

## ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ — ОДИН ИЗ МЕХАНИЗМОВ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-АКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.Н. Васильев\*, М.И. Каганов, Ф.М. Мааллави\*

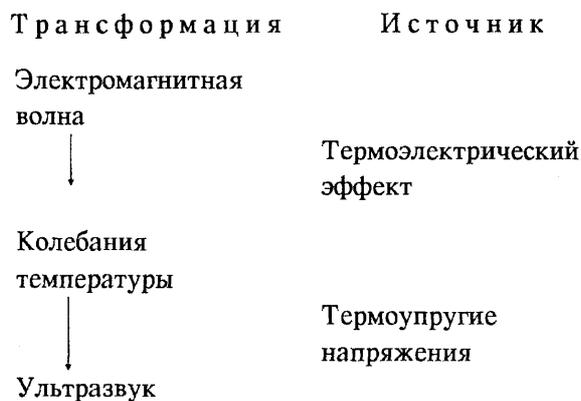
(\*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, Москва)

(Статья поступила 29.07.93 г.)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (81).
  2. Тепловые волны в металле (81).
  3. Связанные электромагнитно-акустические колебания (82).
  4. Тепловые колебания при поверхностном источнике (84).
  5. Возбуждение ультразвука (85).
  6. Роль магнитного поля (87).
  7. Нелинейная генерация продольного ультразвука (90).
  8. Заключение (93).
- Список литературы (93).

**1. Введение.** Традиционным предметом исследования в задачах электромагнитно-акустического преобразования (ЭМАП) служат механизмы линейной трансформации, ответственные за генерацию ультразвука в металле на частоте падающей на его поверхность электромагнитной волны. Значительно уступая в эффективности пьезоэлектрическим и магнитоstrictionным преобразователям, ЭМАП, тем не менее, представляет интерес как для изучения собственно акустических свойств проводников, так и для определения параметров связи между электронной, ионной и спиновой подсистемами. К наиболее детально исследованным источникам линейного преобразования волн относятся индукционная и деформационная силы [1]. В качестве источника линейного ЭМАП, кроме того, может выступать инерционная сила (сила Стюарта—Толмена) [1], а также неоднородные колебания температуры, обязанные термоэлектрическому эффекту [2, 3]. Каким образом эти колебания температуры служат источником звуковых колебаний под действием электромагнитных волн показано на схеме:



Реализовать схему линейного ЭМАП за счет термоупругих напряжений возможно лишь в существенно анизотропном проводнике либо в металле, анизотропия проводимости в котором создана магнитным полем. В изотропном металле термоупругие напряжения служат источником генерации ультразвука на удвоенной частоте электромагнитной волны.

Прежде чем переходить к рассмотрению линейной и нелинейной термоупругой генерации ультразвука в металлах, отметим, что в этой статье используются обозначения физических величин, принятые в [1], определения даются лишь вновь вводимым величинам.

**2. Тепловые волны в металле.** Колебания температуры и электромагнитные колебания (при очевидном отличии) имеют то общее, что распространение и тех, и других в металле сопровождается скин-эффектом. Действительно, малые колебания темпера-

туры, возбуждаемые с частотой  $\omega$  источником тепла на поверхности полубесконечного ( $z > 0$ ) образца, описываются однородным уравнением теплопроводности

$$C \partial \theta / \partial t - \kappa \partial^2 \theta / \partial z^2 = 0, \quad (1)$$

где  $\theta = \text{Re} \theta(z) e^{-i\omega t}$  — переменная (колеблющаяся) часть температуры. Полная температура тела равна  $T + \theta$ , причем предполагается, что  $|\theta| \ll T$ . Это позволяет считать теплоемкость единицы объема  $C = C(T)$  и коэффициент теплопроводности  $\kappa = \kappa(T)$  постоянными величинами, не зависящими от координаты  $z$  и времени  $t$ . Решением уравнения (1) служит выражение

$$\theta(z, t) = \text{Re}(\theta_0 e^{i(k_T z - \omega t)}), \quad (2)$$

$$k_T^2 = i\omega C / \kappa, \quad \text{Im} k_T > 0.$$

Значение амплитуды  $\theta_0$  определяется источником (см. ниже), а глубина теплового скин-слоя есть

$$\delta_T = (2\kappa / \omega C)^{1/2}. \quad (3)$$

Как и электромагнитная глубина проникновения

$$\delta_E = c / (2\pi \sigma \omega)^{1/2}, \quad (4)$$

глубина проникновения тепловой волны  $\delta_T$  убывает с ростом частоты  $\omega$  обратно пропорционально  $\omega^{1/2}$ . Для оценок удобно пользоваться выражениями, справедливыми при простейших предположениях об электронах проводимости:

$$\begin{aligned} \sigma &= ne^2 l / p_F, \\ \kappa &= \pi^2 T \sigma / 3e^2 \sim Cl v_T. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы считаем, что основными переносчиками тепла служат электроны. Совпадает ли  $C$  с электронной теплоемкостью, или с теплоемкостью всего тела, пока не слишком существенно, так как в формулу (3) входит коэффициент температуропроводности  $\kappa/C$ , от теплоемкости не зависящий.

Сравнивая глубины проникновения  $\delta_T$  и  $\delta_E$ , видно, что их отношение не зависит от частоты:

$$\delta_T / \delta_E = l / \delta_0. \quad (6)$$

При комнатных температурах, когда длина свободного пробега носителей меньше плазменной глубины проникновения ( $l < \delta_0$ ), глубина теплового скин-слоя  $\delta_T$  меньше глубины электромагнитного скин-слоя  $\delta_E$ . При низких температурах в чистых металлах — наоборот:  $l > \delta_0$  и  $\delta_T > \delta_E$ .

В [4] впервые, по-видимому, было отмечено, что при распространении температурных колебаний по металлу нет явления, аналогичного аномальному скин-эффекту [5, 14]. Формулы (3) — (6) и приведенные оценки основаны на макроскопическом описании, требующем выполнения ряда неравенств:

$$l \ll \delta_E, \quad l \ll \delta_T, \quad \omega \tau \ll 1. \quad (7)$$

Без выполнения последнего неравенства (условия квазистатистики), естественно, невозможно говорить о колебаниях температуры (2), так как температура — характеристика равновесной термодинамической системы. На протяжении всей статьи мы будем считать неравенство  $\omega \tau \ll 1$  выполненным. Покажем прежде всего, что при этом с необходимостью выполняется и условие  $\delta_T \gg l$ . Действительно, согласно (3) и (5)

$$\delta_T \approx (l v_F / \omega)^{1/2} = l / (\omega \tau)^{1/2} \gg l. \quad (8)$$

С другой стороны, так как  $\delta_E \sim \delta_0 / (\omega \tau)^{1/2}$ , то при  $l \gg \delta_0$  (низкие температуры, чистый металл) есть интервал частот

$$(\delta_0 / l)^2 < \omega \tau \ll 1, \quad (9)$$

когда условие аномальности скин-эффекта ( $\delta_E < l$ ) не противоречит условию квазистатистики ( $\omega \tau \ll 1$ ). Заметим попутно, что аномальность скин-эффекта не противоречит макроскопичности явления, так как, хотя  $\delta_E < l$ , обе эти величины заведомо превышают размеры кристаллической ячейки металла.

В заключение этого раздела подчеркнем еще раз: применимость макроскопического уравнения теплопереноса (типа (1)) ограничена только условием квазистатистики ( $\omega \tau \ll 1$ ); следовательно, его можно использовать при частоте источника, соответствующей (для электромагнитных колебаний) аномальному скин-эффекту (конечно, в пределах неравенства (9)).

**3. Связанные электромагнитно-акустические колебания.** Учет термоэлектрических явлений при рассмотрении распространения электромагнитных волн в проводнике требует (согласно [6]) включения в полную систему уравнений наряду с уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{j} / c, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{H} / c, \end{aligned} \quad (10)$$

уравнения теплопроводности

$$C \theta + \text{div} \mathbf{q} = 0; \quad (11)$$

здесь  $\mathbf{q}$  — плотность теплового потока. Уравнения (10) и (11) должны быть дополнены материальными уравнениями, выражающими  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{q}$  через  $\mathbf{E}$  и  $\theta$ :

$$E_i = \rho_{ik} j_k + \alpha_{ik} \partial \theta / \partial x_k, \quad (12)$$

$$q_i = T \alpha_{ki} j_k - \kappa_{ik} \partial \theta / \partial x_k; \quad (13)$$

здесь использованы общепринятые обозначения:  $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$  — тензор удельных сопротивлений,  $\sigma_{ik}$  и  $\kappa_{ik}$  — тензоры удельных электро- и теплопроводности,  $\alpha_{ik}$  — тензор термоэлектрических коэффициентов. Требования принципа симметрии кинетических коэффициентов учтены (см. [7, 8]).

Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на полупространство  $z > 0$ , занятое анизотропным металлом. Для простоты металл предполагается одноосным. Ось кристалла составляет с нормалью к поверхности (с осью  $z$ ) угол  $\varphi$ . Падающая волна поляризована так, что  $E_y = H_x = 0$ , а  $E_x, H_y \neq 0$ . Все величины зависят только от координаты  $z$ ,  $j_y = j_z = 0$ , а отличные от нуля функции ( $E_x, H_y, q_z, \partial\theta/\partial z$ ) связаны следующими соотношениями:

$$-dH_y/dz = 4\pi j_x/c, \quad (14)$$

$$dE_x/dz = i\omega H_y/c, \quad (15)$$

$$-i\omega C\theta + dq_z/dz = 0, \quad (16)$$

$$E_x = \rho_{xx}j_x + \alpha_{xz}d\theta/dz, \quad (17)$$

$$q_z = T\alpha_{xz}j_x - \varkappa_{zz}\partial\theta/\partial z. \quad (18)$$

Систему уравнений (14)–(17) удобно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial^2 j_x / \partial z^2 + 4\pi i \omega j_x / c^2 \rho_{xx} = \\ = -(\alpha_{xz} / \rho_{xx}) \partial^3 \theta / \partial z^3, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \theta / \partial z^2 + i \omega C \theta / \varkappa_{zz} = \\ = T(\alpha_{xz} / \varkappa_{zz}) \partial j_x / \partial z. \end{aligned} \quad (20)$$

Характеристическое уравнение системы (18) для волновых векторов  $k$  можно записать так:

$$\begin{aligned} (k_E^2 k^{-2} - 1)(k_T^2 k^{-2} - 1) = \\ = T\alpha_{xz}^2 / \rho_{xx} \varkappa_{zz}, \\ k_E^2 = 4\pi i \omega / c^2 \rho_{xx}, \\ k_T^2 = i \omega C / \varkappa_{zz}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда видно: связь между электродинамическими и тепловыми колебаниями определяется безразмерным параметром

$$a = T\alpha_{xz}^2 / \rho_{xx} \varkappa_{zz}, \quad (22)$$

который для "хороших" металлов  $\sim (T/\varepsilon_F)^2 \ll 1$ .

Прежде чем двигаться дальше, заметим: в  $k_E, k_T$  и  $a$  входят различные компоненты тензоров (например,  $\rho_{xx}$  и  $\varkappa_{zz}$ ). В сильно анизотропном проводнике их значения могут существенно зависеть от геометрической постановки задачи. Например, в слоистом проводнике — от поляризации электрического поля волны относительно слоев. Эти вопросы выходят за рамки нашей статьи и требуют специального рассмотрения.

Так как  $a \ll 1$ , то можно пользоваться приближенными значениями корней характеристического уравнения (19). При

$$\begin{aligned} k_T^2 \neq k_E^2, \\ k_1^2 \approx k_E^2 [1 - ak_E^2 / (k_T^2 - k_E^2)], \\ k_2^2 \approx k_T^2 [1 - ak_T^2 / (k_E^2 - k_T^2)]. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{При высоких температурах } |k_T^2| \gg |k_E^2| \text{ и} \\ k_1^2 \approx k_E^2 (1 - ak_E^2 k_T^{-2}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$k_2^2 \approx k_T^2 (1 + a),$$

при низких температурах  $|k_T^2| \ll |k_E^2|$  и

$$k_1^2 \approx k_E^2 (1 + a), \quad (24')$$

$$k_2^2 \approx k_T^2 (1 - ak_T^2 k_E^{-2}).$$

Если  $k_T^2 = k_E^2$  (это условие, аналогичное условию резонанса, должно иметь место при промежуточной температуре, когда  $l \sim \delta_0$ ), то

$$k_{2,1}^2 \approx k^2 (1 \pm a^{1/2}), \quad (25)$$

$$k^2 = k_T^2 = k_E^2.$$

Естественно, нетрудно выписать точные значения корней уравнения (19)

$$\begin{aligned} k_{1,2}^{-2} = \frac{1}{2} (k_E^{-2} + k_T^{-2}) \pm \\ \pm \frac{1}{2} \left[ (k_E^{-2} - k_T^{-2})^2 + 4a(k_E k_T)^{-2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим: при любой величине параметра  $a$  ( $a > 0$ ) и  $k_1^2, k_2^2$  — чисто мнимые величины (см. определение  $k_E^2$  и  $k_T^2$  в (19)); кроме того, строгий резонанс между двумя типами колебаний невозможен: если  $a \neq 0$ , то  $k_1^2 \neq k_2^2$ .

Система уравнений (14)–(17) (или (18)) для решения задачи о распространении связанных электродинамических тепловых колебаний требует, кроме естественных электродинамических граничных условий, формулировки условий, описывающих тепловой контакт образца с внешней средой. Естественно считать, что в глубине образца температура равна равновесной, т.е.  $\theta = 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Граничное условие при  $z = 0$  (на поверхности металла) зависит от конкретных условий теплоотвода.

Мы рассмотрим два предельных случая:

$$\begin{aligned} \text{изотермическая граница} \\ \theta|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{адиабатическая граница} \\ q_z|_{z=0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или} \\ \varkappa_{zz} d\theta/dz|_{z=0} = T\alpha_{xz} j_x(0). \end{aligned} \quad (28)$$

Мы воспользовались уравнением (17).

Решение (зависимость всех величин от координаты  $z$ ) удобно записать, введя две амплитуды  $A_1$  и  $A_2$ , связь между которыми находится из граничного условия для температуры

$$\begin{aligned} j_x = A_1 \exp(ik_1 z) + A_2 \exp(ik_2 z), \\ \theta(z) = iT\alpha_{xz} / \varkappa_{zz} [k_1 A_1 \exp(ik_1 z) (k_T^2 - k_1^2)^{-1} + \\ + k_2 A_2 \exp(ik_2 z) (k_T^2 - k_2^2)^{-1}], \end{aligned}$$

$$E_x(z) = 4\pi i \omega / c^2 [A_1 \exp(ik_1 z) k_1^{-2} + A_2 \exp(ik_2 z) k_2^{-2}], \quad (26)$$

$$H_y(z) = 4\pi i / c [A_1 \exp(ik_1 z) k_1^{-2} + A_2 \exp(ik_2 z) k_2^{-2}];$$

здесь  $k_1$  и  $k_2$  — корни характеристического уравнения (19) (см. (23)), причем для того, чтобы обеспечить затухание всех волн в глубине образца, выбрано  $\text{Im} k_{1,2} > 0$ .

Используя граничные условия (24) и (25), находим в случае изотермической границы

$$A_2/A_1 = -k_1(k_T^2 - k_2^2) \times [k_2(k_T^2 - k_1^2)]^{-1}, \quad (27)$$

а в случае адиабатической —

$$A_2/A_1 = -(k_T^2 - k_2^2)/(k_T^2 - k_1^2). \quad (28)$$

На основании этих выражений легко выписать распределение температуры по образцу и вычислить импеданс металла

$$Z = E_x(0)/H_y(0). \quad (29)$$

Изотермическая граница:

$$\theta(z) = \text{Re}\{(cH_y(0)/4\pi)T\alpha_{xz}k_1^2k_2^2 \times [\exp(ik_1z) - \exp(ik_2z)] \times [\alpha_{zz}k_T^2(k_2^2 - k_1^2)]^{-1}\}, \quad (30)$$

$$Z = (\omega/ck_1) [k_T^2(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2) - k_1^2k_2^2] \times [(k_T^2(k_1 + k_2)k_2)]^{-1}. \quad (31)$$

Адиабатическая граница:

$$\theta(z) = \text{Re}\{(cH_y(0)/4\pi)T\alpha_{xz}k_1k_2 \times [k_1 \exp(ik_1z) - k_2 \exp(ik_2z)] \times [\alpha_{zz}(k_2 - k_1)(k_1k_2 + k_T^2)]^{-1}\}, \quad (32)$$

$$Z = (\omega/ck_1)(k_1 + k_2)k_T^2 \times [k_2(k_1k_2 + k_T^2)]^{-1}. \quad (33)$$

Подставляя в формулы (30)—(33) значения корней характеристического уравнения (23), получим выражения для распределения температуры  $\theta = \theta(z)$  и импеданса  $Z$ . Для дальнейшего нам важно распределение температуры. Что касается импеданса, то мы ограничимся одним утверждением. Как мы уже говорили,  $k_{1,2}^2$  — чисто мнимые величины,  $\text{Im} k_{1,2} > 0$ ; кроме того, оба корня пропорциональны  $\omega^{1/2}$ . Поэтому согласно формулам (31) и (33) в обоих случаях

$$Z = |Z|(1 - i)/\sqrt{2}, \quad |Z| = K\omega^{1/2},$$

коэффициент пропорциональности  $K$  зависит от компонент тензоров кинетических коэффициентов и

различен в случае изотермической и адиабатической границы.

