Ноябрь 1993 г. Том 163, № 11

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ОБ УГЛОВОМ МОМЕНТЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А.Л. Барабанов

(Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва)

(*Статья поступила 11.06.93 г.*)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. В недавних публикациях [1, 2], посвященных угловому моменту классического электромагнитного поля, справедливо было отмечено, что в учебной литературе этому вопросу уделяется недостаточное внимание. В результате многие простые вещи либо вовсе не обсуждаются, либо в их изложении допускаются неточности. Частично эти неточности, как представляется, обусловлены нечетким пониманием природы парадоксов, связанных с известным определением углового момента поля в объеме V

$$\mathbf{M}_{\mathrm{f}} = \frac{1}{4\pi c}\int\limits_V \mathrm{d}^3 r[\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]]. \qquad (1.1)$$

Простейший из них формулируется так. Интеграл (1.1), как легко убедиться, для плоской кругополяризованной волны по сферическому объему V есть нуль (вектор $\mathbf{r}$ отсчитывается от центра сферы). В то же время очевидно, что первоначально покоившиеся в объеме заряженные частицы под действием кругополяризованной волны начнут вращаться, т.е. в объеме V произойдет передача углового момента поля частицам. Этот парадокс, правда, в несколько иной формулировке (поток углового момента плоской кругополяризованной волны вдоль вектора Пойнтинга равен нулю), детально разбирается в [2].

В этой заметке приведены некоторые любопытные, на взгляд автора, результаты, относящиеся к угловым моментам в классической электродинамике; часть из них можно рассматривать как дополнения к утверждениям, сделанным в [1,2].

2. Мультипольное разложение потока углового момента. Интенсивность электромагнитного излучения классического нерелятивистского источника может быть представлена в виде мультипольного разложения (в виде ряда по степеням параметра $v/c \ll 1$) [3]

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} + \ldots; \qquad (2.1)$$

здесь $\mathbf{d}$, $\mathbf{m}$ и Q_{ij} — обычным образом определенные дипольный, магнитно-дипольный и квадрупольный моменты излучающей системы. Аналогичное разложение существует для потока i-й компоненты излучаемого углового момента $F_i^{(M)}$ [4]; первый (дипольный) член разложения имеет вид [3, 5]

$$F_i^{(M)} = \frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}}]_i + \ldots \qquad (2.2)$$

Автор не нашел в литературе явных выражений для следующих членов этого ряда. В этом разделе получены такие выражения и показано, что представление $F_i^{(M)}$ в виде суммы вкладов отдельных мультиполей не вполне точно.

Закон сохранения углового момента в классической электродинамике можно получить тождественными преобразованиями уравнений Максвелла и уравнений движения N заряженных частиц в объеме V (см., например, [6]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{\mathrm{p}i} + M_{\mathrm{f}i}) = -F_i^{(M)}, \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{M}_{\mathrm{p}}$ — механический угловой момент N частиц

$$\mathbf{M}_p = \sum_{a=1}^{N} [\mathbf{r}_a(t) \times \mathbf{p}_a(t)], \tag{2.4}$$

$\mathbf{M}_f$ — угловой момент поля в объеме $V(1.1)$, а $F_i^{(M)}$ — i-я составляющая вектора потока углового момента сквозь поверхность, ограничивающую объем V,

$$F_i^{(M)} = e_{ijk} \oint \mathrm{d}S_l r_j \sigma_{kl}, \tag{2.5}$$

выраженная через максвелловский тензор натяжений σ_{kl} [3]. Пусть V — сферический объем радиуса $r \gg \lambda$ (λ — характерная длина волны испускаемого излучения), тогда (см. приложение)

$$F_i^{(M)} = \frac{1}{4\pi} \oint r^2 \mathrm{d}\Omega [\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]]_i. \tag{2.6}$$

Переход к мультипольъному разложению потока $F_i^{(M)}$ предполагает подстановку в (2.6) разложений $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ по мультипольным потенциалам $\mathbf{B}_{LM}(\mathbf{r}, \alpha)$ электрического ($\alpha = e$) и магнитного ($\alpha = m$) типов, отвечающих расходящимся волнам [6]. Это разложение, однако, оказывается составленным не только из вкладов отдельных мультиполей $F_i^{(\alpha L)}$, но и из слагаемых, обусловленных интерференцией (eL)- и ($mL \pm 1$)-источников. В частности, полное выражение для потока углового момента $F_i^{(M)}$, излучаемого нерелятивистским источником, с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ имеет вид

$$F_i^{(M)} = \frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}}]_i + \frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{m}} \times \ddot{\mathbf{m}}]_i + \\ + \frac{1}{90c^5} e_{ijk} \ddot{Q}_{jl} \dddot{Q}_{kl} - \frac{1}{15c^4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\ddot{Q}_{ij} \dot{m}_j) + \ldots \tag{2.7}$$

