

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ОДНОМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ

С.Ю. Карпов, С.Н. Столяров

(Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург;
Научно-исследовательский центр "Полюс", Москва)

(Получено 29.01.92 г., после доработки 22.09.92 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение (63).

1. Одномерные периодические среды (64).
2. Классические методы построения решения для неограниченных периодических структур (65). 2.1. Метод Флоке—Блоха. 2.2. Метод интегрального уравнения.
3. Теория возмущений (66). 3.1. Борновское приближение — многоволновая дифракция Рамана—Ната. 3.2. Двухволновая динамическая теория дифракции — дифракция Брэгга.
4. Стандартная теория связанных волн (ТСВ) (69). 4.1. Вывод уравнений связанных волн. 4.2. Отражение от согласованного слоя. 4.3. Связь динамической теории дифракции с теорией связанных волн и условия применимости последней.
5. Модифицированная теория связанных волн (МТСВ) (72). 5.1. Вывод уравнений связанных волн в модифицированной теории. 5.2. Сравнение стандартной и модифицированной теорий связанных волн. 5.3. Условия применимости ТСВ и МТСВ.
6. Отражение света от слоя с периодическим изменением диэлектрической проницаемости (77).
7. Применение модифицированной теории связанных волн в почти-периодических и нелинейных периодических средах (79). 7.1. Почти-периодические среды. 7.2. Нелинейные периодические среды.

Заключение (82).

Приложения (83). I. Вывод интегрального уравнения и доказательство его эквивалентности системе Флоке—Блоха (6). II. Вывод приближенных формул в теории связанных волн и обсуждение условий их справедливости. III. Вывод граничных условий и выражений для их r_{\pm}^L в общем случае несогласованного слоя. IV. Коэффициенты R_{∞} (49) и R_L (55).

Список литературы (88).

Введение. Одномерные задачи пользуются неизменной популярностью у физиков. Как правило, необходимый для решения математический аппарат именно в одномерном случае оказывается наиболее простым. Благодаря этому часто удается получить точное решение задачи, которое в дальнейшем может служить отправным пунктом и тестом для приближенных методов, описывающих более сложные физические ситуации.

Проблема распространения волн в одномерных периодических средах в своем развитии прошла два ярко выраженных пика. Первый связан с исследованием структуры энергетических зон одномерных кристаллов, инициированным известной работой Кронига и Пенни [1]. Будучи первоначально лишь удобной физической моделью, электронная теория одномерного кристалла обрела впоследствии реальную экспериментальную базу в виде полупроводниковых сверхрешеток [2, 3, 49]. Другой пик интереса к изучению распространения волн в одномерных периодических структурах был стимулирован интен-

сивным развитием в середине 60-х годов и начале 70-х годов таких областей прикладной физики, как оптическая голография [4,5], акустооптика [6,7], интегральная и оптическая электроника [8—10], рентгеновская дифрактометрия [11, 12] и др. Обращение вновь к одномерным задачам было в этом случае продиктовано стремлением на новом уровне (определяемом возникшими задачами) и с новыми возможностями (в частности, вычислительной техникой) изучить особенности распространения и рассеяния волн в одномерных структурах с целью практического их использования. И хотя к реальным объектам модель одномерной периодической среды чаще всего была неприменима, результаты, полученные на ее основе, были полезны для качественного анализа и приближенного описания физики протекающих процессов. Таким образом, одномерная задача приобрела характер ключевой или базовой модели, предназначенной, с одной стороны, для обогащения нашего понимания происходящих в периодической структуре процессов и, с другой стороны, для разра-

ботки и тестирования количественных методов их анализа.

Цель данной работы — с единой позиции рассмотреть развитые в настоящее время методы анализа волновых процессов в одномерных периодических структурах, выявить общие черты и различия этих методов, сравнить их область применимости, а также кратко описать основные физические эффекты, проявляющиеся в периодических средах с учетом слабой апериодичности и малой нелинейности параметров структуры.

Авторы не ставили своей задачей дать исчерпывающий обзор затронутых вопросов: в той или иной степени они уже получили свое отражение в литературе (назовем, в частности, монографию [13] и подробную обзорную работу [14]). Основное внимание мы уделили универсальным приближенным методам анализа, допускающим к тому же аналитический вид решений. Во-первых, такие методы позволяют единообразно описывать волновые процессы в периодических структурах любой произвольной конфигурации. Во-вторых, эти методы, как правило, допускают обобщение на двумерные задачи и задачи с большим числом измерений. В этом смысле анализ одномерных периодических структур дает методическую основу для решения более сложных задач. И, наконец, использование приближенных универсальных методов позволяет провести быструю оценку и качественный анализ конкретной физической ситуации, что важно в практическом плане.

В начале обзора авторы излагают классические методы решения уравнений Максвелла в периодических средах: метод Флоке—Блоха, многоволновую и двухволновую динамическую теорию дифракции (путем разложения в ряд теории возмущений по малой глубине модуляции диэлектрической проницаемости), метод интегрального уравнения. Затем рассматривается приближенная аналитическая теория связанных волн Когельника. Все эти методы приводят к простым аналитическим приближенным решениям, справедливым при малой глубине модуляции диэлектрической проницаемости. Более подробно авторы излагают модифицированную теорию связанных волн, справедливую не только при малой глубине модуляции, особенно когда длина волны излучения много меньше периода модуляции. На базе этой приближенной аналитической теории получены дисперсионные характеристики и спектральные зависимости коэффициентов преобразования волн для любого профиля модуляции и любой толщины периодического слоя с учетом его поглощения и свойств ограничивающих его сред. Установлено [57, 59] хорошее совпадение (с точностью до малой глу-

бины модуляции) результатов расчета по этой аналитической теории с точными численными расчетами вблизи брэгговского резонанса и при большой отстройке частоты излучения от него. В рамках этого единого подхода учтена малая апериодичность в слое и малая нелинейность сред.

Все рассмотрения авторы проводили на простейшем примере распространения волн вдоль направления периодического изменения свойств среды со скалярной и независящей от частоты диэлектрической проницаемостью. В последнее время активно развиваются теоретические и экспериментальные исследования по оптике анизотропных и гиротропных периодических сред [48, 50—52]. Наиболее интересные результаты получены здесь для оптики жидких кристаллов в части поляризационных, частотных и амплитудных отражательных характеристик [48, 50, 52]. Распространение и преобразование волн в таких средах в данной статье не рассматривается по причине ограниченности объема.

1. Одномерные периодические среды. В общем случае одномерная периодическая среда представляет собой слой толщиной L (рис. 1), заполненный средой с периодически меняющейся вдоль оси z диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z) = \epsilon(z + a)$ (a — период структуры). Если среда является поглощающей (или усиливающей), то ее диэлектрическая проницаемость комплексна: $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$. Практически для большинства известных сред $\epsilon'' \ll \epsilon'$, при этом вещественная часть ϵ' связана с показателем преломления $n = (\epsilon')^{1/2}$, а мнимая часть ϵ'' связана с коэффициентом поглощения по интенсивности α соотношением $\epsilon'' = \alpha k^{-1} (\epsilon')^{1/2}$, где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны света в вакууме. Рассмотрим для простоты нормальное падение плоской световой волны на одномерную периодическую структуру (ОПС). В этом случае независимо от поляризации света уравнение

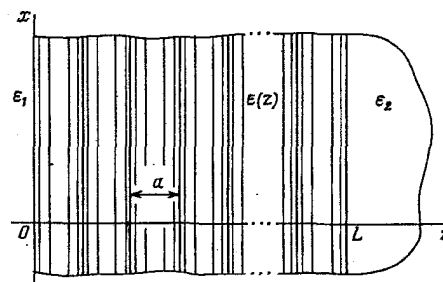


Рис. 1. Слой среды с одномерной периодичностью. L — толщина слоя, ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические проницаемости окружающих слой однородных сред, a — период функции $\epsilon(z)$

для напряженности электрического поля $E(z)$ внутри слоя имеет вид

$$d^2E(z)/dz^2 + k^2\varepsilon(z)E(z) = 0, \quad (1)$$

а

$$E(z, t) = E(z) \exp(-i\omega t).$$

Уравнение (1) с периодической зависимостью $\varepsilon(z)$ называют уравнением Хилла. Именно его мы и возьмем в качестве основного уравнения, описывающего распространение света в ОПС.

В силу линейности уравнения Хилла его общее решение представляет собой суперпозицию двух независимых частных решений $E_1(z)$ и $E_2(z)$:

$$E(z) = C_1E_1(z) + C_2E_2(z), \quad (2)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для периодической среды частное решение уравнения (1) согласно теореме Флокэ [13, 15, 16] можно представить в виде

$$E_1(z) = \Phi_1(z) \exp(i\mu z), \quad (3)$$

где μ — так называемый (вообще говоря комплексный: $\mu = \mu' + i\mu''$) характеристический показатель, а $\Phi_1(z)$ — периодическая функция с периодом z . Решение вида (3) дает для полного поля $E_1(z, t)$ выражение

$$E_1(z, t) = \Phi_1(z) \exp(-\mu''z) \exp[i(\mu'z - \omega t)]. \quad (3')$$

Это есть пространственно модулированная ($\Phi_1(z)$ периодична), неоднородная ($\mu'' \neq 0$) электромагнитная волна, бегущая (при $\mu' \neq 0$) вдоль оси z с фазовой скоростью $v_\Phi = \omega/|\mu'|$.

Как правило, интерес представляют две стандартные электродинамические задачи. В первой требуется определить закон дисперсии $\mu = \mu(k)$ и с его помощью установить области устойчивости и неустойчивости решений типа (3'), соответствующие вещественным ($\mu'' = 0$) и комплексным значениям $\mu = \mu'(k) + i\mu''(k)$. После этого определяются амплитуды фурье-компонент функций $\Phi_{1,2}(z)$ для неограниченной периодической среды. Во второй задаче нужно найти коэффициент отражения плоской волны от слоя периодической среды толщины L и коэффициент прохождения света сквозь него. Оба эти коэффициента, а также постоянные C_1 и C_2 определяются из условий "сшивания" полей на границах слоя, т.е. при $z = 0$ и $z = L$. При этом закон дисперсии $\mu(k)$ и вид частных решений $E_1(z)$ и $E_2(z)$ считаются известными. Таким образом, первая из названных задач является подготовительным этапом для решения второй задачи. В этой последовательности мы и рассмотрим их в дальнейшем.

2. Классические методы построения решений для неограниченных периодических структур. Наиболее часто на практике встречаются два типа од-

номерных периодических структур (ОПС): слоистые среды со ступенчатым (кусочно-постоянным) законом изменения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ и с $\varepsilon(z)$, изменяющейся по гармоническому закону. Оба типа таких периодических сред детально рассмотрены в монографиях [13, 17, 18, 53], поэтому мы лишь кратко остановимся на методах их анализа. Для слоистых сред разработаны эффективные матричные методы [15, 17, 53], приводящие к трансцендентному дисперсионному уравнению относительно характеристического показателя $\mu(k)$. В простейших случаях таких, как например, для модели Кронига—Пенни [1, 13, 19], дисперсионное уравнение выражается через тригонометрические функции, а его решение может быть осуществлено приближенно графически или с необходимой точностью численно. В случае гармонической модуляции диэлектрической проницаемости решение уравнения (1) выражается через функции Матье [18]. Расчет дисперсионной зависимости $\mu(k)$ и конфигурации полей при этом чаще всего производится с помощью быстро сходящихся рядов. Число учитываемых членов в этих рядах определяется необходимой точностью вычислений. Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев конкретные расчеты требуют на каком-либо этапе использования численных методов. Кроме того, расчетные схемы, развитые для ОПС с кусочно-постоянным распределением $\varepsilon(z)$ и с гармонической модуляцией диэлектрической проницаемости, не являются универсальными, а предназначены для анализа именно этих структур.

В связи с этим дальнейшие исследования развивались по пути создания единого численного метода решения уравнения (1), не зависящего от конкретного вида $\varepsilon(z)$ и основанного на разложении в бесконечные ряды Фурье $\varepsilon(z)$ и решений $\Phi_{1,2}(z)$. Начало этим исследованиям было положено в классических работах Хилла (см. [13, 15]). В настоящее время тенденция к унификации численных расчетов наиболее ярко проявилась в так называемом методе Флокэ, который широко используется для анализа ОПС [20—26].

2.1. Метод Флокэ — Блоха. Суть этого метода заключается в следующем (см., например, [25]). В соответствии с (3) представим решение уравнения (1) в виде

$$E_1(z) = \exp(i\mu z) \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_l \exp\left(i\frac{2\pi}{a} lz\right), \quad (4)$$

где A_l — неизвестные коэффициенты, определяющие вид периодической функции $\Phi_1(z)$. Разложим также в ряд Фурье периодическую диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(z)$ (a — период структуры)

$$\varepsilon(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_m \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right), \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_m = \frac{1}{a} \int_0^a \varepsilon(z) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} mz\right) dz. \quad (5')$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (1), выделяя слагаемое с $m = 0$ и заменяя в двойных бесконечных суммах по m и l индекс суммирования $l + m$ на l , а затем в сумме по m индекс суммирования m на $l - m$, получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов A_l :

$$\left[k^2 \varepsilon_0 - \left(\mu + \frac{2\pi}{a} l \right)^2 \right] A_l = -k^2 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_{l-m} A_m (1 - \delta_{lm}), \quad (6)$$

где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; δ_{ml} — символ Кронекера, а множитель $(1 - \delta_{ml})$ обращает в нуль слагаемое с $m = l$. Система уравнений (6) является точной. Приравнивание нулю ее определителя дает дисперсионное уравнение для характеристического показателя μ , а неизвестные коэффициенты A_l можно выразить через A_0 либо методами цепных дробей [13,15], либо с помощью известных способов вычисления бесконечных определителей [13,15]. На практике вместо бесконечной системы уравнений решается система уравнений конечного порядка, полученная из (6) путем отбрасывания высших гармоник. Порядок приближенной системы определяется требуемой точностью вычислений. Отметим здесь, что в отсутствие модуляции диэлектрической проницаемости среды, когда все $\varepsilon_m = 0$, уравнение (6) имеет отличные от нуля решения, $A_l \neq 0$, только в том случае, когда волновой вектор K_l равен

$$k_l^{(\pm)} (\varepsilon_0')^{1/2} = \pm \left(\mu' + \frac{2\pi}{a} l \right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6')$$

где $k_l^{(+)}$ относится к волне, бегущей в положительном направлении оси z (см. (3а)), а $k_l^{(-)}$ — волне, бегущей в противоположном направлении.

