РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

УФН 1993

ТОМ СТО ШЕСТЬДЕСЯТ ТРЕТИЙ

Журнал издается с апреля 1918 г.

Ноябрь 1993 г. **Том 163, № 11**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА БЕРРИ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

Д.Н. Клышко

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

(*Статья поступила 4.08.93 г.*)

СОДЕРЖАНИЕ

> Как часто бывает, абстрактный язык и непонятные выражения указывают на отсутствие полной ясности.
>
> *У.Берке* [1]

1. Введение. Прошло около 10 лет с момента опубликования знаменитой статьи М. Берри "Квантовые фазовые множители, сопровождающие адиабатические изменения" [2], вызвавшей неиссякающий до сих пор поток публикаций. За эти годы понятие геометрической фазы (ГФ), или фазы Берри, существенно расширилось и проникло в самые различные разделы физики; см. обзоры [3, 4] и популярные статьи [5, 6]. С ГФ связаны эффекты Санъяка, Ааронова—Бома, Яна—Теллера, Холла, некоторые особенности спектров молекул и ядер, вихри в сверхтекучем гелии, хиральные аномалии в калибровочных теориях поля. Недавно обнаружено проявление ГФ в химических реакциях [7]. Известен аналог ГФ в механике — угол Ханни [8, 9].

Проявления ГФ в оптике были обнаружены задолго до публикации [2] Рытовым [10], Владимирским [11] и Панчаратнамом [12]; см. [6].

Был поставлен ряд специальных экспериментов, продемонстрировавших появление ГФ в оптике [13—19], в ЯМР [20], при интерференции нейтронов [21—22].

Таким образом, перед нами удивительный пример рождения нового универсального физического понятия. Саймон [23] сразу же указал на соответствующее математическое понятие в современной геометрии. Это *голономия*, поворот на некоторый угол касательного вектора при его параллельном переносе вдоль замкнутой кривой на изогнутой поверхности, например сфере. Эта поверхность вместе с множеством касающихся ее плоскостей является примером *расслоения* (fiber bundle); см. [24, 25]. Напомним, что эти математические объекты лежат в основе важнейших направлений современной физики, таких как калибровочные поля Янга—Миллса, электрослабое взаимодействие, квантование гравитационного поля. Своеобразное калибровочное "поле" и калибровочная инвариантность возникают и при формальном описании ГФ; см. приложение.

В исходной работе [2] был сделан ряд ограничений: система предполагалась квантовой, недиссипативной, с медленно зависящем от времени циклическим гамильтонианом, $H(T) = H(0)$, рассматривались лишь стационарные невырожденные состояния ψ_n. В дальнейшем все эти ограничения были сняты. Вильчек и Зи [26] рассмотрели случай вырожденных уровней, который описывается расслоением с неабелевой структурной группой и соответствующим неабелевым калибровочным полем — аналогом поля Янга—Миллса; см. [27].

Обобщение на неадиабатический случай и нестационарныесостояния $\psi(t)$ было сделано Аароновым и Ананданом [28]; при этом предполагалось, что гамильтониан и вектор состояния $\psi(t)$ обладают свойством цикличности: $\psi(T) = e^{i\gamma}\psi(0)$, где полная фаза, приобретаемая вектором состояния за время цикла, равна сумме тривиальной динамической фазы и ГФ, $\gamma = \alpha + \beta$. Фактически циклические функции — это собственные функции оператора эволюции с собственным значением $e^{i\gamma}$ [4, 29].

Джордан [30], исходя из квантового аналога фазы Панчаратнама [12], ввел определение ГФ для неполных циклов, изображаемых незамкнутыми траекториями в *базовом (проективном)* пространстве расслоения. ГФ в оптических системах с диссипацией энергии — поляроидах, описываемых неунитарными операторами эволюции, наблюдалась в [15, 19].

К сожалению, в программах по математике физических факультетов отсутствуют, как правило, такие разделы, как теория групп, топология, современная геометрия, которые все шире используются в физике. В связи с этим имеется, по-видимому, потребность в "промежуточном" уровне описания ГФ, доступном широкому кругу физиков и в то же время отражающем ее фундаментальные геометрические аспекты.

В настоящей, работе делается попытка такого описания с помощью колебательных процессов, допускающих достаточно наглядные представления. По-видимому, язык оптической интерференции, непосредственно отражающий фазовые соотношения между "реальными" макроскопическими колебаниями, а не между таинственными квантовыми векторами состояния, лучше всего подходит для первого знакомства с ГФ, для уяснения существа вопроса. Можно надеяться, что прозрачные оптические модели помогут освоить некоторые термины современной геометрии и будут способствовать преодолению существующего терминологического барьера между физиками-теоретиками и экспериментаторами. В качестве базовой модели, служащей надежным "плацдармом" для дальнейших обобщений, был выбран эффект Панчаратнама — появление ГФ при прохождении пучка поляризованного света через трансформаторы поляризации.

Термин ГФ будет использоваться как универсальный, объединяющий частные случаи: адиабатическую фазу Берри, геометрическую фазу Ааронова—Анандана, фазу Панчаратнама, угод Ханни и т.д.

Изложение начинается с качественного описания нескольких наглядных моделей, проявляющих ГФ (раздел 2). В разделе 3 на примере поляризационной оптики обсуждается важное новое понятие — относительная фаза двух пучков с различной поляризацией **e**. В разделе 4 рассматривается простейшая, вероятно, физическая модель, описываемая расслоением Хопфа (см. [24], с. 273) и имеющая в качестве базового многообразия сферу Пуанкаре (СП), а в качестве структурной группы — унитарную группу U (1), представляемую фазовыми множителями $e^{i\gamma}$ при векторе поляризации е. В разделе 5 проведен непосредственный расчет е для конкретных трансформаторов поляризации, используемых в оптике — циркулярных и линейных фазовых пластин. В разделах 6 и 7 показывается, что использованный формализм описывает ГФ не только в случае волн с двумя типами поперечной поляризации, но и в случае любой системы из двух или большего числа колебаний. В разделе 8 обсуждаются некоторые методические и терминологические вопросы. Особенности ГФ при квантовом описании поля кратко рассматриваются в разделе 9. Вычисления, доказывающие геометрический смысл ГФ, вынесены в приложение.

2. Элементарные модели. Рассмотрим несколько примеров проявления ГФ. На рис. 1 изображен наблюдаемый поворот плоскости качания маятника Фуко вследствие суточного вращения Земли. При малых отклонениях гармонические колебания маятника имеют линейную поляризацию вдоль вектора **e**, который медленно поворачивается относительно окружающих предметов. Если пренебречь орбитальным движением Земли, то за сутки экспериментальная установка возвращается, в исходное положение в пространстве и с наивной точки зрения вектор **e** должен повернуться на 2π. Но так происходит лишь на полюсах, а на произвольной широте $\tilde{\vartheta} = \pi/2 \ -\vartheta$ (ϑ — полярный угол) вектор **e** поворачивается с угловой скоростью $\omega' = \omega \cos \vartheta$, меньшей по модулю скорости вращения Земли, и в

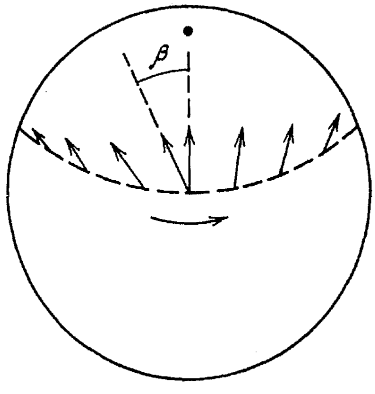

Рис. 1. Плоскость качаний маятника Фуко, изображенная стрелками, медленно поворачивается вследствие суточного вращения Земли. Через 24 часа плоскость качаний не доходит до исходного положения север — юг на некоторый угол β, зависящий от широты

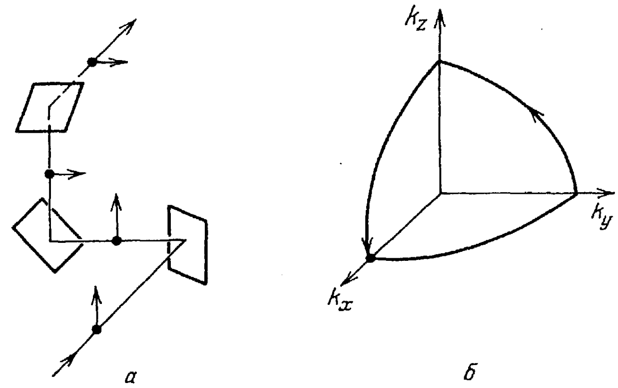

Рис. 2. *а* — Поворот плоскости поляризации пучка света при отражении от трех зеркал: на входе поляризация вертикальная, на выходе горизонтальная. *б* — Отображение изменений направления распространения пучка в пространство волновых векторов k_x, k_y, k_z

результате наблюдатель обнаруживает "недостачу"

$$\beta \equiv 2\pi\left|1 - \frac{\omega'}{\omega}\right| = 2\pi|1 - \cos\vartheta|. \qquad (2.1)$$

Например, на экваторе $\omega' = 0$ и $\mathbf{e}$ сохраняет свою ориентацию относительно локальной системы координат, т.е. маятник не реагирует на вращение Земли; при этом β достигает максимума 2π. Обратим внимание, что β согласно (2.1) совпадает с величиной телесного угла Ω, охватываемого при суточном перемещении маятника при наблюдении из центра Земли.

Это правило $\beta = \Omega$ (мы не учитываем здесь знаки β и Ω), связывающее радианы и стерадианы [6], остается справедливым и в гипотетическом случае, когда Земля неподвижна, а маятник будет медленно (по сравнению с периодом качания) и плавно перевозиться по поверхности Земли по замкнутой траектории. Отправимся, например, с Северного полюса по гринвичскому меридиану ($\varphi_0 = 0$) с $\mathbf{e}$, параллельным этому же меридиану. Повернем на экваторе налево до меридиана φ, повернем опять налево и вернемся на полюс по меридиану φ. Все это время маятник продолжает, очевидно, качаться в плоскости север—юг, и по прибытии на полюс мы обнаружим, что вектор $\mathbf{e}$ повернулся относительно исходного положения на угол $\beta = \varphi$, совпадающий с охваченным телесным углом Ω. Хотя при движении по геодезическим линиям ориентация e относительно локальных координат — широт и меридианов — сохраняется, тем не менее имеет место глобальный эффект, $\beta \neq 0$. Это пример *голономии*, порожденной *параллельным переносом* касательного вектора на сфере; см. [24], с. 277.

Очевидно, что можно добавить и вертикальные перемещения (адиабатические), при этом частота качаний будет изменяться, но формула $\beta = \Omega$ останется в силе. Вообще, β не зависит от деталей эксперимента — скорости и длительности перемещения, а лишь от глобальной геометрической характеристики траектории Ω. Конечно, можно честно решить уравнения динамики маятника с учетом сил Кориолиса [31], при этом решения "автоматически" обнаружат формулу $\beta = \Omega$ для каждого частного маршрута.

В терминах современной геометрии $\beta \neq 0$ вследствие того, что поверхность Земли — сфера S^2 — имеет нетривиальную топологию (известный образ — "невозможность причесать ежа"). Значения угла ориентации e можно отобразить на круг S^1 (как и унитарную группу U(1), состоящую из чисел $e^{i\beta}$). поэтому состояние рассматриваемой системы изображается точкой в расслоении, которое локально является *прямым произведением* $S^2 \times S^1$ (см. [24], с. 277), т.е. задается тремя числами (ϑ, φ, β).