Интерференционные слагаемые возникают по следующей причине. Закон сохранения (2.3) для "обычных" угловых моментов частиц $\mathbf{M}_p$ и поля $\mathbf{M}_f$ тождественно преобразуется (без использования каких бы то ни было калибровочных условий) в закон сохранения канонических угловых моментов частиц $\mathbf{J}_p$ и поля $\mathbf{J}_f$ (см. [2], а также ниже раздел 4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_{pi} + J_{fi}) = -F_i^{(J)}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{J}_p = \sum_{a=1}^{N} [\mathbf{r}_a(t) \times \mathbf{P}_a(t)], \\ \mathbf{P}_a(t) = \mathbf{p}_a(t) + \frac{e_a}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_a(t), t), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{J}_f = \frac{1}{4\pi c} \int_V \mathrm{d}^3 r (iE_j(\mathbf{r}, t)(\hat{\mathbf{J}})_{jk} A_k(\mathbf{r}, t)), \tag{2.10}$$

где $\hat{\mathbf{J}}$ — оператор полного углового момента частицы со спином 1

$$(\hat{J}_i)_{jk} = \hat{L}_i \delta_{jk} - ie_{ijk}, \ \hat{\mathbf{L}} = -i\left[\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right]. \tag{2.11}$$

В общем случае i-я составляющая потока канонического углового момента $F_i^{(J)}$ связана с $F_i^{(M)}$ равенством

$$F_i^{(M)} = F_i^{(J)} + \\ + \frac{1}{4\pi c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \mathrm{d}S_l E_l(\mathbf{r}, t)[\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]_i. \tag{2.12}$$

Поток $F_i^{(J)}$ сквозь сферическую поверхность радиуса $r \gg \lambda$ определяется формулой (см. приложение)

$$F_i^{(J)} = \frac{1}{4\pi} \oint r^2 \mathrm{d}\Omega (iE_j(\mathbf{r}, t)(\hat{J}_i)_{jk} A_k(\mathbf{r}, t)). \tag{2.13}$$

Мультипольные потенциалы $\mathbf{B}_{LM}(\mathbf{r}, \alpha)$ являются собственными функциями оператора $\hat{J}_z$ или $\hat{J}_0$, если перейти к сферической системе координат. Это обстоятельство следует учесть при подстановке в (2.13) разложений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{A}$ по $\mathbf{B}_{LM}(\mathbf{r}, \alpha)$ (в этой задаче считалось, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$, описывающие излучение, удовлетворяют стандартному калибровочному условию Лоренца). Пользуясь теоремой Вигнера—Эккарта и ортогональностью мультипольных потенциалов на сфере, поток $F_i^{(J)}$ легко представить в виде суммы вкладов независимых мультиполей $F_i^{(\alpha L)}$ ($\alpha = e, m$; $L \geq 1$). Что же касается поверхностного интеграла в правой части (2.12), то он отличен от нуля за счет продольных составляющих $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, падающих как $\sim 1/r^2$ (радиус r сферической поверхности, сквозь которую рассчитываются потоки, сколь угодно велик, но конечен), и дает как раз упомянутые выше интерференционные слагаемые.

Эти слагаемые являются полными производными по времени и обращаются в нуль при усреднении. По этой причине, очевидно, они не были замечены в [4], где уже исходное выражение для потока углового момента $F_i^{(M)}$ было усреднено по времени. В [7—9] получены выражения для потока углового момента $\mathbf{M}_f$ (1.1), излучаемого источником фиксированной мультипольности α, L, M (в таких расчетах интерференционные слагаемые, конечно, не могли появиться).

3. Перенос углового момента плоской кругополяризованной волной и излучение дипольного ротатора. Парадокс, связанный с переносом углового момента плоской кругополяризованной волной, уже был сформулирован во Введении. В [2] показано в довольно общей форме, что равенство нулю для плоской волны потока углового момента сквозь плоскость, перпендикулярную направлению распространения, нисколько не противоречит возможности передачи этой волной углового момента взаимодействующим с ней заряженным частицам. В самом деле, в соответствии с законом сохранения (2.3), изменение углового момента частиц M_p прямо никак не связано ни с абсолютной величиной углового момента поля $\mathbf{M}_f$ в объеме V, ни с потоком углового момента одной только плоской волны сквозь поверхность, ограничивающую объем V. Заряженные частицы, взаимодействующие с плоской волной, излучают, так что на границах объема V полное поле является суперпозицией этих излученных полей и падающей плоской волны. В [2] показано, что изменение M_{pi} точно компенсируется слагаемыми в потоке $F_i^{(M)}$, обусловленными интерференцией излученных и падающего полей. Хорошо известно, что аналогичным образом обеспечивается сохранение энергии во взаимодействии электромагнитной волны с зарядами. Тот же механизм интерференции падающей и рассеянной волн возникает в квантовой теории, где прослеживается закон сохранения вероятности (см., например, вывод оптической теоремы в [10]).

