0, \quad (3.50)$$

$$[k_i \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{1}{2} m_l \hat{\tau}_3, \hat{f}] = 0.$$

Эта интерпретация следует из того, что из соотношений (3.50) следуют соотношения (мы положили $\mathbf{Y} = \mathbf{q} = 0$)

$$(s, d)g = m_s g, \quad (k, l)g = m_l g, \quad (3.51)$$

где $s = s_1 + s_2, l = l_1 + l_2$. Эти соотношения показывают, что если аномальную функцию распределения g_{12} интерпретировать как волновую функцию пары, то эта волновая функция является собственной функцией операторов проекции спина и орбитального момента на оси квантования d_i и k_i .

Состояния с $m_s = \pm 1$, очевидно, являются неунитарными, так как в этом случае, согласно уравнениям (3.51) $g_j \sim n_{1j} + i n_{2j}$, где n_{1j} и n_{2j} единичные, взаимно перпендикулярные векторы, ортогональные $\mathbf{d}$.

В случае В-фазы спаривание также имеет место

при $s = 1, l = 1$, но свойства симметрии фазы определяются формулой

$$[\hat{L}_i + \hat{s}_k R_{ki}, \hat{f}] = 0, \quad (3.52)$$

где R есть некоторая матрица поворота ($R\tilde{R} = 1, R = R^*$). В этом случае проекции спинов и орбитального момента куперовской пары являются неопределенными. Параметры d, k, R наряду с параметрами Y, q , определяют состояние статистического равновесия сверхтекучей жидкости. Какая из фаз $l = 0, s = 0$ или А-, В-фазы в случае ${}^3\text{He}$ ($l = 1, s = 1$) в действительности реализуются, определяется условием минимума термодинамического потенциала Ω , который в свою очередь определяется структурой функционала $E(f, g, g^+)$ (или фермижидкостных амплитуд, см. (3.48)).

${}^3\text{He}$ образует жидкость, не затвердевающую при давлении меньше 35 атм вплоть до абсолютного нуля температур. Температура вырождения T_F определяется формулой

$$T_F = \frac{1}{2m_{{}^3\text{He}}} (3\pi^2 \hbar^3 n_{{}^3\text{He}})^{2/3}$$

($m_{{}^3\text{He}}$ — масса атома, $n_{{}^3\text{He}}$ — плотность атомов ${}^3\text{He}$) порядка 1 К. Фазовый переход жидкого ${}^3\text{He}$ из нормального состояния в сверхтекучее состояние был обнаружен в 1972 г. [29]. Сверхтекучий ${}^3\text{He}$ может находиться в двух фазах А и В (в отсутствие магнитного поля). Фазовая диаграмма жидкого ${}^3\text{He}$ изображена на рис. 1. Фазовый переход из нормального состояния в сверхтекучую А-фазу при давлении 35 атм происходит при температуре $T_c = 2,6 \cdot 10^{-3}$ К, а переход из А- в В-фазу при том же давлении происходит при температуре $T_{AB} = 2,07 \cdot 10^{-3}$ К [30].

Фазы А и В отличаются своими свойствами симметрии (см. выше). Фазовый переход из нормального состояния в сверхтекучие фазы — переход второго рода. Фазовый переход между А- и В-фазами сопровождается выделением скрытой теплоты и является переходом I рода.

Изменение теплоемкости с температурой при переходе из нормального в сверхтекучее состояние (пе-

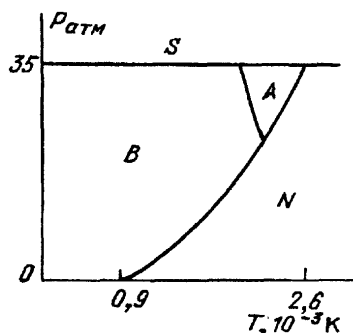


Рис. 1. Фазовая диаграмма фаз ${}^3\text{He}$. S — область твердого ${}^3\text{He}$, N — область нормального жидкого ${}^3\text{He}$; А и В — области сверхтекучих ${}^3\text{He}$ -А и ${}^3\text{He}$ -В соответственно

реход II рода) аналогично поведению теплоемкости в обычных сверхпроводниках.

3.5. Модель сверхтекучести с неквадратичным функционалом энергии. До сих пор функционал энергии предполагался квадратичным относительно аномальной функции распределения. В этом пункте мы учтем в функционале энергии неквадратичные слагаемые типа $(gg^*)^2$ (кубические слагаемые по g или слагаемые типа gg^*, g^4 не могут входить в функционал энергии в силу фазовой инвариантности). Предполагая, что спаривание фермионов является синглетным, а сверхтекучий импульс q_i равен нулю, так что $g_{12} = g_{p_1, -p_1, -p_2}(\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma_2}$, запишем часть энергии $E_2(g)$, связанную с аномальной функцией распределения g в виде

$$E_2(g) = -\frac{1}{2V} \sum_{p, q} I_{pq} g_p g_q^* - \frac{1}{4V} \sum_{p, p', q, q'} \tilde{I}(p, p'; q, q') g_p g_{p'} g_q^* g_{q'}^*.$$

Мы будем предполагать, что амплитуда $\tilde{I}(p, p'; q, q')$ имеет резкий максимум при $p' = p, q' = q$ и, следовательно,

$$E_2(g) = -\frac{1}{2V} \sum_{p, q} I_{pq} g_p g_q^* - \frac{1}{4V} \sum_{p, q} \tilde{I}_{pq} g_p^2 g_q^{*2}.$$

Кроме того, предположим, что амплитуды I_{pq} и $\tilde{I}_{pq}$ факторизуются:

$$I_{pq} = I_p I_q, \quad \tilde{I}_{pq} = \tilde{I}_p \tilde{I}_q$$

(мы считаем, что амплитуды I_{pq} и $\tilde{I}_{pq}$ являются положительно определенными, что соответствует притяжению фермионов). Тогда функция $\Delta_p \equiv 2\partial E / \partial g_p^*$ определяется формулой

$$\Delta_p = -\frac{1}{V} I_p \sum_q I_q g_q - \frac{1}{V} g_p^* \tilde{I}_p \sum_q \tilde{I}_q g_q^2,$$

и, следовательно, согласно (3.28), (3.29) уравнение самосогласования принимает вид

$$\Delta_p = -A I_p - B \tilde{I}_p \Delta_p \frac{2n_p - 1}{2E_p}, \quad (3.53)$$

где

$$A = \frac{1}{V} \sum_q I_q \frac{2n_q - 1}{2E_q} \Delta_q, \quad (3.54)$$

$$B = \frac{1}{V} \sum_q \tilde{I}_q \frac{(2n_q - 1)^2}{4E_q^2} \Delta_q^2.$$

Подставляя в (3.54) решение уравнения (3.53) для Δ_p (E_p и n_p также зависят от Δ_p), получим трансцендентные уравнения для определения постоянных А и В (не зависящих от импульса), решения которых и определяют согласно (3.53) Δ_p .

Легко видеть, что если $\tilde{I}_p = 0$, то мы возвращаемся к основным уравнениям теории БКШ. Рассмотрим другой случай, когда в силу каких-то причин амплитуда I_p является аномально малой. Полагая в уравнении (3.53) $I_p = 0$, получим согласно (3.54), что $A = 0$, а величина B определяется из уравнений

$$\Delta_p = -\tilde{I}_p \frac{2n_p - 1}{2E_p} B \Delta_p, \quad (3.55)$$

$$B = \frac{1}{V} \sum_q \tilde{I}_q \frac{(2n_q - 1)^2}{4E_q^2} \Delta_q^2.$$

Пусть $\tilde{I}_p = 0$ вне слоя $|\xi| \leq \theta$, а внутри этого слоя $\tilde{I}_p = \tilde{I} = \text{const}$. Тогда согласно уравнениям (3.55) $\Delta_p = 0$ при $|\xi| > \theta$, а при $|\xi| < \theta$ имеем соотношение

$$1 = -\tilde{I} \frac{2n_p - 1}{2E_p} B, \quad |\xi| \leq \theta$$

для нетривиального решения $\Delta_p \neq 0$. Так как

$$n_p = \left(\exp \frac{E_p}{T} + 1 \right)^{-1},$$

из последнего уравнения следует, что внутри слоя $|\xi| \leq \theta$ энергия E_p не зависит от импульса p и, следовательно, учитывая, что $E_p = (\Delta_p^2 + \xi_p^2)^{1/2}$, найдем следующую зависимость щели Δ_p от импульса p :

$$\Delta_p = 0, \quad |\xi| > \theta, \\ = (E_0^2 - \xi_p^2)^{1/2}, \quad |\xi| \leq \theta. \quad (3.56)$$

Постоянная E_0 согласно (3.55), (3.56) определяется из уравнения

$$-\frac{1}{\tilde{I}} \frac{2E_0}{2n_0 - 1} = \frac{1}{V} \sum_{|\xi| \leq \theta} \frac{(2n_0 - 1)^2}{4E_0^2} (E_0^2 - \xi_p^2), \\ n_0 = \left(\exp \frac{E_0}{T} + 1 \right)^{-1}.$$

Замечая, что (мы считаем, что $\mu \gg \theta$)

$$\frac{1}{V} \sum_{|\xi| \leq \theta} (E_0^2 - \xi_p^2) = \nu(\mu) \theta \left(E_0^2 - \frac{\theta^2}{3} \right),$$

получим уравнение

$$1 = \tilde{I} \nu(\mu) \theta \frac{\text{th}^3(E_0/2T)}{(2E_0)^3} \left(E_0^2 - \frac{\theta^2}{3} \right),$$

или в безразмерных переменных

$$\alpha \frac{x^3}{x^2 - 1} = \text{th}^3(xz), \quad (3.57)$$

где

$$x = \sqrt{3} E_0 / \theta, \quad z = \theta / 2\sqrt{3} T, \quad \alpha = 8(\tilde{I} \nu(\mu))^{-1} / \sqrt{3}.$$

Подчеркнем, что переменная z определяется температурой и не зависит от интенсивности взаимодействия, а переменная α зависит от интенсивности взаимодействия, но не зависит от температуры.

Для анализа уравнения (3.57) обратимся к рис. 2, на котором кривые $y = \alpha x^3 / (x^2 - 1)$ изображают ле-

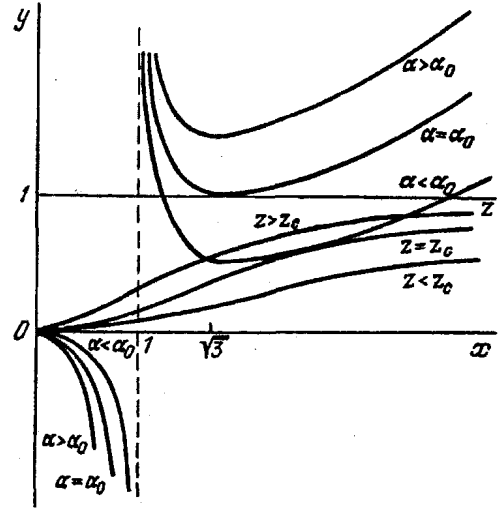


Рис. 2. Графическое решение уравнения $\alpha x^3 / (x^2 - 1) = \text{th}^3(xz)$ ($z_c = \theta / 2\sqrt{3} T$)

вую часть уравнения (3.57), а кривые, лежащие под прямой $y=1$, изображают правую часть уравнения $y = \text{th}^3(xz)$. При $T = 0$ $\text{th}^3(xz)$ вырождается в прямую $y = 1$. Пересечение этой прямой линии с кривыми $y = \alpha x^3 / (x^2 - 1)$ возможно только при $\alpha \leq \alpha_0 = 2/3\sqrt{3}$. При $\alpha > \alpha_0$ уравнение (3.57) не имеет решений. Это означает, что если взаимодействие $\tilde{I}$ меньше $\tilde{I}_0 = 12/\nu(\mu)$, то уравнение самосогласования не имеет решений $\Delta \neq 0$. Решение $\Delta \neq 0$ появляется только при достаточно сильном взаимодействии $\tilde{I} > \tilde{I}_0$. При $T = 0$ и $\tilde{I} > \tilde{I}_0$ величина $x = \sqrt{3} E_0 / \theta$ определяется из уравнения

$$\alpha x^3 - x^2 + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет три вещественных корня, один из которых отрицателен, второй, как видно из рисунка, лежит в области $1 < x < \sqrt{3}$, а третий корень $x > \sqrt{3}$. Для того чтобы величина $\Delta^2 = E_0^2 - \xi^2$ была положительной при всех $|\xi| \leq \theta$, необходимо выбрать решение уравнения (3.57), которое больше $\sqrt{3}$.