Как видно из системы (6) и решений (4), метод Флоке—Блоха максимально ориентирован на использование ЭВМ: численный счет здесь следует непосредственно за постановкой задачи. Поэтому гораздо проще выполнить с помощью метода Флоке—Блоха конкретные расчеты, чем выявить общие закономерности преобразования волн в одномерной периодической среде. Последняя задача решается, как правило, с использованием приближенных аналитических методов.

2.2. Метод интегрального уравнения. При нахождении приближенных аналитических решений уравнения (1) можно исходить из эквивалентного ему интегрального уравнения (см., например, [27])

$$E(z) = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \varepsilon_p(z') G(z - z') E(z'), \quad (7)$$

в котором периодическое возмущение $\varepsilon_p(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon_0$ имеет нулевое среднее значение, а $G(z - z')$ — функции Грина невозмущенного уравнения (1) с $\varepsilon(z) = \varepsilon_0$ и с правой частью, равной $-\delta(z - z')$. Согласно [27] $G(z - z')$ имеет вид (см. приложение I)

$$G(z - z') = \frac{i}{2k\varepsilon_0^{1/2}} \exp\left(ik\varepsilon_0^{1/2} |z - z'| \right), \quad (8)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, а $\varepsilon_0 = \varepsilon_0' + i\varepsilon_0''$. Для бесконечной периодической структуры в формуле (7) удобно перейти от интегрирования по всей оси z к интегрированию по периоду a . Воспользовавшись соотношениями периодичности $\varepsilon_p(z \pm ma) = \varepsilon_p(z)$ и $E(z \pm ma) = E(z) \exp(\pm i\mu ma)$, следующими из (3) и (5), вместо (7) получим

$$E(z) = k^2 \int_0^a dz' \varepsilon_p(z - z') E(z'), \quad (9)$$

где

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(z - na) \exp(i\mu na) = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\exp(i\beta_n z)}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_n^2}, \quad \beta_n = \mu + \frac{2\pi}{a} n. \quad (10)$$

Подробный вывод формул (9), (10) и доказательство эквивалентности интегрального уравнения (9) системе (6) в методе Флоке—Блоха приведены в приложении I.

3. Теория возмущений.

3.1. Борновское приближение — многоволновая дифракция Рамана — Ната. При получении приближенных аналитических формул в борновском приближении будем исходить не из интегрального уравнения (7) (или (9)) и его последующего решения методом итераций, а из эквивалентной ему системы уравнений (6) динамической теории дифракции. Чтобы построить приближенное решение системы (6) для $E_1(z)$ в (4), будем рассматривать ее правую часть как возмущение. Это возможно, например, при малой амплитуде модуляции диэлектрической проницаемости, т.е. при $\varepsilon_m \ll \varepsilon_0$ и $m \neq 0$. Считая при этом, что $A_m \ll A_0$ и решая систе-

му уравнений (6) методом последовательных приближений, мы получим ряд теории возмущений для характеристического показателя μ и амплитуд A_m (см., например, [25]). С учетом первых членов этого ряда имеем

$$\mu \approx k\epsilon_0^{1/2} \left[1 + \left(\frac{a}{\lambda\epsilon_0^{1/2}} \right)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{|\epsilon_m|^2}{m^2 - (4a^2\epsilon_0/\lambda^2)} \right], \quad (11)$$

$$A_m \approx \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \frac{\epsilon_m}{m + (2a/\lambda)\epsilon_0^{1/2}} A_0,$$

где $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ — длина волны в вакууме.

Описанная процедура решения соответствует борновскому приближению хорошо известному в квантовой теории рассеяния [62] и при расчете рассеяния электромагнитных волн на ультразвуке [17]. Это приближение основано на разложении поля по степеням малого параметра, в который входят величина возмущения и отношение размера рассеивателя к длине волны. Легко увидеть, что в нашем случае (11) таким параметром малости является величина

$$\xi = (ka/|\epsilon_0|^{1/2})\Delta\epsilon = k_0 a \Delta\epsilon / |\epsilon_0|, \quad (12)$$

где $\Delta\epsilon$ — амплитуда модуляции диэлектрической проницаемости, т.е. $\Delta\epsilon = |\epsilon_m|_{\max}$, а $k_0 = k(\epsilon'_0)^{1/2}$ — волновой вектор света в однородной среде.

Полное поле $E_1(z)$ в (4) с учетом решений (11) представляет суперпозицию плоских электромагнитных волн с различными амплитудами A_l и волновыми векторами

$$k_l = (\mu' + \frac{2\pi}{a}l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При малой глубине модуляции $\Delta\epsilon$ диэлектрической проницаемости и при сравнимых между собой длине волны λ и периоде структуры a , когда мал параметр ξ (12) борновского приближения, все амплитуды A_l ($l \neq 0$) малы по сравнению с амплитудой A_0 нулевого приближения. Это значит, что при $\xi \ll 1$ в нулевом приближении полное поле $E_1(z)$ в (4) состоит в основном из одной волны с амплитудой A_0 и с постоянной распространения, равной $\mu'_0 = k(\epsilon'_0)^{1/2}$, что соответствует фазовой скорости v_ϕ ее распространения, равной $\omega/\mu'_0 = c/(\epsilon'_0)^{1/2}$. Возбуждаемые от этой волны на неоднородности $\epsilon(z)$ вторичные волны с малыми амплитудами $A_l \ll A_0$ создают слабый волновой "фон" в виде набора волн, бегущих с разными скоростями ω/k_l (по величине и направлению) и имеющих малые амплитуды A_l , вычисляемые по приближенным формулам (11).

3.2. Двухволновая динамическая теория дифракции — дифракция Брэгга. Рассмотренное в предыдущем разделе борновское приближение справедливо тогда, когда малы ампли-

туды A_m всех волн, кроме одной амплитуды A_0 , т.е. когда распространение света имеет в основном одно-волновый характер. Как видно из тех же решений (11) борновского приближения условие малости амплитуды A_m по сравнению с A_0 нарушается для тех номеров $m = -n$, для которых длина волны излучения $\lambda = 2\pi c/\omega$ удовлетворяет условию Брэгга:

$$k(\epsilon'_0)^{1/2} = \pi n/a, \quad \text{или} \quad n\lambda/(\epsilon'_0)^{1/2} = 2a, \quad (13)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер брэгговского резонанса. Условие (13) соответствует случаю n -го брэгговского резонанса, когда амплитуда A_{-n} ($-n$)-й гармоники может стать равной или больше амплитуды A_0 , основной (падающей на слой) волны, у которой согласно (6') $k_0^{(+)} = k(\epsilon'_0)^{1/2} = \mu'_0 = \pi n/a$. При этом, как видно из (11), амплитуды A_m остальных гармоник с $m \neq (0, -n)$ по-прежнему остаются малыми, а это значит, что распространение света в этом случае имеет в основном двухволновый характер. Для рентгеновских лучей в кристаллах такой случай известен как режим двухволновой динамической теории дифракции (см., например, [11, 48]).

Решая систему уравнений (6) с учетом двухволновой дифракции, мы можем в первом приближении пренебречь всеми остальными гармониками, кроме ($-n$)-й с амплитудой A_{-n} и основной с амплитудой A_0 , если по-прежнему $\xi \ll 1$. Тогда приближенная система уравнений примет вид (см., например, [25, 54])

$$(k^2\epsilon_0 - \mu^2)A_0 + k^2\epsilon_n A_{-n} \approx 0, \quad (14)$$

$$\left[k^2\epsilon_0 - \left(\mu - \frac{2\pi}{a}n \right)^2 \right] A_{-n} + k^2\epsilon_{-n} A_0 \approx 0,$$

где $\epsilon_0, \epsilon_{\pm n}$ и ϵ_m — комплексные величины, определяемые по формуле (5'). Условие разрешимости этой системы дает дисперсионное уравнение для характеристического показателя $\mu(k)$

$$(\mu^2 - k^2\epsilon_0) \left[\left(\mu - \frac{2\pi}{a}n \right)^2 - k^2\epsilon_0 \right] - k^4\epsilon_n\epsilon_{-n} = 0. \quad (15)$$

Вблизи брэгговского резонанса (13) и при достаточно малой амплитуде модуляции диэлектрической проницаемости ($|\epsilon_{\pm n}| \ll |\epsilon_0|$) уравнение (15) имеет следующее приближенное аналитическое решение (см., например, [25] или [54])

$$\mu = \frac{\pi}{a}n + i\gamma, \quad \gamma \approx \left[\alpha_n^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$\delta = k(\epsilon'_0)^{1/2} - (\pi/a)n, \quad \alpha_{\pm n} = k\epsilon_{\pm n}/2(\epsilon'_0)^{1/2},$$

$$\alpha = k\epsilon''_0/(\epsilon'_0)^{1/2}. \quad (16')$$

Выражение для γ в (16) получено в предположении малости отстройки δ в (16) от брэгговского резонан-

са(13), когда $|\delta| \ll \pi n/a$. Величины $\varkappa_{\pm n}$ обычно называются постоянными связи, и они определяют величину дифракционного взаимодействия основной гармоники с амплитудой A_0 с $(-n)$ -й гармоникой с амплитудой A_{-n} . Коэффициент α характеризует поглощение света в однородной среде. Величина γ в (16) определена таким образом, что $\text{Re } \gamma \geq 0$, а $\delta \text{Im } \gamma \leq 0$. Из системы уравнений (14) с использованием решения (16) нетрудно получить связь между амплитудами A_{-n} и A_0

$$A_{-n} = r_B^\infty A_0, \quad r_B^\infty = \frac{i\varkappa_{-n}}{\gamma + (\alpha/2) - i\delta}. \quad (17)$$

При удалении частоты волны $k = \omega/c$ от брэгговского резонанса (13), т.е. в случае, когда $|\delta| \gg |\varkappa_m|$ и α , но по-прежнему $|\delta| \ll k(\varepsilon'_0)^{1/2}$, величина μ стремится к величине $k(\varepsilon'_0)^{1/2}$, а выражение для амплитуды A_{-n} приобретает вид (11), совпадающий с решениями, найденными ранее в борновском приближении.

Точность вычислений можно повысить, если как и в системе (14) в левой части равенств оставить слагаемые с A_0 и A_{-n} , а оставшиеся нерезонансные члены в суммах в правой части (6) учесть по теории возмущений (см., например, [54]). Такая процедура, фактически использованная также в работе [28], приводит к перенормировке постоянных связи \varkappa_n и \varkappa_{-n} , а также к спектральному сдвигу брэгговского резонанса относительно его положения, определяемого равенством (13). В результате [54] сдвиг центра брэгговского резонанса при наличии поглощения α ($\alpha \neq 0$) пропорционален величине поглощения α , а в прозрачной среде ($\alpha = 0$) он содержит третью степень малых постоянных связи \varkappa_m . Изменение постоянных связи при этом пропорционально первой степени \varkappa_m (см. [54]).

Основным результатом, следующим как из общей теории [13,18,48], так и из конкретных формул (16), является существование на дисперсионной кривой $k = \omega/c = k(\mu)$ (рис. 2) вблизи n -го брэгговского резонанса в случае непоглощающих сред ($\alpha = 0$, $\varkappa_{-n} = \varkappa_n^*$ и $\varkappa_n \varkappa_{-n} = |\varkappa_n|^2 = \varkappa^2$) области запрещенных частот $k = \omega/c$, где решение (16) для μ комплексно ($\gamma \neq 0$). В этой области запрещенных частот электромагнитные волны (3') становятся затухающими (для периодически нестационарных сред эти решения становятся неустойчивыми). Вне области запрещенных частот $\gamma = 0$ и решения (16) для μ чисто вещественны, а электромагнитные волны становятся распространяющимися. Как следует из формул (16) ширина области запрещенных частот равна удвоенной постоянной связи \varkappa , а зависимость $\gamma(k)$ имеет параболический характер с $\gamma_{\max} = \varkappa$ (см. рис. 2). В поглощающих средах при $\alpha \neq 0$ характери-

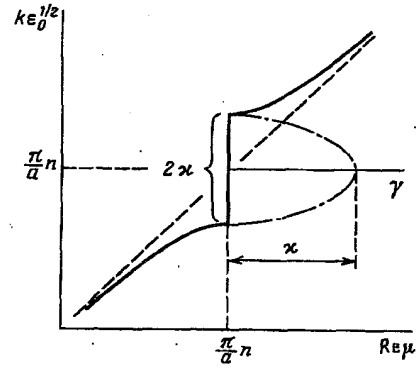


Рис. 2. Дисперсионная зависимость $k(\mu)$ в окрестности n -й запрещенной зоны (остальные зоны не указаны) для прозрачных сред: сплошная кривая соответствует $k = k(\text{Re } \mu)$, а штрихпунктирная $\text{Im } \mu = \gamma = \gamma(k)$; пунктирная прямая соответствует распространению волн в однородной среде

ческий показатель μ всегда комплексен и волны любой частоты затухают в пространстве в большей или меньшей степени. В отсутствие периодической модуляции среды, когда $\varkappa = 0$, дисперсионная зависимость $k(\mu)$ вырождается в прямую линию, проходящую на рис. 2 через начало координат, что соответствует постоянству скорости распространения света в однородной среде.

