

КИНЕТИКА ЧАСТИЦ В СИЛЬНО ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

(Методы перенормировок и самосогласованного поля)

А.М. Быков, И.Н. Топтыгин

(Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербургский государственный технический университет)

(Статья поступила 25.06.93 г., после доработки 31.09.93 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Формулировка проблемы (19).
 2. Кинетика примеси в среде с длинноволновой турбулентностью (22). 2.1. Теория возмущений. 2.2. Короткое время корреляции.
 3. Методы перенормировки кинетических коэффициентов в гидродинамике и теории плазмы (26). 3.1. Методы описания турбулентного переноса в гидродинамике. 3.2. Перенормировка кинетических коэффициентов в физике плазмы.
 4. Кинетика частиц в сильно турбулентной плазме. Перенормировка кинетических коэффициентов (30). 4.1. Турбулентный перенос примеси в несжимаемой среде. 4.2. Перенос частиц в сжимаемой среде. Слабое ускорение на корреляционной длине. 4.3. Кинетическое уравнение с учетом сильного ускорения частиц на длине корреляции. 4.4. Особенности спектров частиц, взаимодействующих с сильной длинноволновой турбулентностью. 4.5. Влияние флуктуаций плотности среды на диффузию частиц.
 5. Перенормировка уравнения для среднего магнитного поля в теории турбулентного динамо (40).
 6. Диффузия и турбулентный перенос частиц в крупномасштабном стохастическом магнитном поле (42). 6.1. Качественные соображения. 6.2. Усреднение дрейфового кинетического уравнения. 6.3. Режимы поперечной диффузии.
 7. Кинетика частиц в турбулентной плазме с сильной перемежаемостью — ударными фронтами (46). 7.1. Вводные замечания. 7.2. Взаимодействие заряженных частиц с сильными ударными волнами. 7.3. Кинетическое уравнение для функции распределения, усредненной по крупномасштабным движениям среды. 7.4. Нестационарные энергетические спектры ускоренных заряженных частиц.
 8. Заключение (53).
- Список литературы (55).

1. Введение. Формулировка проблемы. Диффузия пробных частиц (пассивной примеси) в турбулентной среде изучается статистическими методами уже много десятилетий (см., например, [1]), однако проблема еще далека от полного решения. Это связано как со сложностью самой задачи даже в простейшей постановке, так и со все большим расширением области ее применения, в результате чего в сферу исследования естественным образом вовлекаются все новые явления, тесно связанные друг с другом. Здесь имеется в виду прежде всего взаимодействие примесных заряженных частиц с турбулентной плазмой, а также диффузия, конвек-

ция и генерация магнитного поля в турбулентной проводящей среде. Таким образом, адекватное описание систем, реализующихся в природе и в лабораторных экспериментах, приводит к усложнению исходной формулировки проблемы и вызывает к жизни значительное число частных задач.

Перенос примеси малой концентрации $n(\mathbf{r}, t)$, не оказывающей влияния на динамику среды, в неионизированной жидкости или газе описывается уравнением [2]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{u}) = \nabla(\kappa \nabla n). \quad (1.1)$$

В среде с турбулентностью гидродинамического типа эйлерова скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная функция координат и времени, испытывающая стохастические флуктуации на масштабах $l \leq L$ и временах $\tau \leq \tau_c \approx L/u$, где L — основной (максимальный) масштаб турбулентности. В сжимаемой среде случайной величиной будет и коэффициент "молекулярной" диффузии $\kappa(\mathbf{r}, t)$ из-за флуктуаций плотности среды. Уравнение (1.1) применимо, разумеется, при условии, что масштабы турбулентных пульсаций l велики по сравнению с транспортным пробегом Λ примесных частиц.

Для описания распространения примеси на расстояния $R \gg L$ (например, порядка размеров системы в целом) следует усреднить уравнение (1.1) по областям с линейными размерами, превышающими L , или по ансамблю турбулентных пульсаций. Эти два способа усреднения эквивалентны, если корреляции в турбулентной среде ослабляются достаточно быстро [3]. Результатом усреднения должно быть установление вида уравнения для усредненной концентрации $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle$ и вычисление коэффициентов этого уравнения через усредненные характеристики турбулентного поля скоростей. Тэйлор [1] впервые показал, что асимптотически при временах, намного превышающих время корреляции турбулентных скоростей τ_c , перенос примеси

имеет характер диффузии с эффективным коэффициентом диффузии, который в случае однородной и изотропной турбулентности дается интегралом от корреляционной функции лагранжевых скоростей

$$\chi = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \mathbf{v}(\mathbf{a}, t + \tau) \rangle d\tau; \quad (1.2)$$

здесь $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ в отличие от $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — лагранжева скорость элемента среды, занимавшего в начальный момент положение $\mathbf{a}$, формула Тэйлора (1.2) получена в пренебрежении молекулярной диффузией. Проблема связи между лагранжевой и эйлеровой корреляционными функциями до сих пор не имеет точного решения, поэтому существуют лишь приближенные выражения коэффициента турбулентной диффузии χ через наблюдаемые эйлеровы характеристики турбулентности [3—5].

Если роль пассивной примеси играют заряженные частицы в плазме с магнитным полем и турбулентностью МГД-типа, то ее эволюция отличается от предыдущего простого случая по крайней мере в следующих трех отношениях:

1. Наряду с пространственным переносом может происходить ускорение частиц, поэтому кинетическое рассмотрение должно описать не только распространение частиц в пространстве, но и их распределение по энергиям. Формирование спектров нетепловых частиц в плазме астрофизических объектов особенно важно для проблемы происхождения космических лучей [6], но это явление играет определенную роль также в лазерной плазме [7] и в токамаках [8].

2. Пространственный перенос в достаточно сильном магнитном поле приобретает резко анизотропный характер и происходит преимущественно вдоль поля. В то же время наблюдается аномальный перенос поперек магнитного поля, как правило, более быстрый, чем это предсказывают различные "классические" теории. Это относится как к распространению тепла и примесных ионов в термоядерных установках [9—12], так и к диффузии релятивистских частиц (космических лучей) в Галактике [13, 14].

3. В космических средах источниками турбулентности часто выступают ударные волны, а сама турбулентность может иметь сверхзвуковой характер и содержать ансамбли ударных фронтов с некоторым распределением по амплитудам скачков (или числа Маха) [15, 16]. Как было выяснено сравнительно недавно [17—20], сильные ударные фронты в турбулентной среде являются эффективными ускорителями заряженных частиц. Поэтому

исследование кинетики заряженных частиц в турбулентной плазме с ударными фронтами — актуальная современная проблема астрофизики высоких энергий. Многие задачи, связанные с перечисленными выше особенностями поведения примесных заряженных частиц в плазме с крупномасштабной турбулентностью МГД-типа, могут решаться на основе уравнения переноса [21]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta} - u_\alpha \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha}; \quad (1.3)$$

здесь $N(\mathbf{r}, p, t)$ — изотропная часть функции распределения частиц, нормированная условием

$$\int_0^\infty N(\mathbf{r}, p, t) p^2 dp = n(\mathbf{r}, t),$$

$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ — локальный тензор диффузии частиц, обусловленный мелкомасштабными электромагнитными полями и кулоновскими столкновениями, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — эйлерово поле турбулентных скоростей, масштабы неоднородности которого превышают локальный транспортный пробег частиц $\Lambda_\parallel$, определяющий значения тензора $\kappa_{\alpha\beta}$. Уравнение (1.3) описывает эффекты диффузии и конвективного переноса частиц, а также изменения их энергии, связанные с изменением плотности среды ($\partial u_\alpha / \partial r_\alpha \neq 0$). На другом языке этот же эффект изменения энергии можно было бы описать путем явного введения электрического поля $\mathbf{E} = -[\mathbf{u} \times \mathbf{B}/c]$, где $\mathbf{B}$ — магнитное поле. Несжимаемые движения ($\text{div} \mathbf{u} = 0$) турбулентной плазмы также приводят к ускорению частиц, но их вклад меньше, чем учтенный в (1.3) адиабатический эффект, в $(\Lambda_\parallel/L)^2$ раз [22], где L , как и выше, основной (энергосодержащий) масштаб турбулентности. Проинтегрировав (1.3) по всему импульсному пространству и считая тензор диффузии не зависящим от импульса частиц (или заменяя его усредненным по спектру значением), мы получим уравнение (1.1).

Заметим, что уравнение (1.3) описывает частицы, уже инжектированные в режим ускорения, скорости которых $v \gg u$ и потерями энергии которых в столкновениях с частицами основной плазмы можно пренебречь. Если же рассматривать примесные частицы с тепловыми энергиями, то большая их часть вследствие потерь не будет вовлечена в процесс ускорения, и перенос этих частиц будет описываться уравнением (1.1) (с анизотропным коэффициентом диффузии).

Усреднение уравнения (1.3) при произвольных

параметрах турбулентности, особенно тех, которые характерны для астрофизических объектов, связано со значительными трудностями. Это вызвано тем, что турбулентность является сильной, и методы квазилинейной теории [23—25], успешно применявшиеся при описании слаботурбулентных состояний, для обсуждавшегося выше класса задач теряют силу.

Еще одна важная область современного приложения задачи о диффузии пассивной примеси — теория турбулентного динамо [26—28]. Эти исследования стали особенно актуальными после того, как Штеенбек, Краузе и Редлер [26] открыли механизм генерации магнитного поля гиротропной турбулентностью — α -эффект. Теория эффекта базируется обычно на исследовании уравнения индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость (коэффициент диффузии магнитного поля). В линейной постановке поле турбулентных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и его статистические характеристики можно считать заданными. Задача сводится к получению из (1.4) усредненных уравнений для крупномасштабного магнитного поля и его высших моментов и их исследованию для различных частных случаев. При вычислении коэффициентов усредненных уравнений возникают трудности, аналогичные тем, которые обсуждались в связи с уравнением (1.1).

Целью настоящей статьи является обзор методов усреднения приведенных выше уравнений и вычисления кинетических коэффициентов без ограничения амплитуд турбулентных пульсаций скорости и магнитного поля, а также корреляционных длин и времен, т.е. для сильной турбулентности. Этим материал обзора отличается от большинства опубликованных к настоящему времени работ, в которых указанные ограничения в той или иной форме используются. Большинство результатов, излагаемых в данном обзоре, относится к кинетическому описанию поведения ансамблей частиц в трехмерных системах со статистически однородными МГД-флуктуациями, допускающих описание в терминах корреляционных функций низких рангов. Предполагается также выполненным условие достаточно быстрого ослабления корреляций полей. Важным исключением из этого ограничения являются системы с ансамблями разрывов (ударных волн), где существенны эффекты перемежаемости, требующие более детальной статистической информации, такие системы подробно рассмотрены в разделе 7 данного обзора.

Процессы различной природы во всех перечисленных системах удастся описывать в рамках единого формализма — метода перенормировки. С другой стороны методы описания систем с выделенными реализациями — методы перколяции и статистической топографии — детально описаны в ряде обзоров [11, 29, 54] (см., в частности, последний детальный обзор Исиченко [29]) и здесь лишь упоминаются.

Остановимся более подробно на структуре и содержании обзора. В разделе 2 рассмотрены наиболее простые методы усреднения уравнений (1.3), (1.4), не требующие перенормировки. Они применимы либо при достаточно малых амплитудах турбулентных пульсаций, либо при достаточно быстром (в пределе — мгновенном) разрушении корреляций турбулентных величин. Во многих реальных системах такие условия не выполняются, что требует развития непerturbативных подходов к исследуемым задачам.

В разделе 3 кратко описаны наиболее продуктивные подходы, применявшиеся различными авторами для вычисления транспортных коэффициентов примесных частиц в системах с сильной турбулентностью МГД-типа. Мы старались отразить здесь работы, в которых в том или ином приближении вычислялись кинетические коэффициенты и строились соответствующие транспортные уравнения, и лишь упоминаем работы, имеющие общий характер.

Подчеркнем, что основным предметом нашего обзора является именно кинетика примесных частиц, поэтому мы не претендуем на изложение метода перенормировок для изучения динамики сильной турбулентности — это направление исследований в последнее время интенсивно развивается и ему посвящено несколько обзоров [50, 51]. Краткие сведения по этому вопросу приведены в разделе 3 только для установления связи между теориями сильной турбулентности и турбулентного переноса.

Основная часть обзора (разделы 4—8) содержит изложение и применение метода, развитого авторами в последние годы для описания процессов пространственного переноса и ускорения заряженных частиц в плазме с сильной МГД-турбулентностью. Нам представляется, что такое изложение может представлять определенный интерес для читателя, поскольку предлагаемый метод позволяет единообразно решить ряд достаточно трудных задач, решение которых необходимо в частности для понимания физики неравновесных процессов в

разреженной плазме (особенно в астрофизических исследованиях) и которые, насколько нам известно, ранее решены не были.

В разделе 4 изложены основы метода и вычисления транспортных коэффициентов в системах с сильной турбулентностью без ударных фронтов, проанализированы различные частные случаи, в том числе процесс сильного ускорения частиц на корреляционной длине, описываемый уравнениями не фоккер-планковского типа.

В разделе 5 изложенный метод применен к выводу уравнений для крупномасштабного магнитного поля в теории турбулентного динамо. При этом оказывается возможным вычислить перенормированную турбулентную вязкость и коэффициент генерации магнитного поля (α -эффект), не прибегая к теории возмущений или модели δ -коррелированной турбулентности.

Раздел 6 посвящен анализу переноса частиц поперек крупномасштабного магнитного поля в условиях, когда в среде имеются стохастические флуктуации магнитного поля и скорости произвольной амплитуды. Именно такие условия характерны для Галактики, и ранее коэффициент поперечной диффузии при произвольных амплитудах флуктуаций не был вычислен.

В разделе 7 рассмотрены турбулентные системы, в которых возбуждены случайные ансамбли ударных волн с произвольными числами Маха. Их можно рассматривать как системы с сильной перемежаемостью. Важность изучения кинетики частиц в таких системах связана с их широким распространением в астрофизике. В частности, наша Галактика в целом и особенно ее отдельные активные области представляют собой плазменные системы с сильной турбулентностью и ансамблями случайных ударных фронтов.

Наконец, в разделе 8 приведено краткое резюме метода и дано обсуждение достоинств и недостатков изложенной теории, а также некоторые соображения о ее развитии и более надежном обосновании.

2. Кинетика примеси в среде с длинноволновой турбулентностью. В этом разделе мы рассмотрим такие условия, когда усреднение исходного уравнения может быть достигнуто простыми методами.

2.1. Теория возмущений. Начнем с рассмотрения несжимаемого движения ($\text{div } \mathbf{u} = 0$) в отсутствие средней скорости среды: $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Для усреднения уравнения (1.3) по ансамблю турбулентных движений представим функцию распределения в виде

$$N(\mathbf{r}, p, t) = F(\mathbf{r}, p, t) + \delta F(\mathbf{r}, p, t), \quad (2.1)$$

$$F = \langle N \rangle, \quad |\delta F| \ll F.$$

Последнее неравенство есть условие применимости теории возмущений. В рассматриваемом случае эффект ускорения отсутствует, а тензор локальной диффузии $\kappa_{\alpha\beta}$ можно считать заданной не флуктуирующей величиной. После подстановки (2.1) в уравнение (1.3) получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial r_\beta} - \langle u_\alpha \frac{\partial \delta F}{\partial r_\alpha} \rangle, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \delta F}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta F}{\partial r_\beta} = -u_\alpha \frac{\partial F}{\partial r_\alpha}. \quad (2.3)$$

Последнее уравнение линеаризовано по флуктуирующим величинам u_α , δF .

Рассматривая (2.3) как неоднородное уравнение диффузии, запишем его решение через функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$, в которую войдет тензор локальной диффузии $\kappa_{\alpha\beta}$:

$$\delta F(\mathbf{r}, p, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') u_\alpha(\mathbf{r}', t') \times \\ \times \frac{\partial F(\mathbf{r}', p, t')}{\partial r'_\alpha} d^3 r' dt'. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.2) позволяет получить усредненное кинетическое уравнение, учитывающее турбулентную диффузию в несжимаемой среде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial r_\beta} + \\ + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \langle u_\alpha(\mathbf{r}, t) u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} F(\mathbf{r}', p, t') d^3 r' dt'. \quad (2.5)$$

Если среда стационарна и однородна, то функция Грина и корреляционный тензор эйлеровых скоростей зависят только от разности аргументов, и уравнение (2.5) приводится к виду

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \langle u_\alpha(\mathbf{r}, t) u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle \times \\ \times F(\mathbf{r}', p, t') d^3 r' dt'. \quad (2.6)$$

Итак, усреднение по ансамблю турбулентных движений приводит к интегродифференциальному уравнению с нелокальным взаимодействием в пределах корреляционной длины L и корреляционного времени τ_c , определяемыми свойствами

корреляционного тензора скоростей $\langle u_\alpha u'_\beta \rangle$. Если нас интересует поведение функции распределения на временах и расстояниях, существенно превышающих время и длину корреляции турбулентности, то уравнение (2.6) допускает упрощение. В этом же случае, согласно эргодической теореме для однородных стационарных случайных процессов [3], усреднение по ансамблю будет фактически эквивалентно усреднению по времени или по пространству. Усредненная функция распределения F будет слабо меняться в пределах области интегрирования, и уравнение (2.6) примет дифференциальную форму

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \quad (2.7)$$

с эффективным коэффициентом диффузии

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} + \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau G(\vec{\rho}, \tau) K_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau), \quad (2.8)$$

где через $K_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau)$ обозначен корреляционный тензор турбулентных скоростей.

Оценка второй поправки к функции распределения и сравнение ее с первой поправкой (2.4) показывает, что параметр разложения зависит от природы турбулентности. В случае сильной турбулентности в несжимаемой среде (вихри) параметром разложения выступает число Пекле $\beta = uL/\kappa$ (где $u \equiv \langle u^2 \rangle^{1/2}$ и локальная диффузия считается изотропной, $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}$). При наличии достаточно сильного магнитного поля, $c_A \gg \kappa/L$, где $c_A = B(4\pi\rho)^{-1/2}$ — альвеновская скорость, разложение ведется по параметру u/c_A (турбулентность слабых альвеновских волн). Таким образом, уравнения (2.7), (2.8) применимы при выполнении одного из двух неравенств:

$$uL \ll \kappa, \quad u \ll c_A. \quad (2.9)$$

Поправка в (2.8) к локальному тензору диффузии квадратична по одному из указанных выше малых параметров.

В случае сжимаемого движения ($\text{div } \mathbf{u} \neq 0$) турбулентной среды задача усреднения уравнения (1.3) усложняется ввиду необходимости учета ускорительного члена, содержащего $\partial N/\partial p$, а также флуктуаций тензора локальной диффузии $\kappa_{\alpha\beta}$. Будем считать, что флуктуации $\kappa_{\alpha\beta}$ вызваны изменениями плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ турбулентной среды. В рамках теории возмущений

$$\kappa_{\alpha\beta} = \overline{\kappa_{\alpha\beta}} + \delta\kappa_{\alpha\beta} \frac{\delta n}{n_0}, \quad \delta\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{\kappa_{\alpha\beta}}}{\partial n} n \Big|_0. \quad (2.10)$$

Действуя по изложенной выше схеме, получим для статистически однородной среды усредненное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(D(p) + D_{\alpha\beta}^*(p) \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right) \frac{\partial F}{\partial p} + \\ & + \frac{2}{3} p \frac{\partial}{\partial p} \chi_{\alpha\beta}^{(3)} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = & \overline{\kappa_{\alpha\beta}} + \chi_{\alpha\beta}^{(1)} + \chi_{\alpha\beta}^{(2)} + \chi_{\alpha\beta}^{(3)}, \\ \chi_{\alpha\beta}^{(1)} = & - \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau \rho_\alpha \langle u_\beta u'_\gamma \rangle \frac{\partial G}{\partial \rho_\gamma}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(2)} = \delta \overline{\kappa_{\alpha\gamma}} \delta \overline{\kappa_{\beta\mu}} \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 G(\rho, \tau)}{\partial \rho_\nu \partial \rho_\mu} \frac{\langle \delta n \delta n' \rangle}{n_0^2}, \quad (2.13)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(3)} = -\delta \overline{\kappa_{\alpha\gamma}} \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau \frac{\partial G}{\partial \rho_\nu} \rho_\beta \langle \text{div } \mathbf{u} \frac{\delta n'}{n_0} \rangle, \quad (2.14)$$

$$D(p) = -\frac{p^2}{9} \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 G(\rho, \tau)}{\partial \rho_\nu \partial \rho_\mu} \langle u_\mu u'_\nu \rangle, \quad (2.15)$$

$$D_{\alpha\beta}^*(p) = -\frac{p^2}{18} \int d^3\rho \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 \langle u_\mu u'_\nu \rangle}{\partial \rho_\nu \partial \rho_\mu} G(\rho, \tau) \rho_\alpha \rho_\beta. \quad (2.15a)$$

Здесь все корреляционные функции зависят от $\vec{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $\tau = t - t'$. Величины $\mathbf{u}$ и δn связаны уравнением неразрывности:

$$\frac{\delta n(\mathbf{r}, t)}{n_0} = - \int_{-\infty}^t \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Более наглядное представление о кинетических коэффициентах дает их запись через фурье-образы корреляционных функций. Запишем

$$\langle u_\alpha(\mathbf{r}, t) u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle = \int K_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\vec{\rho} - \omega\tau)} \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (2.17)$$

где для однородной и изотропной турбулентности

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = & T(k, \omega) (\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta k^{-2}) + \\ & + S(k, \omega) k_\alpha k_\beta k^{-2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Зададим в явном виде зависимость от частоты, введя время корреляции гармоник $\tau_c(k) = \Gamma_k^{-1}$:

$$\begin{aligned} S(k, \omega) = & S(k) \frac{\Gamma_k}{2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_k^2/4)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + (\Gamma_k^2/4)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь выбрана лоренцева, или дисперсионная,

форма зависимости спектральной функции от частоты, ввиду ее универсальности и простоты.

Перейдя к спектральным функциям в (2.12)–(2.15) и выполнив интегрирование по частоте, получим представление для кинетических коэффициентов в виде однократных интегралов от спектральных функций $T(k)$, $S(k)$. Приведем коэффициент диффузии в импульсном пространстве:

$$D(p) = \frac{p^2}{9} \int d^3k k^2 S(k) \frac{\bar{\kappa}k^2 + (\Gamma_k/2)}{\omega_0^2(k) + [\kappa k^2 + (\Gamma_k/2)]^2}. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) показывает существенную зависимость как от времени корреляции (или уширения резонансов Γ_k), так и от коэффициента пространственной диффузии $\bar{\kappa}$. При $\Gamma_k \rightarrow 0$ и $\omega_0(k) = v_{ph}k$ (слабая акустическая или магнитозвуковая турбулентность) из (2.19) получим результат работы [30]: в случае слабой турбулентности, представляющей суперпозицию монохроматических волн со случайными фазами, эффект ускорения исчезает в пределе $\bar{\kappa} \rightarrow 0$. Для применимости (2.19) в этом случае требуется выполнение условия

$$\langle u_{pot}^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dk k^2 S(k) \ll v_{ph}^2. \quad (2.20)$$

Если уширение резонансов Γ_k имеет конечную величину, то ускорение частиц происходит и в системе с очень сильным рассеянием частиц ($\bar{\kappa} \rightarrow 0$):

$$D(p) = \frac{p^2}{9} \int d^3k k^2 S(k) \frac{\Gamma_k/2}{\omega_0^2(k) + (\Gamma_k^2/4)}. \quad (2.21)$$

Качественные выводы о роли диффузии и конечного времени корреляции турбулентности носят общий характер и не связаны с конкретным видом функции $S(k, \omega)$. Аналогичные результаты, в частности, получаются при гауссовой зависимости спектра от частоты [31].