Видно, что обнаружение роли термоэлектрического эффекта в поверхностном импедансе возможно только при абсолютном его измерении и сравнении этой величины с классическим значением

$$Z = (1 - i)(\omega\rho_{xx}/8\pi)^{1/2}.$$

Правда, может быть, возможно обнаружить роль теплового потока по нарушению соотношения  $(\text{Re} Z)^2 = (\text{Im} Z)^2 = Q\rho_{xx}$  с множителем  $Q$ , не зависящим ни от температуры, ни от характеристик металла.

Воспользовавшись тем, что параметр  $a \ll 1$ , выпишем приближенные выражения для температуры.

Изотермическая граница ( $a \ll 1$ ):

$$\theta(z) \approx \text{Re}\{(cH_y(0)/4\pi) \times (T\alpha_{xz}/\alpha_{zz}) [k_E^2/(k_T^2 - k_E^2)] \times (e^{ik_E z} - e^{ik_T z})\}. \quad (34)$$

Адиабатическая граница ( $a \ll 1$ ):

$$\theta(z) \approx \text{Re}\{(cH_y(0)/4\pi) \times (T\alpha_{xz}/\alpha_{zz}) [k_E/(k_T^2 - k_E^2)] \times (k_E e^{ik_E z} - k_T e^{ik_T z})\}. \quad (35)$$

Малость параметра  $a$ , указывающая на малую связь между электродинамическими и тепловыми колебаниями, позволяет вычислить распределение температуры приближенно, воспользовавшись уравнением теплопроводности (второе уравнение системы (18)), в котором слагаемое  $T\alpha_{xz} dj_x(z)/dz$  служит источником, а  $j_x(z) = j_x(0)e^{ik_E z}$  есть плотность тока, не возмущенная термоэлектрическими силами. Учтя, что при этом (согласно (14)  $j_x(0) = -ik_E cH_y(0)/4\pi$ ) получаем формулы (34) и (35). В заключение этого раздела обратим внимание на то, что при низких температурах ( $|k_T^2| \ll |k_E^2|$ ) распределение температуры на сравнительно больших расстояниях от поверхности определяется тепловыми характеристиками металла, а не электродинамическими: тепловая волна затухает на расстоянии  $\delta_T$ , которое значительно превосходит глубину скин-слоя  $\delta_E$ . Более того, электромагнитное поле и плотность тока  $j_x(z)$  тоже затягиваются тепловой волной на глубину  $\delta_T \gg \delta_E$  (см. формулу (26)). Естественно, чем меньше связь между колебаниями, тем меньше амплитуда волны затягивания ( $A_2 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ , см. формулы (27) и (28), если  $a = 0$ , то  $k_2 = k_T$ ).

**4. Тепловые колебания при поверхностном источнике.** При низкой температуре, когда глубина

теплового скин-слоя  $\delta_T$  значительно превосходит электромагнитную глубину  $\delta_E$ , распределение температуры на расстоянии, существенно превышающем глубину скин-слоя  $\delta_E$ , можно определить, не задаваясь конкретной зависимостью источника тепла от координаты  $z$ . Согласно второму уравнению системы (18)

$$d^2\theta/dz^2 + k_T^2\theta = dQ(z)/dz; \quad (36)$$

здесь

$$Q(z) = (T\alpha_{xz}/\alpha_{zz}) j_x(z) \equiv q_e(z)/\alpha_{zz}, \quad (37)$$

где  $q_e(z)$  — часть плотности потока тепла, обязанная термоэлектрическому эффекту. В случае изотермической границы  $\theta(z)$  удовлетворяет условию (24), а в случае адиабатической — условию (25), которое в новых обозначениях приобретает следующий вид:

$$d\theta/dz|_{z=0} = Q(0). \quad (38)$$

С помощью функций Грина, удовлетворяющих нулевым граничным условиям, легко получить выражения для  $\theta(z)$ .

Изотермическая граница:

$$\theta(z) = \frac{e^{ik_T z}}{2} \int_0^z (e^{ik_T z'} + e^{-ik_T z'}) Q(z') dz' + \frac{1}{2} (e^{ik_T z} - e^{-ik_T z}) \int_z^\infty e^{ik_T z'} Q(z') dz', \quad (39)$$

$\text{Im } k_T > 0$ .

Адиабатическая граница:

$$\theta(z) = -\frac{e^{ik_T z}}{2} \int_0^z (e^{ik_T z'} - e^{-ik_T z'}) Q(z') dz' - \frac{1}{2} (e^{ik_T z} + e^{-ik_T z}) \int_z^\infty e^{ik_T z'} Q(z') dz', \quad (40)$$

$\text{Im } k_T > 0$ .

В полученных выражениях при  $z$ , близких к границе, важны оба слагаемых, но асимптотическое поведение при  $z \gg \delta$ , где  $\delta$  — глубина затухания источника  $Q = Q(z)$ , определяется в обоих случаях только первым слагаемым, в котором предел интегрирования надо устремить к бесконечности, а выражение в скобках под знаком интеграла разложить по степеням  $k_T z'$ , ограничиваясь первым исчезающим членом. В результате будем иметь.

Изотермическая граница:

$$\theta(z) \approx \text{Re } e^{ik_T z} \int_0^\infty Q(z') dz', \quad (41)$$

$$|k_T| \delta_E \ll 1.$$

Адиабатическая граница:

$$\theta(z) \approx \text{Re} (-ik_T e^{ik_T z} \int_0^\infty z' Q(z') dz'),$$

$$|k_T| \delta_E \ll 1. \quad (42)$$

Обратим внимание на то, что распределение температуры во всем теле (за исключением узкого приповерхностного слоя) определяется интегральной характеристикой источника, а не его детальной структурой, и граничное условие (адиабатическая или изотермическая граница) "выбирает" форму интегральной характеристики (ср. формулы (41) и (42)). И еще: может показаться странным, что при адиабатическом граничном условии, когда тепло с поверхности вовсе не уходит, амплитуда тепловой волны меньше, чем при изотермическом граничном условии, когда через границу заведомо имеется поток тепла. Кажущийся парадокс, по-видимому, разъясняется следующим образом: из-за фиксированного адиабатическим граничным условием значения производной  $d\theta/dz|_{z=0}$  большая часть энергии источника остается в электромагнитной волне (см. формулу (35)) и диссипирует на расстоянии  $\sim \delta_E$ .

Если в формулы (41) и (42) подставить

$$Q(z) = -\frac{iT\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \frac{k_E c}{4\pi} H_y(0) e^{ik_E z}, \quad (43)$$

то из (41) и (42) в согласии с (34) и (35) получим выражения для  $\theta$ .

Изотермическая граница:

$$\theta \approx \frac{cH_y(0)}{4\pi} \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \text{Re } e^{ik_T z},$$

$$|k_T| \ll |k_E|, \quad (44)$$

адиабатическая граница:

$$\theta \approx \frac{cH_y(0)}{4\pi} \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \frac{k_T}{k_E} \text{Re } e^{ik_T z},$$

$$|k_T| \ll |k_E|. \quad (45)$$

Формулы (41) и (42) совместно с формулой (37) могут быть использованы для расчета температурного поля в условиях аномального электродинамического скин-эффекта, когда длина пробега  $l \gg \delta_E$ , а плотность потока тепла  $q_e(z)$  неэкспоненциально затухает с ростом координаты  $z$ .