Пусть теперь $T > 0$. Тогда уравнение (3.57) имеет два положительных решения, одно из которых больше $\sqrt{3}$. Если взаимодействие фиксировано и $\alpha < \alpha_0$, то часть кривой $y = \alpha x^3 / (x^2 - 1)$ лежит под прямой $y = 1$. При достаточно высоких температурах кривая $y = \text{th}^3(xz)$ прижимается к прямой $y = 0$ и уравнение (3.57) не имеет решения. Решение появляется только при достаточно низких температурах, когда кривые $y = \text{th}^3(xz)$ и $y = \alpha x^3 / (x^2 - 1)$ касаются. Температура, соответствующая точке касания и определяет температуру фазового перехода. Мы не будем выписывать уравнение для определения точки касания, а заметим лишь, что при $\alpha \leq \alpha_0$ величина z , связанная с температурой T , в точке касания также будет порядка единицы (так как все коэффициенты в урав-

нении, определяющем точку касания порядка единицы). В этом случае $T_c \sim \theta$, $E_0 \sim \theta$. В случае сильного взаимодействия ($\alpha \ll \alpha_0$) можно показать, что

$$T_c \approx 0,03 \tilde{I}^2 \nu(\mu) \theta, \quad \tilde{I}^2 \nu(\mu) \gg 12.$$

Обратим внимание, что при $\alpha \ll \alpha_0$ ($\tilde{I} \gg \tilde{I}_0$) температура перехода T_c может быть значительно больше θ , в то время как при $\tilde{I} \sim \tilde{I}_0$ температура перехода масштаба θ .

Заметим, что в точке перехода щель Δ_p возникает скачком, в отличие от обычной теории БКШ, в которой при $T = T_c$ величина Δ обращается в нуль. Таким образом, в рассматриваемой модели фазовый переход является фазовым переходом первого рода.

Проанализируем теперь случай, когда $I \neq 0$, но является достаточно малой величиной (см. ниже). В этом случае уравнение самосогласования (3.53) всегда имеет решение, соответствующее малым g_p , для которого слагаемое, пропорциональное $\tilde{I}_p$, несмотря на большую величину $\tilde{I}$ не играет роли. Температура перехода, соответствующая этому решению, определяется обычной формулой: $T_c = \theta \exp(-1/\nu_F I)$. При $\nu_F I \ll 1$ (слабое взаимодействие) температура перехода $T_c \ll \theta$. Поэтому при малом I (малость определяется из соотношения $\exp(-1/\nu_F I) \ll \tilde{I}^2 \nu_F$) имеется два решения, одно из которых соответствует температуре перехода (3.31), а другое соответствует более высокой температуре и определяется решением, полученным в настоящем пункте. Если уменьшать температуру нормальной фазы, то при $T_c \sim \tilde{I}^2 \nu_F \theta$ возникает изучаемый нами фазовый переход. Вопрос о возможности фазового перехода с температурой T_c , определяемой формулой (3.31), при дальнейшем понижении температуры должен решаться путем сравнения термодинамического потенциала высокотемпературной фазы и термодинамического потенциала фазы БКШ.

Мы не исследуем здесь ситуацию, возникающую, когда взаимодействия I и $\tilde{I}$ сравнимы в смысле соотношения $\exp(-1/\nu_F I) \sim \tilde{I}^2 \nu_F$.

Таким образом, в рассмотренной нами модели температура перехода может быть значительно больше θ , а фазовый переход является фазовым переходом первого рода. Заметим, что в ВТСП поведение параметра порядка Δ очень близко к поведению параметра порядка при фазовом переходе первого рода.

3.6. Термодинамика и гидродинамика ферми-жидкости с синглетным спариванием. В этом разделе мы сформулируем второй закон термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей ферми-жидкости. Мы будем предполагать для простоты, что спаривание квазичастиц в

ферми-жидкости происходит в синглетном состоянии.

В пункте 2.3 мы ввели потенциал $\Omega(\hat{f})$, минимизация которого по функции $\hat{f}$ приводила к уравнениям самосогласования (2.32). В случае пространственно однородных состояний можно ввести плотность термодинамического потенциала $\omega = \Omega/V$:

$$\omega(\hat{f}) = -V^{-1} S(\hat{f}) + Y_0 \delta(0; \hat{f}) + Y_i \text{tr} f \pi_i(0) + Y_4 \text{tr} f \rho(0). \quad (3.58)$$

Равновесный потенциал $\omega(Y, q)$ будет получаться в результате подстановки в $\omega(\hat{f})$ в качестве $\hat{f}$ равновесной функции распределения $\hat{f}_{eq}$, которая удовлетворяет уравнению (2.32). Как видно из формулы (3.58), потенциал $\omega(Y, q)$ зависит от термодинамических параметров Y, q как явно, так и через функцию распределения $\hat{f}_{eq}$. В силу вариационного принципа при нахождении производных $\partial \omega / \partial Y_\alpha$ дифференцирование по Y_α можно производить, учитывая только явную зависимость ω от Y_α . В результате получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial Y_0} = \delta, \quad \frac{\partial \omega}{\partial Y_i} = \pi_i, \quad \frac{\partial \omega}{\partial Y_4} = \rho, \quad (3.59)$$

где δ, π_i, ρ — равновесные плотности энергии, импульса и числа частиц. Найдем теперь производную $\partial \omega / \partial q_i$.

Введем с этой целью унитарный оператор

$$\hat{U}_g = \exp(-ig_i \hat{x}_i), \quad \hat{x}_i = \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & -\tilde{x}_i \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

(x_i — оператор координаты) и, учитывая (2.3), перепишем формулу (3.50) в виде

$$\omega(Y, q + g) = V^{-1} \text{Sp} \hat{f}_g \ln \hat{f}_g + Y_0 \delta(\hat{U}_g^+ \hat{f}_g \hat{U}_g) + Y_i \cdot \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f}_g \hat{U}_g \pi_i \hat{U}_g^+ + Y_4 \cdot \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f}_g \hat{U}_g \rho \hat{U}_g^+, \quad (3.61)$$

где

$$\hat{f}_g = \hat{U}_g \hat{f}(Y, q + g) \hat{U}_g^+, \quad \hat{f}(Y, q) \equiv \hat{f}_{eq}.$$

Так как $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$, то

$$\hat{U}_g \hat{p}_i \hat{U}_g^+ = \hat{p}_i + g_i \hat{\tau}_3.$$

Отсюда согласно (2.33) следует, что

$$[\hat{f}_g, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0,$$

т.е. оператор $\hat{f}_g$ принадлежит классу операторов (2.33). Поэтому, используя формулы (2.23), (3.58), согласно вариационному принципу (см. (2.3)) имеем из (3.61)

$$\frac{\partial \omega}{\partial q_i} = Y_0 \cdot \frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}), \hat{x}_i] + Y_k \cdot \frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\pi}_k, \hat{x}_i].$$

Замечая далее, что

$$[\hat{\pi}_k(x), \hat{\rho}(x')] = -i \hat{\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(x - x')$$

и что согласно (2.42)

$$j_i(x; \hat{f}) \equiv \text{Sp} \hat{f}_{eq} \hat{j}_i(0)/2 = i \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}), \hat{x}_i]/2, \quad (3.62)$$

получаем окончательно

$$\frac{\partial \omega}{\partial q_i} = Y_0 \left(j_i + \frac{Y_i}{Y_0} \rho \right). \quad (3.63)$$

Таким образом, второй закон термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей ферми-жидкости можно сформулировать в виде

$$d\omega = \mathcal{E} dY_0 + \pi_i dY_i + \rho dY_4 + Y_0 \left(j_i + \frac{Y_i}{Y_0} \rho \right) dq_i. \quad (3.64)$$

Напомним, что $Y_0 = T^{-1}$ (T — температура), $Y_i = -Y_0 v_i$ (v_i — нормальная скорость), $Y_4 = -\mu Y_0$ (μ — химический потенциал). Для галилеево-инвариантных систем согласно (3.62), (2.31') плотность импульса π_i совпадает с плотностью потока массы $m j_i$, $\pi_i = m \cdot j_i$.

Замечая, что плотность энтропии определяется формулой $s = -\omega + \mathcal{E} Y_0 + \pi_i Y_i + \rho Y_4$, формулу (3.64) можно переписать в виде

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{Y_0} ds - \frac{Y_i}{Y_0} d\pi_i - \frac{Y_4}{Y_0} d\rho + \left(j_i + \frac{Y_i}{Y_0} \rho \right) dq_i. \quad (3.65)$$

Полученные нами термодинамические соотношения (3.63), (3.64), мы используем для построения идеальной гидродинамики сверхтекучей ферми-жидкости с синглетным спариванием. Для этого в силу принципа локальности состояния статистического равновесия необходимо найти плотности потоков числа частиц, импульса и энергии в состоянии термодинамического равновесия. Плотность потока числа частиц определяется только что полученной нами формулой (3.63). Найдем теперь выражение для тензора натяжений t_{ik} и плотности потока энергии W_k в терминах термодинамического потенциала ω . Начнем с тензора натяжения t_{ik} .

Пусть a_{ik} — коэффициенты произвольных аффинных преобразований $x_i \rightarrow x'_i = a_{ik} x_k$. Тогда легко видеть, что операторы $a_{ik}^{-1} \hat{x}_k$ и $\tilde{a}_{jk} \hat{p}_k$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{x}_i, \hat{p}_k$. Отсюда, как известно, следует, что

$$\hat{U}_a \hat{x}_i \hat{U}_a^+ = a_{ik}^{-1} \hat{x}_k, \quad \hat{U}_a \hat{p}_i \hat{U}_a^+ = \tilde{a}_{ik} \hat{p}_k, \quad (3.66)$$

где $\hat{U}_a$ — некоторый унитарный оператор. В случае бесконечно малых преобразований $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$, $\hat{U}_a = 1 - i \xi_{ik} \hat{\Gamma}_{ik}$, причем генератор $\hat{\Gamma}_{ik}$ унитарных преобразований (3.66) определяется формулой

$$\hat{\Gamma}_{ik} = \int d^3 x x_i \hat{\pi}_k(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \{x_i, p_k\} & 0 \\ 0 & -\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_k\} \end{pmatrix}.$$

Из формул (3.66) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{U}_a \hat{\rho}(x) \hat{U}_a^+ &= (\det a) \hat{\rho}(ax), \\ \hat{U}_a \hat{\pi}_i(x) \hat{U}_a^+ &= (\det a) \tilde{a}_{ik} \hat{\pi}_k(ax). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Равновесный статистический оператор $\hat{f}$ определяется термодинамическими параметрами Y, q . Из соотношений (2.33) ясно, что

$$[\hat{U}_a \hat{f}(Y, \tilde{a}q) \hat{U}_a^+, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0. \quad (3.68)$$

Пусть $|x, \lambda\rangle$ ($\lambda = s, \tau, \tau = \pm 1$) собственный вектор операторов $\hat{x}, \hat{s}_3, \hat{\tau}_3$

$$\hat{x}|x, \lambda\rangle = x|x, \lambda\rangle, \quad \hat{s}_3|x, \lambda\rangle = s|x, \lambda\rangle,$$

$$\hat{\tau}_3|x, \lambda\rangle = \tau|x, \lambda\rangle.$$

Тогда согласно (3.66) $\hat{U}_a^+ |x, \lambda\rangle = \xi |a^{-1}x, \lambda\rangle$. Условие нормировки $\langle x, \lambda | x', \lambda' \rangle = \delta(x - x')$ приводит к следующему выражению для нормировочного множителя ξ , $\xi = (\det a)^{-1/2}$. Поэтому

$$\hat{U}_a |x, \lambda\rangle = (\det a)^{1/2} |ax, \lambda\rangle,$$

$$\hat{U}_a |0, \lambda\rangle = (\det a)^{1/2} |0, \lambda\rangle.$$

Вычисляя шпур в (x, λ) представлении, энтропию единицы объема можно представить в виде

$$s(\hat{f}) = -\frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \ln \hat{f} = -\frac{1}{V} \sum_{\lambda} \int d^3 x \langle x, \lambda | \hat{f} \ln \hat{f} | x, \lambda \rangle.$$