Наличие эффекта ускорения в пределе сильного рассеяния ($\bar{\kappa} \rightarrow 0$) при конечном времени корреляции $\tau_c(k) = \Gamma_k^{-1}$ обусловлено наличием в этом случае необходимой для ускорения Ферми стохастичности поля скоростей. При $\tau_c \rightarrow \infty$ поле скоростей состоит из стационарных мод, в которые "вморожены" частицы, поэтому ускорения не происходит. Турбулентные добавки $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}$, $\chi_{\alpha\beta}^{(2)}$ и $\chi_{\alpha\beta}^{(3)}$ к тензору пространственной диффузии в рассматриваемом случае малы и имеют порядок величины

u^2/v_{ph}^2 . В $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}$ вносят сравнимый вклад как вихревая, так и потенциальная составляющая поля скоростей.

Следует отметить, что при наличии сильной крупномасштабной турбулентности критерии применимости теории возмущений, указанные в этом разделе, могут нарушаться. Для сильной турбулентности эффективная фазовая скорость $v_{ph} \approx u$, а число Пекле β оказывается большим для примесей в атмосфере и океане, для ядер тяжелых элементов и космических лучей умеренной энергии в Галактике. Применимость теории возмущений для уравнения индукции (1.4) в случае несжимаемой среды ограничена условием малости магнитного числа Рейнольдса: $Re_m = uL/\nu_m \ll 1$, и это условие также нарушается для большинства астрофизических объектов.

2.2. Короткое время корреляции.

Для выхода за рамки теории возмущений нередко [32–34] рассматривают гипотетическую турбулентность с нулевым временем корреляции турбулентных скоростей. В частности, этому соответствует корреляционный тензор вида

$$K_{\alpha\beta}(\vec{r}, \tau) = K_{\alpha\beta}(\vec{r}) \cdot 2\tau_0 \delta(\tau). \quad (2.22)$$

Аналогичное предположение делается и о других корреляционных тензорах. Следует отметить, что δ -коррелированная турбулентность (2.22) представляет собой упрощенную модель, которая не соответствует какому-либо реальному случаю и интересна лишь постольку, поскольку усреднение уравнений типа (1.3) и (1.4) может быть выполнено точно. В действительности время корреляции конечно и имеет порядок величины $\tau_c \approx L/u$ для сильной турбулентности и $\tau_c \approx L/v_{ph}$ для слабой.

Выполним усреднение уравнения (1.4) методом, отличным от использованных в работах [33,34]. В случае короткого (в пределе — нулевого) времени корреляции турбулентные скорости для времен $\tau < t$ и $\tau > t$ не коррелированы. Поэтому любую зависящую от них случайную величину можно усреднять независимо по двум указанным временным интервалам. Обозначим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (2.23)$$

и запишем уравнение (1.4) в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \tau} - \nu_m \Delta H_\alpha &= A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial \tau_\mu} u_\gamma H_\sigma + \\ &+ B_\alpha \delta(\tau - t), \quad \tau \geq t, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu} = e_{\alpha\mu\nu} e_{\nu\gamma\sigma}$, а δ -образный член играет роль начального условия для неусредненного поля

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Интегральная форма (2.24) имеет вид

$$H_\alpha(\mathbf{r}, \tau) = A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu} \int d\tau' \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau') \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r'_\mu} u'_\gamma H'_\sigma + B_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \tau), \quad (2.25)$$

где

$$B_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) = \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - t) B_\alpha(\mathbf{r}', t), \quad (2.26)$$

а G — функция Грина оператора диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta,$$

удовлетворяющая условию

$$G(\mathbf{r}, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta(\mathbf{r}).$$

С помощью уравнения (2.25) методом итераций вычислим H_α в момент $t + \Delta t$ с точностью до членов, линейных по Δt . Ввиду явной зависимости $H_\alpha(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ от турбулентных скоростей усреднение по ним можно будет произвести непосредственно. Затем, считая Δt малым, получим дифференциальное уравнение для среднего поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Для реализации указанной программы нужно произвести две итерации уравнения (1.25). При этом величину

$$B_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) = B_\alpha(\mathbf{r}, t) + (\tau - t) \nu_m \Delta B_\alpha(\mathbf{r}, t)$$

можно рассматривать как итерацию нулевого порядка относительно случайной скорости. Вторая итерация имеет вид

$$H_\alpha^{(2)}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu} A_{\kappa\epsilon}^{\sigma\nu} \int_t^{t+\Delta t} d\tau_1 \times \\ \times \int d^3r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau - \tau_1) \frac{\partial}{\partial r_{1\mu}} u_\gamma(\mathbf{r}_1, \tau_1) \times \\ \times \int_t^{\tau_1} d\tau_2 \int d^3r_2 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r_{2\nu}} u_\kappa(\mathbf{r}_2, \tau_2) B_\epsilon^{(0)}(\mathbf{r}_2, \tau_2) + \\ + A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu} \int_t^{t+\Delta t} d\tau_1 \int d^3r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau - \tau_1) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r_{1\mu}} u_\gamma(\mathbf{r}_1, \tau_1) B_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}_1, \tau_1) + B_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, t + \Delta t). \quad (2.27)$$

При усреднении последнего уравнения будем по-прежнему считать турбулентность однородной и изотропной ($\langle \mathbf{u} \rangle = 0$), но неинвариантной относительно отражения пространственных осей (гиротропной). Только в этом случае может возникнуть неустойчивость [28] относительно роста магнитно-

го поля. В отличие от (2.18), корреляционный тензор скоростей должен содержать еще слагаемое с псевдоскаляром, характеризующим гиротропию, так что в координатном представлении

$$K_{\alpha\beta}(\vec{p}) = A(p) \delta_{\alpha\beta} + R(p) \rho_\alpha \rho_\beta + C(p) e_{\alpha\beta\sigma} \rho_\sigma; \quad (2.28)$$

здесь функции A и R связаны с T и S из (2.18), (2.18') соотношениями

$$T(k) = \tilde{A}(k) - \frac{d\tilde{R}(k)}{k dk}, \quad (2.29)$$

$$S(k) = T(k) - \frac{d^2\tilde{R}(k)}{dk^2},$$

где $\tilde{A}(k)$, $\tilde{R}(k)$ — фурье-образы функций $A(\rho)$, $R(\rho)$.

Усреднив (2.27) с использованием (2.22), (2.28) и считая усредненное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ гладким на корреляционной длине, получим для него уравнение [35]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\nu_m + \nu_{\text{turb}}) \Delta \mathbf{B}, \quad (2.30)$$

где

$$\nu_{\text{turb}} = A(0) \tau_c = \frac{1}{3} \langle u^2 \rangle \tau_c, \quad (2.30')$$

$$\alpha = -2C(0) \tau_c = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle \tau_c.$$

В модели короткокоррелированной турбулентности уравнения (2.30) — (2.30') применимы при любых значениях Re_m , в том числе и для $\operatorname{Re}_m \gg 1$.

Аналогичным путем в той же модели турбулентности нетрудно усреднить уравнение (1.3). Приведем окончательный результат:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 D(p) \frac{\partial F}{\partial p} + \\ + \frac{2}{3} p \frac{\partial}{\partial p} \chi'_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \chi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \frac{\partial^4 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta \partial r_\mu \partial r_\nu}; \quad (2.31)$$

здесь

$$\chi_{\alpha\beta} = \langle \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \rangle + \langle u_\alpha u'_\beta \rangle \tau_c - \langle \frac{\partial \delta \kappa_{\alpha\nu}}{\partial r_\nu} \frac{\partial \delta \kappa_{\mu\beta}}{\partial r_\mu} \rangle \tau_c + \\ + \langle \delta \kappa_{\alpha\beta} (\nabla \mathbf{u}) \rangle \tau_c + \langle \delta \kappa_{\nu\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\nu} - \delta \kappa_{\beta\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\nu} \rangle \tau_c, \\ \chi'_{\alpha\beta} = \langle \delta \kappa_{\alpha\beta} (\nabla \mathbf{u}) \rangle \tau_c, \\ \chi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \langle \delta \kappa_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\mu\nu} \rangle \tau_c, \quad (2.32)$$

$$D(p) = \frac{p^2}{9} \langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle \tau_c,$$

$\delta \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ — флуктуирующая часть коэффициента диффузии. Все средние вычисляются в одной точке пространства. Остановимся на пределах применимости уравнения (2.31). Дельта-корреляция турбулентности во времени означает, что фактическое

время корреляции L/u должно быть меньше всех прочих времен и, в частности, меньше времени диффузии частиц $L^2/\bar{\kappa}$ через область корреляции, что приводит к условию

$$uL/\bar{\kappa} \gg 1, \quad \bar{\kappa} \equiv \langle \kappa \rangle. \quad (2.33)$$

Поскольку $\kappa > 0$ и $\delta\kappa \leq \bar{\kappa}$, то в нулевом порядке по параметру (2.33) усредненное уравнение примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 D(p) \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (2.34)$$

а $\chi_{\alpha\beta}$ будет определяться только вкладом от турбулентной скорости. Этот случай был рассмотрен нами в [36].

Если же в (2.31) опустить ускорительные члены, то при изотропной диффузии получим уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi \Delta F + \eta \Delta^2 F. \quad (2.35)$$

На масштабах $\Delta r \gg l = (\eta/\chi)^{1/2}$ последнее слагаемое в уравнении (2.35) мало и решения уравнения имеют обыкновенное диффузионное поведение, но на масштабах $\Delta r < l$ характер решения меняется [37]. Однако следует иметь в виду, что в силу критерия (2.33) последний член в (2.35) может играть лишь роль малой поправки, а длина l должна быть мала по сравнению с корреляционной длиной L . В таких условиях вопрос о возможной перемежаемости в распределении диффундирующей примеси следует решать, исходя из кинетического, а не из диффузионного уравнения (2.35). Мы рассмотрим этот случай ниже в разделе 4.

3. Методы перенормировки кинетических коэффициентов в гидродинамике и физике плазмы. Рассмотренные в предыдущем разделе примеры показывают ограниченность использованных приближенных методов и демонстрируют желательность более точной теории, которая позволила бы отказаться от ограничительных условий типа (2.9) или (2.33), а также корректно учесть конечность времени корреляции гармоник, существенно влияющую на темп ускорения заряженных частиц. Требуемая теория должна достаточно точно учитывать взаимодействие диффундирующей примеси с движущейся средой на временах и длинах корреляции турбулентности. В этом смысле задача усреднения уравнений (1.3), (1.4) при условиях $uL \geq \kappa$, $uL \geq \nu_m$, $u \geq v_{ph}$ есть типичная задача теории сильного взаимодействия для стохастического процесса. Неудивительно, что для ее решения, как и для решения проблем динамики турбулентности, многие авторы привлекают методы теории сильных

взаимодействия, развитые в теории поля, ядерной физике и физике твердого тела.

3.1. Методы описания турбулентного переноса в гидродинамике. В 1961 г. Уайлд [38] и Крейчнан [39] сформулировали теорию возмущений для построения решений уравнения Навье — Стокса, описывающего динамику несжимаемой жидкости под действием внешней силы. Данный подход позволяет получить формальное решение задачи в виде ряда, который, как правило, нелегко использовать в конкретных расчетах.

Наиболее употребительным в настоящее время методом, привнесенным из теории сильных взаимодействий и квантовой теории поля в теорию турбулентности, является метод ренормализационной группы [48–54].

Последовательный ренормгрупповой подход к проблемам турбулентности в целом и турбулентной диффузии развит в работах [48–53]. Яхот и Орзаг [49], Данневик и др. [52] провели ренормгрупповой анализ уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в инерционном интервале турбулентного спектра. Действие источника турбулентной энергии, поступающей в жидкость со стороны энергосодержащих масштабов, моделировалось случайными силами, дельта-коррелированными во времени. Авторы работ [49, 52], не используя каких-либо подгоночных параметров, вычислили спектральные плотности турбулентной энергии $E(k)$ и пассивной скалярной примеси $E_n(k)$, включая и числовые постоянные:

$$E(k) = 1,617\epsilon^{-2/3} k^{-5/3}, \quad (3.1)$$

$$E_n(k) = 1,146\bar{R}\bar{\epsilon}^{1/3} k^{-5/3},$$

где $\bar{\epsilon}$ — скорость диссипации турбулентной энергии на единицу объема, $\bar{R}$ — скорость диссипации флуктуаций скалярной примеси:

$$\bar{R} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int n^2(r, t) d^3r. \quad (3.2)$$

Они вычислили также универсальное отношение между перенормированной (т.е. учитывающей турбулентное движение) кинематической вязкостью ν и турбулентной диффузией χ для больших чисел Рейнольдса:

$$\nu/\chi = 0,7179. \quad (3.3)$$

Основное ограничение указанных работ связано с рассмотрением несжимаемой жидкости и, соответственно, колмогоровской модели турбулентности. В связи с этим непосредственный перенос использованного метода на плазменные системы и учет

магнитного поля и ускорения частиц, по-видимому, затруднителен, хотя предпринимаются попытки (см. [56]) использовать ренормгрупповой подход при анализе анизотропной диффузии в крупномасштабном турбулентном сдвиговом течении. Здесь уместно указать на широкие возможности применения метода перенормировки в решении проблемы аномального переноса углового момента при дисковой аккреции вещества на гравитирующие центры, являющейся важной проблемой теоретической астрофизики [57]. Аномальная вязкость в аккреционном диске может быть обусловлена флуктуациями, связанными с универсальной неустойчивостью, установленной в работе [58].

Ранее упрощенный вариант метода перенормировок применительно к диффузии скалярной примеси обсуждал Хауэлс [55] (см. также Моффат [5]). Мы обсудим более подробно их подход, поскольку он допускает обобщение на случай переноса и ускорения заряженных частиц в системах с сильными флуктуациями магнитного и электрического полей (см. раздел 4). Упомянутый метод состоял в следующем. Пусть имеется статистическое турбулентное поле скоростей в несжимаемой жидкости. Разложим это поле на большое число составляющих u_r , $r = 1, 2, \dots, s$. К r -й составляющей отнесем ту часть поля, которая образована гармониками Фурье с волновыми векторами k , относящимися к сферической оболочке толщиной $\Delta_r = k_r - k_{r+1}$, $k_r < k < k_{r+1}$ (предполагается изотропное распределение волновых векторов). Аналогичное разложение производится и для концентрации скалярной примеси:

$$n = \langle n \rangle + \sum_{r=1}^s n_r, \quad (3.4)$$

где $\langle n \rangle$ описывает концентрацию, усредненную по наибольшему масштабу турбулентности L , а n_r — мелкомасштабные составляющие, причем $\langle n_r \rangle = 0$. Усреднение статического уравнения переноса

$$\mathbf{u} \nabla n = \kappa \Delta n \quad (3.5)$$

производится последовательно по сферическим слоям в пространстве k , начиная с наименьших масштабов (наибольших k). При усреднении по каждому сферическому слою можно применять теорию возмущений, поскольку параметр разложения, не превышающий величины $u_r L_r / \kappa$, мал ввиду малости u_r . При усреднении по слою r учитываются движения меньших масштабов, но полностью игнорируется перенос более крупномасштабными движениями, что, по-видимому, является главным недостатком метода.

Рассматривая перенос под действием поля скоростей u_s , заменяем в (3.5) u на u_s и применяем пертурбационную процедуру (см. раздел (2.1)). Она приводит к двум уравнениям:

$$\mathbf{u}_s \nabla n'_s = \kappa \Delta n_s, \quad \langle \mathbf{u}_s \nabla n_s \rangle = \kappa \Delta n'_s; \quad (3.6)$$

здесь

$$n'_s = \langle n \rangle + \sum_{r=1}^{s-1} n_r$$

— "крупномасштабная" (по сравнению с n_s) концентрация. С помощью первого из уравнений выражаем n_s через n'_s и вычисляем среднее

$$\langle \mathbf{u}_s n_s \rangle = -\chi_s \Delta n'_s, \quad (3.7)$$

где χ_s — вклад в коэффициент турбулентной диффузии от поля u_s :

$$\chi_s = \frac{1}{3\kappa} \int_{(\Delta_s)} k^{-2} \langle u^2 \rangle_k dk. \quad (3.8)$$

Через $\langle u^2 \rangle_k$ обозначена спектральная плотность турбулентности, нормированная условием

$$\int_0^\infty \langle u^2 \rangle_k dk = \langle u^2 \rangle.$$

Теперь полный коэффициент диффузии, учитывающий молекулярную диффузию и турбулентные пульсации u_s , равен сумме $\kappa + \chi_s$. Неусредненная часть концентрации примеси $\langle n \rangle + n_1 + \dots + n_{s-1} = n'_s$ эволюционирует с таким эффективным коэффициентом диффузии в турбулентном поле $u_1 + u_2 + \dots + u_{s-1}$.

Проводя аналогичным образом усреднение поля u_{s-1} в следующем сферическом слое, получим добавку к эффективному коэффициенту диффузии

$$\chi_{s-1} = \frac{1}{3(\kappa + \chi_s)} \int_{(\Delta_{s-1})} k^{-2} \langle u_k \rangle dk. \quad (3.9)$$

Повторяя эту процедуру и считая толщину сферических оболочек малой ($\Delta_r \rightarrow dk$), получим дифференциальное соотношение

$$d\chi(k) = \frac{\langle u^2 \rangle_k dk}{3(\kappa + \chi(k))k^2}, \quad (3.10)$$

где $\chi(k)$ — эффективный коэффициент турбулентной диффузии, учитывающий вклад всех гармоник с волновыми векторами больше k . Отметим еще раз, что он вычисляется без всякого учета крупномасштабной турбулентности с волновыми векторами, меньшими k . Интегрируя (3.10) с граничным условием $\chi(\infty) = 0$, получаем

$$(\kappa + \chi(k))^2 = \frac{2}{3} \int_k^\infty k'^{-2} \langle u^2 \rangle_{k'} dk' + \kappa^2. \quad (3.11)$$

Коэффициент диффузии χ_0 , учитывающий все поле турбулентных скоростей, получим, устремляя $k \rightarrow 0$. При большом числе Пекле в основном масштабе турбулентности $uL/\kappa \gg 1$ молекулярная диффузия играет малую роль и (3.11) дает

$$\chi_0 = \left(\frac{2}{3} \int_0^\infty k^{-2} \langle u^2 \rangle_k dk \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

По порядку величины $\chi_0 \approx uL$, что является разумной количественной оценкой турбулентной диффузии.

В работах [54, 59] исследовалась модель переноса скалярной примеси стационарным полем случайных турбулентных скоростей, причем поле скоростей могло содержать как вихревую, так и потенциальную части. Следует иметь в виду, что такие расчеты носят модельный характер, поскольку в природе нельзя реализовать случайно неоднородное, но стационарное поле скоростей (по крайней мере, в трехмерном пространстве). Авторы ренормгрупповым методом исследовали асимптотическую зависимость от времени квадрата смещения частицы из первоначального положения $\overline{R^2(t)}$. В зависимости от соотношения между числом измерений пространства d и поведением корреляционной функции скоростей на больших расстояниях (предполагался степенной закон $\sim r^{-d}$) возможна как нормальная диффузия ($\overline{R^2(t)} \sim t$), так и различные аномальные режимы, когда $\overline{R^2(t)} \sim t^{2\nu}$ с $\nu \neq 1/2$. В некоторых случаях возникает логарифмическая зависимость $\overline{R^2(t)}$ от времени. Построение уравнений, которым удовлетворяет усредненная функция распределения, в указанных работах не производилось и кинетические коэффициенты не вычислялись. Вопрос о медленных недиффузионных режимах распространения частиц (локализация) в случайной сильно неоднородной двумерной среде обсуждался Обуховым [60]. В указанной работе показано, что явление локализации обусловлено наличием случайных "ловушек", т.е. распределением вероятностей переходов частицы, при котором она движется по почти замкнутым путям.

Фитиан и Куртис [4] решали задачу об усреднении уравнения типа (1.1) с целью вычисления эффективного коэффициента диффузии, учитывающего турбулентный перенос. Локальный коэффициент диффузии κ считался заданной регулярной величиной, движение — несжимаемым, а распределение вероятностей для поля скоростей — гауссовым, т.е. высшие четные корреляторы выражались через парный, а нечетные корреляторы считались равными нулю. Авторы использовали метод, ана-

логичный методу самосогласованного поля в атомной физике: они ввели в исходное уравнение некоторый неизвестный коэффициент диффузии, учитывающий локальную диффузию и часть турбулентной, и затем определили поправки к нему по теории возмущений, используя указанные выше предположения о свойствах турбулентности. Выбранный авторами способ самосогласования результатов привел к уравнению для искомого коэффициента диффузии χ вида

$$\chi - \kappa = F(\chi), \quad (3.13)$$

где правая часть $F(\chi)$ вычислялась в виде разложения по параметру $\langle u^2 \rangle$. Драммонд и др. [61] провели численное моделирование диффузии в турбулентной среде по методу Крейчнана [62] с целью проверки точности самосогласованной теории Фитиана и Куртиса. Они нашли хорошее согласие с результатами [4] (отличие не превышало нескольких процентов) для случая отражательно-инвариантной турбулентности. Для гиротропной же турбулентности численное моделирование давало значение χ , заметно (на десятки процентов) превышающее теоретические значения. Причина такого расхождения неясна.

Процессы перемешивания пассивной скалярной и векторной примеси в гидродинамических течениях имеют исключительно важное значение для очень широкого круга проблем техники и естествознания. Поэтому данному вопросу посвящено большое число статей и монографий. Авторы не ставят здесь перед собой задачу охватить максимально широкий круг проблем, а рассматривают в основном идеи и методы так или иначе относящиеся к развитию и применению методов перенормировки и самосогласованного поля для количественного описания переноса частиц в стохастической среде. Тем не менее, для уточнения предмета обсуждения отметим, что существует две возможности стохастического перемешивания частиц в жидкости и газе. Первая реализуется даже в ламинарных потоках жидкости при пренебрежении эффектами молекулярной диффузии и обусловлена появлением стохастических траекторий частиц в детерминированных течениях. Современные методы описания таких систем основаны на результатах теории динамических систем и допускают кинетическое описание [40]. Особенно наглядно это проявляется при описании перемешивания в двумерных течениях несжимаемой жидкости. В этом случае после введения потенциала поля скоростей $\phi(x, y, t)$ уравнения движения жидкой частицы приобретают гамильтонову форму:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Структура фазового пространства системы (3.14) с одномерным "гамильтонианом" может быть детально исследована, а имеющиеся стохастические траектории частиц [40] перемешивают вещество в детерминированном ламинарном течении. Аналогично стохастические траектории частиц приводят к перемешиванию и в плазменных системах со сложными конфигурациями магнитных полей; см. в частности статьи [11, 41].

Другая возможная причина турбулентного переноса — взаимодействие частиц со стохастическими полями. Мы в данном обзоре рассматриваем в основном системы частиц в стохастических полях с сильными длинноволновыми флуктуациями, описываемых статистическими характеристиками низких порядков (см., однако, в разделе 7).

Особый интерес вызывает в последнее время проблема кинетического описания перемешивания в среде с градиентом пассивной примеси [42, 43]. Важную роль в этой проблеме играет перемежаемость распределения пассивной примеси. Так, в работе Голлуба и др. [42] экспериментально продемонстрировано, что распределение вероятностей флуктуаций температуры в среде с поддерживаемым средним градиентом температуры экспоненциальное ($\exp(-|\Delta T|/\zeta)$), а не гауссово при достаточно больших числах Рейнольдса. Величина ζ при этом порядка произведения среднего градиента температуры на длину корреляции флуктуаций скорости потока. Данный результат может привести к существенным поправкам в теории звездной эволюции, поскольку часто излучательная способность вещества сильно зависит от локальной температуры. Широкое (не гауссово) распределение вероятности флуктуаций даст заметные поправки к балансу излучения. В разделе 7 данного обзора мы детально обсудим другой пример перемежаемых систем — распределение заряженных частиц в системе со сверхзвуковой и сверхальвеновской турбулентностью.

3.2. Перенормировка кинетических коэффициентов в физике плазмы. Методы перенормировок в кинетике плазмы используются достаточно широко, по-видимому, начиная с работы Дюпри [63], где автор рассматривал проблему нелинейного уширения резонансов в задаче о взаимодействии типа волна—частица в турбулентной плазме. Перенормированное уравнение Лиувилля для пробных частиц

ранее было получено Кубо [46]. Проблемы вычисления перенормированных кинетических коэффициентов на основе уравнения для средней функции Грина, описывающей отклик системы на малое возмущение, детально обсуждались в работах Каданова и Мартина [47a], а также Мартина, Сигтия и Роуза [47b] на основе функционального метода.