Рассмотрим теперь распространение пучка света с линейной поляризацией через систему зеркал, изображенную на рис. 2. Пусть исходный пучок имеет вертикальную поляризацию. При каждом отражении направление e относительно волнового вектора $\mathbf{k}$ сохраняется, но в результате трех последовательных отражений поляризация становится горизонтальной.

Этот эффект, как и поворот плоскости поляризации маятника Фуко, можно буквально объяснить "на пальцах". Вытянем левую руку горизонтально вперед с большим пальцем, направленным вверх. Рука указывает направление распространения света, а большой палец — направление поляризации. Чтобы представить действие 1-го зеркала на рис. 2, повернем вытянутую руку налево на 90°, сохраняя палец вертикальным. Далее, поднимем руку вверх и опустим вперед в исходное положение. Мы обна-

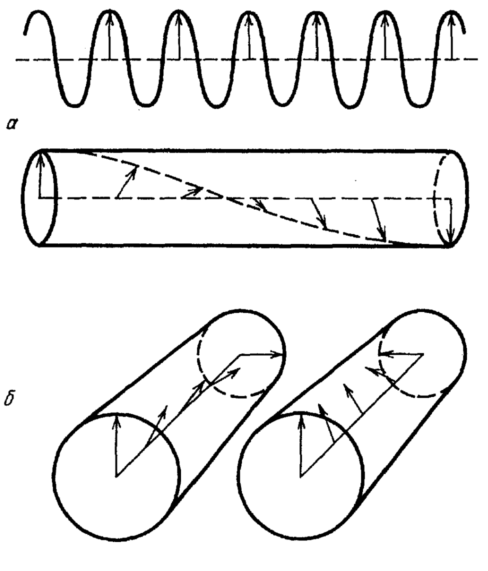

Рис. 3. Возникновение геометрической фазы $\beta = 180°$ при вращении вектора поляризации e (стрелки) вокруг направления распространения поперечной волны. Показаны "моментальные снимки" волн. *а* — Вращение e на 180°, при этом опорная волна (вверху) не преобразуется. *б* — Направление e в обоих плечах интерферометра поворачивается во встречных направлениях на ±90°

ружим, что теперь палец направлен направо, поляризация стала горизонтальной.

Будем изображать направление пучка света в данный момент точкой на единичной сфере в **k**-пространстве (рис. 2,*б*). Замкнутый контур, описывающий действие трех зеркал, охватывает один октант, которому соответствует телесный угол $\Omega = \pi/2$, совпадающий с углом поворота плоскости поляризации. Если представить вектор с линейной поляризацией **e** как суперпозицию двух векторов $\mathbf{d}^{(\pm)}$ с правой и левой круговой поляризацией, то поворот плоскости поляризации на угол β эквивалентен сдвигу фаз у векторов $\mathbf{d}^{(\pm)}$ на $\pm\beta$ Отметим, что теперь эволюция системы изображается не в реальном пространстве, а в пространстве параметров (подробнее о ГФ в системе зеркал см. [32—36]).

Аналогичный эффект имеет место и при использовании для изменения направления пучка вместо зеркал круглого изотропного световода [13, 37], а также при случайных блужданиях направления пучка в результате флуктуаций диэлектрических свойств среды [10, 11]. Отметим, что поворот плоскости поляризации в таких системах можно определить, лишь если исходное и конечное направления распространения одинаковы, т.е. если путь в **k**-пространстве замкнут.

Рассмотрим теперь простой пример, когда наблюдается изменение фазы линейно поляризованной волны с фиксированным направлением распространения в результате поворота плоскости поляризации (это частный случай фазы Панчаратнама, которая подробней будет рассмотрена ниже). Речь может идти о плоской световой или звуковой волне с поперечными колебаниями или о волне, пущенной по натянутой веревке. Пусть плоскость колебаний медленно (в масштабе длины волны) поворачивается на 180° с помощью какого-либо устройства, не изменяющего длины волны. Из рис. 3,*а* ясно, что при этом произойдет сдвиг фазы на 180°: на расстояниях кратных длине волны $n\lambda$, поле принимает (в фиксированный момент времени) отрицательные значения вместо положительных. Это обстоятельство можно обнаружить по интерференции с опорной волной, прошедшей такое же расстояние, но без поворота поляризации. Это пример влияния геометрии на фазу. В качестве пространства, отображающего состояние поляризации, удобно выбрать сферу Пуанкаре (СП), при этом имеет место связь $\beta = -\Omega/2$, где теперь Ω — телесный угол, охватываемый орбитой на СП.

Изображенный на рис. 3 скачок фазы на π, вызванный "переворотом" поперечной волны, вероятно, наиболее простое и наглядное проявление ГФ; он был отмечен в [38] и подробно рассматривался в [39]. На рис. 3,*б* изображен более симметричный вариант эффекта.

3. Фаза Панчаратнама. Обобщим модель рис. 3 на произвольно поляризованную падающую волну и произвольные трансформаторы поляризации **D**. Для определенности будем говорить о плоских световых волнах с частотой ω и волновым вектором **k**. Будем считать поле **E** поперечным, при этом поляризация характеризуется двумерным комплексным вектором **e** с единичной нормой: $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1$. Удобно включить в вектор **e** также и набег фазы, связанный с распространением пучка вдоль оси z:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \operatorname{Re}(\mathbf{e}(z)e^{-i\omega t}). \tag{3.1}$$

В дальнейшем полагаем $E_0 = 1$.

Выберем пару ортогональных нормированных базисных векторов $\mathbf{d}^{(1)}$ и $\mathbf{d}^{(2)}$, $\mathbf{d}^{(1)*} \cdot \mathbf{d}^{(2)} = 0$, тогда состояние поляризации задается двумя комплексными числами $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$, причем $e_n = \mathbf{d}_n^{(*)} \cdot \mathbf{e}$ и $|e_1|^2 + |e_2|^2 = 1$. Таким образом, для полного определения e необходимо знать 3 вещественных числа и состояние поляризации можно отобразить точкой на сфере S^3 в 4-мерном пространстве с координатами $\operatorname{Re} e_1$, $\operatorname{Im} e_1$, $\operatorname{Re} e_2$, $\operatorname{Im} e_2$ (различные способы "визуализации" этой сферы описаны в

[40]). Если же не интересоваться фазовым множителем $e^{i\varepsilon}$, общим для обеих компонент e_1 и e_2 (что обычно оптики и делают), то остается два числа, которые можно представить точкой на сфере Пуанкаре (СП).

В случае линейного базиса векторы $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{d}^{(x)}$ и $\mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{d}^{(y)}$ вещественны и направлены по осям ж и у, составляющим правую тройку с осью z. Иногда удобно работать в циркулярном базисе с комплексными векторами $\mathbf{d}^{(\pm)}$, описывающими правую и левую круговую поляризацию. Связь между этими двумя основными базисами выберем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)}\right), \\ \mathbf{d}^{(y)} &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\mathbf{d}^{(+)} - \mathbf{d}^{(-)}\right), \\ \mathbf{d}^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{d}^{(x)} \pm i\mathbf{d}^{(y)}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Новые компоненты вектора поляризации е при смене базиса определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{лин}} &= \mathbf{W}\cdot\mathbf{e}_{\text{цир}}, \\ \mathbf{e}_{\text{цир}} &= \mathbf{W}^{-1}\cdot\mathbf{e}_{\text{лин}}, \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь в соответствии с традицией ([41], с. 53) знаки выбраны так, что из $\mathbf{e} = \mathbf{d}^{(+)}$ следует $e_y/e_x = i$, т.е. вещественные поля вдоль осей x и y равны соответственно $\cos(kz - \omega t)$ и $\cos(kz - \omega t + \pi/2) = \sin(\omega t - kz)$; при этом для наблюдателя, смотрящего на источник света, вектор $\mathbf{E}$ будет вращаться против часовой стрелки.

Рассмотрим идеализированный эксперимент по наблюдению поляризационной ГФ (фазы Панчаратнама), изображенный на рис. 4. В нем используется интерферометр Маха—Цендера с неполяризующими зеркалами и трансформатор поляризации $\mathbf{D}$, который может состоять из цепочки отдельных трансформаторов: $\mathbf{D} = \mathbf{D}_n...\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$; здесь $\mathbf{D}$ — матрицы Джонса, описывающие преобразование вектора $\mathbf{e}$ под действием трансформаторов.

Пусть $\mathbf{e}$ — вектор поляризации на входе интерферометра, т.е. в опорном пучке и на входе трансформатора $\mathbf{D}$, и $\mathbf{e}'$ — на выходе трансформатора (набеги фазы в свободном пространстве не учитываем). На выходном зеркале эти поля складываются векторно: $\mathbf{e}'' = (\mathbf{e} + \mathbf{e}')/\sqrt{2}$, так что интенсивность

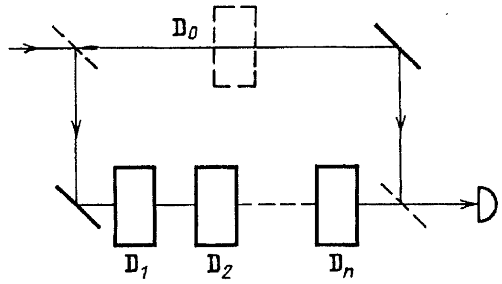

Рис. 4. Схема интерферометра для демонстрации геометрической фазы. Зеркала считаются неполяризующими. $\mathbf{D}_1,..., \mathbf{D}_n$ — трансформаторы поляризации в основном плече, $\mathbf{D}_0$ — в опорном

на детекторе пропорциональна величине

$$I = |\mathbf{e}''|^2 = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{Re}(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}')] = \frac{1}{2}(1 + V\cos\gamma), \quad (3.4)$$

где введены обозначения

$$V \equiv |(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}')| = |e_1^*e_1' + e_2^*e_2'|, \quad (3.5)$$

$$\gamma \equiv \arg(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}') = \arg(e_1^*e_1' + e_2^*e_2'). \quad (3.6)$$

Фазу γ согласно Панчаратнаму [12] можно принять за *определение* относительной фазы двух пучков с разными в общем случае поляризациями $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ (это определение теряет смысл лишь при ортогональных $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$). Действительно, если видность V постоянна, а γ меняется, то интенсивность будет осциллировать как $\cos\gamma$. Максимальная интенсивность соответствует $\gamma = 0$, при этом пучки "находятся в фазе", а при $\gamma = \pi$ — "в противофазе". Ниже мы на конкретном примере убедимся, что γ действительно определяет фазу наблюдаемых биений (см. (5. 16)).

Заметим, что $\gamma_{ab} \equiv \arg(\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}) = -\gamma_{ba}$. Определение (3.6) можно использовать для определения текущей фазы $\gamma(z)$ в любой точке тракта относительно начального поля:

$$\gamma(z) = \arg(\mathbf{e}^*(0)\cdot\mathbf{e}(z)). \quad (3.7)$$

Согласно (3.6) относительная фаза векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ равна фазе их скалярного произведения. Очевидно обобщение этого определения на N-компонентные векторы и на случай бесконечномерного гильбертова пространства:

$$\gamma = \arg\sum_{n=1}^{N} e_n^*\cdot e_n' \longrightarrow \longrightarrow \arg\int \mathrm{d}x\,\psi^*(x)\,\psi'(x). \quad (3.8)$$

Здесь е может описывать колебания в N связанных классических осцилляторах (раздел 7) или состояние N -уровневой квантовой системы.