**5. Возбуждение ультразвука.** В анизотропном кристалле вдоль любого направления распространяются три волны, три моды — аналоги поперечных и продольных колебаний в упругоизотропных средах — с тремя (в общем случае) различными скоростями  $S_1, S_2, S_3$ . Взаимно ортогональные векторы поляризации  $e_1, e_2, e_3$  этих колебаний зависят от направле-

ния волнового вектора звука  $\mathbf{k}_s$  относительно кристаллографических осей кристалла. Даже кубический кристалл упругоанизотропен, и в нем направления векторов поляризации сложным образом зависят от направления вектора  $\mathbf{k}_s$ . Колебания трех мод независимы и описываются тремя волновыми уравнениями:

$$\frac{d^2 U_i}{dz^2} + k_s^2 U_i = F_i,$$

$$F_i = \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{f}(z))}{\rho S_i^2}, \quad (46)$$

$U_i = (\mathbf{e}_i \mathbf{U})$  — проекция вектора смещения  $U$  на  $i$ -й вектор поляризации,  $\mathbf{f}(z)$  — плотность возбуждающей звук силы (множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен). В случае термоупругого механизма ЭМАП

$$f_i(z) = B_{iz} \partial \theta / \partial z, \quad (47)$$

где  $B_{ik}$  — тензор, определяющий термоупругую часть  $\sigma_{ik}^T$  тензора напряжения  $\sigma_{ik}$ :

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{\text{упр}} + \sigma_{ik}^T,$$

$$\sigma_{ik} = -B_{ik} \theta(z, t), \quad (48)$$

$\sigma_{ik}^{\text{упр}}$  — упругая часть тензора напряжений [9], а  $B_{ik} = \rho S^2 \beta_{ik}$ , где  $\beta_{ik}$  по порядку величины есть тензор коэффициентов теплового расширения ( $[\beta_{ik}] = 1/\text{град}$ ). Поэтому в нашем случае

$$F_i = \beta_{iz} \partial \theta / \partial z. \quad (49)$$

Граничные условия к уравнениям (46) зависят от конкретной постановки задачи. В теории ЭМАП принято различать два предельных случая:

$$\text{закрепленная граница } U|_{z=0} = 0, \quad (50)$$

$$\text{свободная граница } \sigma_{iz}|_{z=0} = 0. \quad (51)$$

При закрепленной границе условие (50) означает, что каждая из трех функций  $U_i$  обращается в нуль на границе образца

$$U_i|_{z=0} = 0. \quad (50')$$

Условие на свободной границе

$$\sigma_{iz}^{\text{упр}}|_{z=0} = -\sigma_{iz}^T|_{z=0} \quad (51')$$

можно трактовать как появление поверхностного источника возбуждающей силы

$$f_i^{\text{пов}} = B_{iz} \theta(z)|_{z=0}. \quad (52)$$

Поверхностная сила в теории ЭМАП обычно рассматривается как независимый источник звуковых волн [10]. Существование поверхностной силы, как правило, связывают с незеркальностью отражения электронов от поверхности. Видно, что при термоупругом механизме ЭМАП, если  $\theta(z=0) \neq 0$  (неизотермическая граница, см. раздел 3), поверхностная сила отлична от нуля вне зависимости от характера отражения электронов границей.

Формулы (46)—(52), дополненные полученными в разделе 3 выражениями для распределения температуры  $\theta = \theta(z)$  (см. (30), (32) или (34), (35) и (44), (45)), позволяют вычислить амплитуду звука в металле.

В дальнейшем, чтобы избежать дополнительной громоздкости, мы будем считать металл упругоизотропным. Правда, даже в этом случае нельзя пренебрегать анизотропией электронных свойств: амплитуда колебаний температуры пропорциональна  $\alpha_{xz}$  — недиагональной компоненте тензора термоэлектрических коэффициентов, равной нулю в изотропном проводнике.

Пренебрежение упругой анизотропией, как нам представляется, не приведет к потере каких-либо интересных особенностей ЭМАП. Может быть, следует только отметить, что в упругоанизотропном теле граничное условие (51) может привести к смешиванию колебаний с различными поляризациями (ср. с теорией рэлеевских поверхностных волн [9]).

Легко убедиться, что благодаря термоэлектрическому эффекту в упругоизотропном проводнике возбуждается только продольная волна. Ее амплитуду обозначим буквой  $U$  (без индексов). Задача о возбуждении звуковых колебаний приобретает следующий вид:

$$d^2 U / dz^2 + k_s^2 U = \beta d\theta / dz, \quad (53)$$

где  $\beta$  по порядку величины совпадает с объемным коэффициентом теплового расширения,  $k_s = \omega / S$ , а  $S$  — скорость продольного звука. Граничные условия к задаче переписутся в виде:

$$\text{закрепленная граница } U|_{z=0} = 0, \quad (54)$$

$$\text{свободная граница } dU/dz|_{z=0} = \beta \theta|_{z=0}. \quad (55)$$

Интересно отметить, что при выполнении последнего граничного условия поверхностная сила равна действующей на решетку объемной силе с обратным знаком, так что полная сила равна нулю. Это свойство имеет место и тогда, когда на решетку действует деформационная сила, а отражение электронов не зеркально [10], [1].

Распределение температуры мы вычислим в двух случаях: для изотермической границы (формулы (30), (34) и (44)) и для адиабатической (формулы (32), (35) и (45)). Поэтому нам предстоит вычислить амплитуду звука в четырех случаях. Чтобы упорядочить результаты, мы отдельно рассмотрим случай закрепленной границы, а отдельно — свободной.

В задаче много различных параметров. В частности, три волновых вектора: электродинамический  $k_e$ , тепловой  $k_T$  и звуковой  $k_s = 2\pi/\lambda$ . Обычно ЭМАП осуществляется в условиях, когда длина волны звука

$\lambda$  значительно превышает слой вблизи поверхности металла, где сосредоточена возбуждающая сила. Поэтому в дальнейшем мы приведем результаты, справедливые при

$$k_S \ll |k_E|, |k_T|. \quad (56)$$

Это означает, что частота  $\omega$  не слишком мала и удовлетворяет следующим легко выполнимым на практике условиям:

$$\omega \gg 2\pi\sigma S^2/c^2, \nu S^2/\nu_F^2, \quad (57)$$

$$\nu = 1/\tau.$$

**Закрепленная граница.** Воспользовавшись методом функции Грина, легко решить уравнение (53) с граничным условием (54) при произвольной зависимости  $\theta = \theta(z)$ . На больших расстояниях от поверхности имеет место асимптотическое равенство

$$U(z) \sim U_{\infty}^{\text{закр}} e^{ikz}, \quad (58)$$

где

$$U_{\infty}^{\text{закр}} = \beta \int_0^{\infty} \theta(z') dz'. \quad (59)$$

В случае адиабатической границы (см. (32) и (35))

$$\int_0^{\infty} \theta(z) dz = 0$$

и следует использовать квадратичный член разложения по  $k_S z$ . Итак, в случае адиабатической границы имеем

$$U^{\text{закр}} = \frac{\beta k_S^2}{2} \int_0^{\infty} z^2 \theta(z) dz. \quad (60)$$

Подставляя в формулу (59) выражение (34), а в (60) — выражение (35), получим ( $k_S \ll |k_E|, |k_T|$ ):

изотермическая граница

$$|U_{\infty}^{\text{закр}}| = \frac{cH_y(0)}{4\pi} \beta \times \times \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \left| \frac{k_E}{k_T(k_T + k_E)} \right|,$$

адиабатическая граница

$$|U_{\infty}^{\text{закр}}| = \frac{cH_y(0)}{4\pi} \beta \times \times \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \frac{k_S^2}{|k_T k_E|}. \quad (61)$$

**Свободная граница.** Когда механически свободная граница находится в изотермических условиях, то граничное условие (55) упрощается

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ — изотермическая граница.} \quad (55')$$

Вне зависимости от тепловых условий при свободной (механически) границе

$$U(z) \sim U_{\infty}^{\text{св}} e^{ikz}, \quad (62)$$

$$U_{\infty}^{\text{св}} = -ik_S \beta \int_0^{\infty} z\theta(z) dz.$$

Воспользовавшись формулами (34) и (35), найдем: изотермическая граница

$$|U_{\infty}^{\text{св}}| = \frac{cH_y(0)}{4\pi} \beta \times \times \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \frac{k_S}{|k_T|},$$