Простая задача, иллюстрирующая эти соображения, была рассмотрена автором в [11]. Пусть под действием напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0(t)$ плоской кругополяризованной волны, распространяющейся вдоль оси z, движется по окружности радиуса r_0 свободная нерелятивистская частица с зарядом e. Излучаемые такой частицей в единицу времени энергия (интенсивность I) и z-компонента углового момента (поток $F_z^{(M)}$) описываются формулами (2.1) и (2.2) (ω_0 — частота вращения)

$$I = \frac{2e^2\omega_0^4 r_0^2}{3c^3}, \quad F_z^{(M)} = \frac{2e^2\omega_0^3 r_0^2}{3c^3}. \tag{3.1}$$

Эти потоки точно компенсируются слагаемыми, обусловленными интерференцией падающей плоской волны и полем, излучаемым частицей (в силу стационарности задачи энергия и угловой момент частицы и поля в рассматриваемом сферическом объеме V постоянны). Заметим, что с точки зрения принципа соответствия полученный результат естествен. В квантовой теории кругополяризованная волна представляется потоком фотонов, поляризованных вдоль или против импульса. Поглощение n фотонов общей энергии $n\hbar\omega_0 = 2e^2\omega_0^4 r_0^2/3c^3$ должно сопровождаться передачей рассеивателю углового момента $n\hbar = 2e^2\omega_0^3 r_0^2/3c^3$.

Таким образом, равенство нулю вектора $\mathbf{M}_f$ (1.1) в объеме V не противоречит способности плоской кругополяризованной волны к переносу углового момента и его передаче заряженным частицам в том же объеме V. При этом величины переданных в единицу времени энергии ΔE_f и проекции углового момента ΔM_{fz}, рассчитанных в рамках классической теории, находятся в соотношении

$$\Delta M_{fz} = \frac{\Delta E_f}{\omega_0}, \tag{3.2}$$

справедливом и в квантовой теории. Источником кажущихся парадоксов является неявная прямолинейная трактовка вектора $\mathbf{M}_f$ как углового момента, "содержащегося" в объеме V. Физический смысл, однако, в соответствии с (2.3) следует придавать лишь изменениям векторов $\mathbf{M}_f$ в объеме V (а не абсолютным значениям $\mathbf{M}_f$) и интегральным потокам углового момента через поверхности, ограничивающие объем V. Подобным же образом физическим смыслом обладает лишь интегральный поток вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность, но не вектор Пойнтинга сам по себе [12].

Покажем теперь, что кажущийся парадокс, подобный рассмотренному выше, возникает в задаче об излучении дипольного ротатора [1]. В соответствии с формулами (1.1) и (2.6) i-я компонента потока излучаемого углового момента $F_i^{(M)}$ равна i-й проекции углового момента $\mathrm{d}M_{fi}$ сферического слоя толщиной $\mathrm{d}r$, деленной на время $\mathrm{d}r/c$ прохождения волновым фронтом этого слоя

$$F_i^{(M)} = \oint \frac{\mathrm{d}M_{fi}}{\mathrm{d}r/c}. \tag{3.3}$$

В свою очередь угловой момент поля в объеме $V = r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega$ в дипольном приближении имеет вид

$$\mathrm{d}M_{fi} = (\mathrm{d}r/c)\mathrm{d}\Omega \frac{1}{2\pi c^3}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}})[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]_i. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и интегрируя по $\mathrm{d}\Omega$, получим формулу (2.2) для $F_i^{(M)}$. Формула (3.4) интересна тем, что она получается только при учете слагаемых в напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, падающих как $\sim 1/r^2$; именно это и является обычно предметом обсуждений [3, 5].