Так как для пространственно-однородных состояний (2.33) матричный элемент $\langle x, \lambda | \hat{f} \ln \hat{f} | x, \lambda \rangle$ не зависит от x , то

$$s(\hat{f}) = -\sum_{\lambda} \langle 0\lambda | \hat{f} \ln \hat{f} | 0\lambda \rangle.$$

Или используя (3.69), имеем

$$s(\hat{f}) = -(\det a) \sum_{\lambda} \langle 0\lambda | \hat{U}_a \hat{f} \hat{U}_a^+ \ln \hat{U}_a \hat{f} \hat{U}_a^+ | 0\lambda \rangle.$$

Таким образом,

$$s(\hat{f}) = (\det a) s(\hat{U}_a \hat{f} \hat{U}_a^+).$$

Поэтому согласно (3.58) имеем

$$\begin{aligned} \omega(Y, \tilde{a}q) &= \frac{\det a}{V} \text{Sp} \hat{f}_a \ln \hat{f}_a + Y_0 \mathcal{E} (\hat{U}_a^+ \hat{f}_a \hat{U}_a) + \\ &+ Y_{1/2} \text{Sp} \hat{f}_a \hat{U}_a \hat{\pi}_i \hat{U}_a^+ + Y_{4/2} \text{Sp} \hat{f}_a \hat{U}_a \hat{\rho} \hat{U}_a^+, \quad (3.69) \\ \hat{f}_a &= \hat{U}_a \hat{f}(Y, \tilde{a}q) \hat{U}_a^+ \end{aligned}$$

или согласно (3.67)

$$\begin{aligned} \frac{\omega(Y, \tilde{a}q)}{\det a} &= \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f}_a \ln \hat{f}_a + \frac{Y_0}{\det a} \mathcal{E} (\hat{U}_a^+ \hat{f}_a \hat{U}_a) + \\ &+ Y_{1/2} \tilde{a}_{ik} \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f}_a \hat{\pi}_k(0) + Y_{4/2} \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f}_a \hat{\rho}(0). \quad (3.70) \end{aligned}$$

Правая сторона этого равенства зависит от a как явно, так и через посредство $\hat{f}_a$. Варьирование правой части (3.70) по $\hat{f}_a$ (с последующим переходом $a_{ik} \rightarrow \delta_{ik}$) согласно вариационному принципу (см. (2.3)) приводит к нулевому результату. Поэтому, полагая в (3.67) $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$ и раскладывая по ξ_{ik} , получаем

$$\omega \delta_{ik} - q_k \frac{\partial \omega}{\partial q_i} + Y_i \pi_k(\hat{f}) - Y_0 \delta_{ik} + \\ + Y_0 \cdot \frac{i}{2} \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0, \hat{f}), \hat{\Gamma}_{ik}] = 0.$$

Заметим, что согласно (2.46) для состояний $\hat{f}$, удовлетворяющих условию пространственной однородности, среднее значение тензора натяжений $t_{ik}(\hat{f})$ равно

$$t_{ik}(\hat{f}) = -\delta_{ik} + i \text{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0, \hat{f}), \hat{\Gamma}_{ik}] / 2.$$

Поэтому, учитывая (3.59), имеем

$$t_{ik}(\hat{f}) = \frac{q_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial Y_k} \frac{\omega Y_i}{Y_0}. \quad (3.71)$$

Для нахождения плотности потока энергии $\bar{W}_k$ заметим, что для пространственно однородных состояний (см. (2.33)) справедлива следующая лемма: если $[\hat{f}, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0$, то

$$\bar{W}_k \equiv \frac{i}{2} \int d^3 x x_k \text{Sp} \hat{f} [\hat{Q}(x), \hat{Q}(0)] = 0, \quad (3.72)$$

где

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}, \quad \hat{Q} = \int d^3 x \hat{Q}(x).$$

Для доказательства введем общие собственные функции коммутирующих операторов $\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3$ и $\hat{f}$:

$$(\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3) \chi_{p'} = p'_i \chi_{p'}, \quad \hat{f} \chi_{p'} = f_p \chi_{p'}.$$

Шпур, входящий в формулу (3.72), выпишем в системе собственных функций $\chi_{p'}$:

$$\text{Sp} \hat{f} [\hat{Q}(x), \hat{Q}(0)] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \text{Sp}' f_{p_2} \times \\ \times (\hat{Q}_{p_1 p_2}(x) \hat{Q}_{p_2 p_1}(0) - \hat{Q}_{p_1 p_2}(0) \hat{Q}_{p_2 p_1}(x)), \\ \hat{Q}_{p_1 p_2}(x) = e^{-i(p_1 - p_2)x} \hat{Q}_{p_1 p_2}(0);$$

здесь $\hat{Q}_{p_1 p_2}(x) = \langle \dots p_1 | \hat{Q}(x) | p_2 \dots \rangle$ — оператор в спиновом пространстве и в пространстве, в котором действует матрица $\hat{\tau}_3$ (в этом пространстве и берется шпур Sp). Поэтому

$$\bar{W}_k \equiv \frac{i}{2} \frac{V^2}{(2\pi)^3} \int d^3 p d^3 p_1 \text{Sp}' \hat{f}_p \hat{Q}_{pp_1}(0) \hat{Q}_{p_1 p}(0) \times \\ \times \left(i \frac{\partial}{\partial p_k} \delta(p - p_1) - i \frac{\partial}{\partial p_{1k}} \delta(p - p_1) \right) = \\ = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p \text{Sp}' \hat{f}_p \left(\frac{\partial \hat{Q}_{pp_1}(0)}{\partial p_k} \Big|_{p_1=p} \hat{Q}_p + \right. \\ \left. + \hat{Q}_p \frac{\partial \hat{Q}_{p_1 p}}{\partial p_k} \Big|_{p_1=p} \right),$$

где $\hat{Q}_p = V \hat{Q}_{pp}(0)$. Легко видеть, что

$$\int d^3 x \hat{Q}_{pp}(x) = \delta_{pp} \hat{Q}_p,$$

и, следовательно, $\hat{f}_p = (e^{\hat{Q}_p} + 1)^{-1}$ (ср. с формулой (2.15)). Тогда, учитывая, что $[\hat{f}_p, \hat{Q}_p] = 0$, имеем

$$\bar{W}_k = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p \text{Sp}' \hat{f}_p \hat{Q}_p \left(\frac{\partial \hat{Q}_{pp_1}(0)}{\partial p_k} \Big|_{p_1=p} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{Q}_{p_1 p}(0)}{\partial p_k} \Big|_{p_1=p} \right) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \text{Sp}' \hat{f}_p \frac{\partial}{\partial p_k} \hat{Q}_p^2 = \\ = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\partial}{\partial p_k} \int_{-\infty}^{\infty} dz (e^{\sqrt{z}} + 1)^{-1},$$

или

$$-(2\pi)^3 \bar{W}_k = \int ds_k \text{Sp}' \int_{-\infty}^{\infty} dz (e^{\sqrt{z}} + 1)^{-1} \Big|_{p \rightarrow \infty} = 0$$

(ds_k — элемент поверхности интегрирования). Таким образом, $\bar{W}_k = 0$, что и требовалось доказать.

Используя определения операторов $\hat{\pi}_i(x)$, $\hat{\rho}(x)$, легко получить следующие соотношения коммутаций:

$$[\hat{\rho}(x), \hat{\rho}(x')] = 0, \\ [\hat{\pi}_i(x), \hat{\rho}(x')] = -i \hat{\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x - x'), \\ [\hat{\pi}_i(x), \hat{\pi}_k(x')] = -i \hat{\pi}_k(x) \frac{\partial \delta(x - x')}{\partial x_i} - \\ - i \hat{\pi}_i(x') \frac{\partial \delta(x - x')}{\partial x_k}. \quad (3.73)$$

Применим теперь лемму (3.72) для состояния статистического равновесия, когда

$$\hat{Q}(x) = Y_0 \hat{\varepsilon}(x; \hat{f}) + Y_i \hat{\pi}_i(x) + Y_4 \hat{\rho}(x).$$

Используя выражения (2.42), (2.46), (2.48) для операторов $\hat{f}_i$, t_{ik} , $\bar{W}_k$ и учитывая формулы (3.73), находим

$$W_k(\hat{f}) = -\frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0}. \quad (3.74)$$

Если обозначить через $\xi_{\alpha k}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$) средние значения операторов плотностей потоков ($\xi_{0k} = W_k(\hat{f})$, $\xi_{ik} = t_{ik}(\hat{f})$, $\xi_{4k} = j_k(\hat{f})$), формулы (3.63), (3.71), (3.74) можно записать в компактной форме (ср. с [31]):

$$\xi_{\alpha k} = \frac{\partial \omega}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Y_k} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} - \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Из принципа локальности состояния статистического равновесия следуют уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей ферми-жидкости

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \xi_{\alpha k}}{\partial x_k}, \quad (3.75)$$

где $\xi_\alpha = \partial \omega / \partial Y_\alpha$ (см. (3.59)), $\xi_0 = \delta(\hat{f})$, $\xi_k = \pi_k(\hat{f})$, $\xi_4 = \rho(\hat{f})$. В этих уравнениях ξ_α , $\xi_{\alpha k}$ зависят от x , t через посредничество медленно меняющихся в пространстве и во времени функций $Y_\alpha = Y_\alpha(x, t)$, $q_i = q_i(x, t)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений гидродинамики, необходимо еще найти уравнение для сверхтекучего импульса

$q_i(x, t)$. Для нахождения этого уравнения заметим, что равновесная функция распределения не коммутирует с гамильтонианом квазичастиц $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$. Действительно, согласно (2.33), (2.32) имеем

$$\begin{aligned} [\hat{\varepsilon}, \hat{f}] &= - \left[\frac{Y_i}{Y_0} \hat{p}_i + \frac{Y_4}{Y_0} \hat{\tau}_3, \hat{f} \right] = \\ &= - \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} [\hat{\tau}_3, \hat{f}]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Поэтому оператор $\hat{f}$, описывающий состояние статистического равновесия, должен зависеть от времени. Легко видеть, что эта зависимость должна сводиться к некоторому фазовому преобразованию

$$\hat{f}_t = e^{i\varphi(t)\hat{\tau}_3} \hat{f} e^{-i\varphi(t)\hat{\tau}_3}. \quad (3.77)$$

Действительно, используя формулу (3.76), видим, что оператор $\hat{f}_t$ удовлетворяет уравнению (2.34)

$$i \frac{\partial \hat{f}_t}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(\hat{f}_t), \hat{f}_t], \quad (3.78)$$

если фаза $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}. \quad (3.79)$$

Таким образом, общая структура равновесного статистического оператора определяется уравнениями (2.32), (3.77), (3.79).

Дадим теперь общее определение фазы, зависящей от x, t . Рассмотрим оператор g в x -представлении: $g(x, x')$. Тогда фазу $\varphi(x)$ в случае синглетного спаривания определим формулой

$$\text{tr}_{\sigma} \sigma_2 g(x, x) = g(x) e^{2i\varphi(x)},$$

где шпур берется в пространстве спинов ($g(x)$ — вещественная функция). Легко видеть, что это определение эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{Im} \ln \text{Sp} \hat{f} \hat{\psi}(x), \\ \hat{\psi}(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_2(x) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

С помощью формулы (3.79) легко показать, что для состояния статистического равновесия (3.77)

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &\equiv \frac{1}{2} \text{Im} \ln \text{Sp} \hat{f}_t \hat{\psi}(x) = \\ &= \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} t + q_i x_i + \varphi_0(0), \end{aligned} \quad (3.81)$$

откуда

$$\dot{\varphi}_i(x) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}, \quad \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_i} = q_i. \quad (3.82)$$

В пренебрежении градиентами параметров сокращенного описания Y_α, q_i , эти формулы справедливы и для слабонеоднородных состояний. Поэтому из (3.82) имеем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}.$$

Это уравнение совместно с уравнениями (3.75) и представляет собой замкнутую систему уравнений идеальной сверхтекучей ферми-жидкости (ср. с [31]).

Полученные формулы относятся к общему случаю, когда функционал энергии не обладает свойством галилеевой инвариантности и по этой причине нельзя ввести понятие массы частицы, а следовательно, и сверхтекучей скорости. Такая ситуация имеет место, например, для электронов в металле с произвольным законом дисперсии.