адиабатическая граница

$$|U_{\infty}^{\text{св}}| = \frac{cH_y(0)}{4\pi} \beta \times \times \frac{T\alpha_{xz}}{\alpha_{zz}} \frac{k_S}{|k_T(k_E + k_T)|}. \quad (63)$$

Оставляя на дальнейшее абсолютную оценку рассматриваемого здесь механизма ЭМАП, сравним влияние граничных условий (механических и тепловых) на ЭМАП. Если граница закреплена, то из формулы (60) видно, что изотермичность границы благоприятствует преобразованию, в случае свободной границы все зависит от отношения  $|k_T/k_E|$  (см. формулу (63)). Заканчивая этот раздел, отметим: формулы (60) и (62) надо рассматривать как демонстрационные. При сравнении теории с экспериментом (и/или при планировании эксперимента) с помощью имеющихся здесь формул для  $\theta = \theta(z)$  нетрудно вычислить амплитуду возбужденной звуковой волны при любом соотношении между длиной волны звука  $\lambda$  и глубинами скин-слоев (электромагнитного  $\delta_E$  и теплового  $\delta_T$ ) и выбрать удобный интервал частот, температур и т.п.

**6. Роль магнитного поля.** Мы неоднократно подчеркивали, что линейный термоупругий механизм ЭМАП возможен только в анизотропном проводнике. Однако анизотропию можно создать искусственно, поместив проводник в постоянное магнитное поле  $H_0$ . Так как электроны вдоль магнитного поля и в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, движутся различно, возникает анизотропия кинетических коэффициентов, необходимая для возбуждения температурной волны.

Равенства (12) и (13) при  $H_0 \neq 0$  приобретают вид:

$$E_i = \rho_{ik}(H_0) j_k + \alpha_{ik}(H_0) \partial\theta/\partial x_k, \quad (12')$$

$$q_i = T\alpha_{ki}(-H_0) j_k - \alpha_{ik}(H_0) \partial\theta/\partial x_k, \quad (13')$$

причем  $\rho_{ik}(H_0) = \rho_{ki}(-H_0)$  и  $\alpha_{ik}(H_0) = \alpha_{ki}(-H_0)$ ; коэффициент при  $j$  в (13') выписан с соблюдением принципа симметрии кинетических коэффициентов. Принцип симметрии кинетических коэффици-

ентов не требует симметрии тензора  $\alpha_{ik}$  при  $\mathbf{H}_0 = 0$ , но в большинстве металлов  $\alpha_{ik}(\mathbf{H}_0 = 0) = \alpha_{ki}(\mathbf{H}_0 = 0)$  из-за сравнительно высокой симметрии кристаллической решетки.

Если пренебречь квантовыми осцилляциями кинетических коэффициентов, то их зависимость от магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  может быть определена на основе кинетического уравнения Больцмана, естественно, с учетом структуры электронного энергетического спектра. Без использования упрощенных моделей можно выявить лишь асимптотику компонент тензоров  $\rho_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$  и  $\alpha_{ik}$  в сильном магнитном поле [8]. Здесь мы хотим продемонстрировать влияние структуры электронного энергетического спектра на зависимость от магнитного поля амплитуды тепловой волны. Поэтому мы предельно упростим постановку задачи. Прежде всего примем, что проводник в отсутствие магнитного поля изотропен. Тогда уравнения (12') и (13') существенно упрощаются. Нам понадобятся поперечные относительно  $\mathbf{H}_0$  составляющие векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}$  и др. Для них (в обозначениях, принятых в [7]) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \rho_{\perp} \mathbf{j} + \alpha \nabla T + R H_0 [\vec{\eta} \mathbf{j}] + N H_0 [\vec{\eta} \nabla T], \\ \mathbf{q} &= \alpha T \mathbf{j} - \alpha_{\perp} \nabla T + N H_0 T [\vec{\eta} \mathbf{j}] + L H_0 [\vec{\eta} \nabla T], \quad (64) \\ \vec{\eta} &= \mathbf{H}/H. \end{aligned}$$

Пусть (опять-таки для простоты) магнитное поле параллельно поверхности металла (именно поэтому нам не понадобятся продольные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{q}$ ). Все входящие в формулы (64) коэффициенты ( $\rho_{\perp}$ ,  $\alpha$ ,  $R$ ,  $N$ ,  $\alpha_{\perp}$  и  $L$ ) — функции магнитного поля. Так как нормальная к поверхности металла компонента плотности тока  $j_z = 0$ , то электромагнитное поле в волне имеет прежний вид с заменой  $\rho_{xx}$  на  $\rho_{\perp} = \rho_{\perp}(H_0)$  (см. (19))

$$\begin{aligned} j_x(z) &= j_x(0) e^{ik_E z}, \\ j_x(0) &= -ik_E c H_y(0) / 4\pi, \quad (65) \\ k_E^2 &= 4\pi i \omega / c^2 \rho_{\perp}(H_0). \end{aligned}$$

Источником в уравнении теплопроводности служит в данном случае производная слагаемого в плотности потока тепла  $\mathbf{q}$ , описывающего эффект Эттингаузена. Поэтому

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + k_1^2 \theta = - \frac{i N H_0 T \omega c H_y(0)}{c^2 \rho_{\perp} \alpha_{\perp}} e^{ik_E z}. \quad (66)$$

Для определения  $\theta(z)$  необходимо знать три кинетических коэффициента:  $\rho_{\perp}$ ,  $\alpha_{\perp}$  и  $N$ . Что касается удельного сопротивления  $\rho_{\perp}$  и коэффициента теплопроводности  $\alpha_{\perp}$ , то их поведение в магнитном поле известно:  $\rho_{\perp}$  увеличивается с ростом магнитного по-

ля (существенно, если металл компенсирован, т.е. число электронов  $n_c$  равно числу дырок  $n_h$ , и незначительно, если  $n_c \neq n_h$ ,  $\alpha_{\perp}$  падает с ростом магнитного поля, стремясь в пределе к значению фоновой теплопроводности данного кристалла, которое, как правило, в несколько раз меньше электронного коэффициента теплопроводности.

Коэффициент Нернста—Эттингаузена  $N$ , как отмечено в [3], обладает сравнительно сложной природой: например,  $N = 0$  в проводниках с одним типом носителей без дисперсии, т.е. если их время релаксации  $\tau$  не зависит от энергии. Для получения порядка величины  $N = N(H_0)$  при произвольном (но не квантовом) магнитном поле можно воспользоваться линеаризованным кинетическим уравнением Больцмана в  $\tau$ -приближении (считая, однако,  $\tau$  функцией энергии). После довольно утомительных выкладок получим

$$\begin{aligned} N H_0 &= e \rho_{\perp} \left\{ \frac{\left\langle \frac{\omega_c \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle} \left\langle \frac{\varepsilon - \xi}{T} \frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \frac{\varepsilon - \xi}{T} \frac{\omega_c \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle \right\}; \quad (67) \end{aligned}$$

здесь  $\xi$  — химический потенциал электронов, в дальнейшем не отличающийся от энергии Ферми,  $\omega_c = e H_0 / m^* c$  — циклотронная частота,  $m^*$  — эффективная масса ( $m^* > 0$  для электронов,  $m^* < 0$  для дырок), угловые скобки означают усреднение по энергии:

$$\langle \psi(\varepsilon) \rangle = \frac{2}{3(2\pi\hbar)^3} \int v^2 \left( - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right) \psi(\varepsilon) d^3 p, \quad (68)$$

$v = \partial \varepsilon / \partial p$ ,  $F$  — равновесная фермиевская функция; формулы (67) и (68) предполагают изотропию закона дисперсии электронов и дырок. Формуле (68) можно придать несколько иной вид, учтя, что  $v = |m^*|^{-1} p$  (если отсчитать квазиимпульс  $p$  от центра соответствующей изоэнергетической сферы):

$$\langle \psi(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{|m^*|} \int \left( - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right) n(\varepsilon) \psi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (69)$$

$n(\varepsilon)$  — число занятых электронных состояний с энергией, меньшей  $\varepsilon$  и  $m^* > 0$ , или число свободных состояний с энергией, большей  $\varepsilon$  и  $m^* < 0$ . Число состояний  $n(\varepsilon)$ , естественно, положительно, а знак  $dn/d\varepsilon$  совпадает со знаком  $m^*$ . В случае существования нескольких групп электронов и дырок, нужно произвести суммирование по группам.