В [1] была замечена другая особенность формулы (3.4). Пусть излучателем является нерелятивистская заряженная частица, вращающаяся на пружине по окружности вокруг оси z. Поляризация излучения такой частицы меняется в зависимости от полярного угла ϑ между осью z и направлением $\mathbf{n}$ на ограниченный телесным углом $\mathrm{d}\Omega$ участок волнового фронта. В общем случае это эллиптическая поляризация, плавно переходящая при $\vartheta = \pi/2$ в линейную, а при $\vartheta = 0$ или π — в круговую. Из физических соображений ясно, что угловой момент уносится кругополяризованными волнами, распространяющимися вдоль оси z. Между тем, как было указано в [1], дифференциальный поток углового момента максимален при $\vartheta = \pi/2$ и обращается в нуль при $\vartheta = 0$ или π. В самом деле, в соответствии с (3.4) усредненный по времени угловой момент $\langle \mathrm{d}M_{\mathrm{f}z} \rangle$ (т.е. дифференциальный поток — см. (3.3)) пропорционален $\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$. Этого парадокса можно избежать, если, следуя сказанному выше, считать физически значимым только интегральный поток углового момента.

4. Канонические угловые моменты частиц и поля. В разделе 2 мы выполнили переход от закона сохранения (2.3) "обычных" угловых моментов $\mathbf{M}_{\mathrm{p}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ к закону сохранения (2.8) векторов $\mathbf{J}_{\mathrm{p}}$ и $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ формально. По существу же, этот переход связан с известной неоднозначностью (см., например, [13, 14]) тензора энергии-импульса и тензора (и, соответственно, вектора) углового момента поля в классической электродинамике. Из инвариантности лагранжиана L_{f} поля по отношению к 4-сдвигам и 4-поворотам по теореме Нетер следует

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T_{\mathrm{f}}^{\mu\nu} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} M_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma} = 0, \tag{4.1}$$

где $T_{\mathrm{f}}^{\mu\nu}$ — канонический тензор энергии-импульса, а $M_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma}$ — тензор углового момента ($\sigma_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma}$ — тензор спина)

$$M_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma} = T_{\mathrm{f}}^{\eta\rho} x^{\sigma} - T_{\mathrm{f}}^{\eta\sigma} x^{\rho} + \sigma_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma}. \tag{4.2}$$

В общем случае канонический тензор энергии-импульса $T_{\mathrm{f}}^{\mu\nu}$ несимметричен. Например, при обычном выборе лагранжиана свободного электромагнитного поля: $L_{\mathrm{f}} = -(1/16\pi c) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

В классической электродинамике обычно пользуются симметричным тензором энергии-импульса $T_{\mathrm{f(sym)}}^{\mu\nu}$ и тензором углового момента $M_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\rho\sigma}$, выражающимся через $T_{\mathrm{f(sym)}}^{\mu\nu}$ (см., например, [3])

$$M_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\rho\sigma} = T_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\rho} x^{\sigma} - T_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\sigma} x^{\rho}. \tag{4.3}$$

Тензоры $T_{\mathrm{f(sym)}}^{\mu\nu}$ и $M_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\rho\sigma}$ отличаются от $T_{\mathrm{f}}^{\mu\nu}$ и $M_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma}$ на полные 4-дивергенции такие, что (поле при этом считается свободным)

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T_{\mathrm{f(sym)}}^{\mu\nu} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} M_{\mathrm{f(sym)}}^{\eta\rho\sigma} = 0. \tag{4.4}$$

В соответствии с данной неоднозначностью можно двояким образом ввести вектор (точнее, псевдовектор) углового момента

$$J_{\mathrm{f}i} = -\frac{1}{2} e_{ijk} \int\limits_V \mathrm{d}^3 r M_{\mathrm{f}}^{0jk}, \qquad M_{\mathrm{f}i} = -\frac{1}{2} e_{ijk} \int\limits_V \mathrm{d}^3 r M_{\mathrm{f(sym)}}^{0jk}. \tag{4.5}$$

В "трехмерных" обозначениях вектор $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ имеет вид (2.10), а вектор $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ — (1.1). Поскольку второе слагаемое под знаком интеграла в (2.10) выражается через тензор спина $\sigma_{\mathrm{f}}^{\eta\rho\sigma}$, то вектор

$$\mathbf{S}_{\mathrm{f}} = (1/4\pi c) \int\limits_V \mathrm{d}^3 r [\mathbf{E} \times \mathbf{A}]$$

иногда называют спиновым угловым моментом поля [15,16].