4. Сфера Пуанкаре как база расслоения. Представим вектор **e** в некоторой фиксированной точке тракта в циркулярном базисе в следующем виде: $\mathbf{e} = e^{i\varepsilon}\,\mathbf{d}$, где

$$d_+(\vartheta, \varphi) = e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2},\qquad d_-(\vartheta, \varphi) = e^{i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{4.1}$$

Часто подобная параметризация используется в линейном базисе, однако представление (4.1) непосредственно связано с традиционным отображением типа поляризации на сферу Пуанкаре (СП). Для этого достаточно отождествить параметры ϑ, φ в (4.1) с обычными сферическими координатами на сфере S^2.

При этом противоположным точкам на СП соответствуют ортогональные векторы: $\mathbf{e}^*(\vartheta, \varphi)\times\times\mathbf{e}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = 0$. Существенно, что если бы в определение (4.1) не были введены коэффициенты 1/2 при параметрах ϑ, φ, то противоположные точки на СП соответствовали бы векторам **e** и $\mathbf{e}' = -\mathbf{e}$, отличающимся лишь знаками, т.е. фазой $\pm\pi$. При этом каждому "типу поляризации", который, по определению, не должен зависеть от общего фазового множителя $e^{i\varepsilon}$, соответствовали бы две точки на СП, т.е. соответствие не было бы однозначным и СП не являлась бы проективным пространством (базой расслоения). Словам "свет имеет линейную поляризацию по оси x" должна соответствовать одна точка на СП с координатами $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$ и два вектора поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{d}^{(x)}$ и $\mathbf{e}' = -\mathbf{d}^{(x)}$ (см. рис. 3) (или в общем случае $\mathbf{e}' = e^{i\varepsilon}\mathbf{e}$).

Иначе говоря, проекция вектора е, принадлежащего пространству S^3, на S^2 основана на определении векторов **e** и $e^{i\varepsilon}\mathbf{e}$ как *эквивалентных* (здесь ε произвольное вещественное число). Это определение позволяет разбить все множество точек $\mathbf{e} \in S^3$ на *классы эквивалентности (лучи, типы поляризации)*. Каждому лучу соответствует своя точка на СП.

С помощью (3.3) и (4.1) можно выразить декартовы координаты точки на СП через линейные и циркулярные компоненты **e**:

$$X = \sin\vartheta\cdot\cos\varphi = |e_x|^2 - |e_y|^2 = 2\mathrm{Re}\,(e_+^* e_-),$$

$$Y = \sin\vartheta\cdot\sin\varphi = 2\mathrm{Re}\,(e_x^* e_y) = 2\,\mathrm{Im}\,(e_+^* e_-),$$

$$Z = \cos\vartheta = 2\,\mathrm{Im}\,(e_x^* e_y) = |e_+|^2 - |e_-|^2. \tag{4.2}$$

Таким образом, круговой поляризации ($e_\pm \sim 1$) соответствуют полюса $\mathbf{R} \equiv (X, Y, Z) = (0, 0, \pm 1)$, а линейной поляризации под углом χ к оси x ($e_x \sim \cos\chi$, $e_y \sim \sin\chi$) соответствует точка на экваторе с долготой $\varphi = 2\chi$.

Вращению плоскости поляризации, дающему голономию $\mathbf{e} \to -\mathbf{e}$ и изображенному на рис. 3, соответствует путь вдоль экватора, начинающийся и заканчивающийся в одной точке (1, 0, 0). В случае произвольной эллиптической поляризации исходного света гиротропная среда перемещает изображающую точку вдоль некоторой широты, определяемой начальной поляризацией (при этом $Z = \mathrm{const}$).

Поскольку в (4.2) входят только парные произведения компонент $e_n^* e_m$, то при "калибровочном" преобразовании $\mathbf{e} \to e^{i\varepsilon}\mathbf{e}$ изображающая точка остается на месте.

Если заданы параметры оптического тракта, то эволюция вектора $\mathbf{e}(z)$ полностью определена и можно указать его орбиту на S^3. Ее проекция на базовое многообразие — СП — дает некоторую кривую C, которую можно представить в параметрической форме $\vartheta = \vartheta(z)$, $\varphi = \varphi(z)$. В качестве третьей координаты, полностью определяющей $\mathbf{e}(z)$, можно выбрать фазу $\varepsilon(z)$ согласно определению (4.1).

Это определение позволяет построить траекторию системы в координатах $(\vartheta, \varphi, \varepsilon)$ — так называемое *сечение* расслоения. Правило, позволяющее рассчитать ε при различных z, называется *связностью* (connection). В случае маятника Фуко связность задается физически — свойством сохранения плоскости качания в инерциальной системе, что приводит к закону параллельного переноса поляризации маятника при его перемещении. Правило ковариантного дифференцирования в криволинейных координатах также является примером связности (Леви-Чивита). Выбор определенной связности задает внутреннюю геометрию расслоения и голономию, т.е. закон преобразования векторов при обходе по замкнутой траектории C на базе расслоения.

С другой стороны, при заданных $\mathbf{e}(0)$ и C можно с помощью (3.7) каждой точке z поставить в соответствие фазу Панчаратнама $\gamma(z)$, т.е. задать другое сечение $(\vartheta, \varphi, \gamma)$, соответствующее тому же пути C, но определяемое связностью Панчаратнама.

Рассмотрим некоторую замкнутую траекторию C на СП, при этом $\mathbf{R}(L) = \mathbf{R}(0)$. Соответствующая ей траектория в общем пространстве расслоения может быть разомкнутой: $\mathbf{e}(L) = e^{i\gamma(L)}\mathbf{e}(0)$. На рис. 5 условно изображены несколько траекторий, проектирующихся на один и тот же контур C, т.е. отличающихся друг от друга лишь калибровочными преобразованиями. Вертикальные прямые на рис. 5 изображают лучи.

Чтобы получить однозначный вектор $\mathbf{g}(z)$ с замкнутой орбитой, можно исключить фазу γ: $\mathbf{g}(z) = e^{-i\gamma(z)}\mathbf{e}(z)$. Как уже упоминалось, $\gamma(z)$ является суммой динамической части $\alpha(z)$, зависящей от конструкции тракта, его протяженности и т.д., и геометрической части $\beta(z)$, зависящей лишь от глобальных свойств контура C. Как показано в приложении, ГФ можно представить в следующем виде:

$$\beta(z) = i\int_0^z \mathrm{d}z'\mathbf{g}^*(z')\cdot\dot{\mathbf{g}}(z') = -\frac{1}{2}\Omega; \tag{4.3}$$

здесь точка означает дифференцирование по z' и Ω — телесный угол, охватываемый контуром C. Заметим, что из нормировки вектора $\mathbf{g}$ следует $\mathrm{Re}(\mathbf{g}^*\cdot\dot{\mathbf{g}}) = 0$, поэтому $\mathbf{g}^*\cdot\dot{\mathbf{g}}$ — мнимое число.

Формулу (4.3) можно применять и в случае незамкнутых путей на СП, если их замыкать геодезической линией по кратчайшему пути. Такие линии, проходящие через начальную точку, не дают вклада в β.

Например, при движении по экватору от точки $\varphi = 0$ β остается равной нулю вплоть до точки $\varphi = \pi$, так как кратчайший обратный путь идет по экватору в обратном направлении, что дает $\Omega = 0$. В точке $\varphi = \pi$ β скачком возрастает на π, так как замыкание теперь идет в попутном направлении и охватывает половину СП. Физический смысл этого скачка поясняется на рис. 3.

Отметим, что коэффициент 1/2 в (4.3) появился из-за наличия таких же коэффициентов в (4.1) (см. формулу (П. 11) приложения), где они обеспечивают, как уже отмечалось, однозначное соответствие между лучами — множеством векторов $\mathbf{e}$, отличающихся только фазой, — и точками на СП. Иначе говоря, эти коэффициенты отражают *спинорный* характер поведения векторов $\mathbf{e}$ под действием преобразователей поляризации: необходимо совершить два полных оборота на СП, чтобы вернуться к исходной поляризации.

С помощью еще одного калибровочного преобразования определим вектор $\mathbf{f}(z)$ с исключенной динамической фазой (см. рис. 5):

$$\mathbf{f}(z) \equiv e^{-i\alpha(z)}\mathbf{e}(z) = e^{i\beta(z)}\mathbf{g}(z). \tag{4.4}$$

Легко убедиться, что для него выполняется так называемое правило параллельного переноса: $\mathbf{f}^*\cdot\dot{\mathbf{f}} = 0$, т.е. приращение $\mathrm{d}\mathbf{f}$ под действием гамильтониана ортогонально $\mathbf{f}$. Заметим, что для вещественных векторов это условие тривиально, оно

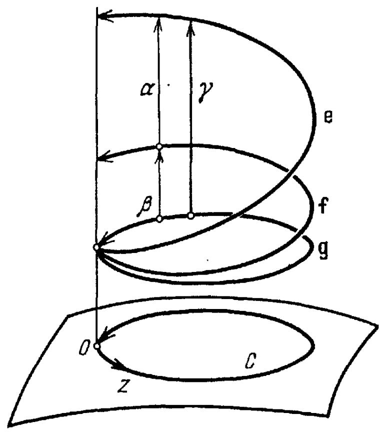

Рис. 5. Условное изображение расслоения. Внизу — базовое пространство (сфера Пуанкаре) с замкнутой кривой C и параметром кривой z. Векторы $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ отличаются калибровочными преобразованиями с фазами α, β, γ. Вертикальная линия соответствует начальным и конечным значениям векторов поляризации

является следствием нормировки. В геометрических терминах $\dot{\mathbf{f}}(z)$ является *касательным вектором* к кривой $\mathbf{f}(z)$ в точке z. Вектор $\mathbf{f}$, как и другие векторы данного луча, считаются направленными "вертикально" (см. рис. 5), поэтому условие параллельного переноса означает, что вектор $\dot{\mathbf{f}}$ ортогонален к $\mathbf{f}$ и, следовательно, лежит в "горизонтальной плоскости". В связи с этим орбиту вектора $\mathbf{f}(z)$ называют *горизонтальным лифтом* замкнутой кривой C на базе, а его приращение при замыкании C — голономией; см. [24, 42].

Как показано в приложении, в случае замкнутых C замена в (4.3) $\mathbf{g}$ на $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}\exp(i\varepsilon)$, где $\varepsilon(z)$ — произвольная функция, не влияет на β. Таким образом, все оптические системы, дающие одинаковые контуры C на СП, вносят одинаковые ГФ (хотя динамические фазы у них могут быть совершенно различными). Это пример *калибровочной инвариантности* ГФ, которая для произвольных квантовых систем обсуждалась в ряде работ; см. [42, 44].

5. Расчет ГФ с помощью матриц Джонса. Рассмотрим, как изменяется вектор поляризации e при распространении света в оптическом тракте (без учета отражений, дифракции, потерь и т.д.). Отдельные элементы тракта, как и весь тракт, осуществляют линейное преобразование вида

$$\mathbf{e} \to \mathbf{e}' = e^{i\sigma}\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}, \tag{5.1}$$

где σ — некоторая общая фаза и $\mathbf{D}$ — матрица 2×2, называемая *матрицей Джонса.* Из условия сохранения интенсивности

$$\mathbf{e}'^*\cdot\mathbf{e}' = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{e})^*\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}) = \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{D}^+\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{e} = 1 \tag{5.2}$$

получаем $\mathbf{D}^+\cdot\mathbf{D} = \mathbf{I}$, т.е. $\mathbf{D}$ принадлежит группе *унитарных* матриц $\mathbf{U}(2)$ (здесь $(D^{+})_{mn} \equiv D^{*}_{nm}$). При этом можно так подобрать фазу σ, что определитель $\mathbf{D}$ станет равным 1, что является определяющим признаком *специальной* группы SU(2). Матрицы этой группы в общем случае можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{5.3}$$

Таким образом, имеется три независимых вещественных параметра и любую матрицу можно отобразить точкой на сфере S^3.