Подставив выражение (67) в правую часть уравнения (66) и проинтегрировав его, получим

$$\frac{\theta(z)}{T} = \frac{eH_y(0)}{cC[1 - (k_E^2/k_T^2)]} \times \left[ \frac{\left\langle \frac{\omega_c \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle} \left\langle \frac{\varepsilon - \xi}{T} \frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\varepsilon - \xi}{T} \frac{\omega_c \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \right\rangle \right] (e^{ik_T z} - e^{ik_E z}). \quad (70)$$

Чтобы не загромождать изложения, мы ограничились случаем изотермической границы (см. (24)) и, кроме того, воспользовались значением  $k_T^2$  согласно одной из формул (19). Отметим, что при принятых нами обозначениях теплоемкость  $C$  имеет размерность  $\text{см}^{-3}$ , а по порядку величины равна  $C_e \sim nT/\varepsilon_F$ , если главную роль в теплопроводности играют электроны, и  $C_{ph} \sim nT^3/\theta_D^3$ , если теплопроводность обеспечивают фононы ( $T \ll \theta_D$ ,  $\theta_D$  — температура Дебая,  $n$  — по порядку величины число ячеек кристалла в единице объема). Формула (70) позволяет сделать оценку в случае малых ( $\omega_c \tau \ll 1$ ) и больших ( $\omega_c \tau \gg 1$ ) магнитных полей. Естественно, мы будем считать электронный газ сильно вырожденным и использовать разложение по степеням  $T/\varepsilon_F$ , оставляя первый не равный нулю член разложения, т.е. примем

$$\langle \psi(\varepsilon) \rangle = \frac{n\psi(\varepsilon_F)}{|m^*|}, \quad (71)$$

а

$$\left\langle \frac{\varepsilon - \xi}{T} \psi(\varepsilon) \right\rangle = \frac{\pi^2 T}{3|m^*|} \frac{d n \psi}{d \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_F}. \quad (72)$$

Начнем с выражения в угловых скобках. При  $\omega_c \tau \ll 1$  его порядок величины заведомо не зависит от того, компенсирован металл ( $n_e = n_h$ ) или нет, и

$$\langle \dots \rangle \approx \frac{\pi^2 T n}{3|m^*|} \omega_c \tau \frac{d \tau}{d \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_F}. \quad (73)$$

При  $\omega_c \tau \gg 1$  надо различать случаи  $n_e \neq n_h$  и  $n_e = n_h$ . В первом случае, пренебрегая во всех знаменателях единицей по сравнению с  $(\omega_c \tau)^2$ , найдем

$$\langle \dots \rangle \approx - \frac{\pi^2 T n}{3|m^*|} \frac{1}{\omega_c \tau} \frac{d \tau}{d \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_F}, \quad (74)$$

$$n_e \neq n_h.$$

В случае компенсированного металла первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю (за счет первого множителя), а второе отлично от нуля, и

$$\langle \dots \rangle \approx \frac{9\pi^2 T n}{4\omega_c |m^*|} \left( \frac{1}{\varepsilon_F^e} + \frac{1}{\varepsilon_F^h} \right), \quad (75)$$

$$n_e = n_h = n,$$

$\varepsilon_F^{e(h)}$  — энергии Ферми электронов и дырок, отсчитанные от дна (верха) соответствующей зоны.

Видно, что значение (...) для компенсированного металла не слишком существенно отличается от значения для некомпенсированного.

Теперь оценим отношение  $k_E^2/k_T^2$ , учитывая, что  $\rho_{\perp}$  и  $\kappa_{\perp}$  — функции магнитного поля. При  $\omega_c \tau \ll 1$  сохраняется полученная выше оценка (см. (6)), согласно которой при низких температурах  $|k_T| \ll |k_E|$ , а при сравнительно высоких температурах  $|k_T| \gg |k_E|$ . В обоих случаях

$$\frac{k_E^2}{k_T^2} = \frac{l^2(T)}{\delta_0^2}, \quad \omega_c \tau \ll 1. \quad (76)$$

При  $\omega_c \tau \gg 1$  удобно отношение  $k_E^2/k_T^2$  переписать в виде, позволяющем учесть его зависимость от величины  $\omega_c \tau$ . Для компенсированных и некомпенсированных металлов

$$\frac{k_E^2}{k_T^2} = \frac{l_{\kappa} l_{\rho}}{\delta_0^2},$$

где  $l_{\kappa}$  "происходит" из теплопроводности  $\kappa_{\perp}$  ( $l_{\kappa} \sim l/(\omega_c \tau)^2$ ), а  $l_{\rho}$  — из сопротивления  $\rho_{\perp}$  ( $l_{\rho} \sim l$  при  $n_e \neq n_h$  и  $l_{\rho} \sim l/(\omega_c \tau)^2$  при  $n_e = n_h$ ). Итак, при  $\omega_c \tau \gg 1$

$$\frac{k_E^2}{k_T^2} \sim \frac{l^2}{\delta_0^2} \frac{1}{(\omega_c \tau)^2} \sim \left( \frac{r_H}{\delta_0} \right)^2, \quad n_e \neq n_h,$$

$$\sim \frac{l^2}{\delta_0^2}, \quad n_e = n_h, \quad (77)$$

$$r_H \sim v_F/\omega_c.$$

Результаты (70), (73)–(77) показывают, что для оценки амплитуды температурных колебаний  $\theta(z)$  можно использовать такое выражение

$$\frac{\theta(z)}{T} \approx \frac{eH_y(0)\tau}{c|m^*|} \frac{1}{1 - (k_E^2/k_T^2)} \times F(\omega_c \tau) (e^{ik_T z} - e^{ik_E z}). \quad (78)$$

Функция  $F(\omega_c \tau)$  имеет максимум при  $\omega_c \tau \sim 1$ ,

$$F(\omega_c \tau) \sim \omega_c \tau \quad \text{при } \omega_c \tau \ll 1,$$

$$\sim (\omega_c \tau)^{-1} \quad \text{при } \omega_c \tau \gg 1. \quad (79)$$

Мы приняли, что  $C$  — электронная теплоемкость (см. (70)). Не будем выписывать амплитуду звуковой волны, возбужденной термоупругими напряжениями. Воспользовавшись результатами п. 5, это трудно сделать. Отметим только, что своеобразная

зависимость амплитуды тепловой волны от магнитного поля  $H_0$ , особенно характерная для компенсированного металла, когда отношение  $k_E^2/k_T^2$  слабо зависит от  $H_0$  (ср. (76) и (77)), может позволить выявить существование термоупругого линейного механизма ЭМАП. Ведь зависимость  $\theta(z)$  от  $H_0$  воспроизводится амплитудой звуковой волны. Подробнее о термоупругом механизме возбуждения звука в магнитном поле (случай  $\omega_c\tau < 1$ ) см. в [3].

**7. Нелинейная генерация продольного ультразвука.** Неоднократно подчеркивавшаяся нами малость связи между электромагнитной и упругой подсистемами, характерная для задач электромагнитного возбуждения ультразвука, заставляет, казалось бы, ограничиться лишь линейными взаимодействиями, когда частоты падающей и преобразованной волн совпадают. Более внимательный анализ показывает, однако, что такое ограничение оправдано, по существу, лишь для инерционного механизма ЭМАП. Для индукционного и деформационного взаимодействия уровень проявления нелинейных эффектов в трансформации определяется степенью воздействия электромагнитного поля на динамику электронов проводимости в приповерхностном слое. Что же касается тепловых механизмов ЭМАП, то основным (во всяком случае, в изотропном проводнике или когда ось симметрии монокристалла перпендикулярна поверхности) представляется именно нелинейное взаимодействие, обязанное появлению термоупругих напряжений в скин-слое при выделении в нем джоулева тепла  $Q = \mathbf{Ej}$ . В этом случае частота возбуждаемого ультразвука равна удвоенной частоте падающей электромагнитной волны. Во избежание недоразумений сразу же подчеркнем, что речь идет об источниках нелинейности, скрытых собственно в механизмах преобразования. Другие источники нелинейности, содержащиеся, в частности, в уравнениях теории упругости или в кинетическом уравнении (см. по этому вопросу [11]), здесь не рассматриваются. Независимое друг от друга рассмотрение различных механизмов электромагнитного возбуждения ультразвука, обусловленное низкой эффективностью линейного ЭМАП, еще более оправдано в случае нелинейного преобразования. Приведенные ниже количественные оценки амплитуды возбуждаемого ультразвука подтверждают это.