В присутствии заряженных частиц, как мы видели в разделе 2, переход от "обычного" углового момента поля $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ к каноническому моменту $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ сопровождается переходом от "обычного" углового момента частиц $\mathbf{M}_{\mathrm{p}}$ к каноническому моменту $\mathbf{J}_{\mathrm{p}}$, выражающемуся через канонические импульсы частиц во внешнем поле $\mathbf{P}_a$. Хотя к закону сохранения (2.8) канонического углового момента применима вся та же аргументация, что и к закону сохранения (2.3), и, соответственно, физический смысл следует придавать лишь изменениям вектора $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ и интегральным потокам $F_{\vdots}^{(J)}$, невозможно пройти мимо следующего хорошо известного факта (см., например, [16]). Вычисляя канонический угловой момент плоской кругополяризованной волны, описываемой в кулоновской калибровке векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\, A_0 (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \exp[-i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)],$$

получим (V — сферический объем с центром в начале координат)

$$J_{\mathrm{f}z} = S_{\mathrm{f}z} = \pm \frac{1}{4\pi c} A_0^2 k V. \tag{4.6}$$

Поскольку энергия плоской волны в объеме V есть

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \mathrm{d}^3 r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{1}{4\pi} A_0^2 k^2 V, \tag{4.7}$$

то связь между $J_{\mathrm{f}z}$ и E_{f} такова:

$$J_{\mathrm{f}z} = \pm \frac{E_{\mathrm{f}}}{\omega}, \tag{4.8}$$

как будто J_{f} является классическим прообразом углового момента квантованного электромагнитного поля. Это утверждение, возможно, не лишено смысла по следующей причине. Классическим прообразом оператора орбитального углового момента частиц

$$\hat{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}} = -i\hbar \sum_a [\mathbf{r}_a \times \partial/\partial \mathbf{r}_a]$$

является канонический угловой момент $\mathbf{J}_{\mathrm{p}}$, так как именно канонические импульсы $\mathbf{P}_a$ заменяются операторами $-i\hbar(\partial/\partial\mathbf{r}_a)$ *(см.,* например, [17]). Вот почему момент $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$, сохраняющийся в паре с $\mathbf{J}_{\mathrm{p}}$, естественно сопоставить угловому моменту квантованного электромагнитного поля.

Заключая этот раздел, приведем формулу, связывающую векторы $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ и $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ углового момента свободного классического электромагнитного поля

$$\mathbf{M}_{\mathrm{f}} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} - \frac{1}{4\pi c}\oint \mathrm{d}S_l E_l(\mathbf{r}, t)[\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]. \qquad (4.9)$$

Эта связь впервые была получена в [18]. Там же эта формула была применена к анализу углового момента $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ локализованного в пространстве "пакета" кругополяризованного поля. Считая, что вследствие локализации поверхностный интеграл в (4.9) обращается в нуль, можно ожидать, что для "пакета", распространяющегося вдоль оси z, проекция углового момента $M_{\mathrm{f}z}$ и энергия E_{f} окажутся связанными соотношением типа (4.8). Подробнее эта идея развивается в [2].

5. Угловой момент заряженной частицы в магнитном поле. Различие между "обычными" и каноническими угловыми моментами частиц и полей становится явным в присутствии внешнего магнитного поля ($\mathbf{A} \neq 0$). Не случайно именно в магнитном поле легко наткнуться на парадоксы, связанные с угловыми моментами (разумеется, при недостаточно аккуратном обращении с формулами). Вот один из них (другие примеры см. в [19, 20]). Нерелятивистская частица с зарядом e, массой m движется по окружности радиуса r_0 с центром в начале координат в однородном магнитном поле H_0, направленном против оси z, так что угловой момент частицы ориентирован по оси z (частота вращения $\omega_0 = eH_0/mc$ не зависит от радиуса). В дипольном приближении для потерь частицей энергии (в магнитном поле — только кинетической) и z-проекции углового момента в соответствии с формулами (3.1) как будто бы имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\omega_0^2 r_0^2}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\frac{2e^2\omega_0^4 r_0^2}{3c^3}, \qquad (5.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\omega_0 r_0^2) \stackrel{?}{=} -\frac{2e^2\omega_0^3 r_0^2}{3c^3}. \qquad (5.2)$$

Видно, однако, что эти уравнения для $r_0(t)$ несовместны. Подобные сложности не возникают для частицы, вращающейся, к примеру, на пружине без магнитного поля: ее полная энергия вдвое больше кинетической за счет потенциальной энергии, так что уравнения типа (5.1), (5.2) имеют одно и то же решение $r_0(t)$.