В свободном пространстве происходит тривиальное преобразование $\mathbf{e} \to \mathbf{e}e^{i\omega z/c}$, которое учитывать не будем. При распространении в анизотропном веществе имеется некоторый базис $\mathbf{d}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(2)}$, в котором обе компоненты е изменяются независимо друг от друга (возможную продольную компоненту e_z учитывать также не будем: более последовательно перейти к вектору индукции [43]).

В этом собственном представлении

$$e_m(z) = e^{ik_m z} e_m(0), \; m = 1, 2, \tag{5.4}$$

что дает

$$\mathbf{e}(z) = e_1\mathbf{f}^{(1)} e^{ik_1 z} + e_2\mathbf{f}^{(2)} e^{ik_2 z} = e^{i\sigma}(e_1\mathbf{f}^{(1)} e^{i\delta} + e_2\mathbf{f}^{(2)} e^{-i\delta}).$$

В результате

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}; \tag{5.5}$$

здесь

$$\sigma \equiv (k_1 + k_2)/2, \; \delta \equiv (k_1 - k_2)/2.$$

Закон эволюции вектора е можно представить в виде, аналогичном уравнению Шрёдингера:

$$i\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}, \tag{5.6}$$

которому соответствует оператор эволюции

$$\mathbf{e}(z) = \mathbf{U}(z)\cdot\mathbf{e}(0), \; \mathbf{U}(0) = \mathbf{I}. \tag{5.7}$$

Для однородного вещества $\mathbf{H}$ не зависит от z. Согласно (5.4) в собственном представлении

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

при этом $\mathbf{U} = e^{i\sigma}\mathbf{D} = \exp(i\mathbf{H}z)$.

Если же игнорировать фазу σ, то из (5.5) следует

$$\mathbf{H} = -i\dot{\mathbf{D}}(0) = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Теперь $\mathbf{U} = \mathbf{D} = \exp(i\mathbf{H}z)$.

Пусть собственные векторы $\mathbf{H}$ имеют координаты (ϑ, φ) и $(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$ на СП; тогда, как легко проверить, в циркулярном базисе

$$\mathbf{H}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \times \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Смещение произвольной точки на СП под действием этого оператора легко представить, полагая, что СП вращается вокруг оси, проходящей через точки (ϑ, φ) и $(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$.

5.1. Ротатор. Например, для ротатора — ячейки Фарадея или циркулярной фазовой пластины — собственные векторы соответствуют полюсам СП. С помощью (3.3) переходим к линейному базису

$$\mathbf{D}_{\text{лин}} = \mathbf{W}\cdot\mathbf{D}_{\text{цир}}\cdot\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

где теперь $\delta = \omega z(n_+ - n_-)/2c$ и $n_\pm$ — показатели преломления для волн с круговой поляризацией. В явном виде преобразование запишется следующим образом:

$$e'_x = e^{i\sigma}(\cos\delta\, e_x + \sin\delta\, e_y), \qquad e'_y = e^{i\sigma}(-\sin\delta\, e_x + \cos\delta\, e_y). \tag{5.12}$$

Приращение долготы φ на СП равняется -2δ.

Рассмотрим интерференционный эксперимент с ротатором (см. рис. 4). Согласно (5.12)

$$\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}' = e^{i\sigma}(\cos\delta + iZ\sin\delta), \tag{5.13}$$

где параметр $Z = |e_+|^2 - |e_-|^2$ определяется исходной поляризацией.

При подстановке в (3.4) получаем

$$I = \frac{1}{2}(1 + V\cos\gamma), \tag{5.14}$$

где

$$V = (\cos^2\delta + Z^2\sin^2\delta)^{1/2}, \tag{5.15}$$

$$\gamma = \sigma + \operatorname{arctg}(Z\operatorname{tg}\delta) \equiv \sigma + \gamma_0. \tag{5.16}$$

Обычно $\sigma \gg |\delta|$, поэтому (5.14) при изменении z описывает интерференционные биения интенсивности с периодом $\bar{\lambda} \equiv 4\pi/(k_+ + k_-)$, при этом видность V и фаза интерференции γ_0 медленно — с периодом $4\pi/|k_+ - k_-|$ — зависят от z. Таким образом, фаза Панчаратнама является непосредственно наблюдаемой величиной и определение (3.6) имеет *операциональный* смысл.

При $Z = \pm 1$ (круговая поляризация) получаем тривиальную зависимость

$$I = \frac{1}{2}[1 + \cos(\sigma \pm \delta)] = \frac{1}{2}[1 + \cos(k_\pm z)], \tag{5.17}$$

а при $Z = 0$ (линейная поляризация) из (5.15), (5.16) следует $\gamma_0 = 0$ или π и $V = |\cos\delta|$, так что

$$I = \frac{1}{2}(1 + \cos\delta\cdot\cos\sigma) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos(k_+z) + \frac{1}{2}\cos(k_-z)\right]. \qquad (5.18)$$

При прохождении точки $\delta = \pi/2$ биения исчезают, но потом восстанавливаются с фазой, сдвинутой на π.

График функции $\gamma(z)$ представлен на рис. 6 при $Z = \pm 0{,}05$. При этом скачки фазы, о которых говорилось выше, несколько заглаживаются, но нелинейная зависимость фазы от расстояния z четко проявляется (чтобы подчеркнуть эффект, параметр анизотропии δ/σ $(n_+ - n_-)/(n_+ + n\_)$ принят равным малореалистичному значению 0,2).

Формула (5.16) определяет общую фазу. Как выделить ее геометрическую часть? Определим разность $\gamma - \beta = \alpha$ как произведение длины пути z на "среднее" значение волнового вектора для данного типа поляризации:

$$\alpha = \langle k\rangle z \equiv (k_+|e_+|^2 + k_-|e_-|^2)z =$$
$$= \sigma + Z\delta. \qquad (5.19)$$

Например, при $Z = \pm 1$ имеем $\langle k\rangle = k_\pm$, а при $Z = 0$ $\langle k\rangle = (k_+ + k_-)/2$. Это определение, естественно, обобщается на случай пространственно-неоднородной среды, в которой собственные значения k_n зависят от z:

$$\alpha(z) = \int_0^z dz' \sum_{n=1}^{2} k_n(z)|e_n|^2. \qquad (5.20)$$

Это определение — аналог динамической фазы по Ааронову — Анандану [28] в квантовой системе (здесь точка — дифференцирование по времени):

$$\alpha(T) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^T dt\,\langle\psi|H|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\,\langle\psi|\dot\psi\rangle. \qquad (5.21)$$

В наших обозначениях с помощью (5.6) получаем совпадающее с (5.20) выражение

$$\alpha(z) \equiv \int_0^z dz'(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}) = -i\int_0^z dz(\mathbf{e}^*\cdot\dot{\mathbf{e}}). \qquad (5.22)$$

В рассматриваемом случае ротатора α согласно (5.19) — просто линейная часть функции $\gamma(z)$:

$$\alpha(z) = z\dot\gamma(0) = \sigma + Z\delta. \qquad (5.23)$$

Таким образом, получаем [38]

$$\beta(z) = \operatorname{arctg}(Z\operatorname{tg}\delta) - Z\delta. \qquad (5.24)$$

График этой функции представлен на рис. 7. В приложении с помощью формул сферической тригонометрии вычисляется телесный угол, соответствующий движению по широте с приращением долготы $\varphi = -2\delta$; в соответствии с общей формулой (4.3) он равен удвоенному выражению (5.24).

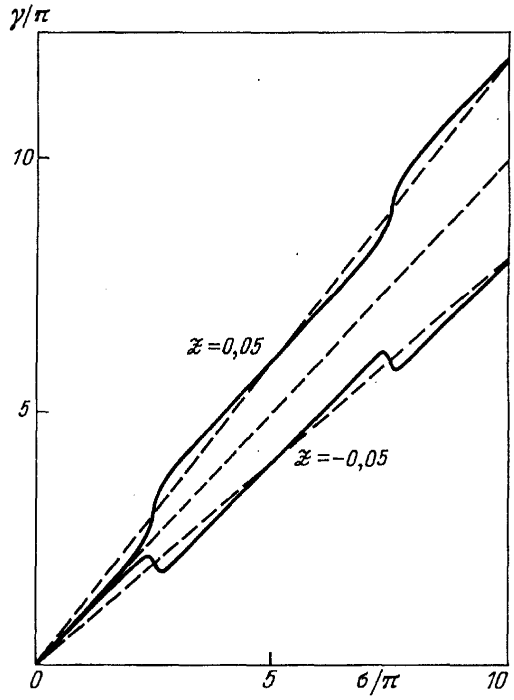

Рис. 6. Зависимость полной фазы γ (динамическая плюс геометрическая) от длины пути z в гиротропной среде согласно (5.16). По вертикали отложена фаза γ, деленная на π, по горизонтали — $\sigma/\pi = (k_+ + k_-)\,z/2\pi$, где $k_\pm$ — постоянные распространения для волн с круговой поляризацией. Параметр анизотропии $\delta/\sigma = (k_+ - k_-)/(k_+ + k_-)$ равен 0,2. Параметр Z связан с эллиптичностью волны ($Z = 0$ — линейная поляризация, $Z = \pm 1$ — круговая). Штриховые линии соответствуют фазам $k_\pm z$ и $(k_+ + k_-)z$

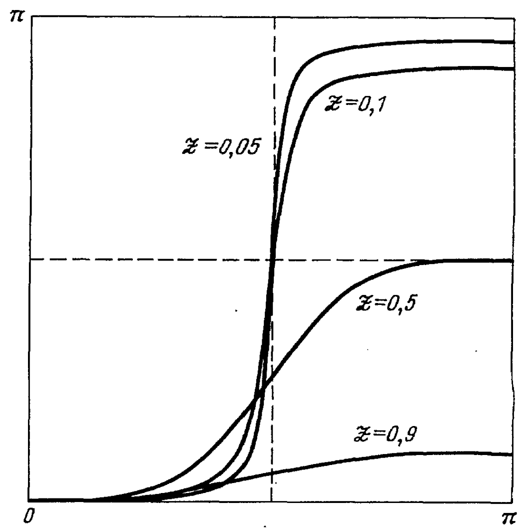

Рис. 7. Зависимость геометрической фазы, вносимой гиротропной средой, от нормированной длины пути $\delta = (k_+ - k_-)z/2$ согласно (5.24) при различных значениях параметра эллиптичности Z