Галеев и Зеленый [10] рассмотрели задачу о диффузии электронов поперек магнитного поля в плазме с разрушенными магнитными поверхностями и с редкими соударениями. Исходя из дрейфового кинетического уравнения с интегралом столкновений типа БГК, с учетом нелинейного уширения резонансного взаимодействия волна—частица за счет эффективной поперечной диффузии авторы работы [10] получили уравнение для определения коэффициента поперечной диффузии $\chi_{\perp}$

$$\chi_{\perp} = \chi_{\parallel} \sum_k \frac{B_{\perp k}^2}{B_0^2} - \frac{\nu_{\text{eff}}}{k_{\parallel}^2 \chi_{\parallel} + \nu_{\text{eff}}}, \quad (3.15)$$

где эффективная частота рассеяния электронов на флуктуациях ν_{eff} пропорциональна искомому коэффициенту $\chi_{\perp}$. Решение уравнения (3.15) относительно $\chi_{\perp}$ привело к зависимости вида

$$\chi_{\perp} \approx \chi_{\parallel} \left(\sum_k \frac{B_{\perp k}^2}{B_0^2} \right)^2 \frac{\lambda_e^2}{L_x^2}, \quad (3.16)$$

где λ_e — пробег электрона относительно кулоновских соударений, а длина L_x связана с зависимостью продольного (по отношению к невозмущенному магнитному полю) волнового вектора возмущений от поперечной координаты (шир) [10]. Важной особенностью (3.16) является пропорциональность $\chi_{\perp}$ четвертой степени амплитуды флуктуаций магнитного поля (см. далее в разделе 6).

Кадомцев и Погуце [9] использовали перенормировку при вычислении коэффициента диффузии магнитных силовых линий стохастического магнитного поля. Если на однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ наложена малая поперечная случайная составляющая $\mathbf{B}'$, то силовая линия результирующего магнитного поля будет испытывать случайные отклонения от направления $\mathbf{B}_0$. При $\mathbf{b} = \mathbf{B}'/B_0$ отклонение на длине z вдоль $\mathbf{B}_0$ выразится в виде интеграла

$$\mathbf{r}_{\perp} = \int_0^z \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_{\perp}) dz. \quad (3.17)$$

Простая оценка этого интеграла возможна только при $b \ll 1$, когда в подынтегральном выражении можно положить $\mathbf{r}_{\perp} \approx 0$. Возводя в квадрат и

усредняя, находим

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \int_0^z \int_0^z \langle \mathbf{b}(z', 0) \mathbf{b}(z'', 0) \rangle dz' dz''. \quad (3.18)$$

При $z \gg L_{\parallel}$ — продольной корреляционной длины случайного поля — получаем [9]

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = 4\chi_F z, \quad (3.19)$$

где

$$\chi_F = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{b}(z, 0) \mathbf{b}(0, 0) \rangle dz = \frac{1}{4} \frac{\langle B'^2 \rangle}{B_0^2} L_{\parallel} \quad (3.20)$$

— коэффициент диффузии магнитных силовых линий. Последнее равенство служит определением корреляционной длины $L_{\parallel}$. Результаты (3.18), (3.19) получены по теории возмущений. Условие ее применимости состоит в слабой зависимости $\mathbf{b}(z, \mathbf{r}_{\perp})$ от $\mathbf{r}_{\perp}$ на длине интегрирования, что приводит к условию $r_{\perp} \ll L_{\perp}$ или согласно (3.19), (3.20) к

$$(B'/B_0)L_{\parallel}/L_{\perp} \ll 1. \quad (3.21)$$

Если поперечная корреляционная длина $L_{\perp}$ значительно меньше продольной, то критерий (3.21) может нарушиться и для малых относительных амплитуд случайного поля, $B' \ll B_0$. Расчет коэффициента диффузии для случая "сильной" турбулентности авторы производят следующим образом. Они рассматривают плотность N числа некоторых "меченых" случайных силовых линий. По смыслу этого понятия плотность числа линий остается постоянной, если двигаться вдоль них самих; поэтому

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \mathbf{b} \nabla N = 0. \quad (3.22)$$

Далее производится обычная процедура усреднения уравнения (3.22); положив $N = N_0 + N'$, $N_0 = \langle N \rangle$, $\langle N' \rangle = 0$, получим два уравнения

$$\frac{\partial N_0}{\partial z} = -\text{div}(\mathbf{b}N'), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial N'}{\partial z} + \mathbf{b} \nabla N' - \langle \mathbf{b} \nabla N' \rangle = -\mathbf{b} \nabla N_0. \quad (3.24)$$

Будем искать для N_0 уравнение диффузионного типа, в связи с чем положим

$$-\text{div}(\mathbf{b}N') = \chi_F \Delta_{\perp} N_0; \quad (3.25)$$

здесь χ_F — неизвестный коэффициент диффузии. Его можно вычислить, если найти из уравнения (3.24) связь между N' и N_0 . Для нахождения такой связи авторы упрощают уравнение (3.24), заменяя его неоднородным уравнением диффузии:

$$\frac{\partial N'}{\partial z} - \chi_F \Delta_{\perp} N' = -\mathbf{b} \nabla N_0. \quad (3.26)$$

Основная погрешность при такой замене состоит, по-видимому, в использовании для быстро флуктуирующей величины N' того же коэффициента диффузии χ_F , что и для сглаженной функции N_0 . Величину погрешности не представляется возможным оценить на основе использованных выше соображений. Однако, если принять указанное приближение, то из двух соотношений (3.25), (3.26) нетрудно получить некоторое самосогласованное нелинейное уравнение, определяющее коэффициент диффузии магнитных силовых линий [9]:

$$\chi_F = \frac{1}{2} \int b_k^2 (ik_z + \chi_F k_{\perp}^2)^{-1} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (3.27)$$

(множитель 1/2 возник из-за усреднения по азимутальному углу $k_{\perp}$). При $|k_z| \gg \chi_F k_{\perp}^2$, что соответствует критерию применимости теории возмущений (3.21), получим квазилинейный результат (3.20). В противоположном предельном случае $|k_z| \ll \chi_F k_{\perp}^2$ имеем перенормированное значение коэффициента диффузии

$$\chi_F = \left(\frac{1}{2} \int b_k^2 k_{\perp}^{-2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

(ср. с (3.12)). По порядку величины $\chi_F \approx B' L_{\perp} / B_0$ пропорционален первой степени амплитуды случайного поля, а не ее квадрату.

В работе [9] вычислен также коэффициент электронной теплопроводности поперек среднего магнитного поля. Обсуждение результатов мы проведем в разделе 6, где речь пойдет о сходной проблеме поперечной диффузии частиц.

Методы перенормировки находят также применение при решении проблем переноса заряженных частиц в установках с неоднородной плазменной турбулентностью; см. обзор Хортона [64].

4. Кинетика частиц в сильно турбулентной плазме.

Перенормировка кинетических коэффициентов. В разделе 2 в рамках теории возмущений получено уравнение переноса частиц (2.11), усредненное по ансамблю турбулентных пульсаций. Нетрудно видеть, что оно при определенных условиях сохранит свой вид (с измененными по сравнению с (2.12)—(2.15) кинетическими коэффициентами) и в случае сильных длинноволновых флуктуаций с $uL > \kappa$, где теория возмущений неприменима. Действительно, для того чтобы искомое уравнение для средней функции распределения имело форму уравнения Фоккера—Планка, требуется предположение о достаточной плавности F . Это условие будет соблюдено, если усреднение производится по пространственным областям, размеры которых

заметно превышают основной масштаб турбулентности L . Для обеспечения дифференциальной формы ускорительного члена в усредненном уравнении переноса требуется, чтобы изменение импульса частицы Δp на корреляционной длине L было малым, $\Delta p \ll p$.

При выполнении указанных условий усредненное уравнение переноса и в случае сильной турбулентности сохранит форму (2.11), и задача сводится лишь к нахождению коэффициентов диффузии χ и D , которые теперь не будут описываться формулами (2.12), (2.15). Вычисление указанных коэффициентов мы произведем ниже в несколько этапов, пользуясь методом, развитым в работе авторов [31], постепенно усложняя задачу. Начнем со случая несжимаемой среды $\text{div } \mathbf{u} = 0$, в которой отсутствует эффект адиабатического ускорения, а коэффициент мелкомасштабной диффузии κ можно считать не флуктуирующей постоянной величиной.

4.1. Турбулентный перенос примеси в несжимаемой среде. Будем искать усредненное по крупномасштабным флуктуациям уравнение переноса в диффузионной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \quad (4.1)$$

с неизвестным тензором диффузии $\chi_{\alpha\beta}$. Рассмотрим наряду с (4.1) другое уравнение для функции распределения, в котором усреднение выполнено по всем гармоникам поля скоростей за исключением тех, которые относятся к узкому интервалу волновых чисел шириной Δk :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = (\chi_{\alpha\beta} - \Delta \chi_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - \delta u_\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r_\alpha}; \quad (4.2)$$

здесь

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\Delta k} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} u_{\mathbf{k}\omega} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \quad (4.3)$$

— неусредненная часть скорости; интегрирование по $d^3 k$ производится в пределах сферического слоя толщиной Δk , вблизи некоторого произвольно выбранного k . $\tilde{F}$ — недоусредненная функция распределения, которую еще надлежит усреднить по случайной скорости $\delta \mathbf{u}$, $\chi_{\alpha\beta} - \Delta \chi_{\alpha\beta}$ — коэффициент диффузии, обусловленный полем турбулентных скоростей за вычетом $\delta \mathbf{u}$. Усреднение (4.2) по ансамблю $\delta \mathbf{u}$ должно скомпенсировать добавку $-\Delta \chi_{\alpha\beta}$ и привести к уравнению (4.1) с полным тензором диффузии $\chi_{\alpha\beta}$.

Заметим, что недоусредненная функция распределения $\tilde{F}$, имеющая вспомогательный характер, зависит от радиуса k выбранного сферического слоя. Но перенормированные кинетические коэффи-

циенты, которые являются наблюдаемыми физическими величинами, выражаются через интегралы по всему пространству волновых чисел и, естественно, не зависят от произвольного выбора сферического слоя. Не зависит от него также и полностью усредненная наблюдаемая функция распределения F .

Усреднение уравнения (4.2) можно выполнить по теории возмущений, пользуясь малостью $\delta \mathbf{u}$. Ввиду произвольности выбора $\Delta k \ll k$ такой подход не ограничивает точности получаемых результатов. Однако при этом предполагается, что гармоники Фурье поля скоростей из интервала Δk не коррелируют с гармониками вне этого интервала. Мы будем ниже всюду предполагать, что турбулентность однородна и стационарна и использовать правило усреднения гармоник Фурье

$$\langle u_{\mathbf{k}\omega} u_{\mathbf{k}'\omega'} \rangle = (2\pi)^4 \langle u_{\mathbf{k}\omega}^2 \rangle \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (4.4)$$

Такое предположение согласуется с модельными представлениями о турбулентности колмогоровского типа и с возможностью описывать ее заданием спектральной плотности энергии.

Полагая

$$\tilde{F} = F + \delta F, \quad \langle \delta F \rangle = 0, \quad (4.5)$$

где скобками обозначено усреднение по ансамблю $\delta \mathbf{u}$, и произведя усреднение (4.2), получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\chi_{\alpha\beta} - \Delta \chi_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - \left\langle \delta u_\alpha \frac{\partial \delta F}{\partial r_\alpha} \right\rangle. \quad (4.6)$$

Здесь поправка δF к функции распределения может вычисляться из уравнения

$$\frac{\partial \delta F}{\partial t} - \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \delta F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = -\delta u_\alpha \frac{\partial F}{\partial r_\alpha}, \quad (4.7)$$

в котором отброшены члены квадратичные по δu_α , в том числе и $\Delta \chi_{\alpha\beta}$. Решение последнего уравнения выразим через функцию Грина G оператора, стоящего в левой части:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (4.8)$$

Записав решение уравнения (4.7) и подставив его в (4.6), получим интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\chi_{\alpha\beta} - \Delta \chi_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \langle \delta u_\alpha(\mathbf{r}, t) \delta u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle F(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'. \quad (4.9)$$

Чтобы привести его к виду (4.1), необходимо предположить достаточную гладкость функции распределения F на корреляционной длине L и корреляционном времени L/u . Это позволяет заменить в (4.9) $F(\mathbf{r}', t')$ на $F(\mathbf{r}, t)$ и определить добавку к тензору диффузии за счет поля

скоростей $\delta \mathbf{u}$:

$$\Delta \chi_{\alpha\beta} = \int G(\vec{\rho}, \tau) \langle \delta u_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \delta u_{\beta}(\mathbf{r}', t') \rangle d^3\rho d\tau, \quad (4.10)$$

где $\vec{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau = t - t'$. Эта формула отличается от аналогичного выражения (2.12) в двух важных отношениях: она содержит в отличие от (2.12) коррелятор для малой части поля скоростей $\delta \mathbf{u}$, но в функцию Грина теперь входит полный ($\chi_{\alpha\beta}$), а не мелкомасштабный ($\kappa_{\alpha\beta}$) тензор диффузии, учитывающий полное крупномасштабное поле скоростей.

Переходя к представлению Фурье и взяв функцию Грина согласно (4.8) в виде

$$G_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{-i\omega + k_{\mu}k_{\nu}\chi_{\mu\nu}}, \quad (4.11)$$

получим

$$\Delta \chi_{\alpha\beta} = k^2 \Delta k \int \frac{d\Omega_k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\langle u_{\alpha} u'_{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{i\omega + k_{\mu}k_{\nu}\chi_{\mu\nu}}, \quad (4.12)$$

где интегрирование проводится по углам вектора $\mathbf{k}$ и по частоте. Интегрирование этого выражения по всему k -пространству с использованием условия $\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}$ при $\omega = 0$ позволяет записать самосогласованную систему уравнений для определения компонент перенормированного тензора диффузии $\chi_{\alpha\beta}$

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} + \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\langle u_{\alpha} u'_{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{i\omega + k_{\mu}k_{\nu}\chi_{\mu\nu}}. \quad (4.13)$$

Поскольку неизвестные величины $\chi_{\mu\nu}$ входят под интеграл в качестве параметров, система (4.13) является алгебраической (не интегральной). Она упрощается в случае изотропной турбулентности. Подставляя в (4.13) корреляционный тензор скоростей в форме (2.18) (при $S(k, \omega) = 0$) и учитывая четность спектральной функции $T(k, \omega)$ по аргументу ω , а также изотропию тензоров $\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta}$ и $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}$, получим одно трансцендентное уравнение, определяющее χ :

$$\chi = \kappa + \frac{2\chi}{3} \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{k^2 T(k, \omega)}{\omega^2 + k^4 \chi^2}. \quad (4.14)$$

Аналитическое решение этого уравнения легко получить для "замороженной" турбулентности, т.е. в предположении $T(k, \omega) \sim \delta(\omega)$:

$$\chi = \frac{1}{2} \kappa + \left[\frac{\kappa^2}{4} + \frac{2}{3} \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} k^{-2} T(k, \omega) \right]^{1/2}. \quad (4.15)$$

Решение, удовлетворяющее естественному условию $\chi \geq 0$, всегда существует, поскольку $T(k, \omega) \geq 0$. Нефизические (отрицательные или комплексные) значения χ свидетельствовали бы о неприменимо-

сти метода, либо об отсутствии диффузионного режима распространения частиц (аномальная диффузия). При $\kappa \rightarrow 0$ решение (4.15) отличается от результата Моффата (3.1) множителем $2^{-1/2}$, поскольку

$$\langle u^2 \rangle_k dk = 2dk \int \frac{k^2 d\Omega_k d\omega}{(2\pi)^4} T(k, \omega).$$

При более реалистичных спектрах турбулентности следует получать численные решения уравнения (4.14). Это сделать нетрудно, и результаты таких расчетов будут приведены ниже в разделе 4.2. Остановимся здесь только на сопоставлении результатов расчета перенормированного коэффициента диффузии с данными численного эксперимента. Такое сравнение для нас важно в связи с тем, что предложенный выше способ вычисления перенормированных кинетических коэффициентов является приближенным. Основная погрешность метода, по видимому, состоит в том, что мы рассматриваем Диффузионное распространение частиц на всех масштабах турбулентности $l \leq L$, тогда как такое рассмотрение законно лишь для расстояний $R \geq L$. Кроме того, перенормированный тензор диффузии выражается только через парный корреляционный тензор турбулентности $\langle u_{\alpha} u'_{\beta} \rangle$. Поэтому следует ожидать значительной погрешности, если высшие корреляторы содержат существенную информацию о структуре турбулентности (сильная перемежаемость).

В работе Драммонда и др. [61] приведены результаты численного моделирования пространственного переноса частиц несжимаемым одномасштабным гидродинамическим течением с гауссовым распределением реализаций амплитуд скорости. Спектр поля скоростей, реализованный в численном эксперименте [61], имеет вид

$$\frac{T(k, \omega)}{(2\pi)^4} = \frac{u_0^2}{4(2\pi)^{3/2} k_0^2 \omega_0} \delta(k - k_0) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right). \quad (4.16)$$

Спектр (4.16) одномасштабный, поэтому формально развитый выше подход для вычисления кинетических коэффициентов неприменим. Но нетрудно убедиться, что всю приведенную выше аргументацию можно переформулировать для малого участка частотного спектра $\Delta\omega$, при этом мы придем снова к уравнению (4.14) для перенормированного коэффициента диффузии. Поэтому можно провести численный расчет для спектра (4.16) с помощью уравнения (4.14). Результаты расчета в широком интервале параметров ω_0 и k_0 хорошо согласуются с данными

численного эксперимента [61], максимальное отклонение не превышает 10%, а для большинства точек оно составляет 3–6%. Это подтверждает разумный характер приближений и возможность использовать предложенный метод для описания переноса и ускорения частиц крупномасштабной турбулентностью. Отмеченный выше недостаток используемого метода, связанный с применением диффузионного приближения на малых масштабах, можно устранить в рамках применяемого самосогласованного подхода. Для этого будем искать усредненное уравнение переноса, справедливое для любых расстояний $R \gg \Lambda$, где Λ — локальный (мелкомасштабный) транспортный пробег, в интегральной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \int \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') F(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'. \quad (4.17)$$

Ядро $\chi_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau)$ должно корректно описывать распространение частиц в пределах одной крупномасштабной области корреляции, усредненное по ансамблю реализаций турбулентности; если на таких расстояниях и временах функция распределения изменяется слабо, то приходим к обычному диффузионному уравнению (4.1) с коэффициентом диффузии

$$\chi_{\alpha\beta} = \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau \chi_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau). \quad (4.18)$$

Вычислим ядро $\chi_{\alpha\beta}(\rho, \tau)$ по изложенной выше самосогласованной схеме. Запишем неполностью усредненное уравнение переноса, аналогичное (4.2),

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \int [\chi_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) - \Delta \chi_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau)] \tilde{F}(\mathbf{r}', t') \times \\ \times d^3 r' dt' - \delta u_\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r_\alpha}, \quad (4.19)$$

где $\delta \mathbf{u}$ — определенная выше малая часть поля скоростей, относящаяся к сферическому слою в k -пространстве толщиной Δk . Далее, применяя теорию возмущений, усредняем последнее уравнение и находим вклад в ядро от поля $\delta \mathbf{u}$:

$$\Delta \chi_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) = G(\vec{\rho}, \tau) \langle \delta u_\alpha(\mathbf{r}, t) \delta u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (4.20)$$

Это позволяет представить искомое ядро в виде

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \kappa_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') + \\ + G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \langle \delta u_\alpha(\mathbf{r}, t) \delta u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (4.21)$$

где G — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \int \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t_1) \times$$

$$\times G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', t_1 - t') d^3 r_1 dt_1 =$$

$$= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (4.22)$$

Без затруднений может быть найден только ее фурье-образ:

$$G_{\mathbf{k}\omega} = [-i\omega + \kappa_\mu k_\nu \chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)]^{-1}, \quad (4.23)$$

где теперь $\chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ — фурье-образ искомого ядра.

После перехода к фурье-представлению в уравнении (4.21) и использования (4.23) приходим к нелинейному интегральному уравнению, определяющему $\chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$\chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \kappa_{\mu\nu} + \int \frac{d^3 k' d\omega'}{(2\pi)^4} \frac{\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{-i\omega' + \kappa'_\mu k'_\nu \chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}', \omega')}. \quad (4.24)$$

Это уравнение обобщает (4.13) и может служить для описания переноса частиц на любые расстояния, превышающие локальный транспортный пробег, в том числе и такие, которые меньше крупномасштабной корреляционной длины L . Для перехода от (4.24) к (4.13) нужно сделать два приближения: а) положить $k \ll k'$, $\omega \ll \omega'$ и пренебречь зависимостью от $\mathbf{k}$ и ω в правой и левой частях равенства; б) заменить под интегралом функцию частоты и волнового вектора $\chi_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ постоянным тензором $\chi_{\mu\nu}(0, 0)$, который согласно (4.18) и является тензором диффузии. Таким образом, более точное описание переноса на малых расстояниях существенно усложняет математическую структуру теории.

4.2. Перенос частиц в сжимаемой среде. Слабое ускорение на корреляционной длине. Выполним теперь усреднение полного уравнения (1.3), включающего и ускорительный член. Эффект ускорения в рассматриваемом приближении возникает только в сжимаемой среде, $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$. Мы, однако, будем для простоты игнорировать флуктуации мелкомасштабного тензора диффузии, связанные с флуктуациями плотности. Это допустимо при сильном турбулентном переносе, $uL \gg \kappa$, когда мелкомасштабный коэффициент диффузии κ можно рассматривать как "затравочную" величину, точное значение которой несущественно. Роль флуктуаций плотности среды будет рассмотрена ниже в разделе 4.5.

Как уже отмечалось выше, усредненное уравнение переноса будет иметь дифференциальную форму

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} +$$

$$+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[D(p) + D_{\alpha\beta}^*(p) \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right] \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (4.25)$$

если ускорение на корреляционной длине мало и функция распределения усреднена по областям пространства, линейный размер которых превышает L . Вклады в коэффициенты диффузии от малой вариации поля скоростей $\delta \mathbf{u}$ можно вычислить с помощью уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & (\chi_{\alpha\beta} - \Delta \chi_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[(D - \Delta D) + \right. \\ & \left. + (D_{\alpha\beta}^* - \Delta D_{\alpha\beta}^*) \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right] \frac{\partial F}{\partial p} - \\ & - \left\langle \delta u_\alpha \frac{\partial \delta F}{\partial r_\alpha} \right\rangle + \frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left\langle \delta F \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial r_\alpha} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.26)$$

в котором поправка δF находится по теории возмущений из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta F}{\partial t} - \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \delta F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - \\ - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(D(p) + D_{\alpha\beta}^*(p) \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right) \frac{\partial \delta F}{\partial p} = \\ = -\delta u_\alpha \frac{\partial F}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial r_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Поскольку решение этого уравнения достаточно построить для расстояний, не превышающих корреляционной длины L , на которой ускорение частиц по предположению мало, то в соответствующей функции Грина можно не учитывать эффект ускорения и воспользоваться уравнением (4.8) и его решением (4.11).

Повторяя расчеты раздела 4.1, получим

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau \langle u_\beta(\mathbf{r}, t) u_\gamma(\mathbf{r}', t') \rangle \rho_\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho_\gamma}, \quad (4.28)$$

$$D = \frac{p^2}{9} \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau \langle \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t') \rangle G(\rho, \tau), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^* = & \frac{p^2}{18} \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau \langle \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \times \\ & \times \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t') \rangle G(\rho, \tau) \rho_\alpha \rho_\beta. \end{aligned} \quad (4.29')$$

Равенство (4.28) определяет тензор пространственной диффузии $\chi_{\alpha\beta}$ как решение системы трансцендентных уравнений. Он входит не только в левую часть этого равенства, но и в правую (через функцию Грина G). После нахождения $\chi_{\alpha\beta}$ можно

вычислить коэффициент диффузии в пространстве импульсов D с помощью (4.29).