В данном случае парадокс возникает из-за неаккуратного обращения с законом сохранения углового момента (2.3). В левую часть уравнения должен быть вставлен угловой момент поля, возникающий при скрещивании электрического кулоновского поля заряженной частицы $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|^3$ с внешним постоянным магнитным полем $\mathbf{H} = -H_0\mathbf{e}_z$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\omega_0 r_0^2 + \frac{1}{4\pi c}\int_V \mathrm{d}^3 r[\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}]]_z\right) = -\frac{2e^2\omega_0^3 r_0^2}{3c^3}. \qquad (5.3)$$

Это как раз тот случай, когда вектор углового момента поля $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ (1.1) в объеме V зависит от времени, при этом физически значимой оказывается производная, а не абсолютная величина вектора $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$.

Легко заметить, что никакого парадокса не возникло бы при исследовании совместности закона сохранения энергии (5.1) с законом сохранения (2.8) канонического углового момента. Подставляя в формулы (2.9), (2.10) явное выражение для векторного потенциала, описывающего однородное магнитное поле (ρ — расстояние до оси z, $\mathbf{e}_\psi$ — азимутальный единичный вектор),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}] = -\frac{1}{2}H_0\rho\,\mathbf{e}_\psi = -\frac{c}{2e}m\omega_0\rho\,\mathbf{e}_\psi, \qquad (5.4)$$

получим

$$J_{\mathrm{p}z} = \frac{1}{2}m\omega_0 r_0^2, \quad J_{\mathrm{f}z} = 0. \qquad (5.5)$$

Канонический угловой момент частицы $J_{\mathrm{p}z}$ есть в данном случае не что иное, как обобщенный импульс, сопряженный азимутальному углу ψ. В пренебрежении излучением этот обобщенный импульс сохраняется вследствие независимости лагранжиана заряженной частицы

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A}(\rho, z) \qquad (5.6)$$

от азимутального угла ψ. Соответственно имеем ($\dot{\psi} = \omega_0$)

$$J_{\mathrm{p}z} = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}}L = m\omega_0 r_0^2 + \frac{e}{c}r_0 A_\psi. \qquad (5.7)$$

Сохранением величины $J_{\mathrm{p}z}$ пользуются при рассмотрении движения заряженных частиц в аксиально симметричных стационарных магнитных полях [21].

Покажем теперь, что уравнение (5.3) действительно совместно с (5.1). Однородное магнитное поле существует лишь в ограниченных областях пространства, например, внутри длинного соленоида ($R \ll L$, где R и L — радиус и длина соленоида) или внутри вращающегося равномерно заряженного по поверхности шара. В любом случае во всем пространстве статическое магнитное поле можно описать потенциалами, удовлетворяющим следующим калибровочным условиям

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty. \tag{5.8}$$

При этом векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ убывает на бесконечности по закону $1/r^2$ [3]. В такой калибровке угловой момент поля $\mathbf{M}_f$, обусловленный скрещенными электрическим кулоновским полем заряженной частицы и внешним постоянным магнитным полем произвольной конфигурации, описывается формулой

$$\mathbf{M}_f = \frac{1}{4\pi c} \int\limits_{V\to\infty} \mathrm{d}^3 r \left[\mathbf{r} \times \left[\frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \right] = \frac{e}{c} [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)]. \tag{5.9}$$

Сопоставляя этот результат с выражениями (2.4) и (2.9), видим, что в калибровке (5.8) выбор между "обычным" $\mathbf{M}_p$ и каноническим $\mathbf{J}_p$ угловыми моментами нерелятивистской частицы — это выбор между двумя возможными способами учета углового момента, связанного с интерференцией электрического кулоновского поля частицы и внешнего магнитного поля; в одном случае — это угловой момент поля, в другом — часть канонического углового момента частицы. Таким образом, в левой части уравнения (5.3) под знаком временной производной мы получаем величину J_{pz}, которая, в свою очередь, в той области пространства, где поле однородно, определяется формулой (5.5); закон изменения J_{pz}, как мы уже установили, совместим с законом изменения энергии частицы.

Схожим образом скрещенные поля частицы и внешнего статического магнитного поля порождают дополнительный импульс, который в калибровке (5.8) имеет вид

$$\mathbf{P}_f = \frac{1}{4\pi c} \int\limits_{V\to\infty} \mathrm{d}^3 r \left[\frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] = \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0). \tag{5.10}$$

Именно на эту величину различаются "обычный" $\mathbf{p}$ и канонический $\mathbf{P}$ импульсы частицы в поле (см. (2.9)). В отличие от формулы (5.9) этот результат встречается в некоторых учебниках; см., например, [22, 23]. Формула (5.9) впервые, по-видимому, была получена в работе [24], посвященной эффекту Ааронова—Бома.