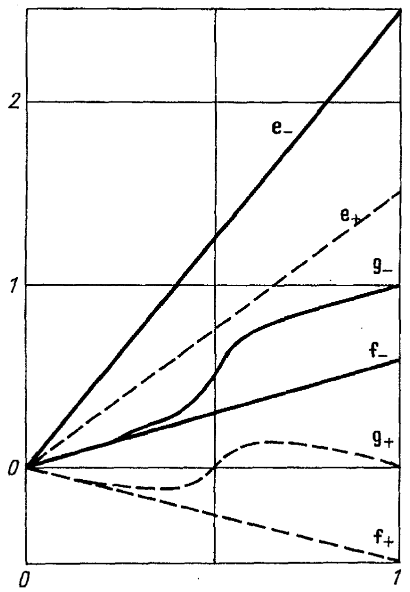

Рис. 8. Фазы векторов **e**, **f**, **g** в зависимости от долготы φ на СП в случае ротатора при $Z = 0{,}05$ и параметре анизотропии 0,25. Сплошные и пунктирные линии соответствуют право- и лево-циркулярным компонентам векторов. Фазы даны в единицах 2π

При полном обороте на СП $\varphi = -2\delta = 2\pi$, так что

$$\alpha/\pi = (n_+ + n_-)/(n_- - n_+) + Z,$$
$$\beta/\pi = 1 - Z, \tag{5.25}$$
$$\gamma/\pi = 2n_\pm/(n_- - n_+).$$

Найдем явный вид введенных выше векторов **e**, **f**, **g** при движении по постоянной широте, когда $\vartheta = \mathrm{const}$, $\varphi = (k_- - k_+)z = -2\delta$. Согласно (5.5)

$$e_\pm(z) = (\sigma \pm \delta)e_\pm(0) = \exp(ik_\pm z)e(0),$$

так что

$$\mathbf{e} = e^{i\sigma}\mathbf{h},\ \mathbf{f} = e^{-i\alpha}\mathbf{e} = e^{-i\beta}\mathbf{g},$$
$$\mathbf{g} = e^{-i\gamma}\mathbf{e} = e^{i(\sigma-\gamma)}\mathbf{h}, \tag{5.26}$$

где

$$h_\pm \equiv e^{\pm i\delta}e_\pm(0),$$
$$\sigma = \varphi(n_+ + n_-)/(n_- - n_+)$$

и функции α, β, γ определены в (5.23), (5.24), (5.16); в частности,

$$\sigma - \gamma = -\beta - Z\delta = -\mathrm{arctg}\,(Z\,\mathrm{tg}\,\delta).$$

Рис. 8 иллюстрирует три сечения расслоения, даваемые векторами e, f, g, т.е. оператором эволюции тракта, условием параллельного переноса $\mathbf{f}^*\cdot\dot{\mathbf{f}} = 0$ и условием однозначности $\mathbf{g} = e^{-i\gamma}\mathbf{e}$.

Из (5.26), действительно, следует

$$\mathbf{f}^*\cdot\dot{\mathbf{f}} = i\dot\delta[(1-Z)|e_+(0)|^2 - (1+Z)|e_-(0)|^2] = 0.$$

Вектор g согласно (5.26) определяет скорость изменения ГФ (ср. (П. 4)):

$$\mathbf{g}^*\cdot\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^*\cdot(i\dot\beta\mathbf{g} + e^{i\beta}\dot{\mathbf{f}}) = -i\dot\beta.$$

Явный вид $\dot\beta$ следует из (5.24):

$$\dot\beta = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)Z(1 - Z^2)/(Z^2 + \mathrm{ctg}^2\delta). \tag{5.27}$$

Отсюда при $Z = 0$ (движение по экватору) имеем $\dot\beta = 0$ (при $\varphi \neq \pi$), что иллюстрирует общее правило: ГФ не изменяется при движении по геодезической кривой с длиной дуги, меньшей π и проходящей через начальную точку (необходимость последнего условия ясна из приведенного ниже рис. 9, где как раз путь по меридиану ВС и дает ГФ).

5.2. Линейная пластина. В реальных экспериментах [14 — 18] используют последовательно несколько линейных фазовых пластин $\lambda/4$ и $\lambda/2$, что позволяет варьировать β без изменения α. Пусть ось симметрии одноосного кристалла составляет угол χ с осью x. При этом вектор $\mathbf{d}^{(e)}$, ориентированный вдоль оси симметрии, будет являться собственным для матрицы U(2) с собственным значением $e^{ik_e z}$ (индекс е относится к необыкновенной волне). Второй собственный вектор $\mathbf{d}^{(0)}$ имеет ориентацию $\chi + \pi/2$ и собственное значение $e^{ik_0 z}$. Следовательно, в собственном представлении матрица преобразования кристалла (без множителя $e^{i\sigma}$) имеет вид (5.5), где, теперь $k_1 = k_e$, $k_2 = k_0$.

Угол поворота χ в реальном пространстве соответствует долготе $\varphi = 2\chi$ на СП, поэтому векторам $\mathbf{d}^{(e)}$, $\mathbf{d}^{(0)}$ соответствуют точки на экваторе с долготами 2χ и $2\chi + \pi$. Переходя к повернутому на $-\chi$ базису, т.е. к обычному базису $\mathbf{d}^{(x)}$, $\mathbf{d}^{(y)}$, находим следующие параметры матрицы $\mathbf{D}$ (см. (5.3)):

$$a = \cos\delta + i\sin\delta\cdot\cos 2\chi,$$
$$b = i\sin\delta\cdot\sin 2\chi. \tag{5.28}$$

Отсюда для пластин с $\delta = \pi/4$ и $\delta = \pi/2$ получаем

$$a(\lambda/4) = \frac{1}{\sqrt2}(1 + i\cos 2\chi),$$
$$b(\lambda/4) = \frac{i}{\sqrt2}\sin 2\chi,$$
$$a(\lambda/2) = i\cos 2\chi, \tag{5.29}$$
$$b(\lambda/2) = i\sin 2\chi.$$

Пусть поляризованный вдоль x пучок падает на пластину $\lambda/4$ с ориентацией $\chi = 45°$. При этом 0- и **e**-волны возбуждаются в кристалле с одинаковыми амплитудами. Согласно (5.29)

$$\mathbf{e}' = \frac{e^{i\sigma}}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{e^{i\sigma}}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Этому преобразованию соответствует путь на СП от экватора по меридиану $\varphi = 0$ до Северного полюса. При этом согласно (5.30) вектор приобрел только динамическую фазу

$$\gamma = \alpha = \sigma = \frac{1}{2}(k_e + k_0)z = \frac{n_e + n_0}{n_e - n_0}\frac{\pi}{4}.$$

Произведение $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}'$ равно $D_{11} = e^{i\sigma}/\sqrt{2}$

Пропустим пучок через вторую пластину $\lambda/4$ с произвольной ориентацией χ. С помощью (5.29) и (5.30) находим результат второго преобразования

$$\mathbf{e}'' = \frac{e^{i2\sigma}}{2}\begin{pmatrix} 1 + i\cos 2\chi & i\sin\chi \\ i\sin\chi & 1 - i\cos 2\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = = e^{i(2\sigma+\beta)}\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}. \qquad (5.31)$$

Теперь кроме динамической фазы 2σ возникла ГФ $\beta = \chi + 45°$, поле линейно поляризовано под углом β и изображающая точка вернулась на экватор в точку с долготой $\varphi = 2\beta = 2\chi + \pi/2$ (в результате вращения на $\pi/2$ вокруг оси с долготой $2\chi = \varphi - \pi/2$). Замыкая траекторию по экватору (рис. 9), получаем телесный угол $\Omega = -\varphi = -2\beta$, что согласуется с правилом (4.3) (полагаем $0 \le \varphi \le \pi$). (Отметим, что полученное значение ГФ в два раза меньше, чем у маятника Фуко при аналогичном путешествии по поверхности Земли; см. раздел 2.)

Сравним с помощью определения Панчаратнама (3.6) фазы поля в трех точках тракта (см. рис. 9): на входе (точка A, поляризация e), между пластинами (B, $\mathbf{e}$) и на выходе (C, $\mathbf{e}''$). Пренебрегая фазой σ, из (5.30) и (5.31) находим

$$\beta_{AB} = \arg(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}') = 0,$$
$$\beta_{BC} = \arg(\mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{e}'') = 0, \qquad (5.32)$$
$$\beta_{AC} = \arg(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}'') = \chi + \pi/4.$$

Таким образом, хотя поля A и B, B и C находятся в фазе, поле A не в фазе с полем C, т.е. *бинарное отношение* "быть в фазе" по Панчаратнаму для пучков с различными поляризациями не обладает свойством *транзитивности* и поэтому не позволяет разбить множество полей **e** на *классы эквивалентности.*

Суммарное действие обеих пластин без учета фаз σ имеет вид $\mathbf{e}'' = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{e}$, где произведение матриц, входящих в (5.30) и (5.31), равно

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1 = e^{i\beta}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (5.33)$$

Сравнение с (5.11) показывает, что действие двух пластин $\lambda/4$ не эквивалентно действию ротатора, переводящего исходную точку A прямо в C по экватору без захода на полюс и не дающего ГФ (при $\delta < \pi/2$).

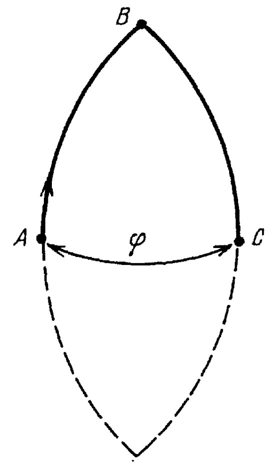

Рис. 9. Путь ABC на сфере Пуанкаре соответствует действию двух пластин $\lambda/4$ и дает геометрическую фазу $\beta = \varphi/2 = \chi + 45°$, линейно зависящую от угла поворота χ второй пластины, причем динамическая фаза α от χ не зависит. Пунктир — возможный замыкающий путь для ABC

Для эксперимента существенно, что динамическая фаза α не зависит от ориентации χ второй пластины. С практической точки зрения лучше использовать замкнутые траектории на СП, что можно осуществить с помощью трех пластин $\lambda/4$, $\lambda/2$, $\lambda/4$. При этом к траектории, изображенной на рис. 9 сплошной линией, добавляется симметричный путь в южном полушарии; см. пунктир на рис. 9 [14 — 18]. В результате при повороте средней пластины ($\lambda/2$) наблюдаются биения интенсивности со 100 %-ной видностью. Равномерное вращение этой пластины со скоростью $\dot{\chi}$ дает линейное приращение фазы пучка во времени, т.е. сдвиг его частоты $\omega \to \omega + 2\dot{\chi}$ [17].

Операцию замыкания можно производить и в опорном канале (см. рис. 3,*б* и рис. 4). Пусть $\mathbf{e}_0 = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{e}$ — преобразованный опорный вектор поляризации, тогда наблюдаемая интерференция определяется произведением

$$\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{D}_0^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}.$$

Следовательно, можно считать, что свет проходит по опорному каналу в обратном направлении. Условие замкнутости контура на СП имеет вид $\mathbf{D}_0^{-1} \cdot \mathbf{D} = e^{i\gamma}\mathbf{I}$, т.е. $\mathbf{D}_0 = e^{-i\gamma}\mathbf{D}$. Например, для эксперимента, изображенного на рис. 3,*б*,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.34)$$

так что $\mathbf{D}_0^{-1} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}^2 = -\mathbf{I}$, $\gamma = \pm\pi$

Рассмотрим в заключение произвольное унитарное преобразование $\mathbf{e}' = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^+ = \mathbf{I}$, тогда в собственном представлении оператора $\mathbf{U}$ имеем

$e'_n = \exp(i\lambda_n)\, e_n$, где $\exp(i\lambda n)$ — собственные значения $\mathbf{U}$. Теперь

$$\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}' = \sum_{n=1}^{2} |e_n|^2 \exp(i\lambda_n) =$$

$$= e^{i\sigma}(\cos\delta + iZ\sin\delta), \tag{5.35}$$

где

$$\sigma = (\lambda_1 + \lambda_2)/2,$$
$$\delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/2, \tag{5.36}$$
$$Z = |e_1|^2 - |e_2|^2.$$

Полученное выражение совпадает с (5.13) при соответствующем переопределении параметров. Таким образом, формулы (5.14) — (5.16) сохраняют свой смысл; динамическая фаза должна в общем случае определяться по формуле (5.22).