Представим теперь выражения для плотностей потоков в форме, соответствующей двухжидкостной гидродинамике. Термодинамический потенциал ω является функцией Y_0, Y^2, Y_4, q^2 и $Y_i q_i$. Введем величины σ_n, σ_s, m^* , являющиеся функциями этих термодинамических переменных:

$$\sigma_n \equiv -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y^2}, \quad \sigma_s \equiv \frac{2}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q^2} m^{*2}, \quad (3.83)$$

$$\frac{\sigma_n}{m^*} = \rho - \frac{\partial \omega}{\partial Y_i q_i}.$$

Тогда с учетом (3.83) потоки j_k, t_{ik}, W_k приобретают вид

$$\begin{aligned} j_k &= \frac{\sigma_n}{m^*} v_{nk} + \frac{\sigma_s}{m^{*2}} q_k, \\ t_{ik} &= -\frac{\omega}{Y_0} \delta_{ik} + \sigma_n v_{ni} v_{nk} + \sigma_s \frac{q_i q_k}{m^{*2}}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$W_k = v_{nk} \left[-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \left(\rho - \frac{\sigma_n}{m^*} \right) q_0 \right] - \frac{\sigma_s q_k}{m^{*2}} q_0,$$

где $q_0 = (Y_4 + Y_i q_i)/Y_0$. Отсюда видно, что σ_n имеет смысл плотности "массы" нормальной компоненты, σ_s — плотность "массы" сверхтекучей компоненты. Если величину m^* интерпретировать как эффективную "массу частицы", то q_i/m^* нужно интерпретировать как сверхтекучую скорость. Заметим, что полная плотность $\sigma = m^* \rho = m^* \partial \omega / \partial Y_4$, вообще говоря, не совпадает с суммой нормальной σ_n и сверхтекучей σ_s плотностей: $\sigma \neq \sigma_n + \sigma_s$.

Пусть функционал энергии инвариантен относительно преобразований Галилея. Тогда согласно (2.31)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x; e^{-imv\hat{x}_i} \hat{f} e^{imv\hat{x}_i}) &= \\ &= \mathcal{G}(x; \hat{f}) - v_i \pi_i(x; \hat{f}) + \frac{mv^2}{2} \rho(x; \hat{f}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

и, следовательно, используя определение $\varepsilon(\hat{f})$ (2.24) имеем

$$e^{imv\hat{x}_i} \hat{\varepsilon}(\hat{f}) e^{-imv\hat{x}_i} = \hat{\varepsilon}(e^{imv\hat{x}_i} \hat{f} e^{-imv\hat{x}_i}) -$$

$$-v_i \hat{p}_i + (1/2)mv^2 \hat{\tau}_3.$$

Если заметить, что

$$\begin{aligned} e^{imv \hat{x}_i} \hat{\tau}_3 e^{-imv \hat{x}_i} &= \hat{\tau}_3, \\ e^{imv \hat{x}_i} \hat{p}_j e^{-imv \hat{x}_i} &= \hat{p}_j - mv \hat{\tau}_3, \end{aligned} \quad (3.86)$$

уравнение самосогласования (2.32) и условие пространственной однородности (2.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} e^{imv \hat{x}_i} \hat{f} e^{-imv \hat{x}_i} &= \left[\exp \left\{ Y_0 \left[\hat{e}^{imv \hat{x}_i} \hat{f} e^{-imv \hat{x}_i} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -v_i \hat{p}_i + \hat{\tau}_3 \cdot \frac{mv^2}{2} \right] + Y_i (\hat{p}_i - mv \hat{\tau}_3) + Y_4 \hat{\tau}_3 \right\} + 1 \right]^{-1}, \\ [e^{imv \hat{x}_i} \hat{f} e^{-imv \hat{x}_i}, \hat{p}_i - mv \hat{\tau}_3 - q_i \hat{\tau}_3] &= 0. \end{aligned}$$

При сравнении этих формул с (2.32), (2.33) получим

$$\begin{aligned} e^{imv \hat{x}_i} \hat{f}(Y_0, Y_i, Y_4, q_i) e^{-imv \hat{x}_i} &= \\ &= \hat{f}(Y_0, Y_i - Y_0 v_i, Y_4 - mv_i Y_i + \frac{mv^2}{2} Y_0, q_i + mv_i), \end{aligned}$$

где $\hat{f}(Y_0, Y_i, Y_4, q_i)$ — равновесный статистический оператор, определяемый термодинамическими параметрами Y, q . Используя эту формулу, а также формулы (3.85), (3.86) и определение термодинамического потенциала $\omega(Y, q)$ (3.58) легко видеть, что в случае галилеево инвариантной ферми-жидкости имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \omega(Y_0, Y_i, Y_4, q_i) &= \omega(Y_0, Y_i + Y_0 \frac{q_i}{m}, Y_4 + \\ &+ Y_i q_i + \frac{q^2}{2m} Y_0, 0), \end{aligned}$$

откуда

$$\omega(Y, q) = \omega(Y', 0) \equiv \omega(Y'), \quad (3.87)$$

где

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0 v_{sk}, \quad (3.88)$$

$$Y'_4 = Y_4 + Y_k mv_{sk} + Y_0 \frac{mv_s^2}{2}$$

и параметр $v_{si} = q_i/m$ имеет смысл сверхтекучей скорости. Таким образом, с учетом вращательной инвариантности термодинамический потенциал ω галилеево-инвариантных систем является функцией трех независимых переменных Y'_0, Y'^2 и Y'_4 . Формула (3.87) показывает, что для галилеево-инвариантных систем, согласно (3.83) имеют место соотношения

$$m^* = m, \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_n, \quad m j_k = \pi_k, \quad (3.89)$$

а формулы (3.84) приобретают вид

$$\begin{aligned} j_k &= \frac{\sigma_n}{m} v_{nk} + \frac{\sigma_s}{m} v_{sk}, \\ t_{ik} &= -\frac{\omega}{Y_0} \delta_{ik} + \sigma_s v_{si} v_{sk} + \sigma_n v_{ni} v_{nk}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$W_k = v_{nk} \left(-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \frac{\sigma_s}{m} \frac{Y_4 + Y_i v_{si} m}{Y_0} \right) -$$

$$-v_{sk} \frac{\sigma_s}{m} \frac{Y_4 + Y_i mv_{si}}{Y_0}.$$

Используя формулы (3.75), (3.86), (3.90), легко убедиться, что полученные нами уравнения идеальной гидродинамики с s-спариванием в случае галилеево-инвариантных систем переходят в уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау [32].

4. Взаимодействие заряженной ферми-жидкости с электромагнитным полем.

4.1. Уравнения самосогласования и кинетические уравнения при наличии электромагнитного поля. Досихпормыне учитывали электромагнитного взаимодействия, связанного с возможным существованием у квазичастицы электрического заряда. Если квазичастицы обладают электрическим зарядом, то возникает дополнительное электромагнитное взаимодействие между квазичастицами, а также взаимодействие между квазичастицами и внешним электромагнитным полем. Эффекты, связанные с взаимодействием электронной сверхтекучей ферми-жидкости с электромагнитным полем играют важную роль при изучении явления сверхпроводимости.

Хорошо известно, что если задан гамильтониан частиц в отсутствие электромагнитного поля, то включение электромагнитного взаимодействия происходит универсальным образом, а именно, импульс частицы p_i заменяется на $p_i + (e/c)A_i(\mathbf{x})$ ($A_i(\mathbf{x})$ — векторный потенциал электромагнитного поля) и обычным образом учитывается взаимодействие со скалярным потенциалом $\varphi(\mathbf{x}) \equiv A_0(\mathbf{x})$, то есть к гамильтониану добавляется слагаемое $e \int d^3x A_0(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x})$ ($\rho(\mathbf{x})$ — плотность числа частиц).

В теории ферми-жидкости ситуация осложняется, так как в функционале энергии $E(\hat{f})$ в общем виде нельзя выделить слагаемых, соответствующих кинетической энергии частиц.

Мы будем считать, что при наличии электромагнитного поля плотность энергии ферми-жидкости $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f})$ должна быть заменена на $\mathcal{E}(\mathbf{x}; A; \hat{f})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}; A; \hat{f}) &= \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{U}^+(\mathbf{x}, A) \hat{f} \hat{U}(\mathbf{x}, A)) + \\ &+ e A_0(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f} \hat{\rho}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\hat{U}(\mathbf{x}; A) = \exp \left(i \frac{e}{c} \int d^3x' \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\rho}(\mathbf{x}') \right), \quad (4.2)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{x}} dy_k A_k(\mathbf{y}, t)$$

и интегрирование в $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ производится по произвольному контуру C , соединяющему точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$.

Если в качестве контура C выбрать отрезок, соединяющий точки x и x' , то

$$\Phi(x, x') = (x' - x)_k \int_0^1 d\xi A_k(x + \xi(x' - x), t). \quad (4.3)$$

Это определение функционала $\mathcal{E}(x; A; \hat{f})$ связано с тем, что при калибровочных преобразованиях электромагнитного поля и статистического оператора $\hat{f}$

$$\begin{aligned} A \rightarrow A_\chi &\equiv A + \partial\chi = \left(A_k + \frac{\partial\chi}{\partial x_k}, A_0 + \frac{\partial\chi}{c\partial t} \right), \\ \hat{f} \rightarrow \hat{f}_\chi &= \hat{U}_\chi \hat{f} \hat{U}_\chi^\dagger, \\ \hat{U}_\chi &= \exp\left(i \frac{e}{c} \int d^3x \chi(x, t) \hat{\rho}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\chi(x, t)$ — произвольная функция x и t) плотность энергии (4.1) преобразуется согласно стандартной формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x; A_\chi; \hat{f}_\chi) &= \mathcal{E}(x; A; \hat{f}) + \\ &+ e \frac{\partial\chi(x, t)}{c\partial t} \cdot \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{f} \hat{\rho}(x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Эта формула непосредственно следует из формулы (4.1), если заметить, что

$$\hat{U}(x; A_\chi) = \hat{U}(x; A) \hat{U}_\chi \exp\left(-\frac{ie}{c} \chi(x, t) \hat{\tau}_3\right).$$

Заметим, для плотности импульса $\hat{\pi}_i(x) = \{\hat{p}_i, \hat{\tau}_3 \hat{\rho}(x)\}/2$ (см. (2.18')) справедлива формула

$$\begin{aligned} \hat{U}(x; A) \hat{\pi}_i(x) \hat{U}^\dagger(x; A) &= \frac{1}{2} \{\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i(x) \hat{\tau}_3, \hat{\tau}_3 \hat{\rho}(x)\} = \\ &= \hat{\pi}_i(x) - \frac{e}{c} A_i(x) \hat{\rho}(x). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, если плотность кинетической энергии определяется формулой

$$\mathcal{E}(x; \hat{f}) = \text{Sp} \hat{f} \hat{p}_i \hat{\rho}(x) \hat{p}_i / 4m,$$

то

$$\begin{aligned} \hat{U}(x; A) \hat{p}_i \hat{\rho}(x) \hat{p}_i \hat{U}^\dagger(x; A) &= \\ &= (\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(x) \hat{\tau}_3) \hat{\rho}(x) (\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(x)), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x; A; \hat{f}) &= \frac{1}{4m} \text{Sp} \hat{f} (\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(x) \hat{\tau}_3) \times \\ &\times \hat{\rho}(x) (\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(x) \hat{\tau}_3). \end{aligned}$$

Так как вариацию функционала $\mathcal{E}(x; \hat{f})$ по статистическому оператору $\hat{f}$ можно записать в виде (см. (2.23))

$$\delta_f \mathcal{E}(x; \hat{f}) = \text{Sp} \delta \hat{f} \hat{\varepsilon}(x; \hat{f}) / 2,$$

где $\hat{\varepsilon}(x; \hat{f})$ — плотность энергии квазичастицы, то легко видеть, что выполняется следующее соотношение

$$\delta_f \mathcal{E}(x; \hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) = \text{Sp} \hat{U} \hat{\varepsilon}(x; \hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) \hat{U}^\dagger \delta \hat{f} / 2.$$

Поэтому, варьируя функционал плотности энергии (4.1) по статистическому оператору $\hat{f}$, мы приходим к следующему выражению для плотности энергии

квазичастицы при наличии электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(x; A; \hat{f}) &= \hat{U}(x; A) \hat{\varepsilon}(x; \hat{U}^\dagger(x, A) \hat{f} \hat{U}(x, A)) \times \\ &\times \hat{U}^\dagger(x, A) + e A_0(x, t) \hat{\rho}(x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Соответственно оператор энергии квазичастицы равен

$$\hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) = \int d^3x \hat{\varepsilon}(x; A; \hat{f}).$$

Тогда из этой формулы и (4.5) получаем закон калибровочного преобразования плотности энергии квазичастицы

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(A_\chi, \hat{f}_\chi) &= \hat{U}_\chi \hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) \hat{U}_\chi^\dagger + \\ &+ e \int d^3x (\partial\chi(x, t) / c\partial t) \hat{\rho}(x), \end{aligned} \quad (4.7)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(x; A_\chi; \hat{f}_\chi) &= \hat{U}_\chi \hat{\varepsilon}(x; A; \hat{f}) \hat{U}_\chi^\dagger + \\ &+ e (\partial\chi(x, t) / c\partial t) \hat{\rho}(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Кинетическое уравнение (2.34) для статистического оператора $\hat{f}$ при наличии электромагнитного поля имеет вид

$$i \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(A, \hat{f}), \hat{f}]. \quad (4.9)$$

Оно обладает свойством калибровочной инвариантности. Действительно, оператор $\hat{f}_\chi \equiv \hat{U}_\chi \hat{f} \hat{U}_\chi^\dagger$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \hat{f}_\chi}{\partial t} &= [\hat{U}_\chi \hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) \hat{U}_\chi^\dagger + i \frac{\partial \hat{U}_\chi}{\partial t} \hat{U}_\chi^\dagger, \hat{f}_\chi] = \\ &= [\hat{U}_\chi \hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) \hat{U}_\chi^\dagger + e \int d^3x \frac{\partial\chi(x, t)}{c\partial t} \hat{\rho}(x), \hat{f}_\chi]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (4.7) имеем

$$i \frac{\partial \hat{f}_\chi}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(A_\chi, \hat{f}_\chi), \hat{f}_\chi],$$

что и доказывает калибровочную инвариантность уравнения (4.9).