Для полноты картины нужно заметить, что парадокс, сформулированный в начале этого раздела, можно разрешить совершенно иначе. Полная производная по времени от механического углового момента частицы равна полному моменту сил, действующих на частицу. Следовательно, уравнение (5.2) можно исправить, добавив в его правую часть момент силы Лоренца

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_{pz} = -\frac{2e^2\omega_0^3 r_0^2}{3c^3} + \frac{e}{c}[\mathbf{r}(t) \times [\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{H}]]_z \tag{5.11}$$

и интерпретируя первое слагаемое в правой части как момент силы радиационного трения. Момент силы Лоренца отличен от нуля, поскольку, излучая, частица движется не по окружности, а по спирали. Учитывая, что $\mathbf{r}(t)\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{H} = -H_0\mathbf{e}_z$, преобразуем (5.11) к виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_{pz} - \frac{m\omega_0 r_0^2}{2} \right) = -\frac{2e^2\omega_0^3 r_0^2}{3c^3}, \tag{5.12}$$

совместному с законом сохранения энергии (5.1).

Этот способ разрешения парадокса в действительности тесно связан с теми, что были предложены ранее. Для того чтобы это понять, рассмотрим похожую задачу, возникающую в электростатике. Изменение за время $\mathrm{d}t$ кинетической энергии $E_p = m\mathbf{v}^2/2$ нерелятивистской излучающей частицы, движущейся в статическом электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$, равно полной работе сил, действующих на частицу, за время $\mathrm{d}t$. Отсюда получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_p = -e\dot{\mathbf{r}}(t) \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) - I, \tag{5.13}$$

где интенсивность излучения I мы интерпретируем как работу силы радиационного трения в единицу времени. Но (5.13) переписывается и в виде уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_p + e\varphi(\mathbf{r}(t))) = -I, \tag{5.14}$$

описывающего изменение полной энергии частицы в процессе излучения. Хорошо известно [3], что величина $e\varphi(\mathbf{r}(t))$ в обычной для электростатики калибровке

$$\varphi(\mathbf{r}) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{5.15}$$

имеет смысл потенциальной энергии частицы и равна той части энергии поля E_p, которая обусловлена интерференцией электрического кулоновского поля частицы и внешнего электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Видим, что имеется явная аналогия между переходами от (5.13) к (5.14) и от (5.11) к (5.12). Следовательно, дополнительное слагаемое, возникающее под знаком временной производной в левой части уравнения (5.12), можно интерпретировать как "потенциальный" угловой момент заряженной частицы в однородном стационарном магнитном поле, численно равный, как мы ранее показали, угловому моменту поля $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$ (5.9), обусловленному интерференцией электрического кулоновского поля частицы и внешнего магнитного поля.

6. Заключение. Содержание этой заметки, повидимому, можно суммировать в виде следующих двух утверждений.

Во-первых, угловой момент возникает в теории как величина, удовлетворяющая определенному закону сохранения. Этот закон сохранения связывает полную производную от углового момента в объеме V с интегральным потоком углового момента сквозь поверхность, ограничивающую объем V. Поэтому для того чтобы избежать парадоксов, физически значимыми следует считать лишь изменения углового момента поля в объеме V, а не его абсолютную величину, и лишь интегральный поток углового момента сквозь поверхность, ограничивающую объем V, а не дифференциальные значения этого потока.

Во-вторых, помимо закона сохранения "обычных" угловых моментов (2.3) в теории имеется закон сохранения канонических угловых моментов (2.8). Эта двойственность восходит к неоднозначности в выборе тензора энергии-импульса и тензора углового момента классического электромагнитного поля. Формально любое из слагаемых в законе сохранения (2.8) калибровочно неинвариантно и, следовательно, лишено непосредственного физического смысла. На деле же, в задачах, решаемых в определенных калибровках, канонические угловые моменты могут приобретать явную физическую значимость (см. выше разделы 2, 4 и 5). Нелишне напомнить здесь, что величина $e\varphi(\mathbf{r})$ также формально калибровочно неинвариантна, но это не мешает нам широко пользоваться этим выражением для потенциальной энергии частицы в электрическом поле, фиксируя калибровочное условие (5.15). В постоянном магнитном поле (5.8) канонический угловой момент (2.9) нерелятивистского заряда имеет смысл полного углового момента системы точно так же, как обобщенный импульс того же заряда совпадает с полным электромагнитным импульсом [22, 23].

Автор благодарен С.В. Романову за многочисленные полезные обсуждения.