Для изотропной турбулентности, используя корреляционный тензор (2.18) и полагая $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}$, $\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}^* = D^* \delta_{\alpha\beta}$, получим более простые уравнения:

$$\chi = \kappa + \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[\frac{2T + S}{i\omega + k^2 \chi} - \frac{2k^2 \chi S}{(i\omega + k^2 \chi)^2} \right], \quad (4.30)$$

$$D(p) = \frac{p^2}{9} \chi \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{k^4 S(k, \omega)}{\omega^2 + k^4 \chi^2}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} D^* = & \frac{p^2}{9} \chi \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} k^2 S(k, \omega) \left[\frac{1}{(i\omega + k^2 \chi)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4k^2 \chi}{3(i\omega + k^2 \chi)^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Слагаемое в уравнении (4.25), содержащее коэффициент $D_{\alpha\beta}^*$, описывает взаимное влияние эффектов ускорения и пространственной диффузии. Оно может иметь тот же порядок величины, что и первое в правой части (4.25) диффузионное слагаемое. Если, в частности, зависимость функции распределения от импульса в некоторой области пространства импульсов имеет степенной характер, $F(p) \sim p^{-\gamma}$, то наличие члена с перекрестными производными приведет к изменению коэффициента пространственной диффузии χ и замене его на $\chi_{\text{eff}} = \chi + \gamma(\gamma - 3)D^* p^{-2}$.

4.3. Кинетическое уравнение с учетом сильного ускорения частиц на длине корреляции. Кинетика заряженных частиц в случайных электромагнитных полях различных физических систем детально изучалась в рамках приближения Фоккера — Планка (ФП); см., например, [65, 66]. Условие применимости этого приближения сводится, как правило, к требованию малости изменения импульса и (или) энергии частицы на длине корреляции L или за время корреляции τ_c случайного поля. Поэтому использование приближения ФП ограничено либо рассмотрением частиц с достаточно большой энергией, либо систем с короткокоррелированными полями. С другой стороны, решение многих задач, укажем, в частности, на проблему формирования спектров космических лучей низких энергий ($E \leq 1$ ГэВ) в Галактике, требуют выхода за пределы приближения ФП. В разделах 4.3 и 4.4 мы обсудим особенности формирования спектров заряженных частиц, связанных с сильным изменением энергии частиц на длине корреляции в системе с сильной длинноволновой турбулентностью МГД-типа (см. [67]).

Для анализа систем с сильным изменением величины импульса на масштабе корреляции представим кинетическое уравнение, усредненное по ансамблю флуктуаций в интегральной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \int_0^\infty d\eta' \chi_{\alpha\beta}(\eta - \eta') \frac{\partial^2 F(\mathbf{r}, \eta', t)}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \int_{-\infty}^\infty D(\eta - \eta') F(\mathbf{r}, \eta', t) d\eta', \end{aligned} \quad (4.33)$$

где вместо импульса введена переменная $\eta = \ln(p/p_0)$, при этом

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.34)$$

Выполнив усреднение по всем гармоникам поля за исключением узкого интервала Δk , мы получим из уравнения переноса (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = & \int_{-\infty}^\infty d\eta' \chi'_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \tilde{F}(\mathbf{r}, \eta', t)}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \int_{-\infty}^\infty D'(\eta - \eta') \tilde{F} d\eta' - \\ & - \delta u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \tilde{F} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{F} \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial r_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Удобно выполнить преобразование Фурье по импульсной переменной η . Обозначив переменную Фурье через s , а фурье-образы $\tilde{F}$, $\chi'_{\alpha\beta}$ и D' соответственно через $\tilde{F}_s$, $\chi'_{\alpha\beta}(s)$ и $D'(s)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_s}{\partial t} = & \tilde{\chi}'_{\alpha\beta}(s) \frac{\partial^2 \tilde{F}_s}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - (s^2 + 3is) \tilde{D}'(s) \tilde{F}_s - \\ & - \delta u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \tilde{F}_s - \frac{is}{3} \tilde{F}_s \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta u_\alpha. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Теперь задача сведена к усреднению уравнения типа (4.18) и может быть решена тем же методом, что и в разделе 4.3. Флуктуирующая добавка к функции распределения δF_s дается выражением

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F}_s(\mathbf{r}, t) = & - \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t', s) \times \\ & \times \left\{ \delta u_\alpha(\mathbf{r}', t') \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} F_s(\mathbf{r}', t') + \right. \\ & \left. + \frac{is}{3} F_s(\mathbf{r}', t') \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} \delta u_\alpha(\mathbf{r}', t') \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где функция Грина

$$\begin{aligned} G(\rho, \tau, s) = & (4\pi \tilde{\chi}(s) \tau)^{-3/2} \exp[-(\rho^2 / 4\tilde{\chi} \tau) - \\ & - (s^2 + 3is) \tilde{D} \tau]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

После усреднения уравнения (4.35) с использованием (4.38) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_s}{\partial t} = & (\tilde{\chi}'_{\alpha\beta}(s) + \delta \tilde{\chi}_{\alpha\beta}(s)) \frac{\partial^2 \tilde{F}_s}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - \\ & - (s^2 + 3is) (\tilde{D}' + \delta \tilde{D}) \tilde{F}_s, \end{aligned} \quad (4.39)$$

т.е. преобразованное по Фурье уравнение (4.33), в котором

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\chi}_{\alpha\beta} = & \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau G(\rho, \tau, s) \left[\delta K_{\alpha\beta}(\rho, \tau) + \right. \\ & + \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial \rho_\gamma} \delta K_{\gamma\beta}(\rho, \tau) + \\ & \left. + \frac{1}{18} (s^2 + 3is) \rho_\alpha \rho_\beta \frac{\partial^2}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta} \delta K_{\gamma\delta} \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\delta \tilde{D} = -\frac{1}{9} \int d^3 \rho \int_0^\infty d\tau G(\rho, \tau, s) \frac{\partial^2 \delta K_{\alpha\beta}}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta}. \quad (4.41)$$

Полученные соотношения являются аналогом уравнений (4.24). Они позволяют записать трансцендентные уравнения, определяющие фурье-образы ядер интегральных операторов $\tilde{\chi}(s)$, $\tilde{D}(s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(s) = & \kappa + \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[\frac{2T(k, \omega) + S(k, \omega)}{\tilde{\chi}(s)k^2 + \lambda \tilde{D}(s) + i\omega} - \right. \\ & - \frac{2S(k, \omega) \tilde{\chi}k^2 (1 + \lambda/6)}{(\tilde{\chi}k^2 + i\omega + \lambda \tilde{D})^2} + \\ & \left. + \frac{4\lambda \tilde{\chi}^2 S k^4}{9(\tilde{\chi}k^2 + i\omega + \lambda \tilde{D})^3} \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\tilde{D}(s) = \frac{1}{9} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{k^2 S(k, \omega)}{\tilde{\chi}(s)k^2 + i\omega + \lambda \tilde{D}(s)}, \quad (4.43)$$

$$\lambda = s^2 + 3is.$$

В полученные уравнения, в отличие от (4.26), (4.27), входит переменная s в качестве независимого параметра. Их решения будут функциями указанного параметра. Кроме того, в подынтегральное выражение входят обе искомые функции $\tilde{\chi}(s)$ и $\tilde{D}(s)$.

При выводе системы (4.33), (4.42), (4.43) предполагалось, что затравочный коэффициент диффузии κ не зависит от импульса частиц.

4.4. Особенности спектров частиц, взаимодействующих с сильной длинноволновой турбулентностью. Рассмотрим плазменную систему с развитой, статистически однородной, изотропной МГД-турбулентностью. Электрические поля, индуцированные турбулентными движениями идеально проводящей среды с замороженным магнитным полем, приводят

к статистическому изменению энергии надтепловых заряженных частиц, Флуктуации магнитного поля с масштабами меньше или порядка гирорадиуса частицы ведут (в отсутствие кулоновских соударений) к эффективной изотропизации импульсов частиц и определяют их транспортный пробег Λ . Как и ранее, считаем длинноволновыми флуктуации с масштабами $L \gg \Lambda$. Функция распределения $G(\mathbf{r}, \eta, t)$ надтепловых частиц, усредненная по ансамблю турбулентных флуктуаций всех масштабов, удовлетворяет уравнению (4.33), полученному в разделе 4.3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \chi_{\alpha\beta}(\eta - \eta') \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \eta', t)}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} - \\ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} D(\eta - \eta') G(\mathbf{r}, \eta', t) d\eta' = \\ = Q\delta(\eta), \end{aligned} \quad (4.44)$$

где вместо импульса частицы p введена переменная $\eta = \ln(p/p_0)$, Q — темп генерации моноэнергетических частиц с импульсом p_0 стационарным источником. Уравнение (4.44) удобно решать в фурье-представлении по переменной η , образ которой обозначим через s . Фурье-образы ядер интегрального уравнения (4.44) выражаются через корреляционные функции турбулентности.

Исследуем весьма общий случай сжимаемой системы с протяженным спектром флуктуаций скорости [67]:

$$T(k) = S(k) = \frac{\langle u^2 \rangle}{4} C(\nu) \frac{k_0^{\nu-1}}{(k^2 + k_0^2)^{\nu/2+1}}, \quad (4.45)$$

$$k \leq k_{\max}$$

и лоренцевой формой частотной зависимости, характеризуемой законом дисперсии $\omega_0 = uk$, а также "шириной резонанса"

$$\gamma/2 = uk_0(k/k_0)^{(3-\nu)/2},$$

где

$$u \equiv \langle u^2 \rangle^{1/2},$$

а

$$C(\nu) \approx \frac{4\Gamma(\nu/2 + 1)}{3\pi^{3/2}\Gamma(\nu/2 - 1/2)}$$

— нормировочная постоянная. В этом случае из (4.42) и (4.44) с учетом эффектов конечного изменения энергии частицы на длине корреляции поля для фурье-образов ядер получим систему трансцендентных уравнений

$$D_1(s) = \varepsilon + C(\nu) \int_0^b \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{(\nu/2)+1}} \times$$

$$\begin{aligned} \times \left\{ \frac{\psi}{\psi^2 + \omega_0^2} - \frac{2}{3} D_1 x^2 \left(\frac{\lambda}{6} + 1 \right) \frac{\psi^2 - \omega_0^2}{(\psi^2 + \omega_0^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{9} \lambda D_1^2 x^4 \frac{\psi^3 - 3\psi\omega_0^2}{(\psi^2 + \omega_0^2)^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$D_2(s) = \frac{C(\nu)}{9} \int_0^b \frac{x^4 dx}{(x^2 + 1)^{\nu/2+1}} \frac{\psi}{\psi^2 + \omega_0^2}. \quad (4.47)$$

Безразмерные переменные в (4.46), (4.47) введены следующим образом:

$$\chi_{\alpha\beta}(s) \equiv uk_0^{-1} D_1(s) \delta_{\alpha\beta}, \quad D(s) \equiv uk_0 D_2(s),$$

$$b = k_{\max}/k_0, \quad x = k/k_0, \quad \varepsilon = \kappa k_0/u.$$

Здесь κ — "затравочный" коэффициент диффузии: ($\kappa \propto \Lambda$), обусловленный рассеянием частиц мелко-масштабными флуктуациями магнитного поля

$$\psi(x, \lambda) = D_1(s)x^2 + \lambda D_2(s) + \frac{\gamma(x)}{2}, \quad (4.48)$$

$$\lambda \equiv s^2 + 3is.$$

Кинетическое уравнение (4.44) с ядрами, определенными из соотношений (4.46) и (4.47) описывает энергетические спектры, формируемые посредством стохастического изменения энергии частиц (исходно моноэнергетичных) длинноволновыми флуктуациями электрического поля. Вывод уравнения (4.44) предполагает, что скорости надтепловых частиц превышают турбулентные скорости среды u . Величина параметра ε при этом может быть произвольной.

Если $\varepsilon > 1$, т.е. превалирует перенос частиц за счет рассеяния на мелко-масштабных флуктуациях магнитного поля, то решения уравнений (4.46) и (4.47) можно аппроксимировать как $D_1(s) \approx \varepsilon$ и $D_2(s) \approx (9\varepsilon)^{-1}$

Таким образом, имеем

$$\chi_{\alpha\beta}(\eta - \eta') \approx \kappa \delta(\eta - \eta') \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.49)$$

$$D(\eta - \eta') \approx u^2 (9\kappa)^{-1} \delta(\eta - \eta'). \quad (4.50)$$

Уравнение (4.44) при этом сводится к виду ФП,

Если $\varepsilon \ll 1$, перенос частиц определяется длинноволновыми флуктуациями скорости среды. В этом случае существенна перенормировка ядер уравнения (4.44). Зависимости D_1 и D_2 от s нетривиальны. При $s \leq 3$ образы ядер слабо зависят от s : $D_1(s) \approx D_1(0)$ и $D_2(s) \approx D_2(0)$. Далее, характер зависимости существенно зависит от протяженности спектра флуктуаций, характеризуемой параметром $b(b > 1)$. Если $\varepsilon b^{(\nu+1)/2} < 1$, то при

$$s \leq a(\nu),$$

где

$$a(\nu) = \left[\frac{9(3 - \nu)}{C(\nu)} \right]^{1/2} \sim 10,$$

зависимость ядер от s слабая. При $s \gg a(\nu)$ имеем следующие асимптотические выражения для фурье-образов ядер:

$$D_1(s) \rightarrow \varepsilon/2, \quad (4.51)$$

$$D_2(s) \rightarrow b^{(3-\nu)/2} (a(\nu)\lambda^{1/2})^{-1}. \quad (4.52)$$

В случае протяженного спектра флуктуаций $\varepsilon b^{(\nu+1)/2} \gg 1$ асимптотические зависимости (4.51) и (4.52) имеют место для $s \gg a(\nu)\varepsilon b^{(\nu+1)/2}$. Поведение функций $D_1(s)$ и $D_2(s)$ при $s \geq 3$, но до выхода на асимптотики зависит от конкретной формы "ширины резонанса" $\gamma(k)$, а также параметров ε и b . В частности, поведение $D_2(s)$ в указанной области может быть немонотонным. Характерно, что предельное значение (4.51) меньше затравочного коэффициента диффузии ε . Это свойство обусловлено сжимаемостью системы и носит общий характер (см. также в обзоре [54]).

Уравнения (4.46) и (4.47) для фурье-образов ядер можно решить численно. На рис. 1–4 приведены результаты численного расчета $D_2(s)$ и $D_1(s)$ для иллюстрации их зависимости от протяженности спектра флуктуаций скорости b и затравочного коэффициента диффузии ε . Образы ядер комплексны (тогда, как сами ядра, разумеется, вещественны). Для рассматриваемого спектра флуктуаций (4.45) мнимые части ядер малы по сравнению с вещественными. Наибольший интерес представляет функция $\text{Re } D_2(s)$, определяющая асимптотическое поведение энергетического спектра частиц, поэтому мы более полно представим $\text{Re } D_2(s)$ при различных значениях ε и b . Результаты численного расчета находятся в согласии с приближенными аналитическими результатами, представленными выше.

Отметим здесь, что хотя вывод уравнений (4.44), (4.46), (4.47) предполагает, как указано в разделе 4.3, что ε не зависит от импульса частиц, это предположение на самом деле не является заметным ограничением при использовании системы (4.33), (4.42), (4.43). Действительно, для весьма общего типа спектров флуктуаций (4.45), эффекты существенного отличия кинетического уравнения (4.33) от соответствующего уравнения вида Фоккера—Планка ярко выражены при малых значениях ε (безразмерного κ). Но в пределе малых ε , как показано, асимптотика $D_2(s)$ (4.52) не зависит от ε . Поэтому последующие результаты применимы и к случаю, зависящего от импульса затравочного коэффициента диффузии.

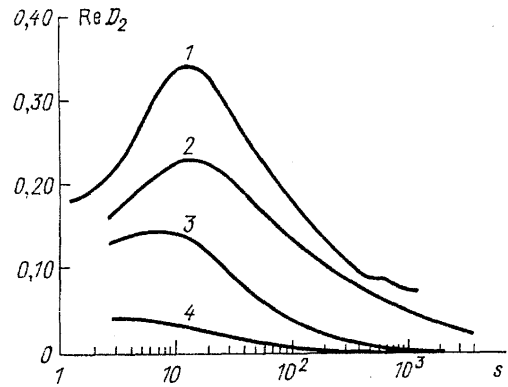


Рис. 1. Фурье-образы вещественной части ядра D_2 при $\varepsilon = 10^{-2}$, $b = 10, 10^2, 10^3, 10^4$

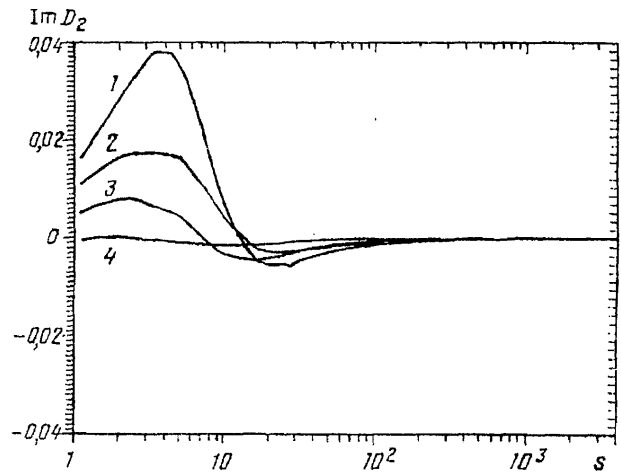


Рис. 2. Фурье-образы мнимой части ядра D_2 при $\varepsilon = 10^{-2}$, $b = 10, 10^2, 10^3, 10^4$

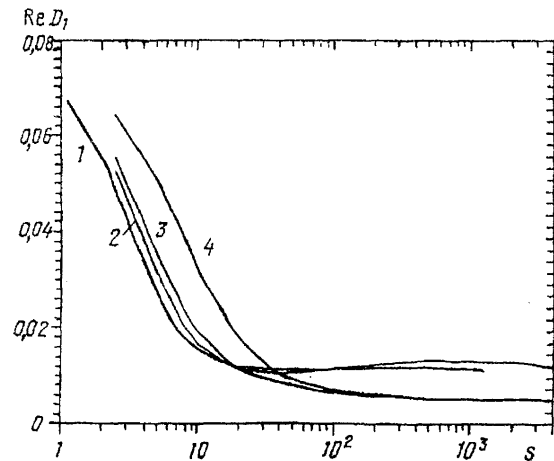


Рис. 3. Фурье-образы вещественной части ядра D_1 при $\varepsilon = 10^{-2}$, $b = 10, 10^2, 10^3, 10^4$

Аналитические выражения (4.51) и (4.52) позволяют исследовать спектры заряженных частиц в области импульсов, близких к импульсу инжекции. Для простоты, но не ограничивая существенно общности результатов, можно заменить в (4.44) оператор пространственной диффузии на его соб-

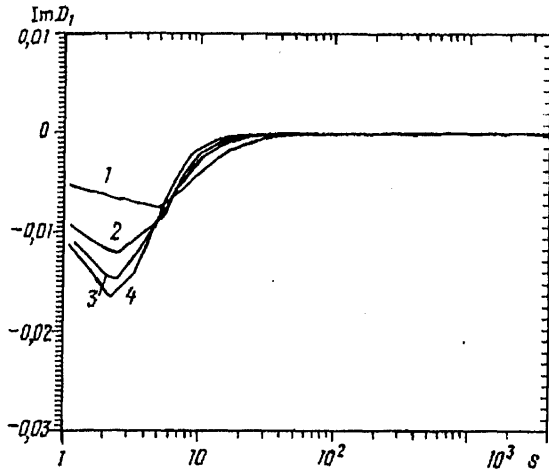


Рис. 4. Фурье-образы мнимой части ядра D_1 при $\epsilon = 10^{-2}$, $b = 10, 10^2, 10^3, 10^4$

ственное значение. Тогда фурье-образ стационарной функции распределения частиц (здесь это функция Грина) имеет вид

$$G(s) = \frac{Q(uk_0)^{-1}}{\xi D_1(s) + \lambda D_2(s)}, \quad (4.53)$$

где $\xi \approx (k_0 R)^{-2}$, а R — размер области, занятой турбулентными флуктуациями. Используя (4.51), (4.52) и (4.53), получим асимптотическое выражение для спектра частиц при импульсах, близких к импульсу инъекции R_0

$$G(p, p_0) \propto -Q(uk_0)^{-1} b^{(\nu-3)/2} \times \\ \times a(\nu) \ln |\ln(p/p_0)|, \quad p \rightarrow p_0. \quad (4.54)$$

Спектр (4.54) имеет в окрестности p_0 интегрируемую логарифмическую особенность, связанную с возможностью конечного изменения энергии частицы на корреляционном масштабе. В области импульсов $p \gg p_0$ спектр частиц (4.53) определяется поведением $D_1(s)$ и $D_2(s)$ при $s \rightarrow 0$:

$$G(p, p_0) \propto Q(uk_0)^{-1} (p/p_0)^\mu, \quad (4.55)$$

где

$$\mu = -1,5 - (2,25 + \xi D_1(0) D_2^{-1}(0))^{0,5}. \quad (4.56)$$

Соотношения (4.55), (4.56) описывают также и спектр ФП при всех $p \geq p_0$. При $p \rightarrow p_0$ в отличие от (4.54) функция распределения (4.55) имеет конечный предел и слабую зависимость от протяженности спектра флуктуаций b .

Заметим, что описанные выше результаты могут быть использованы при расчете спектров фотонов, формирующихся за счет томсоновского рассеяния в оптически плотной среде с турбулентными движениями.

4.5. Влияние флуктуаций плотности среды на диффузию частиц. В предыдущих разделах мы подробно исследовали ускорение и диффузию частиц в сжимаемой ($\text{div } \mathbf{u} \neq 0$) среде. При этом, однако, не был учтен эффект изменения плотности среды, приводящий к флуктуациям эффективной частоты рассеяния и мелкомасштабного ("молекулярного") коэффициента диффузии частиц. Этот эффект может быть существен, лишь если сама мелкомасштабная диффузия играет заметную роль на фоне турбулентного переноса, т.е. при $uL \leq \kappa$. Предельным случаем такой ситуации является диффузия частиц на хаотически распределенных "облаках", вкрапленных в разреженную среду, движением которых можно пренебречь. Рассмотрим задачу о вычислении коэффициента глобальной диффузии на расстоянии, превышающие характерный масштаб флуктуаций плотности. Для упрощения расчета пренебрегаем эффектом ускорения частиц.

Удобно исходить не из уравнения переноса, а из кинетического уравнения для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в приближении времени релаксации:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\nu \left[f - \left(1 + \frac{3\mathbf{u}\mathbf{v}}{v^2} \right) \bar{f} \right], \quad (4.57)$$

где $\nu(\mathbf{r}, t, p)$ — эффективная частота рассеяния частиц, испытывающая флуктуации в пространстве и во времени из-за флуктуаций плотности среды:

$$\nu = \nu_0(p) + \tilde{\nu}(\mathbf{r}, t, p), \quad \langle \tilde{\nu} \rangle = 0. \quad (4.58)$$

Статистические свойства частоты рассеяния $\tilde{\nu}$ предполагаются известными. Правая часть уравнения (4.57) описывает рассеяние частиц в движущейся среде при $u \ll v$, черта обозначает усреднение по углам вектора $\mathbf{p}$, а производные по импульсу, описывающие ускорение частиц, отброшены (подробнее см. [25], § 8).