Кроме дисперсионной зависимости $k = \omega/c = k(\mu)$ интерес представляет также зависимость от частоты $\omega = ck$ величины $r_B^\infty = A_{-n}/A_0$ (см. выражение (17)), которая определяет относительную амплитуду $(-n)$ -й гармоники. В условиях брэгговского резонанса (13) эта $(-n)$ -я гармоника имеет согласно (6') волновой вектор $k_{-n} = (-\pi n/a)$, совпадающий по величине с волновым вектором $k_0 = k(\varepsilon'_0)^{1/2} = \pi n/a$ основной (падающей на среду) волны, но направленный в противоположную сторону. Поскольку [54] амплитуды A_l остальных волн с $l \neq (0, -n)$ малы по сравнению с A_0 и A_{-n} , то величина r_B^∞ имеет смысл коэффициента брэгговского отражения для бесконечной одномерной периодической среды (ОПС). На рис. 3 изображены зависимости квадрата модуля коэффициента брэгговского отражения $R_\infty = |r_B^\infty|^2$ и его фазы $\chi = \arg r_B^\infty$ от нормированной отстройки, рассчитанные для ОПС без потерь. Фаза φ , от которой отсчитывается величина χ , связана с начальной фазой модуляции (при $z = 0$) диэлектрической проницаемости: $\varkappa_{-n} = \varkappa \exp(i\varphi)$. Как видно, в области запрещенных частот $R_\infty = 1$. Это означает, что амплитуда $(-n)$ -й гармоники в условиях брэгговского резонанса сравнивается с амплитудой исходной нулевой гармоники. Отметим также, что на коротковолновом ($\delta/\varkappa = +1$) и длинноволновом ($\delta/\varkappa = -1$) краях за-

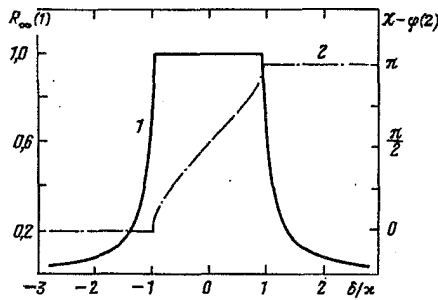


Рис. 3. Спектральные зависимости энергетического коэффициента отражения $R_\infty(\delta/\alpha) = |r_B^\infty(\delta/\alpha)|^2$ и фазы $\chi(\delta/\alpha)$ коэффициента r_B^∞ для полубесконечной непоглощающей периодической среды. δ — отстройка частоты от n -го брэгговского резонанса, α — коэффициент связи встречных волн, φ — начальная фаза отражения при $\delta = -\alpha$

прещенной зоны знаки коэффициента отражения r_B^∞ противоположны, ибо при прохождении δ/α через запрещенную зону фаза χ меняется на π .

Выражение (4) с характеристическим показателем (16) является одним из независимых решений уравнения (1). Другим независимым решением в случае четной функции $\epsilon(z)$ является

$$E_2(z) = \Phi_2(z) \exp(-i\mu z), \quad \Phi_2(z) = \Phi_1(-z). \quad (18)$$

Для произвольной зависимости $\epsilon(z)$ второе независимое решение уравнения (1) можно получить, изменив знак характеристического показателя и повторив сначала всю процедуру поиска его значения и одновременного определения величин A_m . Зная решения $E_1(z)$ и $E_2(z)$, можно рассчитать характеристики ограниченной ОПС путем сшивания полей на ее границах. Эту процедуру мы обсудим позже применительно к уравнениям связанных волн.

4. Стандартная теория связанных волн (ТСВ).

Этот подход к решению уравнения (1) с периодической диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$ был впервые использован Х. Когельником для анализа рассеяния света на фазовых голограммах при малой гармонической модуляции $\epsilon(z)$ [14,29]. Здесь мы проиллюстрируем этот подход для более общего случая среды с произвольной периодической зависимостью $\epsilon(z)$. При этом будет использовано лишь основное предположение Когельника о малости преобразования волн на периоде структуры, которое хорошо выполняется в случае близости частот падающей на слой волны к частоте брэгговского резонанса.

4.1. Вывод уравнений связанных волн.

Суть используемого метода состоит в следующем [26,55]. Решение уравнения (1) представляется в виде суперпозиции двух встречно бегущих волн

$$E(z) = A^{(+)}(z) \exp(ik\epsilon_0^{1/2}z) +$$

$$+ A^{(-)}(z) \exp(-ik\epsilon_0^{1/2}z) \quad (19)$$

с переменными амплитудами $A^{(\pm)}(z)$ и с волновым вектором $k\epsilon_0^{1/2} = k(\epsilon'_0)^{1/2} + (i\alpha/2)$, соответствующим распространению волн в однородной поглощающей среде с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 = \epsilon'_0 + i\epsilon''_0$, где $\epsilon'_0 = \alpha(\epsilon'_0)^{1/2}/k$, а α — коэффициент поглощения. Подставляя выражение (19) в уравнение (1), используя разложение (5) для величины периодического возмущения

$$\epsilon_p(z) = \epsilon(z) - \epsilon_0 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \epsilon_m \exp\left(i\frac{2\pi}{a} mz\right)$$

и вводя величину $\delta = k(\epsilon'_0)^{1/2} - (\pi n/a)$ для отстройки от n -го брэгговского резонанса, получим одно точное уравнение, в которое входят амплитуды прямой $A^{(+)}(z)$ и обратной $A^{(-)}(z)$ волн

$$\left[\frac{d^2 A^{(+)}}{dz^2} + 2ik\epsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(+)}}{dz} + k^2 A^{(+)} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \epsilon_m \times \right. \\ \left. \times \exp\left(i\frac{2\pi}{a} mz\right) \right] \exp\left(i\frac{\pi}{a} nz - \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right) + \\ + \left[\frac{d^2 A^{(-)}}{dz^2} - 2ik\epsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(-)}}{dz} + k^2 A^{(-)} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \epsilon_m \times \right. \\ \left. \times \exp\left(i\frac{2\pi}{a} mz\right) \right] \exp\left(-i\frac{\pi}{a} nz + \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right) = 0. \quad (20)$$

Если согласно Когельнику [29] на периоде структуры a имеет место малое преобразование прямой волны $A^{(+)}(z)$ в обратную $A^{(-)}(z)$, то функции $A^{(\pm)}(z)$ и их производные, а также сомножители $\exp\left(\pm \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right)$ можно считать постоянными на периоде структуры a . В этом случае, умножая уравнение (20) последовательно на

$$\exp\left(-i\frac{\pi}{a} nz + \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right)$$

и на

$$\exp\left(i\frac{\pi}{a} nz - \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right),$$

а затем, усредняя полученные равенства по периоду структуры "a", получим приближенную систему связанных уравнений для амплитуд $A^{(\pm)}(z)$ прямой и обратной волны (см. также [26, 55])

$$\frac{d^2 A^{(+)}(z)}{dz^2} + 2ik\epsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} + \\ + k^2 \epsilon_n \exp[(\alpha - 2i\delta)z] A^{(-)}(z) = 0, \quad (21) \\ \frac{d^2 A^{(-)}(z)}{dz^2} - 2ik\epsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} +$$

$$+ k^2 \varepsilon_{-n} \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] A^{(+)}(z) = 0.$$

При усреднении по периоду в суммах по "m" обращались в нуль все слагаемые за исключением резонансных слагаемых соответственно с $m = n$ и $m = -n$ а также обращались в нуль выражения, содержащие $A^{(\pm)}(z)$ и их производные, умноженные на $\exp(\pm i2\pi n z/a)$. Условия постоянства на периоде "a" амплитуд $A^{(\pm)}(z)$ и их производных, а также сомножителей $\exp[\pm(\alpha - 2i\delta)z]$ выполняется тогда, когда

$$\alpha a \ll 1, |\delta| a \ll 1, |\varkappa_{\pm n}| a \ll 1,$$

или

$$\frac{\pi}{2} n |\varepsilon_{\pm n}| / |\varepsilon_0| \ll 1, \quad (21a)$$

где

$$\delta = k(\varepsilon_0')^{1/2} - \frac{\pi}{a} n, \quad \varkappa_{\pm n} = k\varepsilon_{\pm n} / 2\varepsilon_0'^{1/2}, \quad (21b)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

При выводе последнего неравенства в (21a) было использовано условие (13) брэгговского резонанса.

Система уравнений (21) с постоянными коэффициентами, связывающая амплитуды $A^{(+)}(z)$ и $A^{(-)}(z)$, может быть решена стандартной экспоненциальной подстановкой [26, 55]. Однако в наиболее распространенном методе Когельника [14,29] обычно пренебрегается вторыми производными от $A^{(\pm)}(z)$ в системе (21). Тогда эти уравнения переходят в стандартную систему уравнений связанных волн Когельника

$$\frac{dA^{(+)}(z)}{dz} = i\varkappa_n \exp[(\alpha - 2i\delta)z] A^{(-)}(z), \quad (22)$$

$$\frac{dA^{(-)}(z)}{dz} = -i\varkappa_{-n} \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] A^{(+)}(z),$$

где $\varkappa_{\pm} = k\varepsilon_{\pm n} / 2\varepsilon_0'^{1/2}$, α — коэффициент поглощения, а δ — отстройка от n -го брэгговского резонанса.

Аналогичную систему приближенных уравнений можно получить и из интегрального уравнения (7), если в него подставить решение (19), разбить области интегрирования по dz' на две, где $z - z'$ имеет определенный знак, а затем приравнять коэффициенты перед $\exp(\pm i k \varepsilon_0'^{1/2} z)$ в левой и в правой части равенства (7). Тогда получим точную систему интегральных уравнений

$$A^{(+)}(z) = \frac{ik}{2\varepsilon_0'^{1/2}} \int_{-\infty}^z dz' \varepsilon_p(z') [A^{(+)}(z') +$$

$$+ A^{(-)}(z') \exp(-2ik\varepsilon_0'^{1/2} z')],$$

$$A^{(-)}(z) = \frac{ik}{2\varepsilon_0'^{1/2}} \int_z^{\infty} dz' \varepsilon_p(z') [A^{(-)}(z') +$$

$$+ A^{(+)}(z') \exp(2ik\varepsilon_0'^{1/2} z')]. \quad (22')$$

Если опять использовать условия (21a) близости к n -му брэгговскому резонансу и малости изменения амплитуд $A^{(\pm)}(z)$ на периоде, то систему (22') нетрудно привести к системе (22) уравнений связанных волн (см. приложение II). Однако система (22') точных интегральных уравнений удобна тем, что позволяет с помощью простого итерационного метода оценивать следующие приближения для $A^{(\pm)}(z)$ (см. приложение II).

Общее решение системы приближенных уравнений (22) имеет вид

$$A^{(+)}(z) = [C_1 \exp(-\gamma z) + C_2 \exp(\gamma z)] \times \exp\left[\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right)z\right],$$

$$A^{(-)}(z) = \left[C_1 r_B^{\infty} \exp(-\gamma z) + \frac{\varkappa_{-n}}{\varkappa_n} \frac{1}{r_B^{\infty}} C_2 \exp(\gamma z) \right] \times \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right)z\right], \quad (23)$$

в которых величины γ и r_B^{∞} определяются соответственно равенствами (16) и (17). Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий для полей при $z = 0$ и $z = L$.

4.2. Отражение от согласованного слоя. Рассчитаем теперь коэффициент отражения световой волны, падающей на слой толщины L одномерной периодической среды (ОПС), согласованный с окружающими его средами. Последнее означает, что диэлектрическая проницаемость слоя вида (5) удовлетворяет на границах слоя при $z = 0$ и $z = L$ условиям непрерывности: $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ и $\varepsilon(L) = \varepsilon_2$, где в обозначениях рис. 1 ε_1 есть диэлектрическая проницаемость однородной среды при $z < 0$, откуда падает волна, а ε_2 — диэлектрическая проницаемость однородной среды позади слоя при $z > L$, куда волна проходит. При малой глубине модуляции $\varepsilon(z)$ в (5) и одинаковых средах по обе стороны слоя, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, приближенное условие согласования можно записать в виде: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$, где ε_0 — однородная часть функции $\varepsilon(z)$ в (5), т.е. ее нулевая фурье-гармоника.

Для согласованного слоя на границах раздела $z = 0$ и $z = L$ нет скачков показателей преломления и, следовательно, нет френелевского отражения волн от границ раздела. Это значит, что, с одной стороны, отражение от всего слоя определяется только брэгговским отражением от периодической структуры, а, с другой стороны, электромагнитные поля по обе стороны этих границ раздела (при $z = 0$ и $z = L$) совпадают друг с другом. Тогда в решении (19) величина $A_0 = A^{(+)}(0)$ совпадает с амплитудой падающей на

слой волны, а величина $A^{(-)}(0)$ дает амплитуду отраженной от слоя волны. Аналогично этому величина $A^{(+)}(L)$ совпадает с амплитудой волны, прошедшей за слой в область $z \geq L$. В силу принципа излучения (см., например, [33,58]) в области $z > L$ позади слоя нет волны, приходящей к этому слою, т.е. $A^{(-)}(L) = 0$. Тогда в результате имеем граничные условия в виде

$$A^{(-)}(L) = 0, \quad A^{(+)}(0) = A_0. \quad (24)$$

Используя первое из этих условий для решений вида (23), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= -\frac{\kappa_n}{\kappa_{-n}} (r_B^\infty)^2 \exp(-2\gamma L) = \\ &= \frac{\gamma - (\alpha/2) - i\delta}{\gamma + (\alpha/2) + i\delta} \exp(-2\gamma L), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\text{Re } \gamma \geq 0$. Отсюда и из решений (23), в которых использовано второе равенство в (24), получаем коэффициент брэгговского отражения от согласованного слоя толщины L

$$\begin{aligned} r_B^L &= \frac{A^{(-)}(0)}{A_0} = \\ &= \frac{i\kappa_{-n} \text{sh}(\gamma L)}{\gamma \text{ch}(\gamma L) + [(\alpha/2) - i\delta] \text{sh}(\gamma L)}, \end{aligned} \quad (26)$$

а также коэффициент пропускания

$$\begin{aligned} t_B^L &= \frac{E(L)}{A_0} = \frac{A^{(+)}(L)}{A_0} \exp(i\kappa_0^{1/2} L) = \\ &= \frac{\gamma \exp(i\pi n L / a)}{\gamma \text{ch}(\gamma L) + [(\alpha/2) - i\delta] \text{sh}(\gamma L)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Эти формулы показывают следующее. Поскольку в реальном слое всегда имеются потери ($\alpha > 0$), то $\text{Re } \gamma > 0$ всегда и при переходе к полубесконечному пространству ($L \rightarrow \infty$) формула (26) дает величину r_B^∞ , полученную в (17) по динамической теории дифракции. При этом естественно, что $t_B^\infty = 0$. Подстановка решений (23) в величину $E(z)$ в (19) показывает, что коэффициент C_1 относится к прямой блоховской волне в (2), а C_2 — к обратной блоховской волне. Из формулы (25) видно, что для согласованного слоя конечной толщины эти две встречные блоховские волны всегда связаны друг с другом. Эта связь исчезает только в полубесконеч-

ной среде, ибо тогда $C_2 \rightarrow 0$.