Найдем вариацию полной энергии ферми-жидкости

$$E(A, \hat{f}) = \int d^3x \mathcal{E}(x; A, \hat{f})$$

по векторному потенциалу A . Согласно (2.23) имеем

$$\begin{aligned} \delta_A \mathcal{E}(x; \hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) &= \text{Sp} \hat{\varepsilon}(x; \hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) \delta_A (\hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) / 2, \\ \hat{U} &\equiv \hat{U}(x, A). \end{aligned}$$

Замечая, что $\delta_A (\hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U}) = \hat{U}^\dagger [\hat{f}, \delta \hat{U} \cdot \hat{U}^\dagger] \hat{U}$ и используя выражение (4.6) для $\hat{\varepsilon}(x; A, \hat{f})$, получим

$$\begin{aligned} \delta_A E(A, \hat{f}) &= \int d^3x \text{Sp} \hat{f} \delta_A \hat{U}(x, A) \times \\ &\times \hat{U}^\dagger(x, A), \hat{\varepsilon}(x; A, \hat{f}) / 2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выбирая в преобразовании $\hat{U}(x, A)$ (см. (4.2)) контур интегрирования C в виде отрезка прямой (см. (4.3)), найдем

$$\delta_A E(A, \hat{f}) = -(e/c) \int d^3x \delta A_k(x, t) j_k(x, t), \quad (4.11)$$

где

$$j_k(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon} \times (\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; A, \hat{f}), \hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')] \quad (4.12)$$

(ср. с определением плотности потока числа частиц (2.44)). Вариация энергии по скалярному потенциалу A_0 находится непосредственно из выражения (4.1)

$$\delta_{A_0} E(A, \hat{f}) = e \int d^3x \delta A_0(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f} \hat{\rho}(\mathbf{x}). \quad (4.13)$$

Для того чтобы получить полный функционал энергии при наличии магнитного поля ($A_0 = 0$) необходимо к функционалу (4.1) прибавить энергию самосогласованного магнитного поля $b_i(\mathbf{x})$. Таким образом, полный функционал энергии будет иметь вид

$$E_i(\hat{f}, A) = E(\hat{f}, A) + \int d^3x \frac{b(\mathbf{x})^2}{8\pi}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Так же как и в разделе 3, уравнения самосогласования для f и A получаются в результате отыскания экстремума (минимума) функционала

$$\Omega(\hat{f}, A) = -S(\hat{f}) + Y_0 E_i(A, \hat{f}) + Y_4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f} \hat{\tau}_3.$$

Варьирование по A приводит к уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

где j_i определяется формулой (4.12). Мы при этом учли, что

$$\delta \int d^3x \frac{b^2}{8\pi} = \int d^3x \delta \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} / 4\pi.$$

Варьирование по $\hat{f}$ приводит к уравнению самосогласования для нормальной и аномальной функций распределения, в котором, однако, в отличие от уравнения (2.32) оператор энергии квазичастицы $\hat{\varepsilon}$ определяется полным функционалом (4.14). Таким образом, полная система уравнений самосогласования для $\hat{f}$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\hat{f} = [\exp(Y_0 \hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) + Y_4 \hat{\tau}_3) + 1]^{-1},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4.15)$$

$$\hat{\varepsilon}(A, \hat{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(A, \hat{f}) & \Delta(A, \hat{f}) \\ \Delta^+(A, \hat{f}) & -\bar{\varepsilon}(A, \hat{f}) \end{pmatrix},$$

$$j_k(\mathbf{x}) = \frac{ie}{c} \int d^3x' x'_k \times \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; A, \hat{f}), \hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')],$$

$$\varepsilon_{12}(A, \hat{f}) = \frac{\partial E(A, \hat{f})}{\partial f_{21}}, \quad (4.16)$$

$$\Delta_{12}(A, \hat{f}) = 2 \frac{\partial E(A, \hat{f})}{\partial g_{21}^+}.$$

Эти уравнения и описывают явления сверхпроводимости (сверхтекучести) при наличии магнитного поля.

Из этих уравнений (см. также (4.4)) следует свойство калибровочной инвариантности статистического оператора $\hat{f} \equiv \hat{f}(A)$ и тока $j_i \equiv j_i(A, \hat{f})$

$$U_{\mathbf{x}} \hat{f}(A) U_{\mathbf{x}}^+ = f(A_{\mathbf{x}}), \quad j_i(A, f) = j_i(A_{\mathbf{x}}, f_{\mathbf{x}}).$$

Первая из этих формул приводит к соотношению

$$\frac{ie}{c} [\hat{f}(A), \hat{\rho}(\mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta \hat{f}(A)}{\delta A_k(\mathbf{x})}.$$

4.2. Уравнение Лондонов. В этом разделе мы упростим уравнения самосогласования (4.15) и покажем, что в том случае, когда магнитное поле является медленно меняющейся функцией координат, выражение для тока определяется формулой

$$j_i(\mathbf{x}) = -\frac{e^2}{m^* c} \rho_s A_i(\mathbf{x}), \quad (4.17)$$

где ρ_s и m^* определяются формулами (3.83). С этой целью заметим, что в пренебрежении градиентами векторного потенциала $A_i(\mathbf{x})$, при вычислении тока $j_i(\mathbf{x})$ (см. (4.16)) мы можем, согласно (4.2), унитарное преобразование $U(\mathbf{x}; A)$ представить в виде

$$U(\mathbf{x}; A) = U_0(\mathbf{x}; A) + \dots, \quad (4.18)$$

$$U_0(\mathbf{x}; A) = \exp\left(\frac{ie}{c} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}\right) \exp\left(-\frac{ie}{c} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \hat{\tau}_3\right)$$

(векторный потенциал $A_i(\mathbf{x})$ относится к той же пространственной точке, что и ток $j_i(\mathbf{x})$). Мы будем считать при решении уравнения самосогласования (4.15), что причиной неоднородности статистического оператора $\hat{f}(A)$ является неоднородность векторного потенциала $A_i(\mathbf{x})$. Поэтому снова имея в виду, что плотность тока $j_i(\mathbf{x})$ вычисляется в точке $\mathbf{x}$ мы могли бы в силу принципа локальности написать разложение

$$\hat{f}(A) \equiv \hat{f}(A) = \hat{f}_0(A(\mathbf{x})) + \hat{f}_1\left(A(\mathbf{x}), \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right) + \dots, \quad (4.19)$$

где

$$\hat{f}_0(A(\mathbf{x})) \equiv \hat{f}(A) \Big|_{A=A(\mathbf{x})},$$

причем (см. [6])

$$[\hat{p}_i, \hat{f}_0] = 0, \quad [\hat{p}_i, [\hat{p}_i, \hat{f}_1]] = 0. \quad (4.20)$$

Однако учитывая возможность выполнения калибровочных преобразований

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \chi}{\partial x_i},$$

мы видим согласно (4.4), что фаза статистического оператора $\hat{f}$ не является определенной. Поэтому решение уравнения (4.15) мы будем представлять в виде

$$\hat{f}(A) = e^{i\varphi} \hat{f}(A) e^{-i\varphi},$$

где разложение $\hat{f}(A)$ определяется формулой (4.19) и

$$\hat{\varphi} = \int d^3x \varphi(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

Разложение фазы $\hat{\varphi}$, аналогичное разложению (4.19)

имеет вид

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 + \hat{\varphi}_1 + \dots,$$

где

$$\hat{\varphi}_0 = \left(\varphi(\mathbf{x}) - x_k \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) \hat{\tau}_3 + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \hat{x}_k, \quad (4.21)$$

$\hat{\varphi}_1 \sim \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_k}$. Это разложение индуцирует разложение

$$\hat{f}(\mathbf{A}) = \hat{f}_0(\mathbf{A}) + \hat{f}_1(\mathbf{A}) + \dots,$$

где

$$\hat{f}_0(\mathbf{A}) = e^{i\hat{\varphi}_0(\mathbf{x})} \hat{f}_0(\mathbf{A}) e^{-i\hat{\varphi}_0(\mathbf{x})}.$$

Из этой формулы и формул (4.20), (4.21) следует, что

$$[\hat{p}_i - \hat{\tau}_3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \hat{f}_0(\mathbf{A})] = 0.$$

Вводя статистический оператор

$$\hat{f}_0 = \exp\left(-\frac{ie}{c} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}\right) \hat{f}_0 \exp\left(\frac{ie}{c} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}\right) \quad (4.22)$$

и замечая, что согласно (4.6), (4.18)

$$\varepsilon(\mathbf{A}; \hat{f}) \approx e^{ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c} \varepsilon(e^{-ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c} \hat{f}_0 e^{ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c}) e^{-ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c} \quad (4.23)$$

(мы учли свойство фазовой инвариантности $\varepsilon(\hat{f})$; см. (2.28)), найдем уравнение самосогласования для $\hat{f}_0$:

$$\hat{f}_0 = [\exp(Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}_0) + Y_4 \hat{\tau}_3) + 1]^{-1}, \quad (4.24)$$

а также дополнительное условие, выражающее "пространственную однородность" главного приближения $\hat{f}_0$:

$$[\hat{p}_i - \hat{\tau}_3 \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}) \right), \hat{f}_0] = 0. \quad (4.25)$$

Сравнивая уравнения (4.24), (4.25) с уравнениями (2.32), (2.33), видим, что статистический оператор $\hat{f}_0$ можно выразить через равновесный статистический оператор $\hat{f}(\mathbf{q}, Y)$ (в отсутствие магнитного поля) при наличии сверхтекучего импульса q_i :

$$\hat{f}_0 = \hat{f}(\mathbf{q}, Y), \quad Y_i = 0, \quad q_i = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}),$$

или, используя формулу (4.22),

$$\hat{f}_0(\mathbf{A}) = e^{ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c} \hat{f}(\mathbf{q}, Y) e^{-ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c}, \quad (4.26)$$

$$Y_i = 0, \quad q_i = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}).$$

Электрический ток в главном приближении (в пренебрежении градиентами $A_i(\mathbf{x})$) согласно (4.16), (4.23) определяется формулой

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{ie}{2} \int d^3 x' x'_i \int_0^1 d\xi \text{Sp} \hat{f}_0 [e^{ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c} \times \\ \times \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; \hat{f}_0) e^{-ie\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}/c}, \hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')],$$

или, используя формулу (4.25),

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{ie}{2} \int d^3 x' x'_i \int_0^1 d\xi \text{Sp} f(\mathbf{q}, Y) \times \\ \times [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'; f(\mathbf{q}, Y)), \hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \\ Y_i = 0, \quad q_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i.$$

Согласно (2.42) эту формулу можно переписать в виде

$$J_i(\mathbf{x}) = e j_i(\mathbf{q}, Y), \quad Y_i = 0, \quad q_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}), \quad (4.27)$$

где $j_i(\mathbf{q}, Y)$ — плотность тока частиц в состоянии статистического равновесия в отсутствие магнитного поля (см. формулу (3.63)). В разделе 3 мы видели, что плотность тока $j_i(\mathbf{q}, Y)$ в отсутствие электромагнитного поля в приближении малой сверхтекучей скорости q_i имеет вид

$$j_i(\mathbf{q}, Y) = \beta_{ik} q_k, \quad (4.28)$$

где

$$\beta_{ik} = \frac{\partial^2 \omega'}{\partial q_i \partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=0, Y=0}, \quad \omega' = \frac{\omega}{Y_0}.$$

Поэтому электрический ток в отсутствие векторного потенциала определяется формулой

$$J_i(\mathbf{x}) = e \beta_{ik} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k(\mathbf{x}) \right). \quad (4.29)$$

Так как при калибровочных преобразованиях фаза $\varphi(\mathbf{x})$ и вектор-потенциал $A_i(\mathbf{x})$ преобразуется согласно формулам

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \frac{e}{c} \chi(\mathbf{x}), \quad A_i(\mathbf{x}) \rightarrow A_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial \chi(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

ток (4.19) является калибровочно инвариантным. Замечая, что согласно формулам (3.83)

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial q_i \partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=0, Y=0} = \delta_{ik} \frac{\rho_s}{m^*},$$

мы и приходим к формуле (4.17) в калибровке $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

Подчеркнем, что m^* является термодинамической величиной, зависящей от температуры и химического потенциала и только при наличии галилеевой инвариантности m^* переходит в обычную массу электрона m , $m^* = m$.