При замкнутой орбите на СП $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{e}$ отличаются только фазой γ, т.е. е совпадает с одним из собственных векторов U и γ — с λ_1 или λ_2

6. ГФ в случае двух скалярных волн. В рассмотренных выше примерах с маятником Фуко, поляризованным светом или звуком, натянутой веревкой фигурировали поляризованные поперечные колебания. Возникает вопрос, существенна ли поперечность волны для появления ГФ? Возможно ли ее наблюдение с помощью, например, продольных звуковых волн?

Легко убедиться, что важен не сам факт поперечности, а то, что поперечные колебания обладают двумя степенями свободы, это совокупность двух вырожденных осцилляторов. В свободном пространстве они независимы, но при распространении в анизотропном веществе они взаимодействуют (в общем случае). Взаимодействие мод в маятнике Фуко вызывается силами Кориолиса [31]. Использованный выше формализм с векторами и матрицами Джонса, сферой Пуанкаре применим к любым двухмодовым системам, включая частицу со спином 1/2 в магнитном поле.

Рассмотрим две скалярные волны, которые для наглядности будем считать двумя световыми пучками с одинаковыми фиксированными поляризациями.

Пусть e_1 и e_2 — комплексные амплитуды волн в пучках, имеющих единичную суммарную интенсивность: $|e_1|^2 + |e_2|^2 = 1$. Введем "вектор" $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ — совокупность двух чисел, задающих состояние поля в некотором сечении оптического двухканального тракта z.

Будем перемешивать пучки с помощью идеального полупрозрачного зеркала с регулируемым коэффициентом пропускания t; коэффициент отражения r при этом равен $(1 - t^2)^{1/2}$. Определим t и r через вспомогательный параметр $\chi : t = \cos\chi$, $r = \sin\chi$, тогда действие зеркала описывается преобразованием $\mathbf{e}' = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{e}$, где

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Направим пучки на второе зеркало, отличающееся лишь знаком коэффициента отражения и описываемого матрицей $\mathbf{D}_1^{-1} = \mathbf{D}_1^{+}$. Введем в один из пучков между зеркалами дополнительную разность хода 2δ, действие которой описывается диагональной матрицей

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} e^{i2\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\delta}\begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Множитель $e^{i\delta}$ далее опускаем. Описанное устройство является интерферометром Маха—Цендера с общей матрицей $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$.

Перемножив эти матрицы, можно убедиться, что $\mathbf{D}$ совпадает с матрицей линейной фазовой пластины (5.28). При этом задержка 2δ соответствует толщине фазовой пластины, умноженной на $k_e - k_0$, коэффициент пропускания зеркал t — косинусу угла между осью симметрии и осью x. Таким образом, действие интерферометра на два пучка с фиксированной поляризацией изоморфно действию фазовой пластины с параметрами (δ, χ) на один пучок поляризованного света.

Чтобы получить эквивалент пластины $\lambda/4$ с ориентацией χ, надо установить разность хода 2δ, равной $\pi/2$, и коэффициенты пропускания обоих зеркал t равными $\cos\chi$. Два таких интерферометра, расположенных последовательно, один с $t = 1/\sqrt{2}$ и второй с регулируемым пропусканием $t = \cos\chi$, имитируют рассмотренную выше схему (см. рис. 9). При этом на входе $e_1 = 1$ и $e_2 = 0$, т.е. возбуждается лишь один канал первого интерферометра. Выходные пучки имеют согласно (5.30) амплитуды

$$e''_1 = e^{i\beta}\cos\beta,\; e''_2 = e^{i\beta}\sin\beta \tag{6.3}$$

с общей фазой, зависящей от пропускания зеркал второго интерферометра: $\beta = 2\chi + \pi/2 = 2\arccos t + \pi/2$.

При смешении одного из выходных пучков с третьим, опорным, пучком будут наблюдаться биения интенсивности с фазой и видностью, определяемой (3.5), (3.6).

Как и в поляризационных экспериментах, лучше использовать комбинацию из трех интерферометров, эквивалентных пластинам $\lambda/4$, $\lambda/2$, $\lambda/4$ и дающих замкнутую траекторию на СП (см. рис. 9).

При этом на выходе будет наблюдаться только один пучок с фазой, зависящей от пропускания среднего интерферометра, имитирующего пластину $\lambda/2$.

7. ГФ в многомодовых системах. Мы рассмотрели преобразование двух пучков в случаях, когда они отличаются или поляризацией, или направлениями распространения и пространственной локализацией. Ясно, что в последнем случае число пучков может быть больше двух. Можно реализовать оптическую систему, в которой N стационарных пучков с одинаковой фиксированной поляризацией перемешиваются с помощью системы полупрозрачных зеркал и задержек. В работе [45] предлагается использовать направленные ответвители. В [46] рассматривалось перемешивание с помощью зеркал (рис. 10).

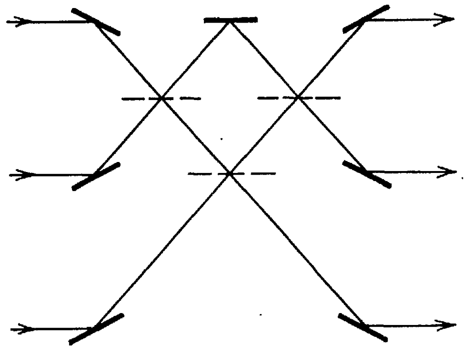

Рис. 10. Система зеркал, перемешивающая три пучка света с фиксированной поляризацией, реализует унитарную группу U(3)

Состояние N-модового поля в некотором сечении тракта задается точкой в N-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^N = \mathbf{R}^{2N}$. Преобразование состояния описывается матрицами $N \times N$, поэтому такая система реализует общую линейную группу $\mathrm{GL}(2N, \mathbf{R})$. При отсутствии потерь пространство состояний ограничено сферой S^{2N-1} в $2N$-мерном пространстве. Если игнорировать общий фазовый множитель $e^{i\varepsilon}$ всех N пучков, то получаем проективное пространство S^{2N-2}.

Как ясно из предыдущего, наблюдение фазы γ требует наличия опорного пучка с амплитудой $\mathbf{e}_0$, т.е. увеличения размерности системы до $N+1$. Такая интерференционная система позволяет наблюдать ГФ, связанную с группой $\mathrm{SU}(2N-2)$ и определяемую через общую фазу согласно (3.8).

Методы нелинейной оптики позволяют реализовать и другие типы групп. Так, действие двухмодового параметрического усилителя с заданной накачкой описывается матрицами, принадлежащими лоренцевой группе SU (1,1). Такой усилитель сохраняет разность интенсивностей в сигнальной и холостой модах: $|e_1|^2 - |e_2|^2 = 1$, и проективное пространство является гиперболоидом [47, 48]. ГФ, вносимая системой из четырех вырожденных (одномодовых) параметрических усилителей, дающих замкнутый контур в проективном пространстве, рассчитывалась в [47] групповым методом. Непосредственный расчет дает, конечно, такой же результат [49]. Обратим внимание, что здесь мы имеем пример ГФ при $N = 1$ (не считая опорного канала), которая возникает в результате модуляции параметров линейного осциллятора внешней "накачкой"; общие решения такой задачи для квантового осциллятора рассматривались во многих работах; см. [58, 60, 61].

Схемы из нескольких параметрических усилителей и интерферометров дают новые возможности; например, можно реализовать группу SU (2,1) [50]. Такие схемы рассматриваются в последнее время в связи с парадоксом ЭПР—Белла; см. [51—53]. Отметим, что групповые методы все чаще применяются для описания, классификации и расчета различных моделей линейной, нелинейной и квантовой оптики.

8. Фазы Берри, Ааронова—Анандана и Панчаратнама. Сделаем несколько замечаний по поводу терминологии, которая, по-видимому, находится еще в стадии установления.

Часто используют название *топологическая* фаза вместо геометрической. Это оправдывается важной ролью топологии базового пространства расслоения, которая должна быть нетривиальной ([24], с.263). Инвариантность ГФ относительно произвольной деформации траектории C в базовом пространстве, сохраняющей охватываемую ею площадь Ω (см. (4.3)), также можно считать топологическим свойством.

Применяется также название *неинтегрируемая* фаза, что, возможно, связано с тем, что правило параллельного переноса не эквивалентно наличию голономной связи в механических системах (которая позволяет уменьшить число степеней свободы системы). Отметим возникшее здесь терминологическое противоречие между терминами *голономия* в геометрии и *неголономная система* в механике [6].

Возникновение ГФ при завершении цикла иногда характеризуют словами "глобальное изменение без локального изменения" [6]. Отметим, однако, возможность определения локальной, текущей, ГФ с помощью связности Панчаратнама; см. формулы (3.7) и (5.24).

Различают несколько модификаций ГФ: адиабатическая и неадиабатическая фазы Берри, фаза Ааронова—Анандана (АА), поляризационная фаза Панчаратнама, фаза Рытова—Владимирского, квантовая и неквантовая ГФ; при анализе классических динамических систем в переменных угол—действие возникает фаза Ханни.

Часто такие термины отражают лишь приоритетные аспекты, а не существенные отличия. Более последовательная классификация типов ГФ основана на стандартных обозначениях соответствующей группы преобразований типа SU(n) и т.д.

Сходство и различие некоторых из перечисленных выше типов ГФ легко уяснить с помощью поляризационной модели. Дело в том, что использованное выше описание преобразований поляризации с помощью векторов и матриц Джонса, сферы Пуанкаре изоморфно описанию эволюции любой двухуровневой квантовой системы, например частицы со спином 1/2 в магнитном поле **B**. Движению на СП с постоянной широтой под действием ротатора (раздел 5) соответствует свободная прецессия магнитного момента частицы $\vec{\mu}$ вокруг направления **B** в реальном пространстве (или на сфере Блоха; см., например, [54], с.85). Расщеплению уровней под действием поля **B** соответствует расщепление постоянной распространения $\Delta k = k_1 - k_2$ под действием анизотропной среды.

Прохождению пучка света через несколько фазовых пластин соответствует пролет электрона или нейтрона через несколько областей однородного поля $\mathbf{B}_n$. Фактически этот случай описывается зависящим от времени гамильтонианом $H(t)$. Непрерывному изменению $H(t)$ соответствует среда с зависящей от z анизотропией [43].

В работах [4, 29] было обращено внимание на то, что адиабатическую и неадиабатическую фазы Берри можно рассматривать как частные случаи фазы АА. Последняя предполагает цикличность изменения гамильтониана, а также рассмотрение лишь тех решений уравнения Шрёдингера, которые также обладают этим свойством:

$$H(T) = H(0), \psi(T) = e^{i\gamma}\psi(0). \tag{8.1}$$

Последнее условие означает, что $\psi(T)$ и $\psi(0)$ принадлежат одному лучу (вертикальные линии на рис. 5), так что контур C, описывающий траекторию системы в проективном пространстве, замкнут. Условие замкнутости можно также представить в виде

$$\psi(T) = U(T)\,\psi(0) = e^{i\gamma}\psi(0), \tag{8.2}$$

где $U(t)$ — оператор эволюции, соответствующий данному гамильтониану $H(t)$. Таким образом, фаза АА — это фаза, приобретаемая собственными функциями оператора эволюции $\psi(0)$, при этом $e^{i\gamma}$ — соответствующее собственное значение. В поляризационной оптике при замкнутых орбитах имеем аналогичную ситуацию: $\mathbf{e}' = \mathbf{U}\cdot\mathbf{e} = e^{i\gamma}\mathbf{e}$, т.е. **e** является собственным вектором матрицы **U**.