На рис. 4 представлены спектральные зависимости энергетического коэффициента отражения $R_L = |r_B^L|^2$ от безразмерной отстройки δ/κ частоты волны от брэгговского резонанса при различных значениях поглощения света, характеризуемого параметром αL . Как видно из рис. 4, при малых значениях αL вне пределов полосы запрещенных частот, т.е. при $|\delta| \geq |\kappa|$, зависимость $R_L(\delta)$ имеет осциллирующий характер, обусловленный интерференцией волн, отраженных от дальней границы слоя толщины L . При увеличении коэффициента αL все меньшая часть света попадает на эту дальнюю границу слоя. В результате этого с ростом αL осцилляции уменьшаются по амплитуде, а при $\alpha L \gg 1$ почти полностью пропадают. В этом случае r_B^L стремится к r_B^∞ в (17), а форма кривой $R_L(\delta)$ приближается к зависимости $R_\infty(\delta) = |r_B^\infty|^2$ для полубесконечной периодической среды.

Осциллирующий характер спектральной кривой отражения $R_L(\delta)$ для слоя конечной толщины L будет пропадать также в том случае, когда на этот слой будет падать немонахроматическое излучение со спектральной шириной волнового пакета $\Delta\omega$ такой, что его ширина $\Delta k = \Delta\omega/c$ в пространстве волновых векторов будет удовлетворять условию $\Delta k \gg L^{-1}$.

4.3. Связь динамической теории дифракции с теорией связанных волн и условия применимости последней. Следует отметить, что все результаты в теории связанных волн, касающиеся дисперсионных зависимостей, распределения поля, коэффициентов отражения и пропускания и т.п. могут быть получены также с помощью динамической теории дифракции. Как видно из сравнения формул (16) и (17) с решениями (23), оба подхода вблизи брэгговского резонанса дают одинаковый результат, но расчетная схема динамической теории дифракции оказывается более громоздкой.

Обсудим области применимости теории связанных волн, следующих из неравенств (21a) и соотношений (21б). Для перехода к уравнениям связанных

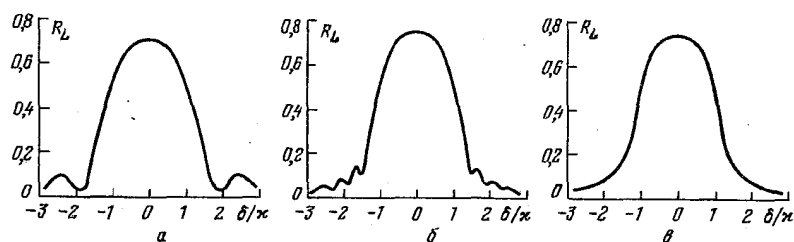


Рис. 4. Спектральная зависимость энергетического коэффициента отражения $R_L(\delta/\kappa)$ от согласованного слоя (при $\alpha/\kappa = 0,3$ и $\kappa L = 3$) при различных уровнях потерь в слое: $\alpha L = 0,9$ (а), $\alpha L = 1,8$ (б) и $\alpha L = 3,6$ (в)

волн (22) кроме малости поглощения α на периоде структуры a и малости отстройки δ по сравнению с a^{-1} требуется еще, чтобы было мало также изменение амплитуды $A^{(\pm)}(z)$ на периоде структуры (см. приложение II). Это изменение характеризуется величиной постоянной связи κ в (21б), для которой справедлива оценка $\kappa \approx k \Delta\epsilon / |\epsilon_0|^{1/2}$, где $\Delta\epsilon$ — максимальное отклонение в $\epsilon(z)$. Таким образом, основным условием применимости теории связанных волн является условие

$$\kappa \approx \frac{k\Delta\epsilon}{|\epsilon_0|^{1/2}} \ll a^{-1},$$

или (см. выражение (12))

$$\xi = \frac{ka}{|\epsilon_0|^{1/2}} \Delta\epsilon = 2\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\Delta\epsilon}{|\epsilon_0|^{1/2}} \ll 1. \quad (27')$$

С другой стороны, малость параметра ξ в формулах (11) является условием справедливости динамической теории дифракции. Это значит, что области применимости теории связанных волн (ТСВ) и динамической теории дифракции (ДТД) совпадают друг с другом. Именно поэтому совпадают между собой и все результаты, полученные с помощью этих теорий.

Как видно из оценки (27'), обе теории достаточно хорошо описывают распространение света в условиях брэгговских резонансов низкого порядка, когда в соотношениях (13) $n = 1, 2, 3$, а период структуры a сравним по порядку величины с длиной волны излучения λ . При фиксированной длине волны λ увеличение периода структуры a , т.е. номера брэгговского резонанса в (13), или глубины модуляции $\Delta\epsilon/|\epsilon_0|$, параметр малости ξ в (12), или в (27'), начинает расти, и точность аналитических формул, полученных по обеим теориям (ТСВ и ДТД), падает. Физической причиной этого является возрастающая роль многоволновой и многократной дифракции. Действительно, с одной стороны, с ростом параметра ξ в (12) увеличиваются амплитуды гармоник A_m в (11) и, следовательно, увеличивается суммарный вклад в полное поле в (4) от этого волнового "фона". С другой стороны, становится существенным вклад от последовательных многократных рассеяний, т.е. вклад следующих порядков теории возмущений (см., например, [26] или [54]). Согласно формулам (11) амплитуды A_m (слагаемые с $m = \pm 1$) однократно рассеянных (дифрагированных) волн пропорциональны параметру ξ в (12). Эти однократно дифрагированные рассеянные волны могут затем дифрагировать еще раз на неоднородностях $\epsilon(z)$, давая вторичные волны, амплитуды которых будут пропорциональны ξ^2 . Вторичные волны, в свою очередь, могут порождать третичные волны с амплитудами, пропорциональными ξ^3 , и т.д. Тогда амплитуды n -раз последовательно рассеянных (дифрагированных) волн

будут пропорциональны ξ^n . Этой же величине будет пропорционален вклад первого порядка теории возмущений для n -го брэгговского резонанса: см. формулы (17), в которых для гармонической модуляции величины $\kappa_{\pm n} \sim \xi^n$. Это означает, что в условиях, близких к n -му брэгговскому резонансу (13), сравнимый вклад в суммарную амплитуду брэгговски дифрагированных волн могут дать n -кратно нерезонансно рассеянные (т.е. на неоднородностях $\epsilon(z)$ на размерах порядка длины волны) первичные дифрагированные волны, $(n-1)$ -кратно рассеянные вторичные волны, $(n-2)$ -кратно рассеянные третичные волны и т.д. и однократно рассеянные волны n -го брэгговского резонанса. Таким образом, для нахождения полной амплитуды дифрагированных волн n -го брэгговского резонанса, пропорциональной ξ^n , нужно просуммировать вклады от всех указанных выше n каналов рассеяния. Сделать это оказалось весьма непросто. Попытки построения такой многоволновой и многократной теории дифракции [21 — 23] привели к необходимости использования численных расчетов, что существенно снизило простоту и ясность трактовки результатов, характерных для приближенных аналитических формул. Ниже будет рассмотрена другая программа приближенного аналитического расчета преобразования волн вблизи n -го брэгговского резонанса, т.е. для больших периодов структуры с помощью модифицированной теории связанных волн (МТСВ), в которой осуществляется частичный учет многоволновой и многократной дифракции волн.

5. Модифицированная теория связанных волн (МТСВ). Идея модификации теории связанных волн была сформулирована в работе [30, 60] и затем была применена к расчету преобразования волн в периодически гофрированных волноводах [31, 37, 60]. Последующее сопоставление результатов расчетов по этой теории с точными численными расчетами [57, 59] показало хорошее их совпадение как вблизи брэгговских резонансов, так и вдали от них, в том числе и для слоев периодической среды с малым числом периодов и заметными глубинами модуляции. Это подтверждает тот факт, что в модифицированной теории связанных волн осуществляется, по-видимому, частичный учет многоволновой и многократной дифракции волн на периодических неоднородностях $\epsilon(z)$, особенно для высоких брэгговских резонансов.

5.1. Вывод уравнений связанных волн в модифицированной теории. Суть метода состоит в следующем. Подставим в уравнение (1) решение для $E(z)$ в виде двух встречно бегущих волн с переменными амплитудами $A^{(+)}(z)$ и $A^{(-)}(z)$ и геометрическими фазами

$$\psi(z) = k \int_0^z (\varepsilon(z'))^{1/2} dz',$$

$$E(z) = \frac{1}{(\varepsilon(z))^{1/4}} [A^{(+)}(z) \exp(i\psi(z)) + A^{(-)}(z) \exp(-i\psi(z))]. \quad (28)$$

Тогда, если амплитуды $A^{(+)}(z)$ и $A^{(-)}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dA^{(+)}(z)}{dz} = S^{(-)}(z)A^{(-)}(z), \quad (29)$$

$$\frac{dA^{(-)}(z)}{dz} = S^{(+)}(z)A^{(+)}(z),$$

где

$$S^{(\pm)}(z) = \frac{1}{4\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \exp(\pm 2i\psi(z)), \quad (30)$$

то уравнение (1) обращается в тождество (см., например, [33]). Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (29).

Для получения из точной системы (29) приближенной и более простой системы уравнений воспользуемся методом усреднения по быстрым осцилляциям [34,35]. Практически этот метод означает, что основной вклад в точные решения (29) дают медленно меняющиеся составляющие коэффициентов $S^{(\pm)}(z)$; именно они и учитываются при построении приближенного решения. В силу периодичности $\varepsilon(z)$ имеем $\psi(z+a) = \psi(z) + \psi(a)$, так как

$$\int_z^{z+a} (\varepsilon(z'))^{1/2} dz' = \int_z^a \varepsilon^{1/2} dz' + \int_a^{z+a} \varepsilon^{1/2} dz' =$$

$$= \int_0^a \varepsilon^{1/2} dz' = \psi(a),$$

ибо в силу периодичности

$$\int_a^{z+a} (\varepsilon(z'))^{1/2} dz' = \int_0^z (\varepsilon(z'))^{1/2} dz'.$$

Тогда, вводя среднее значение диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}_0^{1/2} = \psi(a)/ka$, связанное с набегом фазы $\psi(a)$ на одном периоде ОПС, получим, что величины $S^{(\pm)}(z) \exp(\mp 2ik\tilde{\varepsilon}_0^{1/2}z)$ являются периодическими функциями и их можно разложить в ряды Фурье. В результате

$$S^{(\pm)}(z) = \exp(\pm 2ik\tilde{\varepsilon}_0^{1/2}z) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \kappa_m^{(\pm)} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right), \quad (31)$$

где

$$\kappa_m^{(\pm)} = \frac{1}{a} \left\{ \int_0^a \frac{dz}{4\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\pm 2\psi(z) \mp 2k\tilde{\varepsilon}_0^{1/2}z - \frac{2\pi}{a} mz\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{j=p} \ln \frac{\varepsilon(z_j+0)}{\varepsilon(z_j-0)} \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\pm 2\psi(z_j) \mp 2k\tilde{\varepsilon}_0^{1/2}z_j - \frac{2\pi}{a} mz_j\right)\right] \}. \quad (32)$$

В формуле (32) интеграл понимается в смысле главного значения, а сумма по $j=1,2,\dots,p$ учитывает вклад в величины $\kappa_m^{(\pm)}$ скачков диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ в точках z_j разрыва этой функции, находящихся внутри периода (см. [30,57,60]). Если разрыв функции $\varepsilon(z)$ имеет место в начале и в конце периода, то естественно, что он учитывается только один раз, например, в начале периода. Величины $\varepsilon(z_j \pm 0)$ соответствуют предельным значениям диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ справа (z_j+0) и слева (z_j-0) от точки разрыва z_j .

Вблизи n -го брэгговского резонанса (13), когда мала отстройка от него, т.е. $|\delta| \ll \pi n/a$, имеем

$$k(\tilde{\varepsilon}'_0)^{1/2} = \frac{\pi}{a} n + \delta, \quad \varepsilon'_0 = \alpha(\tilde{\varepsilon}'_0)^{1/2}/k,$$

$$2k\tilde{\varepsilon}_0^{1/2} = \frac{2\pi}{a} n + i(\alpha - 2i\delta),$$

$$S^{(+)}(z) = \kappa_{-n}^{(+)} \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \kappa_m^{(+)} \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (n+m)z - (\alpha - 2i\delta)z\right], \quad (33)$$

$$S^{(-)}(z) = \kappa_n^{(-)} \exp[(\alpha - 2i\delta)z] +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \kappa_m^{(-)} \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m-n)z + (\alpha - 2i\delta)z\right],$$

где в $S^{(\pm)}(z)$ выделены медленно меняющиеся слагаемые, а в \sum_m' не учитываются слагаемые с $m = \pm n$. Тогда усреднение по быстрым осцилляциям эквивалентно пренебрежению всеми \sum_m' во вторых слагаемых для $S^{(\pm)}(z)$ в (33). В результате система (29) приобретает вид системы уравнений (22), в которой κ_n заменяется на $(-i\kappa_n^{(-)})$, κ_{-n} на $i\kappa_{-n}^{(+)}$. Ее решения строятся аналогично решению уравнений связанных волн Когельника.