Уравнение магнитостатики (4.16) вместе с определением тока (4.17) может быть записано в виде

$$\mathbf{b} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{b} = 0, \quad (4.30)$$

где

$$\lambda_L^2 = m^* c^2 / 4\pi \rho_s e^2.$$

Это уравнение называется уравнением Лондонов [33]. Оно обычно используется при определении распределения магнитного поля в сверхпроводнике.

Рассмотрим простейший случай, когда сверхпроводник заполняет полупространство $z > 0$ и магнит-

ное поле вне сверхпроводника постоянно и направлено параллельно оси Oz . Тогда поле $\mathbf{b}_i$ внутри сверхпроводника также параллельно оси Oz и в силу условия $\text{div } \mathbf{b} = 0$ не зависит от z ; поэтому из уравнения (4.30) следует, что внутрисверхпроводника $\mathbf{b}_i = 0$ и $j_i = 0$. Пусть теперь внешнее поле $\mathbf{b}_i$ направлено вдоль оси Ox . Тогда и внутри сверхпроводника поле направлено также вдоль оси Ox и зависит только от координаты z . Из уравнения (4.30) следует, что

$$d^2 \mathbf{b} / dz^2 = \lambda_L^2 \mathbf{b},$$

и, следовательно,

$$b_x(z) = b_x(0)e^{-z/\lambda_L}.$$

Плотность тока в этом случае направлена вдоль оси Oy и согласно (4.17) определяется формулой

$$j_y(z) = -(4\pi/c)\lambda_L e^{-z/\lambda_L}.$$

Таким образом, величина λ_L в уравнении (4.30) может быть интерпретирована как глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Величина λ_L мала (обычно она по порядку величины равна 10^{-6} см при $T = 0$ К), и поэтому магнитное поле не проникает внутрь массивного сверхпроводника (эффект Мейсснера—Шубникова [34, 35]).

Уравнения Лондонов справедливы в том случае, когда величина λ_L велика по сравнению со всеми другими микроскопическими параметрами размерности длины. В теории БКШ таким параметром является размер куперовской пары ξ_0 : $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta(0)$. Сверхпроводники, для которых выполняется соотношение $\lambda_L \gg \xi_0$, называются лондоновскими сверхпроводниками или сверхпроводниками второго рода.

В обратном предельном случае, когда $\lambda_L \ll \xi_0$, уравнения Лондонов несправедливы и должны быть модифицированы. Действительно, в теории Лондонов связь между током и потенциалом $\mathbf{A}$ является локальной и линейной. В случае $\lambda_L < \xi_0$ поле меняется существенно на расстояниях масштаба ξ_0 , в силу чего связь между током и потенциалом должна быть нелокальной. Феноменологическая связь между током и потенциалом, предложенная Пиппардом, в калибровке Лондона $\text{div } \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}_n|_s = 0$ имеет вид

$$j_i(\mathbf{x}) = C \int \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}') \mathbf{R}}{R^4} R_i e^{-R/\xi_0} d^3 \mathbf{x}', \quad (4.31)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ и коэффициент C находится из соответствия формулы (4.31) с формулой (4.17) в случае медленно меняющегося поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$:

$$C = -\frac{3\rho_s e^2}{4\pi m^* c^2 \xi_0^{-1}}.$$

Сверхпроводники, для которых $\lambda_L \ll \xi_0$, называются сверхпроводниками первого рода или пиппардовскими. Решение задачи о глубине проникновения магнитного поля внутрь сверхпроводников первого рода

приводит к следующему выражению для глубины проникновения λ :

$$\lambda^3 = 0,62 \lambda_L^2 \xi_0.$$

4.3. Уравнение Гинзбурга—Ландау. В этом разделе мы изучим решение уравнений самосогласования (2.32) при наличии пространственно неоднородного постоянного во времени магнитного поля. При этом будем предполагать, что температура ферми-жидкости близка к критической, и, следовательно, аномальная функция распределения g является малой.

В области малых g функционал плотности энергии можно представить в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{x}; f) + \mathcal{E}_1(\mathbf{x}; f) + \mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g),$$

где $\mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g) \sim g^+ g$ (см. (3.20)), $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}; f)$ — функционал плотности энергии взаимодействия ферми-жидкости в нормальном состоянии и

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{x}; f) = \int d^3 x_1 d^3 x_2 f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1),$$

$$f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Sp}_\sigma f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

(мы пользуемся координатным представлением), Величина $\varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \equiv \delta \mathcal{E}_0(\mathbf{x}; f) / \delta f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, очевидно, представляет собой матричный элемент оператора плотности энергии свободной квазичастицы $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ в координатном представлении

$$\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_1 | \varepsilon_0(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_2 \rangle.$$

Мы предположим, что функционал плотности энергии взаимодействия $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{x}; \hat{f}) \equiv \mathcal{E}_1(\mathbf{x}; f) + \mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g)$ инвариантен по отношению к общим фазовым преобразованиям

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{x}; e^{i\hat{\varphi}} \hat{f} e^{-i\hat{\varphi}}) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{x}; \hat{f}), \quad \hat{\varphi} = \int d^3 x \varphi(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

В этом случае плотность энергии ферми-жидкости при наличии магнитного поля определяется формулой (см. (4.1))

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \mathbf{A}, \hat{f}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}, f) + \mathcal{E}_1(\mathbf{x}; f) + \mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g),$$

где

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}, f) = \mathcal{E}_0(\mathbf{x}; u^+(\mathbf{x}; \mathbf{A}) f u(\mathbf{x}; \mathbf{A})),$$

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{A}) = \exp\left(\frac{ie}{c} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)$$

($\mathbf{x}$ — оператор координаты).

Так как при фазовых преобразованиях аномальные функции распределения преобразуются согласно формуле

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rightarrow g'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{i(\varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2))},$$

квадратичный по $g(\sim gg^+)$ фазово-инвариантный функционал $\mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g)$ может быть представлен в виде (ср. с (3.20))

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{x}; g) = \int d^3 x_1 d^3 x_2 L_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) \times$$

$$\times g_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)g_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^* + \int d^3x_1 d^3x_2 L_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^*, \quad (4.32)$$

где

$$g_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Sp}_\sigma \sigma_2 g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Sp}_\sigma \sigma_2 g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Функционал $\mathcal{E}_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}, f)$, очевидно, можно представить в виде

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}, f) = \int d^3x_1 d^3x_2 f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \langle \mathbf{x}_2 | u(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \times \\ \times \varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \underline{\mathbf{x}}) u^+(\mathbf{x}, \mathbf{A}) | \mathbf{x}_1 \rangle.$$

Таким образом, оператор плотности энергии свободной квазичастицы при наличии магнитного поля определяется формулой

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}) = u(\mathbf{x}; \mathbf{A}) \varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \underline{\mathbf{x}}) u^+(\mathbf{x}; \mathbf{A})$$

(ср. с (4.6)), а оператор энергии квазичастицы в магнитном поле — формулой

$$\varepsilon_0(\mathbf{A}) = \int d^3x u(\mathbf{x}; \mathbf{A}) \varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \underline{\mathbf{x}}) u^+(\mathbf{x}; \mathbf{A}). \quad (4.33)$$

(Мы пишем $\varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \underline{\mathbf{x}})$ вместо $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ для того, чтобы подчеркнуть, что оператор $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ строится из операторов $\mathbf{p}, \underline{\mathbf{x}}$.) Заметим, что

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{A}) \underline{\mathbf{x}} u^+(\mathbf{x}; \mathbf{A}) = \underline{\mathbf{x}}, \\ u(\mathbf{x}; \mathbf{A}) \mathbf{p} u^+(\mathbf{x}; \mathbf{A}) = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) - e \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}),$$

где

$$Z_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_0^1 d\lambda \frac{\partial y_k(\lambda; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \lambda} \times \\ \times \frac{\partial y_s(\lambda; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial x_{2k}} \varepsilon_{slp} H_p(y) \quad (4.34)$$

и $y = y(\lambda; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ — параметрическое уравнение контура интегрирования C , соединяющего точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ ($y(0; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1$, $y(1; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2$); $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ — вектор напряженности магнитного поля.

Если в качестве оператора плотности энергии квазичастицы взять оператор

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}) = p_i \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}) p_i / 2m, \quad (4.35)$$

то, замечая, что $\mathbf{Z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 0$, найдем

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i(\underline{\mathbf{x}}) \right) \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}) \left(p_i - \frac{e}{c} A_i(\underline{\mathbf{x}}) \right),$$

$$\varepsilon_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i(\underline{\mathbf{x}}) \right) \left(p_i - \frac{e}{c} A_i(\underline{\mathbf{x}}) \right),$$

и, следовательно, операторы $\varepsilon_0(\mathbf{x}, \mathbf{A})$, $\varepsilon_0(\mathbf{A})$ не зависят от выбора контура интегрирования C в формуле (4.35). Отметим, однако, что если бы в качестве оператора плотности энергии $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ мы взяли бы не выражение (4.35), а, например, выражение

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{2m}, \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}) \right],$$

то зависимость от контура C в $\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{A})$ и в $\varepsilon(\mathbf{A})$ осталась бы.