В частности, гамильтониан может быть постоянным, тогда в случае двухуровневой системы все векторы состояния являются циклическими при $T = 2\pi n/\omega$, однако нетривиальная фаза β возникает лишь у нестационарных векторов, т.е. параметр Z в (5.24) должен отличаться от $\pm$ 1. Формула для β (5.25) для замкнутых циклов совпадает с соответствующей формулой в [28], полученной для спина, а формула для текущей фазы (5.24) обобщает ее на незамкнутые циклы.

Таким образом, поляризационная фаза Панчаратнама совпадает, по существу, с фазой АА для $N = 2$.

Берри [2] рассматривал собственные функции $\psi_n(t)$ начального гамильтониана $H(0)$, которые удовлетворяют свойству цикличности (8.1) лишь при адиабатическом изменении $H(t)$ (ибо в противном случае происходят "переходы" на другие уровни с $m \neq n$).

Заметим, что при описании поляризационные экспериментов также неявно используется предположение об адиабатичности, поскольку пренебрегается отражениями от фазовых пластин, т.е. возбуждением дополнительных степеней свободы — встречных волн.

Между моделями Берри и АА имеется еще одно формальное различие: в первом случае для выяснения геометрического характера фазы состояния системы отображаются в пространство параметров гамильтониана, посредством которых осуществляется его изменение во времени (см. (П. 14)), а во втором — в проективное пространство относительно всего гильбертова пространства системы.

В поляризационной оптике для наблюдения адиабатической ГФ необходимо медленно (в масштабе λ) изменять анизотропные параметры среды вдоль оси пучка z и возбуждать среду собственными волнами для начальных слоев вещества [43]. Например, обыкновенная волна в одноосном кристалле, который постепенно скручивается вокруг оси z. будет оставаться обыкновенной, т.е. будет "отслеживать" поворот оси симметрии кристалла, но при этом будет приобретать дополнительную фазу — адиабатическую фазу Берри. Очевидно, такой скрученный кристалл действует как ротатор и мы пришли к уже рассмотренному на рис. 3 эксперименту. Если же падающая на кристалл волна имеет произвольную поляризацию, то картина усложняется, так как теперь имеются два характерных параметра — длина скручивания на 2π и анизотропная длина $2\pi / \Delta k$.

Для случая спина 1/2 такие общие решения анализировались в работах [55—59], для осциллятора с переменными параметрами — в [58,60,61].

9. ГФ в квантовой оптике. Квантовые аспекты оптических проявлений ГФ рассматривались лишь в немногих работах; см., например, [38,48,62].

Некоторую дискуссию вызвал вопрос о том, является ли фаза Рытова—Владимирского, наблюдавшаяся в световодах [13], классическим или квантовым эффектом [17,38,63].

Ясно, что в общем случае квантовое описание оптических явлений более универсально, чем классическое или полуклассическое, поэтому представляется целесообразным исходить из следующего определения: существенно квантовыми эффектами являются лишь те эффекты, которые не имеют классических аналогов, обладающих теми же характерными признаками. С этой точки зрения квантово-оптические эффекты являются довольно редкими событиями, особенно если исключить из рассмотрения процесс детектирования, т.е. принять полуклассическую теорию (ср. дискуссию по поводу двухфотонной интерференции в [49,50,53,64]).

Из приведенного выше рассмотрения следует, что характеристические признаки ГФ связаны лишь с математической структурой используемых моделей, которая одинакова, например, для спина 1/2 в магнитном поле и поляризованного света в анизотропном веществе. ГФ $\beta = -\Omega/2$ у вектора состояния спина $|\psi\rangle$ и вектора поляризации плоской волны e возникает через скалярные произведения $\langle\psi|\psi'\rangle$ и $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}'$ совершенно одинаковым образом, и поэтому вряд ли целесообразно в первом случае называть ГФ квантовой, в во втором — классической.

При квантовом описании поля вектор $\mathbf{e}(z)$ описывает эволюцию двух операторов поля плоской волны в представлении Гейзенберга. Существенно, что эта эволюция в случае линейных оптических устройств совершенно одинакова по форме в квантовой и классической феноменологических теориях; см., например, [64,65]. В результате квантовое описание оптических экспериментов, демонстрирующих ГФ, не дает ничего нового по сравнению с классическим, при этом наблюдаемая фаза не зависит от состояния $|\psi\rangle$ [38].

Иногда считается, что в оптических интерференционных экспериментах проявляется классическая фаза Ханни, а не квантовая фаза Берри [48]. Такая точка зрения основана на определении оптической ГФ через произведение $\langle\psi|\psi'\rangle$ вместо $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}'$. Однако такое формальное определение не имеет отношения к наблюдаемым эффектам в случае квантовой оптики [38]. В частности, фаза произведения $\langle\psi|\psi'\rangle$ существенно зависит от свойств состояния $|\psi\rangle$, от средней интенсивности поля и лишь в некоторых простых случаях (однофотонное состояние) описывает наблюдаемую фазу [38, 48].

Отметим в заключение, что ГФ можно наблюдать также и при интерференции интенсивностей [14,38]. В интерферометрах интенсивности обычно используется техника счета фотонов и наблюдаемую интерференцию интерпретируют как существенно неклассический эффект. Однако логичней, по-видимому, сам факт интерференции рассматривать как классический, а его единственную неклассическую характеристику — высокую видность интерференции — относить за счет неклассичности используемого на входе интерферометра неклассического (двухфотонного) света [38,49,50].

10. Заключение. Итак, система из N взаимодействующих осцилляторов с комплексными амплитудами e_n характеризуется некоторой фазой $\gamma = \alpha + \beta$, которая после вычитания динамической части α, определяемой динамикой системы, проявляет определенные геометрические свойства, связанные с контуром C, отображающим эволюцию системы в проективном пространстве (т.е. при игнорировании общей фазы амплитуд e_n). Эволюция системы во времени или в пространстве описывается линейным преобразованием $U : \mathbf{e} \to \mathbf{e}'$, где $\mathbf{e} = \{e_n\}$. Фазу γ можно наблюдать в интерференционном эксперименте, использующем дополнительный, опорный канал с амплитудой $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}$. При этом наблюдаются биения интенсивности с фазой γ. Последняя равна фазе суммы из N комплексных чисел:

$$\gamma = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} u / \operatorname{Re} u),$$

где

$$u \equiv \sum_{n=1}^{N} u_n \equiv \sum_{n=1}^{N} e_n^* e_n'.$$

Наиболее наглядный и простой пример физической модели, проявляющей геометрическую фазу, связан с линейнополяризованными волнами, бегу-

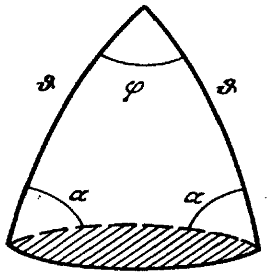

Рис. 11. К расчету телесного угла (заштрихованная область) на сфере Пуанкаре, соответствующего геометрической *фазе,* вносимой ротатором. Пунктир — геодезическая линия

щими, например, по натянутой веревке (см. рис. 3). Для поворота плоскости поляризации таких волн можно использовать воздушные потоки. В случае линейной поляризации $\beta = \pm\pi$. Обобщение на произвольную эллиптическую поляризацию приводит к "геометрической" формуле $\beta = -\Omega/2$, где Ω — телесный угол, охватываемый на сфере Пуанкаре в процессе преобразования поляризации.

Автор благодарен И.А. Яковлеву за прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

Приложение. Вывод "геометрической" формулы $\beta = -\Omega/2$. Введем вектор $\mathbf{g}(z)$ с исключенной общей фазой $\gamma(z)$:

$$\mathbf{e}(z) = e^{i\gamma(z)}\,\mathbf{g}(z), \tag{П.1}$$

и найдем скорость изменения вектора поляризации

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}z} \equiv \dot{\mathbf{e}} = i\dot{\gamma}\mathbf{e} + e^{i\gamma}\dot{\mathbf{g}}. \tag{П.2}$$

Умножая на $\mathbf{e}^*$, определяем скорость изменения фазы

$$\dot{\gamma} = i(\mathbf{g}^* \cdot \dot{\mathbf{g}}) - i(\mathbf{e}^* \cdot \dot{\mathbf{e}}). \tag{П.3}$$

Согласно (5.22) второе слагаемое равно скорости изменения динамической части фазы, так что скорость изменения ГФ равна

$$\dot{\beta} = i(\mathbf{g}^* \cdot \dot{\mathbf{g}}) = -\mathrm{Im}(\mathbf{g}^* \cdot \dot{\mathbf{g}}) \tag{П.4}$$

(последнее равенство следует из $|\mathbf{g}|^2 = 1$). Таким образом, ГФ в точке z имеет вид

$$\beta(z) = -\mathrm{Im}\int_0^z \mathrm{d}z'(\mathbf{g}^* \cdot \dot{\mathbf{g}}). \tag{П.5}$$

Пусть траектория на СП C задана параметрически: $\vartheta = \vartheta(z)$, $\varphi = \varphi(z)$, тогда вдоль контура C имеем

$$\dot{\mathbf{g}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}\dot{\varphi}. \tag{П.6}$$

Введем обозначения

$$A_\vartheta \equiv \mathrm{Im}\left(\mathbf{g}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta}\right),$$

$$A_\varphi \equiv \mathrm{Im}\left(\mathbf{g}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}\right), \tag{П.7}$$

тогда (П.5) принимает вид криволинейного интеграла

$$\beta = -\mathrm{Im}\int_0^z \mathrm{d}z'\left[\left(\mathbf{g}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta}\right)\dot{\vartheta} + \left(\mathbf{g}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}\right)\dot{\varphi}\right] =$$

$$= -\int_C A_\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta + A_\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{П.8}$$

В случае замкнутого контура — это циркуляция "вектора" $\mathbf{A} = (A_\vartheta, A_\varphi)$. С помощью формулы Стокса выражаем ГФ через поток "магнитного поля":

$$\beta = -\iint_\Omega B\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi, \tag{П.9}$$

где

$$B \equiv \frac{\partial A_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} -$$

$$- \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta} = 2\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}\right) \tag{П.10}$$

и Ω — телесный угол, охватываемый контуром C.

В современной геометрии подынтегральное выражение в (П.8) вместе с переменными интегрирования $\mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}\varphi$ называют дифференциальной формой 1-й степени или 1-формой [25]. Соответственно. $B\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ — 2-форма. При этом используют обозначения $\mathbf{g}^* \cdot \mathrm{d}\mathbf{g}$ и $\mathrm{d}\mathbf{g}^* \wedge \mathrm{d}\mathbf{g}$.

Если полагать, что двухкомпонентная функция $\mathbf{A}(\vartheta, \varphi)$ играет роль вектор-потенциала на поверхности СП, то величина B соответствует магнитному полю, направленному радиально. Такое поле создавал бы магнитный монополь Дирака, расположенный в центре СП. При этом прослеживается также аналогия с эффектом Ааронова — Бома, см. [43].