Сопоставить эффективности линейного и нелинейного индукционных механизмов ЭМАП легко. Отношение амплитуды генерации на первой гармонике  $U_\omega$  к амплитуде генерации на второй гармонике  $U_{2\omega}$  равно отношению постоянного  $H_0$  и переменного

$H$  магнитных полей. Квадратичная по амплитуде падающей на металл волны часть действующей на решетку индукционной силы направлена в глубь металла, что приводит к возбуждению в нем волн сжатия, распространяющихся по нормали к поверхности. Для случая  $k_s\delta_E < 1$  амплитуда ультразвука частоты  $2\omega$ , возбуждаемого лоренцевой силой, определяется выражением:

$$|U^{\text{инд}}| = \lambda \frac{H^2}{64\pi^2 \rho S^2} = \frac{\lambda \Sigma}{8\pi}, \quad (80)$$

где  $\lambda$  — длина волны возбуждаемого ультразвука, а  $\Sigma$  — отношение плотности энергии переменного магнитного поля  $H^2/8\pi$  к упругому модулю  $\rho S^2$ . Величина  $|U^{\text{инд}}|$  слабо зависит от температуры, что позволяет использовать ее в качестве масштаба при представлении температурного хода амплитуды ультразвука, возбуждаемого за счет других механизмов преобразования. На частоте  $f = \omega/2\pi = 1$  МГц в переменном поле  $H = 100$  Э характерное значение  $|U^{\text{инд}}| \sim 10^{-13}$  см.

Если нелинейное индукционное взаимодействие сводится по сути лишь к появлению источника переменного давления на границе металла, то нелинейное деформационное взаимодействие (как, собственно, и в линейном случае) представляет собой существенно более тонкий эффект. Теоретический анализ деформационного механизма ЭМАП охватывает режимы слабой [11] и сильной нелинейности [12, 13]. Эти два случая различаются степенью воздействия переменного магнитного поля на динамику электронов в скин-слое и дают различные асимптотики амплитуды возбуждаемого ультразвука от амплитуды падающей волны и от длины свободного пробега электронов в металле. В режиме нормального скин-эффекта деформационный механизм ЭМАП неэффективен, а в режиме аномального скин-эффекта при развитой электродинамической нелинейности, характеризующейся параметром

$$b = (He l^2 / 8c p_T \delta)^{1/2}, \quad (81)$$

$$\delta = \delta_A [1 - \exp(-1/b)]^{1/3}$$

(где  $\delta_A$  — толщина скин-слоя в режиме аномального скин-эффекта), амплитуда ультразвука описывается интерполяционной формулой (см. [13])

$$|U^{\text{деф}}| = \frac{\lambda \Sigma}{6\pi^4} \frac{\tilde{m}}{m} (q l)^2 \left( \ln \frac{1}{q \delta_A} \right) \times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{b}\right) \right]^2. \quad (82)$$

За исключением деформационной массы  $\tilde{m}$  все параметры, необходимые для количественного расчета  $|U^{\text{деф}}|$  по формуле (82) могут быть получены из

независимых измерений. Из-за наличия в этой формуле параметра нелинейности, зависимость  $|U^{нелф}|$  от  $H$  отклоняется с ростом амплитуды переменного поля от квадратичной.

Рассмотрим теперь термоупругий механизм нелинейной генерации в режимах нормального и аномального скин-эффектов. В режиме нормального скин-эффекта источником термоупругих напряжений служит зависящая от времени часть джоулева тепла

$$Q = - \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega H^2}{8\pi} \exp[2i(k_E z - \omega t)] \right\}, \quad (83)$$

а граничное условие сводится к требованию отсутствия потока тепла через поверхность

$$\alpha \frac{d\theta(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (84)$$

В этом случае выражение для осциллирующей добавки к температуре может быть записано в виде

$$\theta(z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega H^2}{8\pi\alpha} \times \frac{\exp(2ik_E z) - (2k/k_T) \exp(ik_T z)}{k_T^2 - 4k_E^2} \right]. \quad (85)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (53), в котором под  $k_S$  надо понимать  $2\omega/S$ , позволяет рассчитать амплитуду продольного ультразвука, возбуждаемого в металле за счет термоупругих напряжений в режиме нормального скин-эффекта. При  $|k_S| \ll |k_E|, |k_T|$

$$\begin{aligned} |U^{тер}| &= \lambda \frac{\beta H^2}{64\pi^2 C} \frac{k_T}{k_T + 2k_S} = \\ &= \frac{\lambda \Sigma \beta \rho S^2}{8\pi} \frac{k_T}{C} \frac{k_T}{k_T + 2k_S}. \end{aligned} \quad (86)$$

Видно, что при выполнении условия  $k_E \ll k_T$ , справедливым при высоких температурах, отношение амплитуд термоупругой и лоренцевой генерации равно параметру Грюнайзена  $\gamma = \beta \rho S^2 / C$ .

В режиме аномального скин-эффекта тепло в образце выделяется в слое толщины  $\sim \delta_A \ll l$ . При макроскопическом подходе источник тепла в этом случае нельзя рассматривать как распределенный. Корректный подход в данном случае таков: в формуле (83) следует положить  $Q = 0$ , а в качестве граничного условия задать поток тепла через границу:

$$\alpha \frac{d\theta(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \operatorname{Re} \int_0^\infty E(z)j(z) dz. \quad (87)$$

Используя выражения для распределений поля и тока при  $l > \delta_A$  [14], волновую часть решения уравнения теплопроводности можно записать в виде [4]:

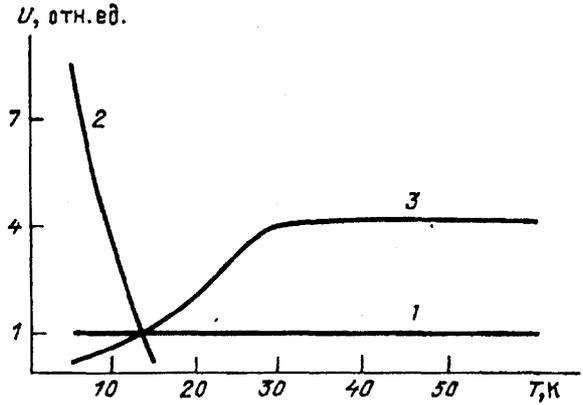


Рис. 1. Расчет температурных зависимостей амплитуд нелинейной генерации продольного ультразвука  $U$  в Zn на частоте электромагнитной волны 9,5 МГц в переменном магнитном поле 35 Э под действием индукционного (кривая 1), деформационного (кривая 2) и термоупругого (кривая 3) механизмов преобразования

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &\approx - \operatorname{Re} \{ (0,35 + 0,2i) \times \\ &\times \frac{\omega \delta_A H^2}{4\pi^2 \alpha k_T} \exp[i(k_T z - 2\omega t)] \}. \end{aligned} \quad (88)$$

Тогда амплитуда продольного ультразвука, возбуждаемого в металле за счет термоупругих напряжений в режиме аномального скин-эффекта, равна

$$|U^{тер}| = \frac{\lambda \Sigma}{4\pi^2} \gamma k_S \delta_A G (|k_T|/k_S), \quad (89)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^3}{1+x^4} [(a_1 + a_2 x)^2 + \\ &+ (a_1 x - a_2)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$a_1 \approx 0,24, a_2 \approx 0,067.$$

Согласно формулам (80), (82), (86) и (89) температурные зависимости амплитуды продольного ультразвука, возбуждаемого под действием нелинейных индукционного, деформационного и термоупругого взаимодействия, могут быть представлены кривыми, показанными на рис. 1. Имея в виду обсуждение результатов эксперимента [4], направленного на выявление роли каждого из перечисленных механизмов нелинейного ЭМАП, кривые на рис. 1 рассчитывались для конкретного металла — цинка. За единицу по оси ординат принято значение  $|U^{нелф}|$ . Видно, что при высоких температурах определяющую роль в процессах трансформации играет термоупругая сила. С понижением температуры  $|U^{тер}|$  уменьшается, что определяется температурными зависимостями электродинамической  $|k_E|^{-1}$  и тепловой  $|k_T|^{-1}$  глубин проникновения. В условиях аномального скин-эффекта  $|U^{тер}|$  пренебрежимо мала. Оценка величины смещений, обязанных термоупругим напряжениям, проводилась с использованием данных по коэффициентам теплового расширения,