Найдем приближенное выражение для энергии $E_0(\mathbf{A}, f)$ системы свободных квазичастиц при наличии магнитного поля:

$$E_0(\mathbf{A}, f) = \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \langle \mathbf{x}_2 | \varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{A}) | \mathbf{x}_1 \rangle.$$

В этом выражении функция распределения электронов $f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ существенно отлична от нуля для $\mathbf{x}_1$ близких к $\mathbf{x}_2$ ($|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \lesssim a$, a — постоянная решетки), так как электроны ферми-жидкости находятся вблизи поверхности ферми ($a \sim p_F^{-1}$, p_F — импульс Ферми). Поэтому в матричном элементе

$$\langle \mathbf{x}_2 | \varepsilon_0(\mathbf{x}; \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}) - \frac{e}{c} \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}), \underline{\mathbf{x}}) | \mathbf{x}_1 \rangle$$

величиной $\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}})$, пропорциональной градиентам векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (см. (4.16)), можно пренебречь, и, следовательно, функционал энергии $E_0(\mathbf{A}, f)$ можно представить в виде

$$E_0(\mathbf{A}, f) \approx \text{Sp } f \varepsilon_0(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}})), \quad (4.36)$$

в котором в энергии квазичастицы импульс $\mathbf{p}$ заменяется на $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Рассмотрим решения уравнения самосогласования (2.32) в пространственно неоднородном случае для температур T , близких к критической T_c . Для нахождения величин f и g из уравнения (2.32) воспользуемся общими формулами (3.15). При этом величину $\underline{\xi} = \Delta$ в уравнении для X (см. (3.12)) можно считать малой. Развивая теорию возмущения по малому параметру Δ , найдем следующее разложение для оператора X в импульсном представлении:

$$X_{pp'} = X_{pp'}^1 + X_{pp'}^3 + \dots,$$

где

$$X_{pp'}^1 = -\frac{\Delta_{pp'}}{\xi + \xi'}, \quad (4.37)$$

$$X_{pp'} = \frac{1}{\xi + \xi'} \sum_{p'', p'''} \frac{\Delta_{pp''} \Delta_{p''p'''}^* \Delta_{p''p'''}^*}{(\xi + \xi'')(\xi''' + \xi')},$$

здесь введены обозначения $\xi = \xi_p$, $\xi' = \xi_{p'}$, $\xi'' = \xi_{p''}$, $\xi''' = \xi_{p'''}$. Разложение оператора n , входящего в формулы (3.14) в ряд по степеням Δ , имеет вид

$$n_{pp'} = n_{pp'}^0 + n_{pp'}^2 + \dots,$$

где

$$n_{pp'}^0 = n_p \delta_{pp'}, \quad n_p = (e^{Y_0 \xi} + 1)^{-1},$$

$$n_{pp'}^2 = \frac{n - n'}{\xi - \xi'} \sum_{p''} \frac{\Delta_{pp''} \Delta_{p''p'}^*}{\xi + \xi''},$$

$$n_p \equiv n, \quad n_{p'} \equiv n'. \quad (4.38)$$

Из этих формул и формул (3.15) вытекает разложение в ряд по степеням Δ нормальной функции распределения

$$f_{pp'} = f_{pp'}^0 + f_{pp'}^2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} f_{pp'}^0 &= n\delta_{pp'}, \\ f_{pp'}^2 &= \sum_{p''} \left[\frac{1 - n''}{(\xi + \xi'')(\xi' + \xi'')} - \frac{n}{(\xi' - \xi)(\xi + \xi'')} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n'}{(\xi - \xi')(\xi' + \xi'')} \right] \Delta_{pp''} \Delta_{p'p''}^*, \end{aligned} \quad (4.39)$$

а разложение в ряд по степеням Δ аномальной функции распределения g

$$\begin{aligned} g_{pp'} &= g_{pp'}^1 + g_{pp'}^3 + \dots, \\ g_{pp'}^1 &= -\frac{1 - n - n'}{\xi + \xi'} \Delta_{pp'}, \\ g_{pp'}^3 &= \frac{1}{4\xi^2} \left[\frac{1 - 2n}{\xi} - Y_0 2n(1 - n) \right] (\Delta \Delta^+ \Delta)_{pp'}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Величины $f_{pp'}$, $g_{pp'}$ в вигнеровском представлении определяются формулами

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \vec{\mathcal{P}}) &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f_{pp'}, \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{k}) &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathcal{P} e^{i\vec{\mathcal{P}}\mathbf{x}} g_{pp'}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{k}}{2} + \vec{\mathcal{P}}, \quad \mathbf{p}' = \vec{\mathcal{P}} - \frac{\mathbf{k}}{2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Согласно (4.19), в этом представлении мы можем пользоваться формулами (4.39), (4.40), считая в последних, что величина ξ зависит от $\mathbf{x}$ через посредство векторного потенциала магнитного поля (при этом мы пренебрегли изменением $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ на расстояниях масштаба p_F^{-1}):

$$\xi_p = \varepsilon_0(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x})) + Y_0 Y_4^{-1} + \varepsilon_1(\mathbf{p}),$$

где $\varepsilon_1(\mathbf{p}) = \partial E_1(f)/\partial f_p$. В случае синглетного спаривания $g_i = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\partial E}{\partial g_0^*(\mathbf{x}', \mathbf{x})} = 2L_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}')g(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \\ \Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\partial E}{\partial g_i^*(\mathbf{x}', \mathbf{x})} = 0. \end{aligned}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что $L_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = L_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\Delta(\mathbf{x}), \\ \Delta(\mathbf{x}) &= 2L_1g(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$g(\mathbf{x}) \equiv g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\mathcal{P}}} g(\mathbf{x}, \vec{\mathcal{P}}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} g_{pp'} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}.$$

Подставляя в (4.42) выражение (4.40) для $g_{pp'}^1$ и замечая, что

$$\Delta_{pp'} = \frac{1}{V} \int d^3x \Delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}, \quad (4.43)$$

получим линейризованное уравнение самосогласования при наличии магнитного поля

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}) &= -\frac{4L_1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \int d^3x' \Delta(\mathbf{x}') \times \\ &\quad \times e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\mathbf{p} + \mathbf{p}')} \frac{1 - n - n'}{\xi + \xi'}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Отсюда, проводя разложение по малым градиентам параметра порядка $\Delta(\mathbf{x})$ и векторному потенциалу $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, найдем

$$\begin{aligned} (G - 1)\Delta(\mathbf{x}) + G_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{2e}{c}A_i(\mathbf{x}) \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} - i\frac{2e}{c}A_j(\mathbf{x}) \right) \Delta(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где

$$\begin{aligned} G &= -\frac{2L_1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1 - 2n(\varepsilon)}{\varepsilon - \mu}, \quad \mu = -Y_4 Y_0^{-1}, \\ G_{ij} &= \frac{2L_1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{P}_i \partial \mathcal{P}_j} \frac{1 - n(\varepsilon) - n(\varepsilon')}{\varepsilon + \varepsilon' - 2\mu} \Big|_{\mathcal{P}=0}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \varepsilon_1(\mathbf{p}), \quad \varepsilon' = \varepsilon_0(\mathbf{p}') + \varepsilon_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{P}} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}' = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{P}} - \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (4.42) кроме $g_{pp'}^1$, также еще выражение (4.40) для $g_{pp'}^3$, и используя формулу (4.45), учтем в уравнении самосогласования нелинейный по Δ член. Таким образом, мы получим нелинейное уравнение самосогласования для щели $\Delta(\mathbf{x})$ в присутствии магнитного поля (мы пренебрегли влиянием электрического поля на нелинейное слагаемое):

$$\begin{aligned} (G - 1)\Delta(\mathbf{x}) + G_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{2e}{c}A_i(\mathbf{x}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{2e}{c}A_j(\mathbf{x}) \right) \times \\ \times \Delta(\mathbf{x}) + B|\Delta(\mathbf{x})|^2\Delta(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} B &= \frac{L_1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{(\varepsilon - \mu)^2} \left[\frac{1 - 2n(\varepsilon)}{\varepsilon - \mu} - \right. \\ &\quad \left. - Y_0 2n(\varepsilon)(1 - n(\varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Так как химический потенциал $\mu = -Y_4 Y_0^{-1}$ значительно больше T_c , коэффициенты G , G_{ij} , B при температурах T , близких к критической, определяются формулами

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2L_1\nu(\varepsilon_F) \frac{T_c - T}{T_c}, \\ G_{ij} &= -\delta_{ij} \frac{7\zeta(3)}{24\pi^2} \frac{L_1\nu_F^2\nu(\varepsilon_F)}{T_c^2}, \\ B &= \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{L_1\nu(\varepsilon_F)}{T_c^2}, \end{aligned}$$

где ϵ_F , v_F — фермиевская энергия и скорость квази-частицы, $\nu(\epsilon_F)$ — плотность состояний на поверхности Ферми, $\xi(x)$ — дзета-функция Римана. При этом уравнение (4.38) принимает хорошо известный вид (см. [36])

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{2e}{c} A_i(x) \right)^2 + \frac{2\pi^2 T_c}{7\zeta(3) v_F^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{T_c - T}{T} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} |\Delta(x)|^2 \right) \right] \Delta(x) = 0. \quad (4.47)$$

Вычислим теперь плотность тока j при наличии магнитного поля. Определим плотность тока $j(x)$ формулой

$$j_i(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} f(x, \vec{p}) \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} = \\ = \frac{2V}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{p} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} \int d^3 k e^{i k x} f_{pp'}, \quad (4.48) \\ p = \frac{\vec{p}}{2} + k, \quad p' = \frac{\vec{p}}{2} - k.$$

Используя выражение (4.30) для матричного элемента $f_{pp'}$ при $A(x) = 0$, получим разложение вигнеровской функции распределения $f(x, \vec{p})$ по градиентам параметра порядка:

$$f(x, \vec{p}) = f^{(0)}(x, \vec{p}) + f^{(2)}(x, \vec{p}) + \dots, \\ f^{(0)}(x, \vec{p}) = -Y_0^2 |\Delta(x)|^2 Q(\vec{p}, \vec{p}; -\vec{p}), \\ f^{(2)}(x, \vec{p}) = \frac{i}{2} Y_0^2 \left(\Delta^*(x) \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_i} - \Delta(x) \frac{\partial \Delta^*(x)}{\partial x_i} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p_i} Q(\vec{p}, \vec{p}; p) \Big|_{p=-\vec{p}},$$

где

$$Q(p, p', p'') = -\frac{1 - n''}{(\xi' + \xi'')(\xi + \xi'')} + \\ + \frac{1}{\xi - \xi'} \left(\frac{n'}{\xi' + \xi''} - \frac{n}{\xi + \xi''} \right).$$

Плотность тока в отсутствие векторного потенциала $A(x)$ будет иметь вид

$$j_i(x) = D_{ik} \left(\Delta^*(x) \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_k} - \Delta(x) \frac{\partial \Delta^*(x)}{\partial x_k} \right),$$

где

$$D_{ik} = Y_0^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_k} \frac{Q(\xi, \xi; \xi)}{\xi}. \quad (4.49)$$

Учтем теперь влияние векторного потенциала $A(x)$ в первом порядке теории возмущений. Так как

$$\frac{\partial \epsilon(p - \frac{e}{c} A(x))}{\partial p_i} = \\ = \frac{\partial \epsilon(p)}{\partial p_i} - (e/c) A_k(x) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_k \partial p_i},$$

поправку к плотности тока $j^A(x)$ за счет потенциала A запишем следующим образом:

$$j_i^A(x) = -2e A_k \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_k \partial p_i} f_A^{(0)}(p, x) \Big|_{A=0} +$$

$$+ 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} (f_A^{(0)}(p, x) - f_A^{(0)}(p, x) \Big|_{A=0}),$$

где

$$f_A^{(0)}(p, x) = -Y_0^2 |\Delta(x)|^2 \times \\ \times Q\left(p - \frac{e}{c} A(x), p - \frac{e}{c} A(x); -p - \frac{e}{c} A(x)\right).$$

Раскладывая величину Q в ряд по степеням $A(x)$, получим

$$f_i^A(x) = 2 |\Delta(x)|^2 \cdot 2e D_{ik} A_k(x),$$

где D_{ik} определяется формулой (4.41). Поэтому плотность тока $j(x) = j^{(0)}(x) + j^A(x)$ при наличии магнитного поля равна

$$j_i(x) = D_{ik} \left[\Delta^*(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{2e}{c} A_k(x) \right) \Delta(x) - \right. \\ \left. - \Delta(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{2e}{c} A_k(x) \right) \Delta^*(x) \right]. \quad (4.50)$$

Коэффициент D_{ik} при $\mu \gg T_c$, $T \approx T_c$ определяется формулой

$$D_{ik} = -\delta_{ik} \frac{7\zeta(3)}{24\pi^2} \frac{\nu(\epsilon_F) v_F^2}{T_c^2}.$$

Имея выражение для тока (4.50), можно написать уравнение для определения магнитного поля

$$\text{rot } b = \frac{4\pi}{c} j, \quad b = \text{rot } A. \quad (4.51)$$

Выражение для тока (4.50) содержит неизвестную функцию $\Delta(x)$, которая определяется уравнением (4.46). Уравнения магнитостатики (4.51) вместе с уравнением (4.46) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения $\Delta(x)$ и $A(x)$ (или $b(x)$). Эти уравнения называются уравнениями Гинзбурга—Ландау [37]. В частности, они могут служить для решения задачи о проникновении постоянного магнитного поля в сверхпроводники. В микроскопическом подходе на основе метода температурных функций Грина эти уравнения были получены Горьковым [36].

В случае слабых полей в главном приближении по полю параметр порядка Δ можно считать независимым от координат. В этом случае ток, определяемый формулой (4.50), имеет вид

$$j_i = -\frac{4e^2}{mc} |\Delta|^2 A_i,$$

и поэтому уравнения для определения магнитного поля совпадают с уравнениями Лондонов (4.30)

$$b + \lambda^2(T) \text{rot rot } b = 0,$$

где

$$\lambda^{-2}(T) = \frac{16\pi e^2}{mc^2} \Delta. \quad (4.52)$$

Замечая, что $\Delta(T) \sim (T_c - T)^{1/2}$, для глубины проникновения, имеем

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \lambda_L(0), \quad (4.53)$$

где $\lambda_L^{-2}(0) = 4\pi n e^2 / m c^2$. Отметим, что формулы (4.52), (4.53) соответствуют формуле (4.30), если в последних положить $m^* = m$ и вычислить ρ_s исходя из уравнений (3.83) при T близких к T_c .