Уравнение для усредненной по ансамблю флуктуаций скорости и плотности среды функции распределения $F(r, p, t) = \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle$ ищем в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = -\nu_e(F - \bar{F}), \quad (4.59)$$

где $\nu_e(p)$ — эффективная частота рассеяния, $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ — диффузионный тензор, описывающий турбулентный перенос. Обе эти величины необходимо вычислить, через них выражается тензор глобальной диффузии $D_{\alpha\beta}$. Его связь с ν_e и $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ можно определить, перейдя в уравнении (4.59) к приближению диффузии:

$$F = \frac{1}{4\pi} \left(N + \frac{4\mathbf{n}\mathbf{J}}{v} \right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (4.60)$$

где N — изотропная часть функции распределения, J — дифференциальная (по импульсам) плотность потока частиц. Подставив в (4.59) функцию распределения (4.60) и исключив обычным образом вектор J , получим уравнение диффузии (4.1) с тензором диффузии

$$D_{\alpha\beta} = \frac{v^2}{3\nu_e} \delta_{\alpha\beta} + \overline{\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})}. \quad (4.61)$$

В дальнейшем используем обозначения $v^2/3\nu_e = \kappa$.

В соответствии с общей методикой, изложенной в предыдущих разделах, наряду с (4.59) рассматриваем не полностью усредненное уравнение, в котором остались неусредненными гармоники, относящиеся к узкому интервалу волновых чисел Δk :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{r}} - \chi'_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = \\ = -(\nu'_e + \delta\tilde{\nu})(\tilde{F} - \bar{F} - \frac{3\delta\mathbf{u}\mathbf{v}}{v^2} \tilde{F}). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Штрихами обозначены кинетические коэффициенты, формируемые спектром турбулентных величин за вычетом Δk . Применяя пертурбационную процедуру, получим из (4.62) систему уравнений для средней функции распределения F

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \chi'_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = \\ = -\nu'_e(F - \bar{F}) - \langle \delta\tilde{\nu}(\delta F - \delta\bar{F}) \rangle + \nu'_e \frac{3\mathbf{v}}{v^2} \langle \delta\mathbf{u} \delta F \rangle, \end{aligned} \quad (4.63)$$

и осциллирующей добавки δF :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta F}{\partial \mathbf{r}} - \chi'_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 \delta F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \\ + \tilde{\nu}_e(\delta F - \delta\bar{F}) = Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (4.64)$$

где

$$Q = -\delta\tilde{\nu}(F - \bar{F}) + \nu'_e \frac{3\mathbf{v}}{v^2} \delta\mathbf{u}F. \quad (4.65)$$

Решения уравнения (4.64) удобно выразить через функцию Грина $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t', \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ оператора, стоящего в левой части. В фурье-представлении будем иметь для определения функции Грина следующее уравнение:

$$g_{k\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\nu_e \bar{g}_{k\omega} + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\nu_e - i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v} + k_\mu k_\nu \chi_{\mu\nu}(\mathbf{p})}. \quad (4.66)$$

Простое решение (4.66) получается лишь в диффузионном приближении, т.е. в пределе $\omega/\nu_e \ll 1$, $|\mathbf{k}\mathbf{v}|/\nu_e \ll 1$. В этом пределе и для изотропного случая $\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta}$ находим

$$\begin{aligned} g_{k\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \nu_e^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (4\pi^2)^{-1} \times \\ \times (-i\omega + k^2 D)^{-1} (\nu_e - i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v} + k^2 \chi)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times (\nu_e - i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v}' + k^2 \chi)^{-1} + \\ + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\nu_e - i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v} + k^2 \chi)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Это выражение еще следует разложить по указанным выше малым отношениям. С помощью (4.67) вычисляются слагаемые в правой части уравнения (4.63) и определяются вклады в эффективную частоту рассеяния ν_e и турбулентный коэффициент диффузии $\bar{\chi}(\mathbf{p})$, обусловленные малой областью Δk спектра волновых чисел.

В итоге получается система трансцендентных уравнений для нахождения кинетических коэффициентов ν_e , $\bar{\chi}$:

$$\begin{aligned} \nu_e = \nu_0 - \frac{\langle \tilde{\nu}^2 \rangle}{\nu_e} + \frac{\kappa}{3\nu_e} \int \frac{k^2 \langle \tilde{\nu} \tilde{\nu}' \rangle_{k\omega}}{i\omega + k^2 D} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} + \\ + \frac{1}{3} \int \frac{i k_\beta \langle u_\beta \tilde{\nu}' \rangle_{k\omega}}{i\omega + k^2 D} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (4.68) \\ \bar{\chi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[\frac{\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{k\omega}}{i\omega + k^2 D} - \right. \\ \left. - \frac{2D k_\alpha k_\beta \langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{k\omega}}{(i\omega + k^2 D)^2} \right] - \\ - \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{i k_\beta (3i\omega + k^2 D)}{(i\omega + k^2 D)^2} \frac{\langle \tilde{\nu} u'_\beta \rangle_{k\omega}}{\nu_e}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

здесь $D = \kappa + \bar{\chi}$, $\kappa = v^2/3\nu_e$. Флуктуации частоты рассеяния $\tilde{\nu}$ пропорциональны флуктуациям плотности среды, поэтому корреляторы $\langle \tilde{\nu} \tilde{\nu}' \rangle$ и $\langle \tilde{\nu} u'_\beta \rangle$ могут быть выражены, в принципе, через коррелятор скоростей с помощью уравнений движения.

Простое аналитическое решение системы (4.68)–(4.69) допускает только для статических неоднородностей, когда $u = 0$ и $\tilde{\nu}$ не зависит от времени, т.е. $\langle \tilde{\nu} \tilde{\nu}' \rangle_{k\omega} \sim \delta(\omega)$. Тогда $\bar{\chi} = 0$, а эффективная частота рассеяния удовлетворяет простому уравнению

$$\nu_e = \nu_0 - \frac{2}{3} \frac{\langle \tilde{\nu}^2 \rangle}{\nu_e}, \quad (4.70)$$

где ν_0 — средняя по ансамблю частота рассеяния. Физическое (положительное) значение корня

$$\nu_e = \frac{1}{2} \nu_0 - \left(\frac{\nu_0^2}{4} - \frac{2}{3} \langle \tilde{\nu}^2 \rangle \right)^{1/2} \quad (4.71)$$

реализуется при $\langle \tilde{\nu}^2 \rangle \leq (3/8) \nu_0^2$. В этом диапазоне эффективная частота рассеяния меньше среднего значения ν_0 и убывает с ростом флуктуации. При достаточно больших флуктуациях $\langle \tilde{\nu}^2 \rangle > (3/8) \nu_0^2$ корни становятся комплексными и теряют физический смысл. По-видимому, это связано с неприменимостью использованного метода расчета, который оперирует только с парными корреляторами случайных величин, при $|\tilde{\nu}| \geq \nu_0$, когда имеет

место сильная перемежаемость в структуре рассеивающей среды. Кроме того, при этом теряет силу и диффузионное приближение для функций Грина g использованное выше.

При сильной перемежаемости $|\tilde{\nu}| \gg \nu_0$ нетрудно дать приближенную оценку эффективной частоты столкновений. Пусть в однородную среду, в которой частота рассеяния рассматриваемых частиц ν_1 , вкраплены облака, в которых частота рассеяния $\nu_1 + \nu_2 \gg \nu_1$. Среднее расстояние между облаками L , их линейный размер l . Зафиксируем среднее значение частоты рассеяния

$$\nu_0 = \nu_1 + \nu_2(l/L)^3 = \text{const} \quad (4.72)$$

и будем менять соотношение между l и L (предполагая частоту рассеяния пропорциональной плотности вещества, а ν_2 — зависящей от l).

Если облака занимают пространство почти целиком, т.е. $l \approx L$, то имеет место случай однородной рассеивающей среды с $\nu_e = \nu_0 = \nu_1^+ \nu_2$. В противоположном предельном случае плотных и редких облаков малого размера ($l \ll L$) частицы будут распространяться в основном в разреженной фазе с эффективной частотой рассеяния $\nu_e \approx \nu_1 \ll \nu_0$. В указанных двух предельных случаях средняя квадратичная флуктуация частоты рассеяния имеет значения соответственно $\langle \tilde{\nu}^2 \rangle \approx 0$ и $\langle \tilde{\nu}^2 \rangle \approx (\nu_0 - \nu_1)^2 (l/L) \gg \nu_0^2$, причем в последнем предельном случае имеется резкая асимметрия между отклонениями частоты в сторону увеличения и уменьшения. В согласии с (4.71) с увеличением неоднородности среды эффективная частота рассеяния уменьшается. В частности, если плотные облака находятся в вакууме, то с ростом концентрации вещества в них ($l \rightarrow 0$) эффективная частота рассеяния убывает по закону $\nu_e \approx \nu^2/L^3 \rightarrow 0$, не зависящему от средней плотности среды и средней частоты рассеяния. Существенно, что свойства среды характеризуются в рассмотренной модели двумя масштабами, которые не могут быть введены заданием только парного корреляционного тензора.

5. Перенормировка уравнения для среднего магнитного поля в теории турбулентного динамо. Метод перенормировки кинетических коэффициентов, изложенный в предыдущем разделе, может быть применен и при описании переноса векторной примеси турбулентным течением. Рассмотрим в связи с этим усреднение уравнения магнитной индукции в теории турбулентного динамо

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{b}] + \eta_{\alpha\beta}^m \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}; \quad (5.1)$$

здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле турбулентных скоростей,

которое мы будем считать, как и выше, заданным своими статистическими характеристиками; $\eta_{\alpha\beta}^m$ — тензор локальной магнитной вязкости. Поскольку турбулентная магнитная вязкость, как правило, намного превышает $\eta_{\alpha\beta}^m$, мы будем рассматривать последнюю величину как "затравочную", точный учет которой несуществен, и выберем ее в виде $\eta_{\alpha\beta}^m = \eta_m \delta_{\alpha\beta}$, где $\eta_m = c^2/4\pi\sigma$ определяется электропроводностью плазмы σ . Учтем возможную анизотропию и гиротропию турбулентности (но будем по-прежнему считать ее однородной) и запишем фурье-образ корреляционного тензора скоростей в виде

$$\tilde{K}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) + iC_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.2)$$

где

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = P_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = P_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \omega) \quad (5.3)$$

— симметричный действительный тензор, инвариантный относительно замены $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$;

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = C_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}, \omega) = -C_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \omega) \quad (5.4)$$

— антисимметричный отражательно-неинвариантный тензор, описывающий гиротропию турбулентности.

Для исследования возможности генерации магнитного поля с масштабом, превышающим основной масштаб L турбулентных скоростей, нужно произвести усреднение уравнения (5.1). Применим для этого метод, развитый в предыдущем разделе. Будем искать уравнение для усредненного крупномасштабного поля $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$ в виде

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = A_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r_\mu} + \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial r_\mu \partial r_\nu}; \quad (5.5)$$

здесь $A_{\alpha\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ в случае однородной турбулентности — постоянные тензорные коэффициенты, по повторяющимся греческим индексам производится суммирование. Если в пространстве нет выделенных направлений, кроме направления $\mathbf{k}$, то для несжимаемой среды имеем

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = T(k, \omega) (\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta k^{-2}), \quad (5.5)$$

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = C(k, \omega) e_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma, \quad (5.7)$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор, и уравнение (5.5) принимает известный вид [27, 28]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \eta^{\text{tot}} \Delta \mathbf{B}. \quad (5.8)$$

Коэффициент α , приводящий к генерации крупномасштабного магнитного поля, отличен от нуля только для гиротропной турбулентности ($C(k, \omega) \neq 0$).

Для вычисления коэффициентов в более общем уравнении (5.5) выделим, как и раньше, из поля скоростей малую часть $\delta \mathbf{u}$, в которую входят

гармоники из узкого интервала волновых чисел Δk . Выполним усреднение в (5.5) по всем гармоникам, кроме указанного узкого интервала, и обозначив усредненное таким образом магнитное поле через $\tilde{\mathbf{B}}$, получим уравнение

$$\frac{\partial \tilde{B}_\alpha}{\partial t} = A'_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial \tilde{B}_\nu}{\partial r_\mu} + \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} \frac{\partial^2 \tilde{B}_\alpha}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + \text{rot}_\alpha [\delta \mathbf{u} \times \tilde{\mathbf{B}}], \quad (5.9)$$

в котором $A'_{\alpha\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ мало отличаются (ввиду малости Δk) от точных коэффициентов $A_{\alpha\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$.

Усреднение последнего уравнения по реализациям $\delta \mathbf{u}$ выполняем по теории возмущений. Полагая

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \delta \tilde{\mathbf{B}}, \langle \delta \tilde{\mathbf{B}} \rangle = 0, \quad (5.10)$$

получаем из (5.9) два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} &= A'_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r_\mu} + \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + \\ &+ \text{rot}_\alpha \langle [\delta \mathbf{u} \times \delta \tilde{\mathbf{B}}] \rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \tilde{B}_\alpha}{\partial t} &= A'_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial \delta \tilde{B}_\nu}{\partial r_\mu} + \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} \frac{\partial^2 \delta \tilde{B}_\alpha}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + \\ &+ \text{rot}_\alpha [\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заметим, что резкое различие масштабов турбулентных пульсаций ($l \leq L$) и регулярного поля $B(R \gg L)$ возможно, лишь если гиротропная часть $C_{\alpha\beta}$ корреляционного тензора (5.2) мала по сравнению с его негиротропной частью $P_{\alpha\beta}$. Это связано с тем, что генерация магнитного поля происходит на масштабах [35], превышающих

$$L_{\text{crit}} \approx 2\pi\eta^{\text{tot}}/\alpha \approx 2\pi L \langle u^2 \rangle^{1/2}/\alpha, \quad (5.13)$$

и условие $L_{\text{crit}} \gg L$ выполняется при $\alpha \ll \langle u^2 \rangle^{1/2}$.

В силу предполагаемой малости гиротропного члена в уравнении (5.12) можно пренебречь первым слагаемым в правой части равенства и записать решение в виде

$$\begin{aligned} \delta \tilde{B}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= B_\beta(\mathbf{r}, t) \int G_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ &\times \frac{\partial \delta u_\alpha(\mathbf{r}', t')}{\partial r'_\beta} d^3 r' dt' - \\ &- \frac{\partial B_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial r_\beta} \int G_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \delta u_\alpha(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'; \end{aligned} \quad (5.14)$$

здесь функция Грина G_m учитывает турбулентный перенос:

$$\frac{\partial G_m}{\partial t} - \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} \frac{\partial^2 G_m}{\partial r_\mu \partial r_\nu} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (5.15)$$

и использовано условие несжимаемости $\text{div } \delta \mathbf{u} = 0$.

Подстановка решения (5.14) в последнее слагаемое уравнения (5.11) позволяет найти вклады $\Delta A_{\alpha\mu\nu}$ и $\Delta \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ в кинетические коэффициенты от гармоник из интервала волновых чисел Δk :

$$\Delta A_{\alpha\mu\nu} = -2 \int_{(\Delta k)} G_m(\mathbf{r}, \tau) \frac{\partial}{\partial r_\nu} \delta C_{\alpha\mu}(\mathbf{r}, \tau) d^3 r d\tau, \quad (5.16)$$

$$\Delta \eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} = \int_{(\Delta k)} G_m(\mathbf{r}, \tau) \delta P_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \tau) d^3 r d\tau. \quad (5.17)$$

Интегрируя (5.16), (5.17) по всему спектру волновых чисел и переходя к представлению Фурье, находим систему самосогласованных уравнений для коэффициентов вязкости $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ и генерации магнитного поля $A_{\alpha\mu\nu}$, входящих в усредненное уравнение (5.5):

$$\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} = \int \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)}{i\omega + k_\sigma k_\lambda \eta_{\sigma\lambda}^{\text{tot}}} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} + \eta_{\mu\nu}^m, \quad (5.18)$$

$$A_{\alpha\mu\nu} = 2 \int \frac{k_\nu C_{\alpha\mu}(\mathbf{k}, \omega)}{i\omega + k_\sigma k_\lambda \eta_{\sigma\lambda}^{\text{tot}}} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4}. \quad (5.19)$$

Сначала из системы уравнений (5.18) вычисляется тензор диффузии магнитного поля, а затем по найденному $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ путем интегрирования согласно (5.19) находится тензор третьего ранга $A_{\alpha\mu\nu}$, антисимметричный по двум первым индексам. Для простейшей гиротропной турбулентности (5.6), (5.7) уравнения упрощаются. Тензор диффузии становится диагональным, $\eta_{\mu\nu}^{\text{tot}} = \eta^{\text{tot}} \delta_{\mu\nu}$, а тензор генерации магнитного поля выражается через псевдоскаляр α : $A_{\beta\mu\nu} = \alpha \epsilon_{\beta\mu\nu}$. Коэффициенты η^{tot} и α вычисляются из системы уравнений

$$\eta^{\text{tot}} = \eta_m + \frac{2}{3} \int \frac{T(k, \omega)}{i\omega + \eta^{\text{tot}} k^2} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (5.20)$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \int \frac{k^2 T(k, \omega)}{i\omega + \eta^{\text{tot}} k^2} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4}. \quad (5.21)$$

Эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений, полученных в работе [68], тем, что они учитывают перенос поля в заданном масштабе l течениями всех прочих масштабов (а не только более мелкомасштабными течениями, как [68] и [5]). Кроме того, в нашей системе уравнений (5.20), (5.21) учитывается всегда реально имеющаяся нестационарность течения (интеграл по частотам). Впрочем, согласно [61], применимость процедуры перенормировок к системам с гиротропией нуждается в более тщательном обосновании.

Выражение (5.14), связывающее флуктуации мелкомасштабного поля с турбулентной скоростью и средним полем, позволяет вычислить корреляционный тензор мелкомасштабного магнитного поля. Для стационарного состояния, считая масштаб регулярного поля предельно большим

($\mathbf{B} = \text{const}$), получим

$$\delta \tilde{B}_\alpha(\mathbf{r}, t) = B_\beta \int G_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ \times \frac{\partial \delta u_\alpha(\mathbf{r}', t')}{\partial r'_\beta} d^3 r' dt', \quad (5.22)$$

и в представлении Фурье находим

$$\langle \tilde{B}_\alpha \tilde{B}_\beta \rangle_{k, \omega} = (\mathbf{Bk})^2 |\tilde{G}_m(\mathbf{k}, \omega)|^2 \langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{k, \omega}, \quad (5.23)$$

где согласно (5.15) фурье-образ функции Грина имеет вид

$$\tilde{G}_m(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + k_\sigma k_\lambda \eta_{\sigma\lambda}^{\text{tot}})^{-1}. \quad (5.24)$$

Если турбулентность слабая и может рассматриваться как набор квазилинейных МГД-мод с фазовыми скоростями $v_{ph} \gg u$, то $\omega \gg k_\sigma k_\lambda \eta_{\sigma\lambda}^{\text{tot}}$ и согласно (5.23), (5.24)

$$\frac{\langle \tilde{B}^2 \rangle}{B^2} \approx \frac{\langle u^2 \rangle}{v_{ph}^2} \ll 1. \quad (5.25)$$

Для сильной турбулентности имеем

$$v_{ph} \approx u, \quad \langle \tilde{B}^2 \rangle \approx B_0^2. \quad (5.26)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае выражение (5.23) представляет не весь коррелятор мелкомасштабного поля. Формула (5.23) описывает флуктуации крупномасштабного поля, замороженного в плазму, вызванные турбулентным движением среды. Существует и вторая причина возникновения мелкомасштабных полей — их нарастание в турбулентной среде, не связанное с наличием среднего поля ("турбулентное динамо мелкомасштабных полей"). Такой процесс возможен и под действием отражательно-инвариантной турбулентности, гиротропия турбулентности для него не обязательна. Эта проблема рассматривалась во многих работах [28, 32, 33, 68–71]. В линейном (кинематическом) приближении удастся в ряде случаев найти критерий роста мелкомасштабных полей, но невозможно вычислить установившийся уровень турбулентности, формула (5.23) имеет силу в условиях, когда спонтанный рост мелкомасштабного магнитного поля отсутствует.

Следует отметить, что исследование условий нарастания мелкомасштабного магнитного поля в турбулентной среде даже в линейном приближении представляет собой трудную проблему. Сравнительно простое уравнение для плотности энергии магнитного поля можно получить только в предположении нулевого времени корреляции турбулентности (см., например, [69, 72]). Такое приближение годится только при условии, что время роста магнитного поля больше реально существующего конечного времени корреляции турбулентности.

В работе Калсруда и Андерсона [72] справедливо отмечено, что времена роста гармоник с различными волновыми числами могут различаться на много порядков. В частности, время роста мелкомасштабного поля для турбулентности с колмогоровским спектром оказывается много меньше корреляционного времени самых мелких вихрей. Из этих оценок следует, что вычисление крупномасштабного поля требует выхода за рамки приближения нулевого времени корреляции и корректного учета мелкомасштабных полей.

6. Диффузия и турбулентный перенос частиц в крупномасштабном стохастическом магнитном поле.

6.1. Качественные соображения. В плазменных системах решающее влияние на перенос заряженных частиц часто оказывают магнитные поля. Мы рассмотрим ниже такую ситуацию, когда пространственные масштабы изменения случайного магнитного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ значительно превышают локальный транспортный пробег частиц относительно рассеяния мелкомасштабными электромагнитными полями (кулоновскими или плазменными). В системе может также присутствовать квазиоднородное поле $\mathbf{B}_0$ с масштабом изменения намного превышающим масштабы случайного поля. Такие условия типичны при диффузии различных примесей, как тепловых, так и неравновесных, в турбулентной замагниченной плазме с широким спектром флуктуаций магнитного поля и скорости среды $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Если ларморов радиус частиц мал по сравнению с транспортным пробегом, то локальная диффузия частиц носит резко анизотропный характер. Движение частиц происходит в основном вдоль направления локального магнитного поля с малыми поперечными отклонениями за счет дрейфов. В то же время глобальный перенос на расстояния, превышающие корреляционную длину случайного поля, за время, много большее корреляционного времени крупномасштабных полей ввиду сильной запутанности силовых линий и при наличии поперечных движений плазмы может сводиться к диффузии, близкой к изотропной. Возникает, таким образом, задача о связи локального и глобального тензоров диффузии. Особенно важен вопрос о поперечном (относительно квазиоднородного магнитного поля $\mathbf{B}_0$) коэффициенте диффузии. Такая задача актуальна как для проблем переноса тепла и частиц в термоядерных установках [9, 10–12, 64], так и при анализе распространения космических лучей и синтезированных в активных процессах элементов в астрофизических условиях [6, 14, 15, 73].

Классическая теория переноса дает для замагниченных частиц локальный поперечный коэффициент диффузии

$$\kappa_{\perp} \approx \kappa_{\parallel} (r_B / \Lambda_{\parallel})^2, \quad (6.1)$$

где $\kappa_{\parallel}$ — коэффициент диффузии вдоль магнитного поля, r_B — ларморов радиус, $\Lambda_{\parallel}$ — продольный транспортный пробег частиц. Оценим, например, $\kappa_{\perp}$ для релятивистских частиц в Галактике. Принимая $B_0 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ Гс и $\Lambda_{\parallel} \approx 10^{18}$ см [6], находим фактор замагниченности $\Lambda_{\parallel} / r_B = \omega_B \tau \approx 5 \cdot 10^6$ (1 ГэВ/ E), где E — полная энергия частицы, $\tau = 1/\nu$ — время пробега относительно рассеяния. Из этих оценок следует, что локальная диффузия основной массы космических лучей ($E \sim 1$ ГэВ) должна быть резко анизотропной: $\kappa_{\perp} / \kappa_{\parallel} \approx 10^{-13}$. В то же время нет никаких наблюдательных указаний на столь сильную анизотропию распространения космических лучей в Галактике в целом. Наблюдательные данные свидетельствуют в пользу изотропной глобальной диффузии релятивистских частиц умеренных энергий. Можно ожидать, что в Галактике, как и в термоядерных установках, основную роль играет "аномальный" поперечный перенос, который может на много порядков превышать классический "нормальный" перенос.

Для корректного расчета глобального тензора диффузии в системах с сильной турбулентностью необходимо учитывать как турбулентное поле скоростей среды, так и стохастическую составляющую крупномасштабного магнитного поля. Последняя, например, в Галактике имеет тот же порядок величины, что и регулярное поле спиральных рукавов и, по-видимому, может приводить к переносу частиц поперек $\mathbf{B}_0$ за счет отклонения локального поля от среднего. Такую же роль играют поперечные составляющие поля турбулентных скоростей (и связанные с ними электрические поля хорошо проводящей плазмы). Различные подходы к проблеме переноса в крупномасштабном стохастическом магнитном поле развивались в работах [9, 14, 15, 74 — 77]. В большинстве этих работ использовалась теория возмущений ($\tilde{B} \ll B_0$).