5.2. Сравнение стандартной и модифицированной теорий связанных волн. Как видно из приведенного рассмотрения и сопоставления формул для $\kappa_{\pm n}$ в (16'), (21a) и (32) модифицированная теория связанных волн отличается от стандартной теории Когельника, во-первых, значением $\tilde{\varepsilon}_0 \neq \varepsilon_0$ и, во-вторых, величиной постоянных связи $\kappa_{\pm n}$. Первый фактор приводит к более точному по сравнению с теорией Когельника определению спектрального положения брэгговского резонанса. В

обычной динамической теории дифракции сдвиг брэгговского резонанса учитывается только с помощью членов второго и более высокого порядка теории возмущений [14, 21, 54]. Здесь же он получается сразу в первом приближении. Во-вторых, постоянные связи $x_m^{(\pm)}$, рассчитанные с помощью формул (32) МТСВ, описывают также многоволновую дифракцию и являются в этом смысле более точными, чем постоянные связи $x_{\pm n}$ в формулах (16) в теории Когельника. Связано это с тем, что в формулы (32) для $x_m^{(\pm)}$ периодически модулированная функция $\epsilon(z)$ входит под интегралом сложным образом так, что при разложении этих функций по малой глубине модуляции $|\Delta\epsilon/\epsilon_0|$ в постоянные связи $x_m^{(\pm)}$ будут входить все порядки разложения по этой малой величине. Это фактически и означает учет многоволновой и многократной дифракции волн на периодических неоднородностях $\epsilon(z)$.

В частности, например, при гармонической модуляции диэлектрической проницаемости с помощью формул (5') и (16') получаем следующие выражения для постоянной связи в теории Когельника (при $m \neq 0$)

$$x_m = \frac{k\epsilon_m}{2(\epsilon'_0)^{1/2}} = \frac{k\Delta\epsilon}{4(\epsilon'_0)^{1/2}} (\delta_{1,m} + \delta_{-1,m}). \quad (33')$$

где было использовано $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon \cdot \cos(2\pi z/a)$; $\delta_{\pm 1,m}$ — символы Кронекера, равные нулю при $m \neq \pm 1$, и единице — при $m = \pm 1$.

Из формулы (33') следует, что при гармонической модуляции $\epsilon(z)$ брэгговская дифракция по теории связанных волн Когельника осуществляется только в резонансы первого порядка, когда $n = 1$. Для всех резонансов более высокого порядка с $n = 2, 3, \dots$ брэгговская дифракция на гармонической модуляции $\epsilon(z)$ по теории Когельника отсутствует, ибо коэффициенты связи для них $x_{\pm n}$ обращаются в нуль. В то же время в модифицированной теории связанных волн при гармонической модуляции $\epsilon(z)$ отличны от нуля постоянные связи $x_n^{(\pm)}$ в (32) для любого порядка n брэгговской дифракции. Такой же результат следует и из точных численных расчетов (см., например, [13, 15, 18]).

Для более корректного сравнения обычной (ТСВ) и модифицированной (МТСВ) теории связанных волн обратимся к выражению (32). Из него следует, что при стремлении глубины модуляции $\Delta\epsilon$ в функции $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon \cdot f(z)$ к нулю постоянные связи в (32) автоматически переходят в постоянные связи $x_{\pm n}$ (16), появляющиеся как в теории дифракции, так и в теории связанных волн Когельника. Действительности, поскольку величина $d\epsilon(z)/dz$ в (32) про-

порциональна величине $\Delta\epsilon$, то при $\Delta\epsilon \rightarrow 0$ можно в остальных подынтегральных выражениях положить $\epsilon(z) \approx \epsilon_0$. Тогда $\psi(z) \approx \psi_0(z) = k\epsilon_0^{1/2}z \approx k\tilde{\epsilon}_0^2 z$ и

$$x_m^{(\pm)} \approx \frac{1}{4a\epsilon_0} \int_0^a dz \frac{d\epsilon(z)}{dz} \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} mz\right) \approx i \frac{\pi}{a} m \frac{\epsilon_m}{2\epsilon_0}. \quad (34)$$

При получении последнего равенства после взятия интеграла по частям были использованы: периодичность функции $\epsilon(z)$ и выражение для ϵ_m в формуле (5). Из формулы (34) с учетом условия (13) для n -го брэгговского резонанса и малости ϵ''_0 ($\epsilon''_0 \ll \epsilon'_0$ и $\epsilon_0 \approx \epsilon'_0$) получаем выражения для $x_n^{(\pm)}$, совпадающие по величине с постоянными связями $x_{\pm n}$ в теории Когельника, ибо $x_n = -ix_n^{(-)}$ и $x_{-n} = ix_{-n}^{(+)}$, а $x_{\pm n} = k\epsilon_{\pm n}/2(\epsilon'_0)^{1/2}$.

На конкретном примере малой ($\Delta\epsilon \ll \epsilon_0$) гармонической модуляции $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{a}z\right)$ проследим более детально за учетом многоволновой дифракции в модифицированной теории связанных волн. Для этого сравним более подробно выражения (32) для постоянных связей $x_n^{(\pm)}$ с аналогичными выражениями для $x_{\pm n}$ в теории Когельника (см. формулы в (21б) и в (22)). При подстановке гармонически модулированного выражения для $\epsilon(z)$ в выражение (32) будем в силу $\Delta\epsilon \ll \epsilon_0$ пренебрегать зависимостью $\epsilon(z)$ в амплитуде подынтегрального выражения, но в отличие от выражения (34) будем дополнительно учитывать вклады первого порядка по $\Delta\epsilon/\epsilon_0$ в фазу ($\psi(z) \mp k\tilde{\epsilon}_0^{1/2}z$) подынтегрального выражения. Если затем использовать интегральное представление для функции Бесселя $J_n(x)$ n -го порядка (см., например, [36]) и ее свойства, для величины $x_n^{(\pm)}$ в (32) получим следующее приближенное аналитическое выражение ($x = 2\pi z/a$)

$$x_n^{(\pm)} = -\frac{\epsilon_0^{-1}\Delta\epsilon}{4\pi a} \int_0^{2\pi} dx \sin x \cdot \exp(\pm i\Omega \sin x - inx) = (\pm 1)^{n+1} \frac{i\pi}{2a} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\partial J_n(\Omega)}{\partial \Omega}, \quad (35)$$

$$\Omega = \frac{ka\Delta\epsilon}{2\pi(\epsilon'_0)^{1/2}} = \frac{\xi}{2\pi},$$

где $\xi = 2\pi\Omega$ есть параметр в (12), являющийся малым параметром как в динамической теории дифракции, так и в теории связанных волн Когельника (см. условие (27')).

5.3. Условия применимости МТСВ и ТСВ. Выражение (35) для $x_n^{(\pm)}$ в МТСВ для сред с

малой глубиной модуляции диэлектрической проницаемости ($\Delta\epsilon \ll \epsilon_0$) можно проанализировать в двух предельных случаях: 1) при длинах волн λ , **больших** или сравнимых с периодом структуры "a", т.е. при $ka \lesssim 1$, или $\lambda \gtrsim 2\pi a$, и 2) при малых длинах волн λ и больших периодах "a", т.е. при $ka \gtrsim 1$, или $\lambda \lesssim 2\pi a$. В первом случае при $\Delta\epsilon \ll \epsilon'_0$ и $ka \lesssim 1$ оказывается малым параметр Ω в формулах (35). Тогда, используя разложение функции Бесселя $J_n(x) \approx x^n / (2^n \cdot n!)$ (см. [36]) и соотношение брэгговского резонанса (13), из формул (35) получаем

$$\begin{aligned} \kappa_n^{(\pm)} &\approx (\pm 1)^{n+1} \frac{i\pi n \Delta\epsilon \Omega^{n-1}}{2a \epsilon'_0 2^n \cdot n!} = \\ &= (\pm 1)^{n+1} \frac{ik\Delta\epsilon \Omega^{n-1}}{2(\epsilon'_0)^{1/2} 2^n \cdot n!} = \\ &= (\pm 1)^{n+1} \frac{i\xi^n}{a\pi^n \cdot 2^{2n+1} \cdot n!}. \end{aligned} \quad (35a)$$

Отсюда видно, что для первого брэгговского резонанса ($n = 1$) постоянные связи $\kappa_1^{(\pm)}$ по величине совпадают с постоянными $\kappa_{\pm 1}$ стандартной теории связанных волн Когельника (сравнить с выражением (34)). При $n > 1$ постоянные связи $\kappa_{\pm n}$ в (16') для динамической теории дифракции и для ТСВ Когельника в (21б) обращаются в нуль (см. формулы в [33]). В то же время величины $\kappa_n^{(\pm)}$ в (35a), т.е. в МТСВ, отличны от нуля при любом n и пропорциональны n -й степени малого параметра $\xi = 2\pi\Omega$. Это обстоятельство качественно уже объяснялось нами как одно из проявлений многоволновой и многократной дифракции.

Формулы (35) для модифицированной теории связанных волн допускают анализ и в противоположном предельном случае, когда период структуры a много больше длины волны и параметр Ω в (35) много больше единицы: $\Omega \gg 1$. В этом случае, используя асимптотику функций Бесселя

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(см. [36]), можно получить приближенную аналитическую оценку выражения для $\kappa_n^{(\pm)}$

$$\begin{aligned} |\kappa_n^{(\pm)}| &\leq \frac{\pi\Delta\epsilon}{2a\epsilon'_0} \left(\frac{2}{\pi|\Omega|}\right)^{1/2} = \\ &= \frac{\pi}{a} \left[\frac{1}{ka(\epsilon'_0)^{1/2} \epsilon'_0}\right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (35b)$$

Условия (21a) применимости модифицированного метода связанных волн, являющиеся следствием процедуры усреднения по быстрым осцилляциям на периоде структуры a , означают, что $|\kappa_n^{(\pm)}| \ll \pi/a$. Отсюда сразу получается оценка параметра малости в МТСВ для длин волн λ , малых по сравнению с

периодом структуры "a"

$$\xi = \frac{|\kappa_n^{(\pm)}|}{\pi/a} \approx \left[\frac{1}{ka(\epsilon'_0)^{1/2} \epsilon'_0}\right]^{1/2} \ll 1. \quad (36)$$

Эта оценка указывает на применимость (32) модифицированной теории связанных волн в коротковолновой области, когда $ka \gg 1$. Последнее утверждение, проиллюстрированное нами на примере гармонической модуляции $\epsilon(z)$, справедливо и в случае произвольной плавной модуляции. Действительно, для одномерных структур с большими периодами ($a \gg \lambda$), или ($ka \gg 1$), на каждом периоде структуры может укладываться большое число длин волн λ . Тогда, если изменение $\epsilon(z)$ на периоде структуры a равно $\Delta\epsilon$, то на малой длине волны λ изменение диэлектрической проницаемости в λ/a раз меньше, т.е. равно $\Delta\epsilon \cdot \lambda/a$. Именно эта величина является малым параметром (см. (36)) для приближенных решений (28) геометрооптического вида. Поэтому, чем выше номер $n \approx a/\lambda$ брэгговского резонанса, тем лучше выполняется условие (36) и тем ближе приближенные геометрооптические решения к истинным.

Таким образом, видно, что модифицированная теория связанных волн (МТСВ) обладает более широкой областью применимости, чем обычная теория связанных волн Когельника (ТСВ), и включает в себя последнюю как частный случай.

Из других преимуществ МТСВ отметим также удобство ее использования для слоистых периодических сред со ступенчатым законом изменения $\epsilon(z)$. В этом случае, как показано в работе [30], непосредственное решение системы связанных уравнений (22) при $\kappa_{\pm n} = \pm i\kappa_{\pm n}^{(\mp)}$ и $\kappa_{\pm n}^{(\mp)}$, имеющими вид (32), приводит к известным точным выражениям для коэффициентов отражения от ряда известных одномерных периодических структур [17]. Так, для двухслойной периодической структуры, когда $\epsilon(z)$ имеет постоянное значение ϵ_b на части периода длиной b , и $\epsilon(z)$ равно ϵ_d на другой части периода длиной $d = a - b$, формулы (32) дают (поскольку $d\epsilon/dz = 0$ в пределах каждого слоя, то вклад в $\kappa_{\pm n}^{(\mp)}$ только от точек разрыва функции $\epsilon(z)$)

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm n}^{(\mp)} &= \mp \frac{i}{2} \ln \frac{\epsilon_d}{\epsilon_b} \sin \varphi_n \cdot \exp(\mp i\varphi_n), \\ \varphi_n &= \frac{b}{a} \left[\pi n - kd \left(\epsilon_d^{1/2} - \epsilon_b^{1/2} \right) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

где нужно одновременно использовать либо верхние, либо нижние знаки. В такой среде отличие ϵ_0 от $\tilde{\epsilon}_0$, приводящее к сдвигу центра брэгговского резонанса (13), пропорционально $(\Delta\epsilon)^2$:

$$\epsilon_0 - \tilde{\epsilon}_0 = bd(\Delta\epsilon)^2 / [a^2(\epsilon_b^{1/2} + \epsilon_d^{1/2})^2],$$

где $\Delta\epsilon = \epsilon_d - \epsilon_b$, а постоянные связи отличны от нуля

для всех номеров n брэгговских резонансов. В случае равных оптических толщин ($k\epsilon_b^{1/2} = k\epsilon_d^{1/2}$) и точного брэгговского резонанса ($k\epsilon_0^{1/2} = \pi n/a, \delta = 0$) имеем: $k\epsilon_b^{1/2} = k\epsilon_d^{1/2} = \pi n/2$ и $\varphi_n = \pi n/2$. Тогда для нечетных брэгговских резонансов ($n = 2p - 1, p = 1, 2, \dots$) все $\kappa_{\pm n}^{(\mp)}$ одинаковы и равны $\ln(\epsilon_b/\epsilon_d)$, а постоянные связи для четных брэгговских резонансов ($n = 2p, p = 1, 2, \dots$) обращаются в нуль. В результате коэффициенты отражения r_B^L по амплитуде от слоя такой структуры толщиной $L = Ma$ ($M = 1, 2, \dots$) (см. рис. 1), рассчитанные по данной теории МТСВ [30], совпадают с точными формулами Берна—Вольфа [17]

$$r_B^L = \left[1 - \frac{\epsilon_2^{1/2}}{\epsilon_1^{1/2}} \left(\frac{\epsilon_b}{\epsilon_d} \right)^M \right] \left[1 + \frac{\epsilon_2^{1/2}}{\epsilon_1^{1/2}} \left(\frac{\epsilon_b}{\epsilon_d} \right)^M \right]^{-1}$$

при $n = 2p - 1,$ (38)

$$r_B^L = \frac{\epsilon_1^{1/2} - \epsilon_2^{1/2}}{\epsilon_1^{1/2} + \epsilon_2^{1/2}} \text{ при } n = 2p, p = 1, 2, \dots$$

Первое выражение для r_B^L соответствует отражению волн от системы четвертьволновых слоев с равными оптическими толщинами, а второе — от системы полуволновых слоев. В последнее не входят ни толщина структуры $L = Ma$, ни свойства периодических слоев. Связано это с тем, что помещение между ограничивающими однородными средами с ϵ_1 и ϵ_2 любого числа полуволн слоев не меняет коэффициента отражения структуры (см. [17, 53] или [61]). Для других слоистых систем приближенные аналитические формулы МТСВ позволяют достаточно просто проводить численные расчеты (см. [57, 59]).