Таким образом, уравнение Гинзбурга—Ландау приводит к локальной связи между током и вектор-потенциалом. Однако это уравнение может служить для описания как сверхпроводников первого, так и второго рода. Это связано с тем, что оно содержит два параметра размерности длины — размер куперовской пары $\xi(T)$, который содержится в слагаемых, не связанных с векторным потенциалом магнитного поля, и лондоновскую глубину проникновения $\lambda(T)$, которая содержится в слагаемых, связанных с вектор-потенциалом.

Нелокальная связь между током и потенциалом $A(\mathbf{x})$ может возникнуть при уточнении приближений, приводящих к уравнению Гинзбурга—Ландау, а именно, при учете следующих членов разложения по параметру порядка и по градиентам параметра порядка $\Delta(\mathbf{x})$.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о структуре уравнения Гинзбурга — Ландау для нейтральных частиц (типа атомов ^3He) в случае триплетного спаривания [42, 43]. Как можно показать, температура перехода T_c в случае триплетного спаривания определяется из уравнения

$$\Delta_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q L_2(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|) \Delta_j(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \frac{1 - 2n_q}{2\xi_q}.$$

Параметр порядка Δ_j представляет собой вектор в спиновом пространстве. Вблизи температуры перехода этот параметр порядка является малым. Произведем в уравнении самосогласования (2.32) разложение по величине этого параметра до Δ^3 , а также по градиентам этого параметра. Предположим далее, что амплитуда $L_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ имеет резкий максимум при $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Тогда фурье-компоненту этой амплитуды $L_2(\mathbf{k})$ можно разложить по степеням $\mathbf{k}$:

$$L_2(\mathbf{k}) = L_2(0) + k^2 L + \dots \quad (4.54)$$

Используя это предположение, решение уравнения самосогласования можно искать в виде

$$\Delta_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = p_F^{-1} p_i A_{ji}(\mathbf{r}), \quad (4.55)$$

где величины $A_{ji}(\mathbf{r})$, определяющие неоднородный параметр порядка $\Delta_j(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{T_c - T}{T_c} A_{ji} + \frac{7\xi(3)v_F^2}{80\pi^2 T_c^2} \left(\frac{\partial^2 A_{ji}}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial^2 A_{jl}}{\partial x_i \partial x_l} \right) + \frac{7\xi(3)}{40\pi^2 T_c^2} \times \\ & \times [A_{ji}^* \text{Sp}(A\tilde{A}) - 2A_{ji} \text{Sp}(AA^+) - 2A_{js} \tilde{A}_{sr} A_{ri}^* - \\ & - 2A_{js} A_{sr}^+ A_{ri} + 2A_{js}^* \tilde{A}_{sr} A_{ri}] = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Это уравнение представляет собой обобщение уравнения Гинзбурга—Ландау на случай триплетного спаривания, причем в силу рассмотренного приближения (4.54) спаривание происходит в состоянии с орбитальным моментом $l = 1$. Мы не выписываем здесь выражение для плотности тока, считая, что система представляет собой нейтральную ферми-жидкость (^3He).

5. Заключение. В настоящем обзоре мы рассмотрели вопросы, связанные с полуфеноменологическим описанием сверхтекучей ферми-жидкости. В основе этого описания лежат идеи, выдвинутые Ландау при построении нормальной ферми-жидкости. В приближении слабого взаимодействия развитая нами теория переходит в теорию сверхпроводимости БКШ. В обзоре подробно рассмотрен вопрос о триплетном спаривании в сверхтекучих системах. В частности, выведены уравнения самосогласования для неунитарных фаз, а также рассмотрены свойства симметрии сверхтекучих А- и В-фаз ^3He . Изучены вопросы калибровочно инвариантного включения электромагнитного взаимодействия в теории сверхтекучих ферми-жидкостей.

Вне нашего обзора остались многие проблемы кинетики сверхтекучих жидкостей, в частности, проблема распространения высокочастотных колебаний, определение диссипативных кинетических коэффициентов, учет роли примесей. Отметим в этой связи, что вопросами построения гидродинамики сверхтекучих фаз ^3He , которых мы не касаемся здесь, посвящены обзоры [30, 38]; теория высокочастотных колебаний сверхтекучих фаз ^3He рассмотрена, например, в [39]. Мы не рассматривали влияния электрического поля на сверхпроводники. Эти вопросы освещены в [140]. Мы не касались также важнейших применений теории сверхтекучести в ядерной физике и астрофизике.

Подчеркнем, однако, что в обзоре развит математический аппарат, с помощью которого могут быть, в принципе, исследованы на основе полуфеноменологического подхода как проблемы, связанные со статическими свойствами сверхтекучих жидкостей, так и различные проблемы кинетики.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

S	—	полная энтропия ферми-жидкости.
s	—	плотность энтропии ферми-жидкости.
$\hat{f}$	—	статистический оператор квазичастицы.
f, g	—	нормальная и аномальная функции распределения соответственно.
f_{eq}	—	равновесный статистический оператор квазичастиц.
n	—	диагонализированная функция распределения квазичастиц.
$E(\hat{f})$	—	функционал полной энергии ферми-жидкости.
$\delta(x, \hat{f})$	—	функционал плотности полной энергии ферми-жидкости.
N	—	полное число частиц ферми-жидкости.
P_i	—	полный импульс ферми-жидкости.
$\hat{\varepsilon}$	—	оператор энергии квазичастицы,
ε	—	нормальная часть оператора энергии квазичастицы.
Δ	—	аномальная часть энергии квазичастицы (энергетическая щель).
$\hat{p}_i$	—	оператор импульса квазичастицы.
$\hat{s}_i$	—	оператор спина квазичастицы.
$\hat{\tau}_3$	—	оператор числа квазичастиц.
$\alpha(x, \hat{f})$	—	среднее значение плотности физической величины.
$\hat{s}(x)$	—	оператор плотности спина.
$\hat{\pi}_i$	—	оператор плотности импульса.
$\hat{\rho}(x)$	—	оператор плотности частиц.
Ω	—	полный термодинамический потенциал системы.
ω	—	плотность термодинамического потенциала.
x	—	пространственная координата.
t	—	временная координата.
V	—	объем системы.
F_i	—	нормальные ферми-жидкостные амплитуды.
L	—	аномальные ферми-жидкостные амплитуды.
a^+, a	—	операторы рождения и уничтожения квазичастиц.
σ_i	—	матрицы Паули.
$\hat{j}_A(x)$	—	оператор плотности потока частиц.
$\hat{j}_k(x)$	—	оператор плотности потока спина.
$\hat{W}_A(x)$	—	оператор плотности потока энергии.
$t_{ik}(x; \hat{f})$	—	среднее значение тензора натяжений.
$\underline{U}$	—	унитарное преобразование Боголюбова в "одночастичном" пространстве.
u, v	—	коэффициенты преобразования Боголюбова.
U_ϕ	—	фазовое унитарное преобразование.
U_ω	—	унитарное преобразование поворота в спинном пространстве.
U_y	—	унитарное преобразование пространственных трансляций.
Γ_k	—	генератор произвольных аффинных преобразований.
H	—	микроскопический гамильтониан.
$\Phi(1,2;3,4)$	—	микроскопическая амплитуда взаимодействия фермионов.
q_i	—	сверхтекучий импульс.
$\phi(x)$	—	фаза аномальной функции распределения.
$Y_0 = T^{-1}$	—	(T — абсолютная температура).
$Y_i = -Y_0 v_i$	—	(v_i — нормальная скорость).
$Y = -Y_0 \mu$	—	(μ — химический потенциал).
T_c	—	температура перехода.
p_F, ε_F	—	импульс и энергия Ферми соответственно.
v_F	—	фермиевская скорость.
v_F	—	плотность состояний на поверхности Ферми.
M_i	—	спонтанная намагниченность.
β	—	магнетон Бора.
l, m	—	квантовые числа орбитального момента.
σ_n, σ_s	—	плотности массы нормальной и сверхтекучей компонент.
m^*	—	эффективная масса квазичастиц сверхтекучей ферми-жидкости.
v_n, v_s	—	скорости нормальной и сверхтекучей компонент ферми-жидкости.
A_0	—	скалярный потенциал самосогласованного электромагнитного поля.
A_i	—	векторный потенциал самосогласованного электромагнитного поля.
χ	—	калибровочная функция.
$U(x, A)$	—	унитарный оператор, включающий электромагнитное взаимодействие.
b_i	—	самосогласованное магнитное поле.
λ_L	—	лондоновская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник.
ξ_0	—	длина когерентности (размер куперовской пары).
$\zeta(x)$	—	дзета-функция Римана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 1058.
- [2] Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1964.
- [4] Кондратьев А.С., Кучма А.Е. Электронная жидкость нормальных металлов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
- [5] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. М.: Наука, 1978. (Т. IX, ч. 2).
- [6] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
- [7] Власов А.А. // ЖЭТФ. 1939. Т. 8. С. 291.
- [8] Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 59.
- [9] Силин В.П. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 641.
- [10] Силин В.П. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 495.
- [11] Померанчук И.Я. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 524.
- [12] Stoner E.C. // Proc. Roy. Soc. London: A. 1938. V. 165, No. 992. P. 372.
- [13] Абрикосов А.А., Дзялошинский И.Е. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 771.
- [14] Ахиезер И.А., Сыщенко В.Г., Чудновский Е.М. // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20, N 11. С. 739.
- [15] Ахиезер И.А., Чудновский Е.М. // ФТТ. 1975. Т. 17. С. 1907.
- [16] Ахиезер И.А. // УФЖ. 1980. Т. 25. С. 177.
- [17] Кондратьев А.С., Уздин В.М. Электронная жидкость магнитоупорядоченных металлов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [18] Bednorz J.G., Muller K.A. // Zs. Phys. B. 1986. V. 64. P. 189 (англ.)
- [19] Горьков Л.П., Копнин Н.Б. // УФН. 1988. Т. 156. С. 117.
- [20] Боголюбов Н.Н. Лекції з квантової статистики. Київ: Радянська школа, 1949 (укр.); Избранные труды в трех томах. Киев: Наукова думка, 1970. Т. 2. С. 287.
- [21] Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 162; V. 108. P. 1175.

22. Боголюбов Н.Н. //ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58, 73.
23. Боголюбов Н.Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт R-1451. Дубна, ОИЯИ, 1963; Избранные труды в трех томах, Киев: Наукова думка, 1971, Т. 3. С. 174.
24. Горьков Л.П. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 735.
25. Элиашберг Г.М. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1437.
26. Nambu Y. // Phys. Rev. 1960. V. 117, P. 648.
27. Путаевский Л.Л. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1794.
28. Legget A.L. // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 331.
Balian R., Werthamer N.R. // Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 1553.
29. Osheroff D.D., Richardson R.C., Lee D.M. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 885.
30. Минеев В.М. // УФН. 1983. Т. 139, вып. 2. С. 303.
- [31] Боголюбов Н.Н. (мл.), Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Тарасов А.Н., Курбатов А.М. // Физ. ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 875.
32. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 592.
33. London H., London F. // Proc. Roy. Soc. A. 1935, V. 149. P. 71.
34. Meissner W., Ochsenfeld R. // Naturwissenschaften 1933. Jg. 33, H. 44. S. 787.
35. Рябинин Ю.Н., Шубников Л.В. // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. С. 140.
36. Горьков Л.П. // ЖЭТФ. 1959. Т. 39. С. 1918.
37. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.
38. Воловик Г.Е. // УФН. 1984. Т. 143. С. 73.
39. Брусов Л.Я., Попов В.Н. Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988.
40. Свидзинский А.В. Пространственно неоднородные задачи теории сверхпроводимости. М.: Наука, 1982.
- [41] Исаев А.А., Пелетминский С.В. // УФЖ. 1992. Т. 37, № 6. С. 952.
42. Ambegackar V., de Gennes P.G., Rather D. // Phys. Rev. A. 1974. V. 9, No. 6. P. 2676.
43. Тарасов А.Н. Препринт ХФТИ 92-29. — Харьков, 1992.
44. Красильников В.В., Пелетминский С.В., Яценко А.А., Рожнов А.А. // Физ. ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 1440.