Ниже мы, следуя работе авторов [15], вычислим тензор глобальной диффузии (без ограничения на амплитуду случайного поля, т.е. включая случай $\tilde{B} \geq B_0$), а также произведем одновременный самосогласованный учет турбулентных движений. В основе будет лежать метод перенормировок, изложенный в разделе 4, в применении к дрейфовому кинетическому уравнению. В конечном счете компоненты тензора глобальной диффузии будут выражены с помощью системы трансцендентных

уравнений через парные корреляционные функции турбулентных полей.

В нашем расчете будет предполагаться, что перколяционный перенос частиц мал. Последний может играть важную роль для систем, в которых продольная корреляционная длина флуктуации намного превышает поперечную. В этом случае перенос частиц определяется относительно небольшим числом длинных силовых линий. Для систем с изотропной турбулентностью, линейный размер которых много больше длины корреляции флуктуаций, роль перколяции малосущественна. Ограничение на топологию случайного магнитного поля при этом сводится к условию быстрого разрушения корреляции силовых линий на масштабах, больших корреляционного. Описание систем с длинными корреляциями требует более детальной статистической информации, чем парные корреляционные функции, используемые нами, см. подробнее в обзоре [29].

6.2. Усреднение дрейфового кинетического уравнения. Исходим из дрейфового кинетического уравнения для функции распределения замагниченных частиц $f(\mathbf{r}, p, \mu, t)$ в приближении нулевого гирорадиуса, которое представим в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [(\mathbf{v}\mathbf{b} - \mathbf{u}\mathbf{b})b_{\alpha} + u_{\alpha}] \frac{\partial f}{\partial r_{\alpha}} = -\nu(f - \bar{f}); \quad (6.2)$$

здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле турбулентных скоростей среды, которое задается парным корреляционным тензором и $\mathbf{b}$ — единичный вектор полного магнитного поля:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}}{|\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}|}, \quad (6.3)$$

где $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ — турбулентное магнитное поле с масштабами l ($\Lambda_{\parallel} < l \leq L$), по которым в дальнейшем будет производиться усреднение. Такие же масштабы характерны для скорости $\mathbf{u}$. Поле $\mathbf{B}_0$ — регулярное, масштаб изменения которого $R \gg L$ — порядка размеров рассматриваемой плазменной системы. Чтобы не усложнять расчетов, мы опустили в уравнение (6.2) все члены, описывающие изменение энергии частиц. Эти эффекты будут весьма малы, если мы будем считать движение среды несжимаемым:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (6.4)$$

При необходимости можно отказаться от этого условия и учесть ускорительные члены, как это сделано в разделе 4. Чтобы упростить в дальнейшем усреднение исходного уравнения (6.2), считаем турбулентность негиротропной и предполагаем векторы $\mathbf{u}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ направленными перпендикулярно

В₀. Взаимодействие частиц с магнитными полями, масштаб которых меньше или порядка гирорадиуса частиц, моделируется правой частью уравнения (6.2), где ν — частота рассеяния частиц мелкомасштабными полями. Черта $\bar{f}$ означает усреднение по питч-углу θ ($\mu = \cos \theta$). Слагаемое, описывающее фокусировку питч-углов частиц крупномасштабными флуктуациями поля, в уравнении (6.2) опущено, поскольку частота рассеяния ν много больше, чем соответствующая частота изменения питч-угла $\nu \operatorname{div} \mathbf{b}$.

Будем искать усредненное по ансамблю турбулентных пульсаций уравнение (6.2) в форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = -\nu(F - \bar{F}), \quad (6.5)$$

где $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle$ — усредненная функция распределения.

Следует отметить, что не усредненная по ансамблю флуктуаций функция $f(\mathbf{r}, p, \theta, t)$ и усредненная $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ зависят от разных углов, определяющих ориентацию импульса $\mathbf{p}$. Функция f зависит от локального питч-угла θ и не зависит от локальной (быстрой) giroфазы, результатом усреднения по которой и является уравнение (6.2). После усреднения по турбулентным полям направление импульса характеризуем углом ϑ , который он составляет со средним магнитным полем $\mathbf{B}_0$, и азимутальным углом φ , отсчитываемым вокруг $\mathbf{B}_0$. Азимутальный угол φ не является быстрой переменной. Зависимость от него функции распределения может быть вызвана либо азимутальной анизотропией турбулентности, либо градиентом в распределении частиц, не совпадающим по направлению с $\mathbf{B}_0$.

В формуле (6.5)

$$V_\alpha = \langle (\mathbf{v}\mathbf{b} - \mathbf{u}\mathbf{b})b_\alpha + u_\alpha \rangle = \langle v_\alpha^{\text{eff}} \rangle \quad (6.6)$$

— средняя скорость дрейфа частицы. Член со второй производной $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) (\partial^2 F / \partial r_\alpha \partial r_\beta)$ записан как результат усреднения слагаемого

$$\langle (v_\alpha^{\text{eff}} - V_\alpha) \frac{\partial f}{\partial r_\alpha} \rangle = -\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}. \quad (6.7)$$

Тензор $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ не является полным тензором диффузии и описывает только часть вклада в диффузию за счет турбулентности. Ниже мы его вычислим на основе самосогласованной схемы. Но предварительно запишем в удобной форме среднюю скорость V_α . Обозначив

$$\varepsilon = \langle \tilde{B}^2 / (B_0^2 + \tilde{B}^2) \rangle, \quad (6.8)$$

запишем коррелятор ортов, взятых в одной точке, в виде

$$\langle b_\alpha b_\beta \rangle = (1 - \varepsilon) b_{0\alpha} b_{0\beta} + (\varepsilon / 2) \delta_{\alpha\beta}^\perp, \quad (6.9)$$

где $b_{0\alpha}$ — орт поля $\mathbf{B}_0$. С помощью (6.9) найдем

$$V_\alpha = (1 - \varepsilon) b_{0\alpha} v_\parallel + (\varepsilon / 2) v_\alpha^\perp, \quad (6.10)$$

где значки $\parallel, \perp$ относятся теперь к направлению $\mathbf{B}_0$. Здесь параметр ε изменяется в пределах $0 \leq \varepsilon \leq 1$ и характеризует вклад турбулентной составляющей магнитного поля $\delta_{\alpha\beta}^\perp = \delta_{\alpha\beta} - b_{0\alpha} b_{0\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — трехмерный символ Кронекера.

Полный коэффициент диффузии следует выразить через $\mathbf{v}$ и $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ путем перехода в уравнении (6.5) к приближению малой анизотропии. Полагая

$$F = \frac{1}{4\pi} (N(\mathbf{r}, p, t) + \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)), \quad (6.11)$$

$$\overline{\delta N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)} = 0, \quad |\delta N| \ll N,$$

приведем уравнение (6.5) к диффузионному виду

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 N}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}, \quad (6.12)$$

где

$$D_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} + \overline{\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})}, \quad \chi_{\alpha\beta} = \chi_\perp \delta_{\alpha\beta} + \chi_\parallel b_{0\alpha} b_{0\beta}, \quad (6.13)$$

$$\chi_\perp = \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \frac{v^2}{3\nu}, \quad \chi_\parallel = \frac{v^2}{3\nu} (1 - \varepsilon)^2.$$

Переходя к вычислению кинетического коэффициента $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, выделим из турбулентного спектра узкий интервал волновых чисел $\Delta \mathbf{k}$. Вклады в турбулентное поле от гармоник, относящихся к $\Delta \mathbf{k}$, обозначим через $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \tilde{\mathbf{B}}$. Это приведет к представлению

$$v_\alpha^{\text{eff}} = v_\alpha^{\text{eff}} + \delta v_\alpha^{\text{eff}}, \quad (6.14)$$

где

$$\delta v_\alpha^{\text{eff}} = (\mathbf{v} \delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{u} \mathbf{b}' - \mathbf{u}' \delta \mathbf{b}) b'_\alpha + (\mathbf{v} \mathbf{b}' - \mathbf{u}' \mathbf{b}') \delta b_\alpha + \delta u_\alpha, \quad (6.15)$$

$$\delta b_\alpha = \left[\frac{B_0}{B'} \delta_{\alpha\beta} - \frac{B_0}{B'^3} (\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}')_\alpha \tilde{B}'_\beta \right] \frac{\delta \tilde{B}'_\beta}{B_0},$$

здесь штрихами обозначены величины, из спектра которых исключен интервал $\Delta \mathbf{k}$

Проведем теперь усреднение исходного уравнения (6.2) по всему спектру турбулентных пульсаций за исключением интервала $\Delta \mathbf{k}$. Обозначив такое усреднение штрихом:

$$\langle f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle' = \tilde{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \mathbf{v}' \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{r}} - \chi'_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \nu(\tilde{F} - \bar{\tilde{F}}) = \hat{L} \tilde{F} \quad (6.16)$$

(детали вычислений см. в [15]); здесь $\hat{L}$ — оператор возмущений, пропорциональный малым величинам

$\delta u_\alpha, \delta \tilde{B}_\alpha$:

$$\hat{L} = -\delta V_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \delta A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_\alpha \partial \mathbf{r}_\beta}, \quad (6.17)$$

$$\delta V_\alpha = \langle v_\alpha^{\text{eff}} \rangle' = \left(1 - \epsilon' - \left\langle \frac{B_0^2 \tilde{B}^2}{B^4} \right\rangle\right) \times \\ \times \left(b_{0\alpha} \frac{v \delta \tilde{B}}{B_0} + v_\parallel \frac{\partial \tilde{B}_\alpha}{B_0} \right) + \left(1 - \frac{\epsilon'}{2}\right) \delta u_\alpha. \quad (6.18)$$

Тензор $\delta A_{\alpha\beta}$ по порядку величины не превышает $(\delta \tilde{B} / B) \chi_{\alpha\beta}$ и выражается в виде суммы нескольких слагаемых.

Окончательное усреднение по ансамблю реализаций $\delta u_\alpha, \delta \tilde{B}_\alpha$ выполняем, пользуясь стандартной теорией возмущений. Флуктуационную добавку δF к полностью усредненной функции распределения F записываем с помощью функции Грина

$$\delta F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t; \mathbf{r}', \mathbf{p}', t') \hat{L}' F' d^3 r' dt' d\Omega', \quad (6.19)$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}} - \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{r}_\alpha \partial \mathbf{r}_\beta} + \nu(G - \bar{G}) = \\ = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6.20)$$

Через $d\Omega'$ обозначен элемент телесного угла, определяющего направление $\mathbf{p}'$.

Вычисление функции Грина в фурье-представлении, как и все последующие расчеты, выполнены в предположении, что длины волн всех гармоник стохастического поля велики по сравнению с $\Lambda_\parallel = v / \nu$. Это приводит к неравенству $|\mathbf{k}\mathbf{v}| \ll \nu$ и позволяет получить функцию Грина в виде

$$G_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \\ = \frac{\nu \nu'}{4\pi(\nu' + i k_\alpha V_\alpha + k_\alpha k_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}))(\nu' + i \mathbf{k}_\alpha \mathbf{V}'_\alpha + k_\alpha k_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'))} \times \\ \times \frac{1}{-i\omega + k_\parallel^2 \kappa_\parallel + k_\perp^2 \kappa_\perp + k_\mu k_\nu \chi_{\mu\nu}(\mathbf{p})} + \\ + \frac{\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi')}{\nu' + i k_\alpha V_\alpha + k_\alpha k_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})}, \quad (6.21)$$

где чертой обозначено, как и раньше, усреднение по углам ϑ, φ импульса частицы, $\nu' = \nu - i\omega$

Далее, применяя схему расчета, уже изложенную выше в разделах 4 и 5, получим трансцендентное алгебраическое уравнение относительно поперечного коэффициента диффузии $D_{\alpha\beta}^\perp = D_\perp \delta_{\alpha\beta}^\perp$:

$$D_{\alpha\beta}^\perp = \kappa_\perp \delta_{\alpha\beta}^\perp + \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 \int \frac{\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{i\omega + k_\parallel^2 D_\parallel + k_\perp^2 D_\perp} \times \\ \times \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} + \kappa_\parallel \frac{1 - \epsilon - \langle B_0^2 \tilde{B}^2 / B^4 \rangle}{(1 - \epsilon)^2} \times$$

$$\times \int \frac{\langle \tilde{B}_\alpha \tilde{B}'_\beta \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{B_0^2} \left(1 - \frac{k_\parallel^2 \kappa_\parallel}{i\omega + k_\parallel^2 D_\parallel + k_\perp^2 D_\perp}\right) \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (6.22)$$

где

$$D_\parallel = \kappa_\parallel \left[1 + \frac{\langle \tilde{B}^2 \rangle}{B_0^2} \frac{1 - \epsilon - \langle B_0^2 \tilde{B}^2 / B^4 \rangle}{(1 - \epsilon)^2}\right]. \quad (6.23)$$

Подчеркнем, что эти соотношения справедливы при любом соотношении между регулярным и случайным магнитным полем ($0 \leq \epsilon \leq 1$), а также без каких-либо ограничений на амплитуду турбулентных пульсаций скорости. Предполагавшаяся выше ориентация векторов ($\mathbf{u}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ перпендикулярны $\mathbf{B}_0$) проявилась в том, что корреляционные тензоры турбулентности вошли только в уравнение для поперечного коэффициента диффузии.

6.3. Режимы поперечной диффузии. Рассмотрим перенос частиц слабой альвеновской турбулентностью ($\epsilon = \langle \tilde{B}^2 \rangle / B_0^2 = \langle u^2 \rangle / v_{ph}^2 \ll 1$). При достаточно малом локальном транспортном пробеге имеем $v_{ph} L / v \Lambda_\parallel \gg 1$. Тогда $D_\parallel \approx \kappa_\parallel \approx v \Lambda_\parallel / 3$, а $\omega = |\mathbf{k}\mathbf{v}_A| \gg k_\parallel^2 D_\parallel + k_\perp^2 D_\perp$ и из соотношения (33), используя связь (5.23), получим

$$D_\perp \approx \epsilon \kappa_\parallel \ll \kappa_\parallel. \quad (6.24)$$

В этом случае аномальный перенос поперек однородного магнитного поля пропорционален квадрату амплитуды турбулентной составляющей поля.

Если продольный пробег частиц достаточно велик, так что $v \Lambda_\parallel \gg v_A L$, то пренебрегая затуханием альвеновских мод и выполнив во втором слагаемом в правой части (33) интегрирование по частотам и по углам вектора $\mathbf{k}$, получим

$$\int \frac{\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{i\omega + k_\parallel^2 D_\parallel + k_\perp^2 D_\perp} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} = \\ = \pi \delta_{\alpha\beta}^\perp \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} T(k) \frac{1}{k^2(D_\parallel - D_\perp)} \times \\ \times \text{Re} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{D_\perp}{D_\parallel - D_\perp} + \frac{v_A^2}{k^2(D_\parallel - D_\perp)^2} + \tilde{\kappa}^2}, \quad (6.25)$$

где $\tilde{\kappa} = \kappa + [i v_A / 2k(D_\parallel - D_\perp)]$. Здесь использован корреляционный тензор вида

$$\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = T(k, \omega) (\delta_{\alpha\beta}^\perp - k_\alpha^\perp k_\beta^\perp k_\perp^{-2}) \quad (6.26)$$

и закон дисперсии альвеновских волн $\omega_k = |\mathbf{k}\mathbf{v}_A|$. Для спектров флуктуаций с характерным масштабом L из (6.25) имеем

$$\int \frac{\langle u_\alpha u'_\beta \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{i\omega + k_\parallel^2 D_\parallel + k_\perp^2 D_\perp} \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \approx \epsilon v_A L b \delta_{\alpha\beta}^\perp, \quad (6.27)$$

где b — численный множитель порядка единицы. Аналогично можно получить оценку для третьего слагаемого в правой части (6.22). В итоге для частиц, имеющих продольный коэффициент диффузии в интервале $v_A L \ll \kappa_{\parallel} \ll v_A L \varepsilon^{-1}$, получим

$$D_{\perp} \approx \frac{3\pi b}{4} \varepsilon v_A L, \quad (6.28)$$

где постоянный множитель b , зависящий от формы спектра, определяется условиями

$$\begin{aligned} bL \langle u^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{\infty} kT(k) dk, \quad \langle u^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{\infty} T(k) k^2 dk. \end{aligned}$$

Если $\kappa_{\parallel} \gg v_A L \varepsilon^{-1}$, то флуктуации для таких частиц можно считать квазистатическими, в этом случае имеем

$$D_{\perp} \approx \frac{3}{4} \varepsilon^2 \kappa_{\parallel} + \frac{\varepsilon \pi}{4} (D_{\perp} \kappa_{\parallel})^{1/2}. \quad (6.29)$$

Откуда находим

$$D_{\perp} \approx g \varepsilon^2 \kappa_{\parallel}, \quad (6.30)$$

где числовой множитель $g \approx 1,8$. Эти результаты находятся в качественном согласии с соответствующими режимами, исследованными в работе Птушкина и Чувильгина [14]. Перенос заряженных частиц квазистатическими флуктуациями малой амплитуды пропорционален четвертой степени амплитуды.

Последняя зависимость находится в согласии с оценкой, полученной Кадомцевым и Погуце [9] для поперечного коэффициента теплопроводности при наличии случайного магнитного поля малой амплитуды.

Описание переноса частиц сильной турбулентностью требует численного решения трансцендентных алгебраических уравнений (6.22) — (6.23), что при типичных турбулентных спектрах приводит к выводу об изотропизации диффузии сильной турбулентностью: $D_{\perp} \sim D_{\parallel}$. В частности, если случайное магнитное поле — статическое, то результаты не зависят от конкретного вида коррелятора поля. Равенство $D_{\perp} = D_{\parallel}$ достигается при $\varepsilon = 0,77$, а при $\varepsilon = 1$ имеем $D_{\perp} = 0,25v^2 / 3\nu$, $D_{\parallel} = 0$. Последний результат объясняется тем, что при $B_0 = 0$ силовые линии крупномасштабного магнитного поля становятся плоскими и частицы не перемещаются перпендикулярно этим плоскостям.

Хотя приведенные выше результаты применимы при любом соотношении между $\langle \tilde{B}^2 \rangle$ и B_0^2 , они ограничены некоторыми другими условиями (ма-

лость локального транспортного пробега, приближение нулевого гиорорadiusа, перпендикулярность $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{B}_0$, несжимаемость среды). Результаты, свободные от некоторых из указанных ограничений, но использующие малость амплитуды случайного поля, можно найти в работах [11, 13, 41, 78].

7. Кинетика частиц в турбулентной плазме с сильной перемежаемостью — ударными фронтами.

7.1. Вводные замечания. В последнее время анализ ряда задач об эволюции скалярных и векторных полей в стохастических средах привел к пониманию важной роли эффектов перемежаемости при статистическом описании этих полей. Примеры, относящиеся к самым различным физическим системам, даны, в частности, в работах [79, 80].

В данном разделе мы рассмотрим перемежаемые распределения заряженных частиц, формируемые за счет ускорения и переноса частиц в среде с крупномасштабными сверхзвуковыми и сверхальвеновскими флуктуациями. Ускорение частиц флуктуациями электрического поля, индуцированного движениями плазмы в магнитном поле (механизм Ферми), рассматривается как один из основных механизмов формирования спектров надтепловых частиц, в частности, космических лучей.

Особый интерес представляет ускорение частиц ударными волнами в турбулентной среде, универсальный характер которого был установлен в работах [17—20]. В последующие годы этому эффекту заслуженно уделялось большое внимание, см. обзор [81], поскольку такое ускорение непосредственно наблюдается вблизи фронта головной геомагнитной ударной волны и в межпланетном пространстве. Не вызывает сомнения наличие процессов ускорения частиц и в явлениях большего масштаба с ударными волнами, таких как вспышки сверхновых и сильные звездные ветры от звезд ранних спектральных классов в Галактике [82].

В активных областях астрофизических объектов, таких, как активные ядра галактик, ассоциации звезд ранних спектральных классов и многих других, ввиду наличия множественных источников мощных возмущений, а также сильных неоднородностей, следует ожидать формирования случайных ансамблей достаточно сильных ударных фронтов на фоне крупномасштабных волн сжатия и разрежения и различных других плавных возмущений с весьма широким спектром пространственных и временных масштабов. Поскольку главными переносчиками энергии в таких условиях выступают ударные волны, то присутствие ударных фронтов различной

силы является характерной чертой турбулентности в компактных активных областях, которая является сверхзвуковой и сверхальвеновской. Решению различных аспектов проблемы взаимодействия заряженных частиц со сверхзвуковой и сверхальвеновской турбулентностью посвящены работы [83—88].

Ускоряемые в окрестности ударных волн частицы могут оказывать обратное влияние на ударные фронты. Анализ влияния ускоренных частиц на фронты ударных волн посвящено много работ, см. в частности работы [66, 81, 88—92]. Последовательная и строгая теория этого явления сводится, по существу, к проблеме структуры фронта бесстолкновительной ударной волны, которая несмотря на значительный прогресс в понимании основных процессов, пока далека от решения. Наиболее часто используется, так называемая, "двухжидкостная модель" [88, 89]. Идея данного подхода состоит в рассмотрении двух жидкостей — тепловой плазмы и космических лучей, связанных через флуктуационные магнитные поля.

Двухжидкостная модель предсказывает, что в структуре ударного фронта можно выделить собственно вязкий ионный скачок (скорости и других величин) и область плавного торможения потока, набегающего на фронт (предфронт), имеющих существенно разные размеры. Происхождение предфронта связано с действием КЛ. Причем для очень сильных ударных волн модель предсказывает, что структура фронта может размыться до полного исчезновения вязкого диссипативного скачка (в англоязычной литературе это называют "КЛ-доминированные ударные волны"). Джонс и Эллисон [81] считают, что такие волны не могут существовать, а наличие таких решений вызваны трудностью двухжидкостной модели.

С другой стороны, существование предфронта и вязкого скачка находит наблюдательные подтверждения в межпланетной среде и давно известно в физике радиационно-доминированных ударных волн. С использованием этих представлений в разделе 7.2 мы покажем возможность приближенного учета нелинейной структуры ударной волны в теории ускорения частиц ансамблями ударных волн.

Поскольку вблизи МГД-ударного фронта происходит ускорение частиц, то в их распределении формируется неоднородность, пространственный масштаб l которой порядка $\kappa/u \approx v\Lambda/u$, где u — скорость фронта, κ — локальный коэффициент диффузии в направлении нормали к фронту. Эта диффузия может быть вызвана мелкомасштабными

флуктуациями макроскопических турбулентных полей, а в достаточно плотной среде — и кулоновскими столкновениями. Кинетика формирования спектра ускоренных частиц ансамблем фронтов существенно зависит не только от силы фронтов, но и от соотношения между масштабом l и средним расстоянием L между фронтами (которое мы будем отождествлять с максимальным размером турбулентных ячеек, т.е. с основным масштабом турбулентности).

При $\psi = L/l \approx uL/\kappa \ll 1$ частица за характерное время κ/u^2 провзаимодействует с несколькими фронтами, и неоднородность в распределении частиц будет определяться меньшим из двух масштабов, т.е. величиной L . Усреднение функции распределения нужно производить по областям с размерами порядка L . В этих условиях применима теория возмущений. Соответствующая задача о вычислении кинетических коэффициентов и о нахождении формы спектра ускоренных частиц была решена в работах [36, 83].

Более сложен и интересен противоположный случай $\psi \gg 1$. При таком условии вблизи каждого отдельного ударного фронта успевает сформироваться сильная неоднородность в распределении ускоренных частиц, пространственный масштаб которой будет мал по сравнению с основным масштабом турбулентности. Распределение частиц становится сильно перемежаемым.