Приложение. Подставляя явное выражение для тензора натяжений σ_{kl} [3] в формулы (2.5), (2.12), для потоков $F_i^{(M)}$, $F_i^{(J)}$ i-х составляющих "обычного" и канонического угловых моментов через сферическую поверхность радиуса r получим ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$)

$$F_i^{(M)} = \frac{1}{4\pi}\oint r^2 \mathrm{d}\Omega([\mathbf{H}\times\mathbf{r}]_i(\mathbf{nH}) - \\ - [\mathbf{r}\times\mathbf{E}]_i(\mathbf{nE})), \tag{П.1}$$

$$F_i^{(J)} = \frac{1}{4\pi}\oint r^2 \mathrm{d}\Omega(i(\mathbf{nE})\hat{L}_i\varphi + \\ + i[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]_k\hat{L}_iA_k + [[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{A}]_i). \tag{П.2}$$

В подынтегральных выражениях следует, очевидно, оставить лишь те члены, которые не убывают в волновой зоне (при $r\to\infty$). Поскольку $(\mathbf{nH})$ и $(\mathbf{nE})$ могут быть отличны от нуля только за счет составляющих, падающих как $\sim 1/r^2$, в $[\mathbf{H}\times\mathbf{r}]$ и $[\mathbf{r}\times\mathbf{E}]$ достаточно учесть лишь составляющие $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, падающие как $\sim 1/r$; но для них справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &\approx [\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)], \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &\approx [\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{n}]. \end{aligned} \tag{П.3}$$

Поэтому вместо (П.1) получим

$$F_i^{(M)} = \frac{1}{4\pi}\oint r^2 \mathrm{d}\Omega[\mathbf{r}\times[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]]_i\,. \tag{П.4}$$

Аналогичным образом, поскольку оператор $\hat{L}_i$ (2.11) действует только на угловые переменные, в φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, входящих в подынтегральное выражение (П.2), следует учесть лишь составляющие, падающие как $\sim 1/r$; но тогда

$$F_i^{(J)} = \frac{1}{4\pi}\oint r^2 \mathrm{d}\Omega(iE_k\hat{L}_iA_k + [\mathbf{E}\times\mathbf{A}]_i). \tag{П.5}$$

Домножая и деля формулы (П.4), (П.5) на dr/c, им можно придать наглядный смысл: потоки $F_i^{(M)}$, $F_i^{(J)}$ оказываются равными проекциям $\mathrm{d}M_{\mathrm{f}i}$, $\mathrm{d}J_{\mathrm{f}i}$ угловых моментов (1.1), (2.10) поля в сферическом слое толщиной $\mathrm{d}r$, деленным на время $\mathrm{d}r/c$ прохождения волновым фронтом этого слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вульфсон К.С.* УФН. 1987, **152:** 4, 667.
2. *Соколов И.В.* УФН. 1991, **161:** 10, 175.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц ЕМ.* Теория поля. 6-е изд. М., Наука, 1973.
4. *Биденхарн Л., Лаук Дж.* Угловой момент в квантовой физике. Т. 2. М., Мир, 1984. С. 411.
5. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. Т. 1. М., Гостехиздат, 1956. С. 556.
6. *Айзенберг И., Грайнер В.* Механизмы возбуждения ядра. М., Атомиздат, 1973.
7. *Блатт Дж., Вайскопф В.* Теоретическая ядерная физика. М., ИЛ, 1954. С. 622.
8. *Роуз М.* Поля мультиполей. М., ИЛ, 1957. С. 62.
9. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., Мир, 1965. С. 599.
10. *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. 2-е изд. М., Наука, 1971. С. 93.
11. *Барабанов А.Л.* Препринт ИАЭ-5320/I. Москва, 1991.

12. *Мандельштам Л,И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., Наука, 1972. С. 14.
13. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. 3-е изд. М., Наука, 1969. С. 25.
14. *Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.* Электродинамика. 2-е изд. М., Высшая школа, 1990. С. 298.
15. *Belinfante F.J.* Physica. 1939, **6,** 887.
16. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М., Л., Гостехиздат, 1949. С. 180.
17. *Ландау Л.Ц., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, 3-е изд. М., Наука, 1974. С. 519.
18. *Humblet J.* Physica. 1943, **10,** 585.
19. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. 10-е изд. М., Наука, 1989. С. 404.
20. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6, 2-е изд. М., Мир, 1977. С. 59, 304.
21. *Ленерт Б.* Динамика заряженных частиц. М., Атомиздат, 1967. С. 41.
22. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М., Наука, 1978. С. 748.
23. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. 2-е изд. М., Наука, 1981. С. 17.
24. *Trammel G.T.* Phys. Rev. 1964, **B134,** 1183.