Для более наглядного сравнения различных методов на рис. 5 в переменных $y = k_0 a / \pi = ka(\epsilon_0')^{1/2} / \pi$ и $x = \Delta\epsilon / \epsilon_0'$ обозначены области применимости теории связанных волн (ТСВ) Когельника (или динамическая теория дифракции) и модифицированной теории связанных волн (МТСВ). При определении границ этих областей мы, следуя примеру С.М. Рыгова [37], заменяли сильные неравенства типа $\kappa \ll a^{-1}$ более слабым: $\kappa \leq 0,25a^{-1}$, а номер n брэгговского резонанса выразили через $k_0 a$ с помощью условия (13) (см., например, неравенство (12)). В области 1, находящейся на рис. 5 между полуосьми координат x, y и пунктирной гиперболой, применима динамическая теория дифракции и ТСВ Когельника, описываемые неравенством (27'). В области 2, расположенной между пунктирной гиперболой и штрихпунктирной прямой, на которой $k_0 a \approx \Delta\epsilon / \epsilon_0'$, выполняется неравенство (36) для МТСВ. В то же время модифицированная теория связанных волн (МТСВ) справедлива и в области 7, где выполняется неравенство (27'). Иными словами, МТСВ обладает более широкой областью применимости в областях 1 и 2 на

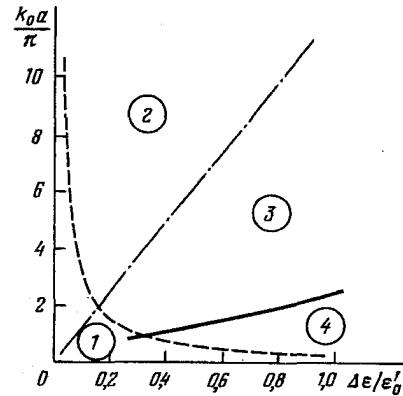


Рис. 5. Области применимости различных приближенных методов расчета дифракционных свойств периодических сред в переменных $x = \Delta\epsilon / \epsilon_0'$ и $y = k_0 a / \pi, k_0 = k(\epsilon_0')^{1/2}, k = \omega / c$: область 1 между полуосьми x, y и пунктирной гиперболой — динамическая теория дифракции (ДТД), ТСВ и МТСВ (согласно оценке $\xi \ll 1$), область 2 между пунктирной гиперболой и штрихпунктирной прямой — МТСВ, область 3 между штрихпунктирной прямой и сплошной кривой — МТСВ для гармонической модуляции, область 4 между сплошной кривой и пунктирной гиперболой — требует численных расчетов

рис. 5, чем теория Когельника, и включает в себя последнюю как частный случай. На рис. 5 указана также область 3, расположенная между штрихпунктирной прямой $k_0 a \approx \Delta\epsilon / \epsilon_0'$ и сплошной кривой. В этой области выполняется условие $|\kappa_{\pm n}^{(\mp)}| \leq 0,25a^{-1}$ справедливости МТСВ для гармонической модуляции $\epsilon(z)$, если численно рассчитать выражения для постоянной связи в (35). В области 4 нельзя использовать ни один из рассмотренных выше приближенных методов. Здесь необходимо применение численных методов анализа таких, например, как рассмотренный ранее метод Флоке—Блоха, связанный с численным решением системы (6) [14], или метод погружения [38], сводящий задачу к численному интегрированию нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

Таким образом, можно сказать, что рассмотренная в данном параграфе модифицированная теория связанных волн (МТСВ) справедлива в широком диапазоне параметров за исключением малой области 4 на рис. 5, т.е. при выполнении не очень резких неравенств в условиях (27') и (36).

Полученные в МТСВ формулы позволяют рассчитывать коэффициенты отражения и прохождения волн для периодических сред с любым сложным законом изменения на периоде структуры вещественной $\epsilon'(z)$ и мнимой $\epsilon''(z)$ частей диэлектрической проницаемости $\epsilon(z) = \epsilon'(z) + i\epsilon''(z)$. В частности в работе [56] получено аналитическое выражение для коэффициентов отражения и пропускания волн для

среды с периодически меняющимися ступенчатым образом показателем преломления и коэффициентом поглощения. Последнее сосредоточено главным образом вблизи начала и конца периода, а на остальной части периода поглощения равно нулю. В [56] показано, что при глубине модуляции показателя преломления, меньшей глубины модуляции поглощения, имеет место одномерный аналог эффекта Бормана (см. [11]): волна проходит через поглощающую среду на расстояния, заметно большие, чем через среду с эквивалентным средним по периоду поглощением ибо в этом случае максимум поглощения приходится на минимум амплитуды суммарного поля. В противоположном случае, когда глубина модуляции показателя преломления больше глубины модуляции поглощения, затухание поля в среде обусловлено в основном брэгговским отражением. В промежуточных случаях существенны оба эффекта.

6. Отражение света от слоя с периодическим изменением диэлектрической проницаемости. Вернемся вновь к расчету коэффициента отражения света от слоя (см. рис. 1) одномерной периодической среды с учетом возможных скачков диэлектрической проницаемости на его границах раздела: $\varepsilon(0) \neq \varepsilon_1$ и $\varepsilon(L) \neq \varepsilon_2$. Для этого найденные внутри слоя приближенные решения вида (28) с $A^{(\pm)}(z)$, приведенные в <23>, нужно "сшить" на границах раздела $z = 0$ и $z = L$ с решениями вне слоя. Тогда вместо соотношений (24) соответственно получим (см. приложение III)

$$\begin{aligned} A^{(+)}(0) + r_1 A^{(-)}(0) &= (1 + r_1) A_0 (\varepsilon(0))^{1/4}, \\ A^{(-)}(L) &= r_2 A^{(+)}(L) \exp(2i\varphi(L)), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\psi(L) = k \int_0^L (\varepsilon(z))^{1/2} dz,$$

а r_1 и r_2 — френелевские коэффициенты отражения света на границах слоя

$$r_1 = \frac{\varepsilon_1^{1/2} - (\varepsilon(0))^{1/2}}{\varepsilon_1^{1/2} + (\varepsilon(0))^{1/2}}, \quad r_2 = \frac{(\varepsilon(L))^{1/2} - \varepsilon_2^{1/2}}{(\varepsilon(L))^{1/2} + \varepsilon_2^{1/2}} \quad (40)$$

(в теории Когельника $\varepsilon(0) = \varepsilon(L) = \varepsilon_0$ и $\psi(L) = k\varepsilon_0^{1/2}L$).

Подставляя решения (23) для $A^{(\pm)}(z)$ во второе условие (39), вместо (25) получим следующее соотношение между постоянными C_1 и C_2

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= -\frac{\varkappa_n}{\varkappa_{-n}} r_B^\infty \exp(-2\gamma L) \times \\ &\times \frac{r_B^\infty - r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}{1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa_{-n}} r_B^\infty r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}, \end{aligned} \quad (41)$$

где с учетом малости потерь ($\varepsilon''_0 \ll \varepsilon'_0$) и условия резонанса ($k(\varepsilon'_0)^{1/2} = (\pi n/a) + \delta$)

$$\varphi_n(L) = \psi(L) - i\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right)L = \frac{\pi}{a}nL + \int_0^L \varkappa_p(z) dz,$$

$\varkappa_p(z) = k\varepsilon_p(z)/2(\varepsilon'_0)^{1/2}$ и $\varepsilon_p(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon_0$. При $r_2 = 0$, т.е. при согласованном при $z \geq L$ слое, соотношение (41) переходит в (25).

Коэффициент отражения от всей структуры r_Σ^L с помощью условия непрерывности полей в ее начале, при $z = 0$, можно выразить через амплитуды прямой, $A^{(+)}(0)$, и обратной, $A^{(-)}(0)$, волн внутри слоя (см. приложение III)

$$\begin{aligned} r_\Sigma^L &= \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_1 + \tilde{r}}{1 + r_1 \tilde{r}}, \\ \tilde{r} &= \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)} = \frac{r_B^\infty + (\varkappa_{-n}/\varkappa_n) (1/r_B^\infty) C_2/C_1}{1 + (C_2/C_1)}, \end{aligned} \quad (42)$$

где были использованы решения (23), справедливые в условиях, близких к брэгговскому резонансу. Постоянные связи $\varkappa_{\pm n}$ в теории Когельника связаны с $\varkappa_{\pm n}^{(\mp)}$ в МТСВ (см. формулы (32)) соотношениями: $\varkappa_n = -i\varkappa_n^{(-)}$ и $\varkappa_{-n} = i\varkappa_{-n}^{(+)}$ так, что $\varkappa_n/\varkappa_{-n} = -\varkappa_n^{(-)}/\varkappa_{-n}^{(+)}$ и $\varkappa_n \varkappa_{-n} = \varkappa_n^{(-)} \varkappa_{-n}^{(+)}$. Поскольку отношение C_2/C_1 имеет вид (41), то коэффициент отражения \tilde{r} от всей периодической структуры с учетом второй ее границы при $z = L$ принимает окончательный вид (см. приложение III)

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \left\{ r_B^{(L)} + \frac{\exp(-2\gamma L) + (\varkappa_n^{(-)}/\varkappa_{-n}^{(+)}) (r_B^\infty)^2}{1 + (\varkappa_n^{(-)}/\varkappa_{-n}^{(+)}) (r_B^\infty)^2 \exp(-2\gamma L)} \times \right. \\ &\times r_2 \exp(2i\varphi_n(L)) \left. \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\varkappa_n^{(-)}}{\varkappa_{-n}^{(+)}} r_B^L r_2 \exp(2i\varphi_n(L)) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} r_B^{(L)} &= \frac{r_B^\infty [1 - \exp(-2\gamma L)]}{1 + (\varkappa_n^{(-)}/\varkappa_{-n}^{(+)}) (r_B^\infty)^2 \exp(-2\gamma L)}, \\ r_B^\infty &= \frac{-\varkappa_{-n}^{(+)}}{\gamma + (\alpha/2) - i\delta}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\gamma = \left[\varkappa_n^{(-)} \varkappa_{-n}^{(+)} + \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\varphi_n(L) = \frac{\pi n}{a} L + \int_0^L \varkappa_p(z) dz.$$

Из полученных формул видно, что формирование обратно бегущей волны происходит как за счет рассеяния света на сосредоточенных границах ОПС (при $z = 0$ и $z = L$), так и за счет распределенного отражения в самой периодической среде, причем эффект имеет интерференционный характер. Это приводит к весьма сложной спектральной зависимости модуля и фазы коэффициента отражения r_Σ^L в (42). Рассмотрим простейший случай полубесконечной

периодической структуры [39, 40]. Для нее $\alpha L \gg 1$ и $\exp(-2\gamma' L) \rightarrow 0$, где $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ и $\gamma' > 0$. В этом случае из формул (44) и (43) следует, что $r_B^L \rightarrow r_B^\infty$, а $\tilde{r} \rightarrow r_B^\infty$. В результате коэффициент отражения r_Σ^L в (42) принимает существенно более простой вид

$$r_\Sigma^\infty = \frac{r_1 + r_B^\infty}{1 + r_1 r_B^\infty}, \quad (45)$$

описывающий последовательное отражение от передней грани полубесконечной среды и от самой периодической структуры.

На рис. 6 представлены типичные спектральные зависимости энергетического коэффициента отражения $R_\Sigma = |r_\Sigma^\infty|^2$ при различных значениях коэффициента поглощения α и начальной фазы модуляции диэлектрической проницаемости в ОПС $\varphi = \arg(\tilde{\epsilon}_{-n}^{(+)})$. Как видно, зависимость $R_\Sigma(\delta)$ характеризуется резко асимметричной формой. Причину этого легко понять, обратившись к спектральной за-

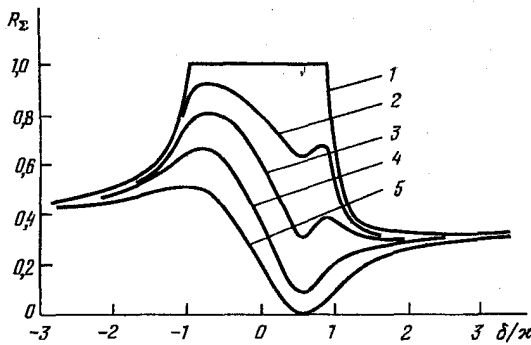


Рис. 6. Спектральные зависимости энергетического коэффициента отражения $R_\Sigma(\delta/\omega)$ от несогласованной ($r_1 = 0,6$ и $\varphi = \pi/3$) полубесконечной периодической среды при различных уровнях поглощения: 1 - $\alpha/\omega = 0$, 2 - $\alpha/\omega = 0,1$, 3 - $\alpha/\omega = 0,25$, 4 - $\alpha/\omega = 0,5$, 5 - $\alpha/\omega = 1,0$

висимости фазы коэффициента брэгговского отражения r_B^∞ (см. рис. 3). Как видно из этого рисунка, $\arg r_B^\infty$ при переходе с длинноволнового ($\delta/\omega \leq -1$) на коротковолновый ($\delta/\omega \geq +1$) край полосы брэгговского отражения изменяется на π , то есть знак r_B^∞ меняется на противоположный. Это означает, что амплитуда волны, отраженной периодической структурой, будет либо складываться, либо вычитаться из амплитуды волны, рассеянной непосредственно на границе ОПС. Такая интерференция может привести к существенному уменьшению r_Σ^∞ по сравнению с r_1 и r_B^∞ вплоть до того, что величина r_Σ^∞ обратится в нуль. Еще более сильное влияние границы ОПС оказывают на спектральную зависимость фазы коэффициента отражения $\chi = \arg r_\Sigma^\infty$ [41]. Это проявляется, в частности, в чрезвычайно высокой чувствительности фазы χ к изменению параметров ОПС — коэффициента поглощения α и начальной

фазы модуляции φ . Так, например, незначительное изменение величины α/ω в ряде случаев приводит к качественному изменению характера зависимости $\chi(\delta)$ в то время, как величина $R_\Sigma(\delta)$ изменяется слабо (рис. 7). Кроме того, поскольку фаза коэффициента r_B^∞ брэгговского отражения от полубесконечной структуры меняется на π при прохождении частотной полосы брэгговского резонанса (см. рис. 3), а фаза коэффициента r_1 френелевского отражения в (40) при $\epsilon(0) > \epsilon_1$ равна π , то при прохождении брэгговского резонанса для коэффициента r_Σ^∞ в (45) из-за интерференции фаз величин r_B^∞ и r_1 суммарная фаза коэффициента r_Σ^∞ может изменяться в диапазоне от 0 до 2π , что и видно на рис. 7.