Статистическое описание перемежаемых систем требует дополнительной информации по сравнению с системами статистически однородными во всех масштабах. Поэтому распределение ускоренных частиц мы будем описывать двумя функциями распределения: средней — отвечающей распределению частиц в областях между сильными фронтами и локальной функцией распределения, которая отлична от нуля в окрестности данного фронта. Параметр ψ в данной задаче характеризует степень перемежаемости системы. При малых ψ флуктуирующая часть функции распределения мала по сравнению со средней функцией распределения. Это было показано в работе [83] при выводе кинетического уравнения для средней функции распределения. Для больших ψ (это обычно соответствует нетепловым частицам низких энергий) флуктуации распределения частиц сильные.

Чтобы корректно учесть вклад в ускорение от ударных фронтов, мы воспользуемся известным решением [18] для отдельного фронта произвольной силы и выполним, на первом этапе, усреднение функции распределения по областям пространства

масштаба l вблизи фронта. Это приводит к появлению в уравнении для средней функции распределения интегрального оператора, описывающего сильное ускорение на отдельных фронтах. Причем важно, что полученный оператор допускает модификацию, позволяющую приближенно учесть нелинейное искажение формы ударной волны.

На следующем этапе можно выполнить усреднение кинетического уравнения по областям порядка основного масштаба L . Ввиду неравенства $\psi \gg 1$ теория возмущений здесь неприменима, и необходимо произвести перенормировку кинетических коэффициентов. Она выполняется методом, рассмотренным нами в разделе 4 данного обзора; см. также [87].

Для вычисления кинетических коэффициентов недостаточно задания парного корреляционного тензора турбулентного поля скоростей, еще необходимо иметь информацию о статистических свойствах фронтов, а также их корреляциях с полем скоростей между фронтами. Это означает учет высших корреляторов поля скоростей.

7.2. Взаимодействие заряженных частиц с сильными ударными волнами. Пусть имеется случайный ансамбль ударных фронтов, среднее расстояние между которыми L , а числа Маха таковы, что $M - 1 \gtrsim 1$. Ансамбль в дальнейшем будем считать статистически однородным и изотропным. За среднее время между столкновениями фронтов L/u , где u — скорость фронта (не сильно отличающаяся от характерной скорости среды, если значения $M \gg 1$ маловероятны), вблизи каждого фронта сформируется неоднородное облако ускоренных частиц со степенным спектром в широком интервале энергий. Масштаб неоднородности этого распределения порядка $l \approx v\Lambda/u \gg \Lambda$, где v — скорость частиц, Λ — их транспортный пробег в турбулентной среде перед фронтом. Таким образом, распределение ускоренных частиц в пространстве будет сильно неоднородным: вблизи фронтов будут наблюдаться сравнительно узкие пики ускоренных частиц, которые после столкновения фронтов будут размешиваться путем турбулентной диффузии по всей системе. Однако возникновение следующего ударного фронта достаточной силы снова приводит к появлению сильной неоднородности в распределении частиц. Такая картина ускорения является естественным следствием перемежаемости сверхзвуковой турбулентности — наличия в ней сильных разрывов,

Для построения усредненной по ансамблю случайных фронтов функции распределения ускорен-

ных частиц необходимо корректно учесть эти сильные локальные неоднородности. Считая выполненным условие $l \ll L$, выделим масштабы Δ , удовлетворяющие неравенству

$$l \ll \Delta \ll L, \quad (7.1)$$

и произведем усреднение функции распределения по таким масштабам. Поскольку $\Lambda \ll L$, то в областях между фронтами можно использовать уравнение переноса (1.3)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta} - u_\alpha \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha}, \quad (7.2)$$

а на самом фронте следует использовать условие равенства функций распределения и дифференциальных по импульсу p плотностей потоков частиц по обе стороны разрыва (см. подробнее в книге Топтыгина [25]). Обозначим усредненную по масштабам Δ функцию распределения через $\bar{N}$. На расстояниях порядка Δ и больших от фронтов имеем $\bar{N} \approx N$, так как масштаб неоднородности N в этих областях велик по сравнению с Δ . Вблизи же разрыва можно воспользоваться известным решением уравнения (7.2) для плоского ударного фронта (см. [18, 25, 92]) и связать локальное значение функции распределения с ее значением $\bar{N}$ вдали (на расстояниях Δ) от фронта:

$$\begin{aligned} N_i(z, p) = & \theta(-z_i) \left\{ \bar{N}(p) + \left[(\gamma_i + 2) p^{-(\gamma_i + 2)} \int_0^p p'^{(\gamma_i + 1)} \bar{N}(p') dp' - \bar{N}(p) \right] \times \right. \\ & \left. \times \exp \frac{\Delta u_{ni} z_i}{\kappa_i} \right\} + \\ & + \theta(z_i) (\gamma_i + 2) p^{-(\gamma_i + 2)} \int_0^p p'^{(\gamma_i + 1)} \bar{N}(p') dp'; \quad (7.3) \end{aligned}$$

здесь z_i — координата, отсчитываемая по нормали от i -го фронта ($z_i < 0$ — перед фронтом, $z_i > 0$ — за фронтом), κ_i — коэффициент диффузии в направлении нормали перед фронтом, Δu_{ni} — скачок нормальной компоненты скорости среды на фронте, $\gamma = [(\rho_2/\rho_1) + 2]/[(\rho_2/\rho_1) - 1]$ — показатель "универсального" спектра на отдельном фронте, ρ_2/ρ_1 — степень сжатия вещества в ударной волне. Решение (7.3) легко написать с помощью функции Грина, построенной для плоского ударного фронта. Входящая в (7.3) $\bar{N}(p)$ остается, разумеется, функцией "крупномасштабных" координат (определяемых с точностью до Δ) и времени.

Использование стационарного решения в (7.3)

допустимо ввиду быстрого формирования степенного спектра на ударном фронте: при $\kappa = \text{const}$ время его формирования Δt в диапазоне от p_0 до p оценивается как (см. [25]):

$$\Delta t \approx \frac{3\kappa}{u\Delta u_n} \ln \frac{p_0}{p} \approx \frac{l}{\Delta u_n} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (7.4)$$

Это время (при $\Delta u \sim u$) намного короче среднего времени между столкновениями фронтов, которое порядка L/u .

После вычисления локальных неоднородностей функции распределения вблизи фронтов (7.3) произведем непосредственное усреднение уравнения (7.2) по масштабам Δ . Для этого выделим сингулярные слагаемые из величины $\partial u_\alpha / \partial x_\alpha$:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} \right)_0 - \sum_i \Delta u_{ni} \delta(z_i); \quad (7.5)$$

здесь $\partial u_\alpha / \partial x_\alpha$ - плавная часть дивергенции скорости, имеющая порядок величины u/L ; δ - образные слагаемые обязаны своим появлением скачкам скорости на разрывах. Запишем

$$\frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} = \frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} (N - \bar{N}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} \quad (7.6)$$

и вычислим последнее слагаемое. Очевидно, что вдали от фронта оно имеет порядок величины $(\Delta/L)(p/3)(\partial \bar{N}/\partial p)(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha)$ и ввиду малости $\Delta/L \ll I$ может быть отброшено. Вблизи i -го фронта (в слое толщиной Δ) имеем с использованием (7.3)

$$(N - \bar{N})_i = -p^{-(\gamma_i+2)} \int_0^p \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} (p') p'^{\gamma_i+2} \times \\ \times \left(\theta(z_i) + \theta(-z_i) \exp \frac{\Delta u_{ni} z_i}{\kappa_i} \right). \quad (7.7)$$

С помощью (7.7) и (7.5) (в последнем равенстве учитываем только сингулярные члены) находим

$$\frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} (N - \bar{N}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} = \\ = \sum_i \frac{u_{i\alpha}}{3\Delta} \left(p \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p} - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_i+2}{3} p^{-(\gamma_i-2)} \int_0^p p'^{\gamma_i+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp' \right). \quad (7.8)$$

Хотя правая часть записана в виде суммы по всем фронтам, фактически i -й член отличен от нуля только вблизи i -го фронта.

Далее усредняем слагаемое

$$u_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} = \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (N - \bar{N}). \quad (7.9)$$

Имеем

$$u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (N - \bar{N}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_i \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (N - \bar{N})_i dz_i = \\ = \sum_i \frac{u_{i\alpha}}{\Delta} (N - \bar{N}) \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} - \\ - \sum_i \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (N - \bar{N})_i \frac{\partial u_{i\alpha}}{\partial z_i} dz_i.$$

На расстояниях порядка $\Delta/2$ от фронта имеем $N - \bar{N} \approx 0$, поэтому внеинтегральный член обращается в нуль, и с помощью (7.5) мы получаем

$$\frac{\partial}{u_\alpha \partial r_\alpha} (N - \bar{N}) = \\ = - \sum_i \frac{\Delta u_{ni}}{\Delta} p^{-2-\gamma_i} \int_0^p p'^{\gamma_i+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp'. \quad (7.10)$$

Объединяя вклады (7.8) и (7.10), имеем

$$\frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} (N - \bar{N}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} - u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (N - \bar{N}) = \\ = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \sum_i \frac{\Delta u_{ni}}{3\Delta} p^{1-\gamma_i} \int_0^p p'^{\gamma_i+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp'. \quad (7.11)$$

Слагаемые типа

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial r_\beta} (N - \bar{N})$$

при усреднении не дают значительного вклада ни вблизи фронтов, ни вдали от них. Поэтому, произведя усреднение уравнения (7.2) с помощью полученных выше результатов (7.6), (7.9), будем иметь

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\beta} - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} + \\ + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \sum_i \frac{\Delta u_{ni}}{3\Delta} p^{1-\gamma_i} \int_0^p p'^{\gamma_i+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp'. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) может быть записано в несколько более простой форме. Рассмотрим ансамбль фронтов с одинаковым индексом ($\gamma_i = \gamma$) (для достаточно сильных волн хорошо известно, что γ слабо зависит от M) и введем функцию

$$\sum_i \overline{\Delta u_{ni} \delta(z_i)},$$

принимая значения $\Delta u_{ni}/\Delta$ вблизи i -го фронта (в слое толщиной Δ) и 0 между фронтами. Тогда уравнение (7.12) примет вид:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\beta} - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} + \\ + \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^{1-\gamma} \int_0^p p'^{\gamma+2} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p'} dp' \sum_i \overline{\Delta u_{ni} \delta(z_i)}. \quad (7.13)$$

Мы предполагали при выводе уравнения (7.12), что фронты представляют собой скачки скорости, ширина которых мала по сравнению с гирорадиусами ускоряемых частиц и их транспортными пробегами. С другой стороны, как отмечено в разделе 7.1, структура ударного фронта может быть модифицирована за счет торможения набегающего потока космическими лучами [66, 81, 92]. Уравнение (7.12) допускает обобщение, позволяющее приближенно учитывать наличие предфронта и вязкого скачка.

Качественно наличие структуры фронта сводится к тому, что частицы низких энергий испытывают ускорение лишь на вязком скачке, а плавную часть воспринимают как адиабатическое возмущение, описываемое в уравнении (7.12) полем $\bar{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$. Поэтому спектр частиц с импульсом $p < p_{*i}$ и спектральным индексом (γ_{si}) сформирован вязким скачком $\Delta u_{n si}$, степень сжатия на котором меньше, чем полное сжатие среды всей ударной волной. Граничный импульс p_{*i} определен условием равенства пробега частицы толщине предфронта. Для частиц высоких энергий $p > p_{*i}$ спектральный индекс γ_{ti} формируется полным скачком скорости $\Delta u_{n ti}$, сжатие среды на котором выше. Поэтому спектр частиц, ускоренных в окрестности i -й ударной волны, в области $p > p_{*i}$ более жесткий ($\gamma_{si} > \gamma_{ti}$).

С учетом сказанного, запишем уравнение переноса заряженных частиц в системе с ансамблем ударных фронтов в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\beta} - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \sum_i \left(\theta(p_{*i} - p) \frac{\Delta u_{n si}}{3 \Delta_{si}} p^{1-\gamma_{si}} \int_0^p p'^{\gamma_{si}+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp' + \right. \\ & \left. + \theta(p - p_{*i}) \frac{\Delta u_{n ti}}{3 \Delta_{ti}} p^{1-\gamma_{ti}} \int_{p_{*i}}^p p'^{\gamma_{ti}+2} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial p'} dp' \right). \end{aligned} \quad (7.12a)$$

При записи данного уравнения мы рассматриваем сжатие в ударной волне как двухступенчатое, что позволяет рассчитывать на корректное описание асимптотик спектра (см. работу [88]). К тому же эта модель достаточно проста и полезна для практических расчетов. Более общая запись ускорительного члена на ударных фронтах приведет к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\beta} - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{N}}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \sum_i \int_0^p G_i(p, p') \bar{N}_i(p') dp', \end{aligned} \quad (7.12b)$$

где функция Грина $G_i(p, p')$ описывает преобразование спектра частиц на i -ом ударном фронте. Требуются дополнительные наблюдения и расчеты структуры бесстолкновительных ударных волн, чтобы установить вид функции G в нелинейном режиме. Следует также иметь в виду, что как параметры p_{*i} , γ_{si} , так и функция Грина $G_i(p, p')$ в нелинейном случае являются, вообще говоря, функциями от средней функции распределения ускоряемых частиц. Достаточно простую рабочую теорию можно построить только на пути соответствующей аппроксимации и параметризации указанных величин.

7.3. Кинетическое уравнение для функции распределения, усредненной по крупномасштабным движениям среды. При проведении дальнейшего усреднения уравнения (7.13) по областям с размерами порядка основного масштаба турбулентности L , введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{\left\langle \sum_i \Delta u_{ni} \delta(z_i) \right\rangle} &= \frac{1}{\tau_{sh}}, \quad \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial r_\alpha} = \Psi(\mathbf{r}, t), \quad \langle \Psi \rangle = 0, \\ \overline{\sum_i \Delta u_{ni} \delta(z_i)} - \frac{1}{\tau_{sh}} &= \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \langle \varphi \rangle = 0, \quad (7.14) \\ \hat{L} &= \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^{3-\alpha} \int_0^p dp' p'^\alpha \frac{\partial}{\partial p'}, \quad \hat{P} = \frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \gamma + 2$, а угловыми скобками обозначено указанное выше усреднение. Легко проверить, что операторы $\hat{P}$ и $\hat{L}$ взаимно коммутируют. Введем далее новую функцию распределения $\bar{f}(\mathbf{r}, p, t)$, связанную с $\bar{N}$ соотношением

$$\bar{N} = \exp\left(\frac{\hat{L}t}{\tau_{sh}}\right) \bar{f}. \quad (7.15)$$

Уравнение для $\bar{f}$ имеет вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r_\beta} = \hat{Q} \bar{f}, \quad (7.16)$$

где

$$\hat{Q} = -\bar{\mathbf{u}} \nabla + \Psi \hat{P} + \varphi \hat{L} \quad (7.17)$$

— случайный оператор. Величина $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ — тензор диффузии, вызванной мелкомасштабной турбулентностью, также, вообще говоря, испытывает случайные изменения в пространстве и времени. Но в силу условия $uL/v\Lambda \ll 1$ перенос частиц в пространстве будет происходить в основном за счет движения среды (турбулентная диффузия). Диффузия за счет мелкомасштабного поля играет в этих условиях малую роль. Поэтому мы будем считать в (7.16) тензор диффузии $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ постоянным и изотропным, $\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}$ не зависит также и от импульсной переменной p .

Теперь применим к усреднению уравнения (7.16) общий подход, развитый нами в разделе 4. Предполагаем, что в спектре случайных величин $\bar{u}_\alpha$, Ψ и φ , входящих в (7.16), коррелируют только гармоники с достаточно близкими волновыми векторами. Это означает, что можно выделить макроскопически малый интервал волновых чисел Δk и считать, что гармоники, относящиеся к этому интервалу, не коррелируют со всеми остальными. Соответствующие вклады в поле скоростей обозначим через $\bar{\delta u}$, $\delta\Psi$, $\delta\varphi$, причем

$$\delta\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\Delta k} d^3k \Psi_{\mathbf{k},\omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (7.18)$$

и т.д. При усреднении фурье-компоненты турбулентных величин удовлетворяют обычным соотношениям для однородной турбулентности:

$$\langle \Psi_{\mathbf{k},\omega} \Psi_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle = |\Psi|_{\mathbf{k},\omega}^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'). \quad (7.19)$$

Для полного описания процесса ускорения, кроме функций T и S , связанных с вихревыми и потенциальными движениями, необходимо (см. [87]) ввести еще две спектральные функции. Одна из них $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega)$ должна описывать корреляцию скачков скорости на ударных фронтах, а другая, которую мы обозначим через $\mu(\mathbf{k}, \omega)$ — взаимную корреляцию $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi(\mathbf{r}', t')$. Введение указанных спектральных функций обусловлено перемежаемым характером функции распределения частиц, для описания которой необходима дополнительная статистическая информация о случайном поле скоростей (ср. со статистически однородными задачами, рассмотренными в разделах 4 и 5, где использовано существенно меньшее число корреляторов).

Для средней функции распределения $F = \langle \bar{N} \rangle$ с помощью преобразования в случае слабого изменения энергии на длине корреляции плавного поля скоростей (но при сильном изменении энергии на фронтах ударных волн) имеем кинетическое уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} - \chi_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta F &= \left(\frac{1}{\tau_{sh}} + B \right) \hat{L}F + \\ &+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 D \frac{\partial F}{\partial p} + A \hat{L}^2 F + 2B \hat{L} \hat{P} F. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Характерным свойством полученного уравнения является присутствие интегрального оператора $\hat{L}$, что отражает факт сильного ускорения частиц вблизи отдельного ударного фронта. При этом эффект ускорения "в среднем" может быть и не велик, если фронты возникают достаточно редко.

Выражения для кинетических коэффициентов (согласно работе [87]) имеют вид

$$\chi = \kappa + \frac{1}{3} \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \left[\frac{2T + S}{i\omega + \chi k^2} - \frac{2k^2 \chi S}{(i\omega + \chi k^2)^2} \right], \quad (7.21)$$

$$D = \frac{8}{9} \pi \chi \int_0^\infty k^6 dk \int_0^\infty d\omega \frac{S(k, \omega)}{(2\pi)^4 (\omega^2 + \chi^2 k^4)}, \quad (7.22)$$

$$A = 8\pi \chi \int_0^\infty k^4 dk \int_0^\infty d\omega \frac{\tilde{\varphi}(k, \omega)}{(2\pi)^4 (\omega^2 + \chi^2 k^4)}, \quad (7.23)$$

$$B = 8\pi \chi \int_0^\infty k^4 dk \int_0^\infty d\omega \frac{\mu(k, \omega)}{(2\pi)^4 (\omega^2 + \chi^2 k^4)}; \quad (7.24)$$

здесь учтено, что в рассматриваемом случае изотропной турбулентности $\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta}$; кроме того, при записи интегралов использовано свойство четности спектральных функций относительно аргумента ω . Для вычисления коэффициента пространственной диффузии χ требуется решить трансцендентное уравнение (7.21); после этого вычисление коэффициентов A , B , D , дающих темп ускорения, сводится к интегрированию.

Случай сильного ускорения. Если изменение энергии частицы за время (или на длине) корреляции турбулентных скоростей не мало, $\Delta p \gtrsim p$, то ускорение не только на фронтах, но и между фронтами будет описываться интегральным оператором (см. разделы 4.3 и 4.4). Тем не менее, вычисление перенормированных кинетических коэффициентов можно выполнить и в этом случае, несколько изменив изложенную выше схему. Возможность включить в общую схему случай сильного ускорения обусловлена однородностью операторов ускорения $\hat{P}$ и $\hat{L}$ в усредненном уравнении (7.15) (они инвариантны относительно преобразования подобия по импульсной переменной). Благодаря этому после усреднения ядро интегрального оператора можно представить как функцию разности $\eta - \eta'$, где $\eta = \ln(p/p_0)$.

Ищем усредненное уравнение для полной функции распределения $F(\mathbf{r}, \eta, t) = \langle \bar{N}(\mathbf{r}, p, t) \rangle$ в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\alpha\beta} (\eta - \eta') \nabla_\alpha \nabla_\beta F d\eta' + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + 3 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} D(\eta - \eta') F(\mathbf{r}, \eta', t) d\eta', \end{aligned} \quad (7.25)$$

где оператор

$$\partial / \partial \eta + 3 = p^{-2} (\partial / \partial p) p^3 \quad (7.26)$$

обеспечивает обращение в нуль второго слагаемого при интегрировании обеих частей уравнения по всем импульсам. Опуская детали усреднения (они изложены нами в [87]), приведем результат. Фурье-

образы ядер интегрального уравнения (7.25) $\bar{\chi}(s)$ и $\bar{D}(s)$ можно вычислить, решив систему двух трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(s) = & \kappa + \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \left\{ \frac{2T + S(k, \omega)}{i\omega + (is - 3)\bar{D}(s) + \bar{\chi}(s)k^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2k^2 \bar{\chi}(s) S(k, \omega)}{[i\omega + (is - 3)\bar{D}(s) + \bar{\chi}(s)k^2]^2} \right\} + \\ & + \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \bar{\chi}(s) \frac{i\omega + (is - 3)\bar{D}(s) + \bar{\chi}(s)k^2 / 3}{[i\omega + (is - 3)\bar{D}(s) + \bar{\chi}(s)k^2]^3} \times \\ & \times \left[k^2 \frac{is(is - 3)}{9} S(k, \omega) - \frac{is(is - 3)}{9(is - 2 - \gamma)} \mu(k, \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{s^2(is - 3)^2}{9(is - 2 - \gamma)^2} \tilde{\varphi}(k, \omega) \right], \quad (7.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}(s) = & \frac{is}{9} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[-k^2 S(k, \omega) + \right. \\ & + (3 - 2is)\mu(k, \omega)(is - 2 - \gamma)^{-1} - \\ & \left. - (is - 3)is\tilde{\varphi}(k, \omega)(is - 2 - \gamma)^{-2} \right] \times \\ & \times \left[i\omega + (is - 3)\bar{D}(s) + \bar{\chi}(s)k^2 \right]^{-1} + \\ & + is \left[3(is - 2 - \gamma)\tau_{sh} \right]^{-1}. \quad (7.28) \end{aligned}$$

В случае слабого ускорения $\bar{\chi}(s)$ перестает зависеть от s , а уравнение (7.25) принимает вид (7.20). Уравнение (7.28) переходит в равенство

$$\begin{aligned} \bar{D}(s) = & -isD - \left(\frac{is}{3} \right)^2 \frac{is - 3}{(is - \gamma - 2)^2} A + \\ & + \frac{is}{3(is - 2 - \gamma)} \left(1 - \frac{2is}{3} \right) B + \frac{1}{\tau_{sh}} \frac{is}{is - 2 - \gamma}, \quad (7.29) \end{aligned}$$

где D, A, B даются формулами (7.22) — (7.24).

7.4. Нестационарные энергетические спектры ускоренных заряженных частиц. Рассмотрим решения нестационарного кинетического уравнения для средней функции распределения заряженных частиц в случае мгновенной инжекции моноэнергичных частиц в турбулентную среду с ансамблем ударных волн [87, 93].