Заметим, что если умножить вектор $\mathbf{g}$ на произвольный фазовый множитель, $\mathbf{g} \to \tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{g}\exp(i\varepsilon(z))$, то согласно (П.7) функции A_ϑ и A_φ получат приращения $\partial\varepsilon/\partial\vartheta$ и $\partial\varepsilon/\partial\varphi$ соответственно — аналогично вектор-потенциалу ЭМ поля при калибровочном преобразовании вектора состояния заряженной частицы. Это преобразование можно связать с законом сохранения электрического заряда, что с необходимостью приводит к существованию ЭМ поля с известными свойствами; см., например, [27].

Существенно, что B согласно (П.10) не изменяется при произвольном калибровочном преобразовании. Например, в (П.5) в случае замкнутого контура C можно вместо $\mathbf{g}$ использовать $\mathbf{e}$ или $\mathbf{f} = e^{-i\alpha}\mathbf{e}$ (в то же время в локальной связи (П.4) должен фигурировать именно вектор $\mathbf{g}$). Удобно взять $\tilde{\mathbf{g}}$ в виде (4.1), т.е. $\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{d}$. Производные $\tilde{\mathbf{g}}$ в циклическом базисе имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2}\left(e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2},\, e^{i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \vartheta} = \frac{i}{2}\left(-e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2},\, -e^{i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\right), \qquad (\Pi.11)$$

что при подстановке в (П.7) и (П.10) дает

$$A_\vartheta = 0,\ A_\varphi = -\frac{1}{2}\cos\vartheta,\ B = \frac{1}{2}\sin\vartheta. \qquad (\Pi.12)$$

Окончательно из (П.9) находим

$$\beta = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = -\frac{1}{2}\,\Omega. \qquad (\Pi.13)$$

Чтобы перейти к случаю адиабатической фазы Берри (раздел 8), предположим, что начальное состояние $\mathbf{e}(0) = \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_n(0)$ является собственным для $H(0)$. При достаточно медленном изменении H система остается в собственном состоянии мгновенного гамильтониана $H(t)$. Пусть H зависит от z (или от t) посредством набора параметров $\vec{\lambda} = \{\lambda_i(z)\}$, тогда вектор $\mathbf{g}_n$ также будет зависеть от z через эти параметры:

$$\dot{\mathbf{g}}_n = \sum_i \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \lambda_i}\,\dot{\lambda}_i. \qquad (\Pi.14)$$

При этом формула (П.8) принимает вид

$$\beta_n = -\int\limits_0^z \sum_i A_i^{(n)}\, d\lambda_i, \qquad (\Pi.15)$$

где теперь

$$A_i^{(n)} \equiv \mathrm{Im}(\mathbf{g}_n^* \cdot \partial\mathbf{g}_n / \partial\lambda_i). \qquad (\Pi.16)$$

В случае двухуровневой системы в качестве параметров λ_i согласно (5.10) можно выбрать сферические координаты на СП ϑ, φ (т.е. размерности проективного пространства и пространства параметров гамильтониана совпадают). В результате мы снова получаем формулы (П.8) — (П.13). В случае числа уровней, большем двух, такого совпадения нет; при этом для преобразования циркуляции (П.15) в интеграл по потоку надо использовать многомерную формулу Стокса [25].

Проведем в заключение непосредственный вывод связи (П.13) для частного случая ГФ, индуцированной ротатором; см. (5.24). Из рис. 11 ясно, что искомая площадь Ω равна разности $\Omega_1 - \Omega_2$. Здесь Ω_1 — площадь, заключенная между двумя меридианами с разностью долгот φ и широтой $\tilde{\vartheta} = 90^\circ - \vartheta$, а Ω_2 — площадь сферического треугольника, ограниченного теми же долготами и геодезической. Угол α находится по формулам сферической тригонометрии (полагаем все углы меньшими $\pi/2$):

$$\sin\vartheta \cdot \mathrm{ctg}\,\vartheta = \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\varphi + \cos\vartheta \cdot \cos\varphi. \qquad (\Pi.17)$$

Вводя обозначения $\cos\vartheta = Z$, находим $\mathrm{ctg}\,\alpha = Z\,\mathrm{tg}\,2\varphi$. Заменяя $\mathrm{ctg}\,\alpha$ на $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$, получаем

$$\alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}(Z\,\mathrm{tg}\,2\varphi). \qquad (\Pi.18)$$

Площадь сферического треугольника согласно теореме Гаусса — Бонне равна превышению суммы углов над π:

$$\Omega_2 = \varphi + 2\alpha - \pi = \varphi - 2\,\mathrm{arctg}(Z\,\mathrm{tg}\,2\varphi). \qquad (\Pi.19)$$

Площадь Ω_1 легко находится интегрированием: $\Omega_1 = \varphi(1 - Z)$. Отсюда с учетом связи $\varphi = -2\delta$ получаем

$$\Omega = -2\,\mathrm{arctg}\,(Z\,\mathrm{tg}\,\delta) + 2Z\delta.$$

Сравнение с (5.24) снова дает формулу $\beta = -\Omega/2$.

Выше мы полагали $\Omega_{1,2} > 0$. При учете направления обхода знак β противоположен знакам Ω и $(Z\varphi)$ и совпадает со знаком $(Z\delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берке У.* Пространство-время, геометрия, космология. — М. Мир, 1985. С. 141; *Burke W.* Spacetime, Geometry, Cosmology Mill Valley, Calif. University Books, 1980.
2. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc. 1984, **A392,** 45.
3. *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковский Б.Л. Степановский ЮЛ.* УФН. 1990, **160,** 1.
4. *Moore D.J.* Phys. Rep. 1991, **210,** 1.
5. *Berry M.V.* Scient. Am. 1988. **259,** 26.
6. *Berry M.V.* Phys. Today. December 1990, 26.
7. Phys. Today. March 1993, 17.
8. *Hannay J.H.* J. Phys. 1985, **A18,** 221.
9. *Berry M.V.* J. Phys. 1985, **18,** 15.
10. *Рытое СМ.* ДАН СССР. 1938, **28,** 263.
11. *Владимирский В.В.* ДАН СССР. 1941, **31,** 222.
12. *Pancharatnam S.* Proc. Indian Acad. Sci. 1956, **A44,** 247; **A46,** 1.
13. *Tomita A., Chiao R.Y.* Phys. Rev. Lett. 1986, **57,** 937.
14. *Kwiat P.O., Chiao R.Y.* Phys. Rev. Lett. 1991, **66,** 588.
15. *Bhandary R., Samuel J.* Phys. Rev. Lett. 1988, **60,** 1211.
16. *Bhandary R.* Phys. Lett. 1988, A133, 1.
17. *Simon R., Kimble H.J., Sudarshan E.C.G.* Phys. Rev. Lett. 1988, **61,** 19.
18. *Chyba T.H., Wang L.J., Mandel L., Simon R.* Opt. Lett. 1988, **13,** 562.
19. *Kitano M., Yabuzaki Y.* Phys. Lett. 1989, **A142,** 321.
20. *Suter D., Mueller K.T., Pines A.* Phys. Rev. Lett. 1988, **60,** 1218. *Лист В.Н., Федорук Г.Г., Хаймович ЕЛ.* Письма ЖЭТФ. 1989, **50,** 205.
21. *Bitter T., Dubbers D.* Phys. Rev. Lett. 1987, **59,** 251.
22. *Richardson D.J., Kilvington A.I., Green K., Lamoreaux S.K.* Phys. Rev. Lett. 1988, **61,** 2030.
23. *Simon B.* Phys. Rev. Lett. 1984, **51,** 2167.
24. *Eguchi T., Gilkey P.B., Hanson A.J.* Phys. Rep. 1980, **66,** 213.
25. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М., Наука, 1986.
26. *Wikzek F., Zee A.* Phys. Rev. Lett. 1984, **52,** 2111.
27. *Mills R. Am.J.* Phys. 1989, **57,** 493.
28. *Aharonov Y., Anandan* J. Phys. Rev. Lett. 1987, **58,** 1593.
29. *Moore D.J., Stedman G.E.* J. Phys. 1990, **A23,** 2049.
30. *Jordan T.F.* Phys. Rev. 1988, **A38,** 1590.
31. *Khein A., Nelson D.F.* Am. J. Phys. 1993, **61,** 170.
32. *Kitano M., Yabuzaki Y., Ogawa T.* Phys. Rev. Lett. 1987, **58,** 523.
33. *Jordan T.F.* Phys. Rev. Lett. 1988, **60,** 1584.
34. *Jordan T.F.* J. Math. Phys. 1988, **29,** 2042.

35. *Bhandary R.* Phys. Lett. 1989, **135,** 240.
36. *Chiao R.Y., Antaramian A., Ganga KM., Jiao H., Wilkinson S.R., Nathel H.* Phys. Rev. Lett. 1988, **60,** 1214.
37. *Chiao R.Y., Wu Y.S.* Phys. Rev. Lett. 1986, **57,** 933.
38. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1989, **A140,** 19.
39. *Bhandary R.* Phys. Lett. 1991, **A157,** 221.
40. *Urbantke H.* Am. J. Phys. 1991, **59,** 503.
41. *Борн М., Вольф Е.* Основы оптики. М., Наука, 1970.
42. *Bohm A., Boya L.J., Kendrick B.* Phys. Rev. 1991, **43A,** 1206.
43. *Berry M.V.* J. Mod. Opt. 1987, **34,** 1401.
44. *Liang J.Q., Ding X.X.* Phys. Lett. 1991, **A153,** 273.
45. *Linares J., Nistal Q.* Phys. Lett. 1992, **A162,** 7.
46. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1988, **A132,** 299.
47. *Chiao R.Y., Jordan T.F.* Phys. Lett. 1988, **A132,** 77.
48. *Agarwal G.S., Simon R.* Phys. Rev. 1990, **A42,** 6924.
49. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* Лаз. физика. 1992, **2,** 112; Laser Phys. 1992, **2,** 112.
50. *Belinsky A. V., Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1992, **A166,** 303.
51. *Greenberger DM., Home M., Shimony A., Zeilinger A.* Am. J Phys. 1990, **58,** 1131.
52. *Belinsky A.V., Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1993, **A176,** 415.
53. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* УФН. 1993, **163:** 8, 1.
54. *Клышко Д.Н.* Физические основы квантовой электроники. М.. Наука, 1986.
55. *Ellinas D., Barnett S.M., Dupertuis M.A.* Phys. Rev. 1989, **A39,** 3228.
56. *Datta N., Grhosh G.* Phys. Rev. 1989, **A40,** 526.
57. *Wang S.J.* Phys. Rev. 1990, **A40,** 5107.
58. *Base S.K., Dutta-Roy B.* Phys. Rev. 1991, **A43,** 3217.
59. *Barut A.O., Bozic M., Klarsfeld S., Marc* Z. Phys. Rev. 1993.
60. *Kobe D.H.* J, Phys. 1990, **A23,** 4249.
61. *Cervero J.M., Lejareta J.D.* Quant. Opt. 1990, **2,** 333.
62. *Breuer H.P., Dietz K., Holthaus M.* Phys. Rev. 1993, **A47,** 725.
63. *Haldane F.D.M.* Phys. Rev. Lett. 1987, **59,** 1788.
64. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1992, **A163,** 349.
65. *Klyshko D.N.* Phys. Lett. 1989, **A137,** 334.