Таким образом, границы конечного слоя одномерно периодической среды могут существенно изменить спектральную зависимость коэффициента брэгговского отражения по сравнению с согласованной периодической структурой конечной толщины

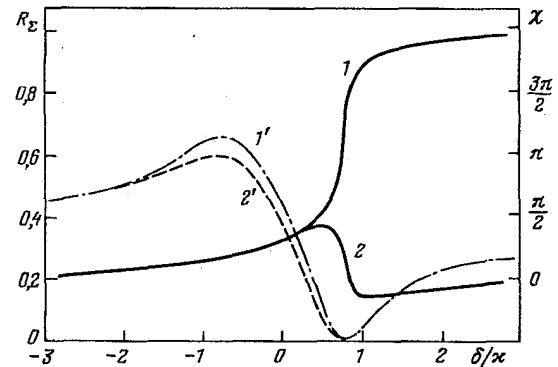


Рис. 7. Спектральные зависимости энергетического коэффициента отражения $R_\Sigma(\delta/\omega) = |r_\Sigma(\delta/\omega)|^2$ и фазы $\chi(\delta/\omega)$ коэффициента r_Σ для несогласованной ($r_1 = 0,6$ и $\varphi = \pi/4$) полубесконечной периодической среды при различных потерях в ней. Кривые 1' и 2' для $R_\Sigma(\delta/\omega)$ при $\alpha/\omega = 0,7$ и $0,9$ соответственно, 1 и 2 для $\chi(\delta/\omega)$ при тех же уровнях потерь $\alpha/\omega = 0,7$ и $0,9$

(см. раздел 4.2). Как следует из работ [39—41] эффекты границы раздела могут наблюдаться уже при сравнительно малых величинах, $|r_1|^2 \geq 0,05$, френелевского отражения от границы.

Результаты расчета коэффициента отражения по формулам модифицированной теории связанных волн (МТСВ) были сравнены в работах [57, 59] с результатами прямого численного решения на ЭВМ соответствующих дифференциальных уравнений для слоистых периодических сред и сред с гармонической модуляцией показателя преломления. Путем сравнения этих результатов установлено хорошее (в пределах глубины модуляции) совпадение между собой кривых зависимости коэффициента отражения от частоты и числа периодов в структуре при различных глубинах модуляции (вплоть до 50 %-ной глу-

бины модуляции) и различных номерах брэгговского резонанса. Это удовлетворительное совпадение имело место для частот внутри и вне брэгговского отражения так, что кривые спектральной зависимости коэффициента отражения для обоих методов счета (точного и приближенного (МТСВ)) хорошо совпадали друг с другом при непрерывном изменении частоты от первого до третьего резонанса, т.е. при непрерывном переходе от зоны брэгговского отражения к зонам прозрачности и обратно. При этом, чем выше был номер брэгговского резонанса, тем лучше было совпадение. Оно имело место не только по величине коэффициента отражения, но и по частотным положениям его максимумов и минимумов. Кроме того, совпадение оказалось удовлетворительным даже для сред, состоящих всего лишь из одного, двух и более периодов.

В качестве примеров эффективного использования МТСВ рассмотрим ниже распространение волн в почти периодических и в нелинейно периодических средах.

7. Применение модифицированной теории связанных волн в почти-периодических и нелинейных периодических средах. Приближенная модифицированная теория связанных волн получается из точной системы уравнений (29) для амплитуд встречно бегущих волн. Эта система внешне похожа на стандартные уравнения связанных волн, только ее коэффициенты $S^{(\pm)}(z)$ зависят от координаты z . Как видно из формул (30) в эти коэффициенты в явном аналитическом виде входит диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon(z)$ с произвольной (не только периодической) зависимостью от координаты z . В связи с этим в общих формулах (30) для $S^{(\pm)}(z)$ можно учесть в функции $\epsilon(z)$ любые малые отклонения от периодичности. В данном параграфе в качестве характерных примеров таких расчетов рассматриваются приближенные аналитические решения системы уравнений (29) для почти периодических и нелинейных периодических сред. Ранее задачи подобного рода были решены в работах [43—45] (см. также [48]). Однако в этих работах каждая из задач решалась своим способом, характерным для данного типа отклонения от периодичности. Как мы увидим ниже метод МТСВ позволяет решать разные задачи с помощью единого подхода.

7.1. Почти-периодические среды. В ряде случаев в периодической среде присутствуют оптические неоднородности, дающие дополнительное регулярное изменение фазы распространяющихся в ней волн, т.е. имеющие дополнительное регулярное изменение в диэлектрической проницаемости

$\epsilon(z)$. Оказывается, что в этом случае брэгговский резонанс реализуется не на всей длине одномерно периодической среды, а только на отдельных ее участках. Основной задачей приводимого ниже расчета является вычисление коэффициента отражения от такой структуры и количественная оценка расстояния, на котором происходит указанный выше сбой фазы.

Для простоты рассмотрим этот вопрос на примере среды, диэлектрическая проницаемость которой кроме периодической модуляции имеет малую линейную составляющую

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \epsilon_m \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right) + \xi z, \quad (46)$$

$$\xi L \ll \epsilon_0,$$

где L — толщина слоя с периодическим изменением диэлектрической проницаемости. Воспользуемся теперь модифицированным методом связанных волн, рассмотренным в п. 6. Для этого подставим выражение (46) для $\epsilon(z)$ в формулу (30) для коэффициентов $S^{(\pm)}(z)$, а затем подставим полученные коэффициенты $S^{(\pm)}(z)$ в систему уравнений (29) и проведем в ней усреднение по быстрым осцилляциям точно так же, как это сделано в приложении II. В результате вместо системы уравнений связанных волн вида (22) получим более сложную систему уравнений, связывающую амплитуду прямой, $A^{(+)}(z)$, и обратной, $A^{(-)}(z)$, волны

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} &= \\ &= i\alpha_n A^{(-)}(z) \exp\left[(\alpha - 2i\delta)z\right] \exp\left(-i\frac{\sigma}{2}z^2\right), \quad (47) \\ \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} &= \\ &= -i\alpha_{-n} A^{(+)}(z) \exp\left[-(\alpha - 2i\delta)z\right] \exp\left(i\frac{\sigma}{2}z^2\right), \end{aligned}$$

где, например, $\sigma = k\xi/\epsilon_0^{1/2}$ имеет размерность обратного квадрата длины. Уравнения (47) записаны в предположении малости глубины модуляции диэлектрической проницаемости: $\Delta\epsilon \ll \epsilon_0$ при $\Delta\epsilon = |\epsilon_m|_{\max}$ и при $\xi L \ll \epsilon_0$. В этом случае в них вместо коэффициентов связи $\alpha_n^{(\pm)}$ по формуле (32) в МТСВ будут входить коэффициенты связи $\alpha_{\pm n}$ в формулах (21б) теории Когельника (см. раздел 5.2).

Систему уравнений (47) нетрудно привести к независимым уравнениям второго порядка для функций $A^{(\pm)}(z)$, решения которых связаны (при $\alpha = 0$ и $\delta = 0$) с функциями параболического цилиндра [42] вида

$$V\left(\pm i\rho \pm \frac{1}{2}, z\sigma^{1/2} \exp\left(\pm i\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

где $\rho = |\kappa_n|^2/\sigma = \kappa^2/\sigma$ (см. приложение IV). Тогда общие решения системы (47) представляются в виде суперпозиции соответствующих функций параболического цилиндра

$$\begin{aligned} A^{(+)}(z) &= \left[C_1 V\left(i\rho - \frac{1}{2}, z\sigma^{1/2} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right) + \right. \\ &+ \left. C_2 V\left(-i\rho + \frac{1}{2}, z\sigma^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\right) \right] \exp\left(-\frac{i\sigma}{4} z^2\right), \\ A^{(-)}(z) &= \frac{\kappa_{-n}}{\sigma^{1/2}} \left[C_1 V\left(i\rho + \frac{1}{2}, \right. \right. \\ &z\sigma^{1/2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left. \right) + C_2 \frac{1}{2\rho} V\left(-i\rho - \frac{1}{2}, \right. \\ &\left. z\sigma^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \right] \exp\left(i\frac{\sigma}{4} z^2 + i\frac{3\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (48)$$

где безразмерный параметр $\rho = |\kappa_n|^2/\sigma = \kappa^2/\sigma$, а постоянные $C_{1,2}$ определяются из граничных условий. При $\sigma \rightarrow 0$ система (48) переходит в систему (23) с точностью до переопределения постоянных $C_{1,2}$. Рассчитаем коэффициент отражения R_∞ по мощности от согласованной полубесконечной среды с $\varepsilon(z)$ вида (46) в случае, когда точный брэгговский резонанс, т.е. $\delta = 0$, реализуется на границе раздела при $z=0$. Для полубесконечной среды нужно в формулах (48) положить $C_2 = 0$ и тогда получим (см. приложение IV)

$$\begin{aligned} R_\infty &= \left| \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)} \right|^2 = \text{th} \left(\frac{\pi \kappa^2}{2 \sigma} \right) = \text{th} \left(\frac{L_c}{L_B} \right)^2, \\ L_B &= \frac{1}{\kappa}, \quad L_c = \left(\frac{\pi}{2\sigma} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Аналогичный результат другим способом был получен в работе [43]. Величины L_B и L_c в (49), имеющие размерность длины, означают следующее. Длина $L_B = 1/\kappa$ определяет расстояние, на котором формируется брэгговское отражение от чисто периодической среды. Действительно, как видно из формулы (26) для r_B^L в чисто периодической среде при $\alpha = 0$ и $\delta = 0$, когда $\gamma = \kappa$, коэффициент брэгговского отражения $|r_B^L|$ становится близким к единице, при $L \geq L_B = 1/\kappa$. В то же время длина $L_c = (\pi/2\sigma)^{1/2}$ определяет расстояние, на котором набег фазы в решениях (48) за счет линейного роста диэлектрической проницаемости в (46) сравнивается с фазой брэгговского отражения. Это осуществляется при $L_c \approx L_B$, или при $\kappa^2 \approx 2 \sigma/\pi$. Действительно, как видно из исходной системы уравнений (47), наличие в (46) линейно растущей с расстоянием z добавки означает появление в уравнениях (47) дополнительной отстройки от брэгговского резонанса, линейно растущей с расстоянием z так, что полная отстройка $\delta(z) = \delta + (1/4)\sigma z$. При $\delta = 0$, что рассматривается в нашем примере, $\delta(z) = \sigma z/4$. Эта отстройка будет входить в эффективную постоянную $\gamma(z)$ вида (16):

$\gamma(z) = (\kappa^2 - \delta^2(z))^{1/2}$, которая будет определять эффективный коэффициент брэгговского отражения типа (26). Нетрудно видеть, что с ростом z величина $\gamma(z)$ уменьшается и соответственно падает эффективный коэффициент отражения типа (26). При $\kappa \approx \sigma z/4$, т.е. при $z \approx 4\kappa/\sigma \approx L_c \approx L_B$ $\gamma(L_c)$ и, следовательно, коэффициент отражения r_B^L обращается в нуль, т.е. исчезает брэгговское отражение. Это значит, что та часть периодической среды, которая расположена на расстоянии z от границы раздела, больших L_c , уже не участвует в брэгговском отражении. Формально это следует из выражений (49) для R_∞ . Так, если $\sigma \rightarrow 0$, т.е. $L_c \gg L_B$, то $R_\infty \approx 1$, и в полубесконечной среде осуществляется брэгговское отражение. В обратном случае, когда $L_c \ll L_B$, или $\sigma \gg (\pi/2)\kappa^2$, $R_\infty \approx (L_c/L_B)^2 \ll 1$ и брэгговское отражение почти полностью исчезает. При $L_c \approx L_B$ $R_\infty \approx \text{th} 1 \approx 0,76$ и линейная неоднородность еще не сказывается на брэгговском отражении. Именно из таких условий и следует оценивать отражательные характеристики реальных периодических структур.

7.2. Нелинейные периодические структуры. Ряд интересных эффектов наблюдается также в периодических средах с нелинейной диэлектрической проницаемостью (см., например, [48]). Под действием интенсивного светового поля в таких структурах образуется наведенная дифракционная решетка, которая, как и стационарная периодическая неоднородность, дает дополнительный вклад в брэгговское отражение света. Очевидно, что суммарное отражение существенно зависит от сдвига фаз между стационарной и наведенной решетками. В некоторых случаях такая зависимость приводит в окрестности полосы брэгговского отражения к нелинейному "просветлению" одномерной периодической среды (ОПС). Тем самым отражение и пропускание света в ОПС на брэгговской частоте приобретает бистабильный характер, зависящий от интенсивности светового поля.