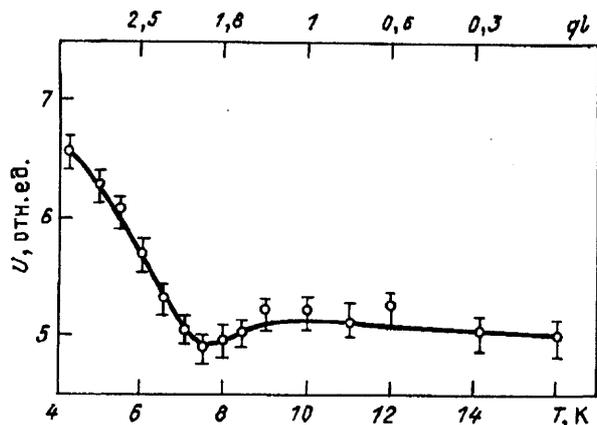


Рис. 2. Температурная зависимость амплитуды нелинейной генерации продольного ультразвука  $U$  в Zn на частоте электромагнитной волны 3 МГц. Напряженность переменного магнитного поля 10 Э. За единицу по оси ординат выбрана амплитуда нелинейной генерации за счет индукционного взаимодействия. На верхней оси абсцисс приведены значения безразмерного параметра  $ql$

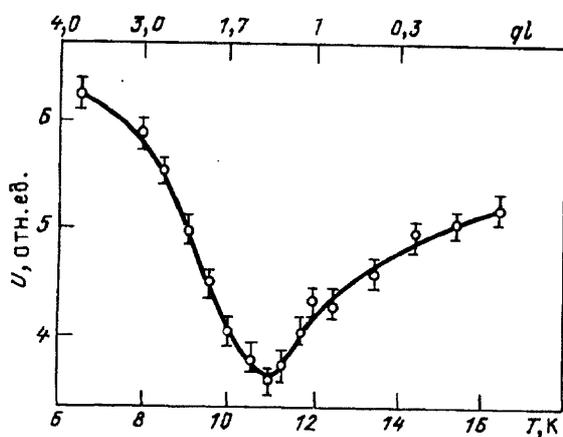


Рис. 3. Температурная зависимость амплитуды нелинейной генерации продольного ультразвука  $U$  в Zn на частоте электромагнитной волны 5 МГц. Напряженность переменного магнитного поля 35 Э

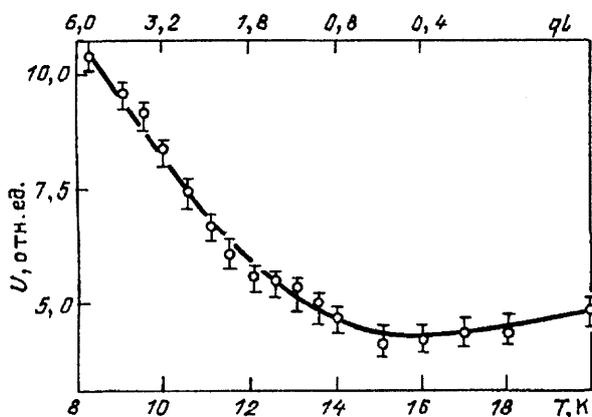


Рис. 4. Температурная зависимость амплитуды нелинейной генерации продольного ультразвука  $U$  в Zn на частоте электромагнитной волны 9,5 МГц. Напряженность переменного магнитного поля 35 Э

теплопроводности и теплоемкости цинка. Генерация ультразвука, обязанная деформационной силе, проявляется лишь при низких температурах в условиях аномального скин-эффекта (при  $T \leq 15$  К).

Детали эксперимента подробно описаны в [4]. Отметим лишь, что измерения проводились на монокристаллических пластинах цинка, нормаль к плоскости которых совпадала с осью симметрии шестого порядка, в температурном интервале 4–40 К, на трех частотах падающей электромагнитной волны 3, 5 и 9,5 МГц, при напряженности переменного магнитного поля у поверхности кристалла  $\sim 35$  Э. Прием ультразвука осуществлялся преобразователями из ниобата лития, резонансные частоты которых соответствовали удвоенной частоте задающего сигнала, т.е. 6, 10 и 19 МГц.

Экспериментальные данные по нелинейной генерации продольного ультразвука в цинке представлены на рис. 2–4, в качестве масштаба по оси ординат выбрана амплитуда ультразвука, возбуждаемого индукционной силой на соответствующей частоте. В показанном на этих рисунках интервале температур, экспериментальные зависимости  $U_{2\omega}(T)$  немонотонны. На всех исследованных частотах амплитуда инерции с понижением температуры уменьшается, проходит через минимум и снова возрастает. С повышением частоты положение минимума сдвигается в область более высоких температур, а возрастание амплитуды генерации при низких температурах становится более выраженным. Наблюдаемые в эксперименте зависимости качественно согласуются с теоретическими представлениями. Уменьшение амплитуды ультразвука с понижением температуры обязано выключению термоупругого механизма, эффективность которого в этом температурном интервале уменьшается. Возрастание амплитуды генерации при дальнейшем понижении температуры может быть объяснено проявлением деформационного механизма ЭМАП.

Анализ выражения для амплитуды ультразвука, возбуждаемого за счет деформационной силы (89), показывает, что роль этого механизма возрастает с увеличением параметра  $ql$ , приведенного на верхней оси абсцисс на рис. 2–4. С увеличением частоты этот механизм ЭМАП начинает проявляться при все более высоких температурах. Вместе с тем, температурный ход амплитуды термоупругой генерации (89) от частоты не зависит. Этим объясняется смещение положения минимума на зависимостях  $U(T)$  с повышением частоты. В соответствии с (82),  $|U^{неф}| \sim l^2$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Если использовать простейшие представле-

ния о структуре деформационного тензора (см. выше), то численное сопоставление результатов теории и эксперимента может быть проведено при варьировании единственного неизвестного в задаче параметра — деформационной массы  $\tilde{m}$ . Удовлетворительное согласие достигается при значении  $\tilde{m}$ , на порядок превышающем массу свободного электрона  $m$ . Как отмечено в [1], аналогичная ситуация имеет место и для линейного деформационного взаимодействия.

**8. Заключение.** Индукционный, инерционный и деформационный механизмы линейного ЭМАП детально разобраны в [1]. В настоящей работе основное внимание уделено линейному термоупругому механизму преобразования, а также рассмотрена нелинейная генерация ультразвука, обязанная индукционному, деформационному и термоупругому взаимодействиям. Этим, на наш взгляд, достигается качественно полная картина физических механизмов, ответственных за электромагнитное возбуждение ультразвука как в линейном, так и в нелинейном случаях. Следует подчеркнуть, однако, что отдельные детали этой картины найдены пока лишь теоре-

тически (линейный термоупругий и инерционный механизмы) и ждут своего экспериментального подтверждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каганов М.И., Васильев А.Н. УФН. 1993, **163:10**, 67 (в этом номере журнала).
2. Каганов М.И. ЖЭТФ. 1990, **98**, 1828.
3. Каганов М.И., Мааллави Ф.М. ФНТ. 1992, **18**, 737.
4. Васильев А.Н., Гайдуков Ю.П., Каганов М.И., Кругликов Е.Г. ЖЭТФ. 1992, **101**, 671.
5. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М., Наука, 1987.
6. Каганов М.И., Цукерник В.М. ЖЭТФ. 1958, **35**, 474.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
8. Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. М., Наука, 1971.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1987.
10. Каганов М.И., Фикс В.Б. ФММ. 1965, **19**, 489.
11. Васильев А.Н., Гулянский М.А., Каганов М.И. ЖЭТФ. 1986, **91**, 202.
12. Макаров Н.М., Родригес Ф.П., Ямпольский В.А. ЖЭТФ. 1988, **95**, 205.
13. Макаров Н.М., Родригес Ф.П., Ямпольский В.А. ЖЭТФ. 1989, **96**, 2149.
14. Reuter G.E., Sondheimer E.H. Proc. Roy. Soc. A. 1948, **195**, 336.