Уравнение для функции Грина имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{G}{\tau_e} = & \left(\frac{1}{\tau_{sh}} + B \right) \hat{L}G + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 D \frac{\partial G}{\partial p} + A \hat{L}^2 G + 2BL\hat{P}\hat{G} + \\ & + \frac{1}{p_0} \delta(p - p_0) \delta(t - t'). \quad (7.30) \end{aligned}$$

Для решения уравнения (7.30) удобно выполнить преобразование Фурье в переменных $\eta = \ln(p/p_0) - s$ и преобразование Лапласа в переменных $t - \sigma$. Тогда (7.30) дает

$$G(s, \sigma) = \frac{e^{-\sigma t'}}{\sigma + \tau_e^{-1} + (is - 3)\bar{D}(s)}. \quad (7.31)$$

Выражение для $\bar{D}(s)$ соответствует (7.29). Обратное преобразование к переменной p дает

$$\begin{aligned} G(p, \sigma) = & \frac{\tau_{sh} e^{-\sigma t'}}{p_0^3 a} \times \\ & \times \frac{(x_1 + \alpha)^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{x_1}, \quad p < p_0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{(x_2 + \alpha)^2}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{x_2} + \right. \\ & + \frac{(x_3 + \alpha)^2}{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{x_3} + \\ & \left. + \frac{(x_4 + \alpha)^2}{(x_1 - x_4)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{x_4} \right\}, \quad p > p_0, \quad (7.32) \end{aligned}$$

где x_i — корни полинома четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Коэффициенты полинома связаны с упоминавшимися ранее перенормированными коэффициентами A, B и D уравнениями

$$\begin{aligned} a = & \tau_{sh}(A + 2B + 9D), \\ b = & \tau_{sh}(6A + 9B + 27D + 2\alpha(B + 9D)) + 3, \\ c = & \tau_{sh}[9(A + B) + 3\alpha(18D + 3B + 3D\alpha)] + \\ & + 9 + 3\alpha - 9(\varepsilon + \sigma\tau_{sh}), \quad (7.33) \end{aligned}$$

$$d = \tau_{sh}9\alpha(B + 3\alpha D) + 9\alpha[1 - 2(\varepsilon + \sigma\tau_{sh})],$$

$$e = -9\alpha^2(\varepsilon + \sigma\tau_{sh}),$$

$$\varepsilon = \tau_{sh} / \tau_e.$$

Здесь мы рассмотрим систему на временах $t > \tau_{sh}$, причем $\sigma\tau_{sh} \ll 1$. В этом случае вычислим корни x_i с точностью до линейного по $\sigma\tau_{sh}$ слагаемого. Приближенные вычисления корней для стационарного состояния ($\sigma\tau_{sh} = 0$) показывают, что $x_1 \approx \alpha\varepsilon$, $x_2 \approx -3$, $x_3 \approx -\alpha$, $x_4 \approx -3/a$ ($a, \varepsilon \ll 1$) для широкого класса спектральных функций турбулентности, совместимого, в частности, с моделью

ускорения частиц в ассоциации звезд 0 и B типов (см. [93]). Таким образом, в спектре (7.32) при $p > p_0$ достаточно учесть только первое слагаемое:

$$G(p, \sigma) = \frac{\tau_{sh} e^{-\sigma t'}}{p_0^3 a} \times$$

$$\times \frac{x_1 + \alpha}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{x_1}, \quad p < p_0,$$

и

$$\times \frac{x_2 + \alpha}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_4)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{x_2}, \quad p > p_0. \quad (7.34)$$

Выполнив обратное преобразование к переменной t , мы получим

$$G(p, t, t') = -\frac{x_2}{9p_0^3(x_2 + 2\alpha)} \times$$

$$\times \alpha e^{-\sigma_1(t-t'-t_{p1})} \theta(t - t' - t_{p1}), \quad p < p_0,$$

и

$$\times (x_2 + \alpha) \left[e^{-\sigma_1(t-t'-t_{p2})} - e^{-\sigma_2(t-t'-t_{p2})} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{p}{p_0}\right)^{x_2} \theta(t - t' - t_{p2}), \quad p > p_0, \quad (7.35)$$

где

$$\sigma_1 = -\frac{a}{9\tau_{sh}} \frac{x_2^2 x_4}{(x_2 + 2\alpha)},$$

$$\sigma_2 = \frac{a}{9\tau_{sh}} \frac{x_2^2 x_4}{(2x_2 + \alpha)}, \quad (7.36)$$

$$t_{p1} = \frac{9\tau_{sh}}{a} \frac{\alpha}{x_2 x_4} \ln \frac{p_0}{p},$$

$$t_{p2} = \frac{9\tau_{sh}}{a} \frac{(x_2 + \alpha)}{x_2 x_4} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (7.37)$$

Для случая стационарной инжекции, интересного для приложений, мы должны выполнить интегрирование (7.35) по t' от 0 до t . В результате получим

$$G(p, t) = \frac{\tau_{sh}}{ap_0^3 x_2 x_4} \times$$

$$\times \alpha \left[1 - e^{-\sigma_1(t-t_{p1})} \right] \theta(t - t_{p1}), \quad p \leq p_0,$$

и

$$\times (x_2 + \alpha) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{x_2} \times$$

$$\times \left[1 - e^{-\sigma_2(t-t_{p2})} \right] \theta(t - t_{p2}), \quad p \geq p_0, \quad (7.38)$$

где мы удержали только первое слагаемое на временах $t > \tau_{sh}$. Временная зависимость функции Грина (7.38) имеет простой физический смысл. Она описывает формирование высокоэнергичной части функции распределения частиц. При степенной инжекции частиц в процесс ускорения, соответ-

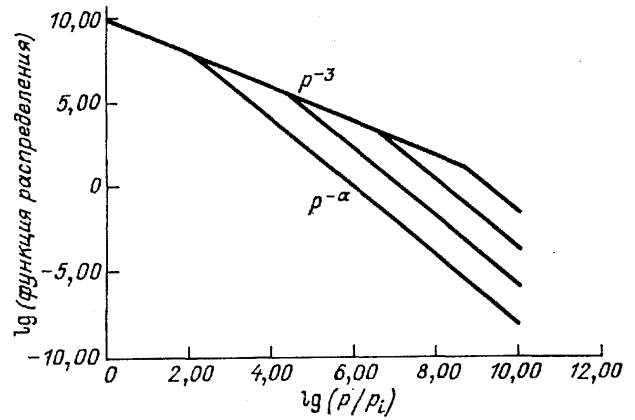


Рис. 5. Спектры ускоренных частиц в последовательные моменты времени $t/\tau_{sh} = 5, 10, 15, 20$. Кривые изображены в логарифмическом масштабе: $\lg$ (интенсивность нетепловых частиц) от $\lg(p/p_i)$

ствующей случаю инжекции на фронтах ударных волн, формирование функции распределения иллюстрирует рис. 5 [93].

Итак, показано, что описание перемежаемых распределений частиц в системах с ансамблями ударных волн требует детальной статистической информации о корреляциях ударных фронтов и их силе. Задача определения функции распределения нетепловых заряженных частиц может быть сведена к решению интегрального уравнения для средней функции распределения. Перемежаемая часть функции распределения, обусловленная сильным отклонением от средней функции распределения в окрестности ударных фронтов, выражается через среднюю функцию распределения посредством соотношения (7.7).

8. Заключение. В этом обзоре мы старались продемонстрировать достаточно богатые возможности метода перенормировок для построения уравнений переноса примесных частиц и вычисления кинетических коэффициентов в плазме с сильной турбулентностью при наличии внешнего магнитного поля. Преимуществами изложенного метода являются его относительная простота, возможность обобщения на сжимаемые среды, описание не только движения частиц в пространстве, но и их ускорения стохастическими электрическими полями в случае сильно неравновесных систем, а также возможность учета сильной перемежаемости (на конкретном, но важном для приложений в астрофизике, примере взаимодействия частиц с ансамблем сильных ударных волн в турбулентной среде). Следует также отметить, что перенормированные уравнения переноса могут не

иметь фоккер-планковскую форму и, соответственно, описывать режимы, не сводящиеся к диффузии (см. разделы 4 и 7). При этом искомое усредненное уравнение переноса записано в интегральной форме, которая является наиболее общей формой записи линейного уравнения и только в частных случаях при соответствующей структуре ядер приобретает фоккер-планковский вид. Вычисление ядер интегральных уравнений переноса частиц на большие расстояния (превышающие корреляционную длину) сводится к решению систем трансцендентных алгебраических (неинтегральных) уравнений, что позволяет выразить указанные ядра через корреляторы функций скорости и магнитного поля.

Подчеркнем, что численное решение таких уравнений не встречает принципиальных трудностей и было получено авторами [31, 67] для ряда реалистических спектров турбулентности (см., в частности, рис. 1 — 4). Тем самым продемонстрирована возможность довести результаты развитой теории до конкретного числа и сравнения с экспериментом.

По нашему мнению, перечисленные преимущества выгодно отличают изложенный метод от других описанных в литературе подходов к вычислению перенормированных транспортных коэффициентов. Так, активно развиваемый в настоящее время метод ренормгруппы [49 — 52] на сегодняшний день может описать, по-видимому, только колмогоровскую модель турбулентности несжимаемой жидкости. Нам неизвестны примеры рассмотрения эффектов сжимаемости, магнитного поля или ускорения частиц таким методом; то же относится к теории, развитой Фитианом и Куртисом [4].

В то же время развитый метод имеет, разумеется, определенные недостатки и ограничения, о которых уместно здесь сказать еще раз. При вычислении перенормированных кинетических коэффициентов приходится огрублять описание движения частиц на малых масштабах (меньших корреляционной длины) и считать такое движение диффузионным (см. разделы 4.1 — 4.3), хотя оно таковым не является. Попытка же избавиться от этой неточности (см. конец раздела 4.1) и корректно описать перенос на малые расстояния приводит к необходимости вычислять ядро интегрального уравнения переноса посредством решения некоторого нелинейного интегрального уравнения (типа 4.24), что весьма затруднительно, хотя и не безнадежно.

Оценку погрешности, вносимой указанным приближением, не удастся выполнить теоретически, но

сравнение с численным расчетом Драммонда и др. [61] позволяет надеяться, что она в большинстве случаев не велика.

Другим ограничением, использование которого играло весьма существенную роль в изложенном методе, было предположение об однородности турбулентности (условие типа (4.4)). Наличие существенной неоднородности в распределении турбулентных флуктуаций или фоновых величин требует модификации метода.

Третье ограничение касается подхода к описанию турбулентного поля. Вся информация о турбулентной среде входит в вычисленные кинетические коэффициенты только через парные корреляторы скорости, плотности и магнитного поля, между которыми существует связь, обусловленная уравнениями движения среды. Поскольку точное выражение кинетических коэффициентов через турбулентные характеристики должно содержать в общем случае корреляторы всех порядков, это означает, что неявно в процессе вычислений осуществляется некоторая процедура замыкания, в результате которой высшие корреляторы выражаются через парный. Следовательно, предложенный метод может претендовать только на описание таких ситуаций, когда распределение турбулентности достаточно однородно и вся существенная информация о турбулентном поле может быть описана низшим (парным) коррелятором. Это означает, в частности, что эффекты перемежаемости турбулентности, приводящие к формированию редких, но сильных неоднородностей, не должны играть заметную роль. В противном случае метод должен быть модифицирован, и необходима более детальная информация о структуре турбулентности. Пример такой модификации метода — случай сильной перемежаемости обусловленной наличием в системе ансамбля ударных фронтов — рассмотрен в разделе 7. В этом случае кроме парного коррелятора, использованы такие характеристики турбулентности, как распределение ударных фронтов по числам Маха и корреляторы скорости среды на фронтах и между фронтами. Другой, более тривиальный, случай сильных статических неоднородностей плотности был затронут в разделе 4.5.

Развитый подход, основанный на использовании парных корреляторов, предполагает достаточно быстрое разрушение корреляций на расстояниях, превышающих корреляционную длину. Он теряет силу при наличии в системе заметного числа упорядоченных силовых линий (или линий тока), которые могут обеспечить быстрый перенос частиц

на расстояния, превышающие размер турбулентной ячейки. С теорией переноса в таких системах, не отраженной в настоящей статье, можно познакомиться по обзорам [29, 38, 39].

Четвертое ограничение изложенной теории — ее линейность. Предполагалось, что диффундирующая примесь не влияет на турбулентную среду. В противном случае полученные уравнения следует дополнить другими уравнениями, которые бы описывали изменение турбулентности под действием рассматриваемой субстанции (ускоряемые частицы, генерируемое магнитное поле). Хотя линейная теория переноса имеет достаточно широкую область применимости, в ряде случаев нелинейные эффекты могут сыграть первостепенную роль. Отметим две "горячие точки" из числа вопросов, затронутых в настоящем обзоре: генерация магнитного поля гиротропной турбулентностью и ускорение частиц ансамблем достаточно сильных ударных фронтов.

В проблеме генерации магнитного поля (раздел 5) важен учет обратного влияния поля на турбулентное движение и его гиротропию. Время нарастания гармоник поля сильно зависит от пространственного масштаба, и часто используемое приближение нулевого времени корреляции для турбулентных скоростей неприменимо в случае мелкомасштабных гармоник. Ввиду их быстрого роста последовательная нелинейная теория должна, по-видимому, оперировать с системой нелинейных уравнений для крупномасштабного поля, плотности энергии мелкомасштабных полей (парного коррелятора) и уравнения движения среды, существенно модифицированного магнитными силами. Насколько нам известно, такая рабочая система с учетом реально действующих факторов реально еще никем не сформулирована.

При ускорении частиц на достаточно сильном ударном фронте эффективность передачи энергии от гидродинамического движения ускоренным частицам может быть высокой и сама структура фронта модифицируется ускоряемыми частицами (см. раздел 7.2 и детальный обзор [81]). Аналогичное явление естественно ожидать и при ускорении частиц ансамблями ударных фронтов [93]. Поэтому уравнения (7.20), (7.25) в нелинейной теории следует дополнить соотношениями, которые бы описывали истощение сверхзвуковой турбулентности и ее модификацию в результате ускорения частиц.

Перечисленные основные ограничения и недостатки изложенной теории указывают и некоторые перспективы ее дальнейшего развития, поскольку

некоторая часть этих ограничений может быть устранена в рамках развиваемого метода.

Остановимся кратко еще на двух направлениях исследований, тесно связанных с изложенной теорией, которые представляются нам достаточно перспективными. В разделе 4 мы привлекали численное моделирование Драммонда и др. [61] для оценки точности развиваемой приближенной теории. К сожалению, оно относилось только к пространственному турбулентному переносу в несжимаемой среде без магнитного поля. Представляло бы большой интерес численное моделирование типичных ситуаций, относящихся к ускорению частиц и их переносу с учетом магнитных полей. Такие исследования могут быть выполнены на современных суперкомпьютерах, ряд очень интересных результатов получен в работах [73, 94]. Особенно важно моделирование кинетики частиц и магнитного поля в среде с гиротропной турбулентностью, поскольку результаты Драммонда и др. обнаружили для этого случая сильное несогласие с самосогласованной теорией Фитиана и Куртиса [4]. Сравнение результатов теории с данными достаточно подробного численного моделирования позволило бы оценить ее точность и более детально определить область ее применимости.

Еще одно направление касается вычисления изложенным методом функций распределения высших порядков (двухчастичной и др.). Их знание позволило бы получить более детальную картину поведения частиц в турбулентной среде и найти флуктуации функции распределения, которые в ряде систем уже исследуются опытным путем (см., например, [95, 96]). Для проблемы генерации магнитных полей задача особенно актуальна, поскольку и крупномасштабное (регулярное) магнитное поле невозможно корректно вычислить без знания спектральной плотности (т.е. второго коррелятора) турбулентного магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G.I. Proc. Lond. Math. Soc. 1921, **A20**, 196.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц ЕМ. Гидродинамика. М., Наука, 1986.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч.1. М., Наука, 1965.
4. Phythian R., Curtis W.D. J. Fluid. Mech. 1978, **89**, 241.
5. Moffat H.K. J. Fluid. Mech. 1981, **106**, 27.
6. Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л., Догель В.А., Птускин В.С. Астрофизика космических лучей. М., Наука, 1990.
7. Розанов В.Б., Шуйский С.А. Тр. ФИАН. 1986, **170**, 8.
8. Gurevich A.V., Zybin K.P., Istomin Y.N. Nucl. Fusion. 1987, **27**, 453.
9. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Proc. 7th Int. Conference Vienna, IAEA, 1978. V.1. P.649.

10. Галеев А.А., Зеленый Л.М. Письма ЖЭТФ. 1979, **29**, 669.
11. Krommes J.A., Oberman C., Kleva R.G. J. Plasma Phys. 1983, **30**, 11.
12. Liever P.C. Nucl. Fusion. 1985, **25**, 543.
13. Птускин В.С., Чувильгин Л.Г. Препринт ИЗМИРАН № 49 (934). Москва, 1990.
14. Быков А.М., Топтыгин И.Н. ЖЭТФ. 1992, **101**, 866.
15. Быков А.М., Топтыгин И.Н. Astrophys. and Space Sci. 1987, **138**, 341.
16. Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н. Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме. М., Наука, 1989.
17. Axford W.I., Leer E., Scadron G. Proc XV Int. Cosmic Ray Conference. Plovdiv, 1977. V.11. P.132.
18. Крымский Г.Ф. Докл. АН СССР. 1977, **234**, 1306.
19. Bell A.R. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1978, **182**, 147.
20. Blandford R.D., Ostriker J.P. Astrophys. J. 1978, **221**, L29.
21. Долгинов А.З., Топтыгин И.Н. ЖЭТФ. 1966, **51**, 1771.
22. Быков А.М., Топтыгин И.Н. Известия АН СССР. Сер. физ. 1982, **46**, 1659.
23. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. Яд. синтез. 1962, Приложение 2, 465.
24. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
25. Топтыгин И.Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М., Наука, 1983.
26. Steenbeck M., Krause F., Radler K.-H. Zs. Naturforsch. 1966, **21a**, 369.
27. Moffat H.K. Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge: University Press. 1978; перевод: Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М., Мир, 1980.
28. Krause F., Radler K.-H. Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Berlin, Akademie-Verlag, 1980; перевод: Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., Мир, 1984.
29. Isichenko M.B. Rev. Mod. Phys. 1992, **64**, 961.
30. Птускин В.С. Письма Астрон. ж. 1988, **14**, 599.
31. Быков А.М., Топтыгин И.Н. ЖЭТФ. 1990, **97**, 194.
32. Казанцев А.Л. ЖЭТФ. 1967, **53**, 1806.
33. Вайнштейн С.И. ДАН СССР. 1970, **195**, 793.
34. Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магн. гидродинамика. 1983, № 4, 431.
35. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б. УФН. 1972, **106**, 431.
36. Быков А.М., Топтыгин И.Н. J.Geophys. **50**, 221.
37. Moiseev S.S. - Nonlinear Dynamics of Structures. Ed. R.Z. Sagdeev et al. Singapore, World Scientific, 1991. P.81.
38. Wyld H.W. Ann. of Phys. 1961, **14**, 143.
39. Kraichnan R.H. J. Math. Phys. 1961, **2**, 124.
40. Ottino J.M. The Kinematic of Mixing: Stretching, Chaos and Transport. Cambridge, Cambridge University Press. 1989.
- Aref H. Phys. Fluids. 1991, **A3**, 1009.
- Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
41. Rechester A., Rosenbluth M. Phys. Rev. Lett. 1978, **40**, 38.
42. Gollub J.P. et al. Phys. Rev. Lett. 1991, **67**, 3507.
43. Pumir A., Shraiman B., Siggia E.D. Phys. Rev. Lett. 1991, **66**, 2984.
44. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и - разложение. М., Мир, 1975.
45. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М., Мир, 1980.
46. Kubo R. J. Math. Phys. 1963, **4**, 174.
47. а) Kadanoff L., Martin P.C. Ann. of Phys. 1963, **24**, 419.
- б) Martin P.C., Siggia E.P., Rose H.A. Phys. Rev. 1973, **A8**, 423.
48. Nelkin M. Phys. Rev. 1974, **A9**, 388; 1975, **A11**, 1737.
- Forster D., Nelson D.R., Stephen M.J. Phys. Rev. 1977, **A16**, 732.
49. Yakhot V., Orszag S.A. Phys. Rev. Lett. 1986, **57**, 1722.
50. Yakhot V., Orszag S.A. J. Sci. Contr. 1986, **1**, 3.
51. Yakhot V., Smith L.M. J. Sci. Contr. 1992, **7**, 35.
52. Dannevik W.P. et al. Phys. Fluids. 1987, **30**, 2021.
53. Avellaneda M., Majda A.J. Phys. Fluids. 1992, **A4**, 41.
54. Bouchaud J.P., Georges A. Phys. Rep. 1990, **195**, 131.
55. Howells I.D. J. Fluid Mech. 1960, **9**, 104.
56. Rubinstein R., Barton J.M. Phys. Fluids. 1991, **A3**, 415.
57. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Astron. and Astrophys. 1973, **24**, 337.
58. Balbus S.A., Hawley J.F. Astrophys. J. 1991, **376**, 214.
59. Honkonen J., Karjalainen E. J. Phys. A. 1988, **21**, 4217.
60. Обухов С.П. Письма ЖЭТФ. 1984, **39**, 21.
61. Drummond I.T. et al. J. Fluid Mech. 1984, **138**, 75.
62. Kraichnan R.H. J. Fluid Mech. 1976, **77**, 753.
63. Dupree T.H. Phys. Fluids. 1967, **10**, 1049.
64. Horton W. Phys. Rep. 1990, **192**, 1.
65. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986.
66. Blandford R.D., Eichler D. Phys. Rep. 1987, **154**, 3.
67. Быков А.М. Письма ЖЭТФ. 1991, **54**, 623.
68. Вайнштейн С.И. Магнитные поля в космосе. М., Наука, 1983.
69. Казанцев А.П., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. ЖЭТФ. 1985, **88**, 487.
70. Kleorin N.I., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Plasma Astrophysics. Proc. of the Joint Varenna — Abastumani Int. School and Workshop, Sukhumi, USSR, 19 — 28 May, 1986. P.557.
71. Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М. Магнитные поля галактик. М., Наука, 1988.
72. Kulsrud R.M., Anderson S.W. Astrophys. J. 1992, **396**, 606.
73. Ambrosiano J.J., Matthaeus W.H., Goldstein M.L., Plante D. J. Geophys. Res. 1988, **93**, 1483.
74. Jokipii J.R., Parker E.N. Astrophys. J. 1969, **155**, 777.
75. Topygin I.N. Astrophys. Space Sci. 1973, **20**, 351.
76. Owens A.J. Astrophys. J. 1974, **181**, 235.
77. Jokipii J.R. Rev. Geophys. and Space Sci. 1971, **9**, 27.
78. Быков А.М., Топтыгин И.Н. Изв. АН СССР. Сер. физ. 1991, **55**, 2056.
79. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. ЖЭТФ. 1985, **89**, 2061.
80. Kraichnan R.H. Phys. Rev. Lett. 1990, **65**, 575.
81. Jones F.C., Ellison D.C. Space Sci. Rev. 1991, **58**, 59.
82. Axford W.I. — Astrophysical Aspects of Most Energetic Cosmic Rays. Eds. M. Nagano, F. Takahara. Singapore, World Scientific, 1991. P.406.
83. Быков А.М., Топтыгин И.Н. Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981, **45**, 474.
84. White R.B. Astrophys. J. 1985, **289**, 698.
85. Spruit H.C. Astron. and Astrophys. 1988, **194**, 319.
86. Achterberg A. Astron. and Astrophys. 1990, **231**, 251.
87. Быков А.М., Топтыгин И.Н. ЖЭТФ. 1990, **98**, 1255.
88. Markiewicz W.J., Drury L.O.C., Volk H.J. Astron. and Astrophys. 1990, **236**, 487.
89. Zank G.P., Axford W.I., McKenzie J.F. Astron. and Astrophys. 1990, **233**, 275.
90. Arons J. — Particle Acceleration in Cosmic Plasma. AIP Conf. Proc. Eds. G.P. Zank, T.H. Gaisser. 1992, **264**, 313.
91. Jones T.W., Kang H. — Particle Acceleration in Cosmic Plasma. AIP Conf. Proc. Eds. G.P. Zank, T.H. Gaisser. 1992, **264**, 148.
92. Бережко Е.Г., Елиин В.К., Крымский Г.Ф., Петухов С.И. Генерация космических лучей ударными волнами. Новосибирск, Наука, 1988.
93. Bykov A.M., Fleishman G.D. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1992, **255**, 269.
94. Gray P.C., Matthaeus W.H. — Particle Acceleration in Cosmic Plasma. AIP Conf. Proc. Eds. G.P. Zank, T.H. Gaisser. 1992, **264**, 261.
95. Attolini M.R., Ceccini S., Galli M. Proc. XVI Int. Cosmic Ray Conference. Kyoto, 1979. V.4. P.8.
96. Perko J.S., Burlaga L.F. Proc. XX Int. Cosmic Ray Conference. Moscow, 1987. V.3. P.389.