Для определенности рассмотрим распространение света в периодической среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \sum_{\substack{m=-\infty, \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \varepsilon_m \exp\left(\frac{2\pi i}{a} m z\right) 4\pi\chi |E(z)|^2, \quad (50)$$

содержащей нелинейную добавку кубического типа, где χ — кубическая нелинейная восприимчивость. Для получения уравнений, описывающих преобразование света в нелинейной и периодической средах, как и в предыдущем разделе, подставим выражение (50) в коэффициенты $S^{(\pm)}(z)$ в (30), которые затем подставим в систему уравнений (29). Упростим далее

эти уравнения в случае малой глубины периодической модуляции ($\Delta\epsilon \ll \epsilon_0$) и малого изменения $\epsilon(z)$ в (50) за счет нелинейной добавки, т.е. при $4\pi\chi|E(z)|^2 \ll \epsilon_0$. После этого проведем в полученных уравнениях для $A^{(\pm)}(z)$ усреднение по быстрым осцилляциям, как это сделано, например, в приложении П. Если при этом выделить в фазе $\psi(z)$ в (28) слагаемое, зависящее от интенсивности светового поля, то получим следующую систему связанных уравнений для медленно меняющихся амплитуд $A^{(\pm)}(z)$

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} &= i\kappa_n A^{(-)}(z) \exp(-2i\delta z) + \\ &+ i\xi (|A^{(+)}(z)|^2 + |A^{(-)}(z)|^2) A^{(+)}(z), \\ \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} &= -i\kappa_{-n} A^{(+)}(z) \exp(2i\delta z) - \\ &- i\xi (|A^{(+)}(z)|^2 + |A^{(-)}(z)|^2) A^{(-)}(z), \end{aligned} \quad (51)$$

где $\xi = 2\pi\chi\chi/\epsilon_0^{1/2}$. При $\xi = 0$, т.е. в отсутствие нелинейности ($\chi = 0$), система (51) переходит в стандартную систему (22) уравнений связанных волн.

Система нелинейных уравнений (51) для комплексных амплитуд прямой, $A^{(+)}(z)$, и обратной, $A^{(-)}(z)$, волн решается путем перехода к вещественным амплитудам и фазам этих волн:

$$\begin{aligned} A^{(+)}(z) &= a_F(z) \exp(i\varphi_F(z)), \\ A^{(-)}(z) &= a_B(z) \exp(i\varphi_B(z)). \end{aligned} \quad (52)$$

Подставляя эти выражения в систему (51) и разделяя вещественные и мнимые части этих равенств, получим нелинейную систему связанных уравнений для вещественных функций $a_F(z)$, $a_B(z)$ и $\varphi(z)$

$$\begin{aligned} \frac{da_F(z)}{dz} &= \kappa a_B(z) \sin \varphi(z), \quad \frac{da_B(z)}{dz} = \kappa a_F(z) \sin \varphi(z), \\ \frac{d\varphi(z)}{dz} &= 2\delta + 3\xi(a_F^2(z) + a_B^2(z)) + \\ &+ \kappa \left(\frac{a_F(z)}{a_B(z)} + \frac{a_B(z)}{a_F(z)} \right) \cos \varphi(z), \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\kappa = |\kappa_n| = |\kappa_{-n}|,$$

$$\varphi(z) = \varphi_F(z) - \varphi_B(z) + 2\delta z - \text{arctg} \kappa_n.$$

Эта система уравнений имеет два интеграла $\Gamma_{1,2}$ вида

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (a_F^2(z) - a_B^2(z)), \\ \Gamma_2 &= a_F(z) a_B(z) \cos \varphi(z) + \\ &+ \frac{\delta}{\kappa} a_F^2(z) + \frac{3\xi}{2\kappa} a_F^2(z) a_B^2(z). \end{aligned} \quad (54)$$

Для согласованного слоя, когда выполняются условия (24) и $a_B^2(L) = 0$ интеграл $\Gamma_1 = a_F^2(L)$ пропорционален интенсивности света на выходе структуры при $z = L$, а второй интеграл равен $\Gamma_2 = \delta\Gamma_1/\kappa$, т.е. пропорционален первому. Решение системы уравнений

(53) с учетом интегралов $\Gamma_{1,2}$ в точном брэгговском резонансе, когда $\delta = 0$, приводит к следующему выражению для коэффициента брэгговского отражения (см. приложение IV)

$$\begin{aligned} R_L &= \frac{a_B^2(0)}{a_F^2(0)} = \left(1 - \frac{\Gamma_1}{a_F^2(0)} \right) = \\ &= \frac{\text{nd}(2\kappa\xi L/a^{-2}) - 1}{\text{nd}(2\kappa\xi L/a^{-2}) + 1}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $\text{nd}(x/q)$ — одно из функций Якоби [42], для которой $0 \leq q \leq 1$. Параметр

$$a = \left(1 + \frac{1}{4} J_L \right)^{1/2}$$

связан с безразмерной интенсивностью света на выходе $J_L = a_F^2(L)/E_c^2$. Из решения системы (53) следует, что величина J_L связана с безразмерной интенсивностью на входе $J_0 = a_F^2(0)/E_c^2$ неявным соотношением (см. приложение IV)

$$I \equiv J_0 = \frac{1}{2} [1 + \text{nd}(2\kappa\xi L/a^{-2})] J_L, \quad (56)$$

где

$$J_0 \equiv I = a_F^2(0)/E_c^2, \quad J_L = a_F^2(L)/E_c^2,$$

$$a = \left(1 + \frac{1}{4} J_L \right)^{1/2}, \quad E_c = (2\kappa/3\xi)^{1/2}.$$

Критическая напряженность поля E_c соответствует той напряженности, при которой наведенная за счет нелинейности дифракционная решетка сравнивается по амплитуде со стационарной модуляцией диэлектрической проницаемости. Определяя из неявного соотношения (56) зависимости J_L от $J_0 \equiv I$ при конкретных значениях параметра κL и подставляя эти выражения в формулу (55), можно вычислить зависимость коэффициента брэгговского отражения в (55) от интенсивности света J_0 на входе структуры. Результаты таких расчетов при $\kappa L = 2$ и 4 представлены на рис. 8. Из кривых на этом рисунке

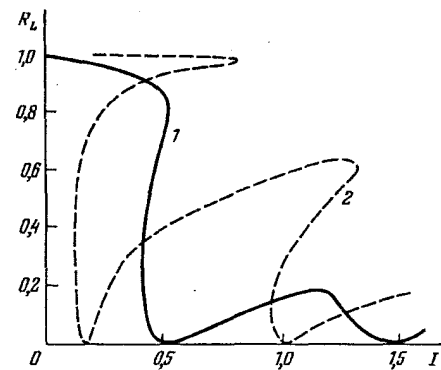


Рис. 8. Зависимость энергетического коэффициента отражения $R_L(J_0)$ нелинейной периодической среды от нормированной интенсивности $J_0 = I$ падающего света при различных уровнях связи встречных волн: 1 — $\kappa L = 2$, 2 — $\kappa L = 4$

видно характерное для нелинейных систем бистабильное поведение функции $R_L = R_L(I \equiv J_0)$ с ярко выраженным гистерезисом. Для получения спектральной зависимости $R_L(\delta)$ при различных значениях начальной интенсивности $J_0 \equiv I$ необходимо решить систему уравнений (53) при $\delta \neq 0$, что оказывается достаточно сложно. Однако, сравнивая систему уравнений (53) с системой уравнений (22) связанных волн, записанную при $\alpha = 0$ для функций $a^{(\pm)}(z) = A^{(\pm)}(z) \exp(\pm i\delta z)$, нетрудно установить, что влияние нелинейности в системе (53) можно описывать в терминах эффективной дополнительной отстройки

$$\delta_n^{(\pm)}(z) = \xi (|A^{(\pm)}(z)|^2 + |A^{(\mp)}(z)|^2),$$

зависящей от интенсивности прямой и обратной волн. Так как величины $\delta_n^{(\pm)}(z)$ всегда положительны, то спектральная зависимость коэффициента брэгговского отражения от нелинейной периодической среды будет асимметричной с максимумом, сдвинутым при малых интенсивностях в длинноволновую сторону.

Для бесконечной периодической структуры с нелинейным заполнением при точном брэгговском резонансе ($\delta = 0$) система уравнений (53) допускает решения "солитонного" типа (см. также [44, 45])

$$a_F^2(z) = a_B^2(z) = \frac{E_c}{\text{ch}[2\kappa(z - z_0)]},$$

$$\varphi(z) = -\text{sign}(z - z_0) \arccos \frac{1}{\text{ch}[2\kappa(z - z_0)]}, \quad (57)$$

где $\text{sign } x = x/|x|$, а z_0 — произвольная координата, вблизи которой центрируется эта уединенная волна. В работе [45] отмечается, что такая волна может распространяться с заданной скоростью вдоль периодической структуры. Однако анализ условий возбуждения таких уединенных волн требует решения нестационарной электродинамической задачи. Отметим здесь, что нелинейные периодические структуры исследованы не столь подробно, как линейные. Так, например, несомненный интерес представляют задачи о генерации гармоник в периодической среде в условиях, когда фазовый синхронизм обеспечивается за счет дифракции на периодической неоднородности (см. подробно монографию [48]).

Заключение. Подводя итоги, можно сказать следующее. Для получения достаточно простых приближенных аналитических решений для волн в одномерных периодических структурах наиболее удобным является метод, основанный на модифицированной теории связанных волн. Действительно, с одной стороны при малой глубине модуляции он включает в себя как частные случаи метод связанных

волн Когельника и метод динамической теории дифракции. А с другой стороны формулы модифицированной теории связанных волн оказываются справедливыми как при малых периодах структуры, когда $\kappa a \Delta \epsilon / \epsilon_0 \ll 1$, так и при больших периодах, когда $\Delta \epsilon / (\kappa a \epsilon_0) \ll 1$. Последнее реализуется для высоких номеров брэгговского резонанса и при немалых глубинах модуляции $\Delta \epsilon / \epsilon_0$.

В данной работе подробно обсуждены аналитические методы решения задач о распространении и преобразовании волн в частном случае изотропных сред с одномерной периодичностью при распространении волн вдоль этой периодичности. Такое реализуется при нормальном падении волн на границу раздела с периодической средой, когда поверхность раздела перпендикулярна направлению периодичности. В этом случае диэлектрическая проницаемость изотропной среды не зависит от координат в плоскости поверхности раздела. Тогда задача об отражении и прохождении волн при их наклонном падении простым преобразованием (см., например, [33, 53]) сводится к одномерной задаче с эффективной диэлектрической проницаемостью, зависящей от угла падения. Если направление одномерной периодичности составляет некоторый угол с нормалью к поверхности раздела (см., например, [29]), то на поверхности раздела появляется периодическая структура, и при решении задач даже при нормальном падении в отраженном поле нужно учитывать целый угловой спектр пространственных гармоник, возникающих от дифракции падающей волны на поверхностной периодичности. При наличии анизотропии или гиротропии в периодической среде решение задачи о наклонном падении существенно отличается от решения при нормальном падении даже в том случае, когда поверхность раздела перпендикулярна направлению периодичности. Особенно сильно это отличие проявляется для жидких кристаллов, в которых имеет место ярко выраженная гиротропия. В таких задачах из-за существенного учета поляризационных эффектов вместо простой системы двух уравнений первого порядка появляются система четырех и более уравнений первого порядка, что заметно усложняет нахождение простых аналитических решений.

В работах [46, 47] способами, справедливыми только для бесконечных периодических структур вполне определенного типа, найдены аналитические решения. Однако предложенные способы решения в отличие от модифицированной теории связанных волн не позволяют учитывать поглощение в среде и конечность периодического слоя, а тем более не "работают" при произвольной форме модуляции и при

наличии малой аперидичности и нелинейности.

Таким образом, в данной работе представлены результаты завершенных исследований по распространению и преобразованию волн в изотропных средах с одномерной периодичностью. Подробно обсужденные здесь теория связанных волн Когельника и ее модификация позволяют рассматривать более сложные задачи распространения и преобразования волн, например, для многопериодических сред и периодических сред со статистическими свойствами, а также для периодических сред с локальной анизотропией и гиротропией. Все эти методы и подходы можно применить также для распространения электронных волн в периодических квантовых сверхрешетках.

Авторы признательны В.А. Белякову и Б.М. Болотовскому за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

Приложения.

I. Вывод интегрального уравнения и доказательство его эквивалентности системе Флоке — Блоха (6).

1. Волновое уравнение (1) с помощью $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \epsilon_p(z)$ и свойств $\delta(z - z')$ можно записать в виде

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k^2 \epsilon_0 E(z) = -k^2 \epsilon_p(z) E(z) = -k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \epsilon_p(z') E(z') \delta(z - z'). \quad (I.1)$$

Если подставить в левую часть $E(z)$ в виде

$$E(z) = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \epsilon_p(z') G(z - z') E(z'), \quad (I.2)$$

то для функции Грина $G(z - z')$ получим уравнение

$$\frac{d^2 G(z - z')}{dz^2} + k^2 \epsilon_0 G(z - z') = -\delta(z - z'). \quad (I.3)$$

Разлагая $G(z)$ и $\delta(z)$ в интегралы Фурье типа

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx G(x) \exp(ikxz),$$

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(ikxz), \quad (I.4)$$

подставляя эти выражения в (1.3) и интегрируя затем получающиеся интегралы с помощью теории вычетов по комплексным полюсам ($\epsilon_0 = \epsilon'_0 + i\epsilon''_0$ и $\epsilon''_0 > 0$), получим

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikxz) dx}{x^2 - k^2 \epsilon_0} =$$

$$= \frac{i}{2k\epsilon_0^{1/2}} \exp(ik\epsilon_0^{1/2}|z|). \quad (I.5)$$

2. Покажем, как из уравнения (7) основного текста получается (9). Разобьем интеграл по dz' от $-\infty$ до $+\infty$ на два интеграла от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0. Каждый из этих интегралов разобьем на бесконечные суммы интегралов по периоду a

$$\int_0^{\infty} f(z') dz' = \int_0^a f(z') dz' + \int_a^{2a} f(z') dz' + \dots + \int_{(n+1)a}^{na} f(z') dz' + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f(z') dz', \quad (I.6)$$

$$\int_{-\infty}^0 f(z') dz' = \int_{-a}^0 f(z') dz' + \int_{-2a}^{-a} f(z') dz' + \dots + \int_{-(n+1)a}^{-na} f(z') dz' + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-(n+1)a}^{-na} f(z') dz',$$

где $f(z') = \epsilon_p(z') G(z - z') E(z')$. Покажем, что в силу периодичности $\epsilon_p(z')$ и теоремы Флоке (3)

$$\int_{na}^{(n+1)a} dz' \epsilon_p(z') E(z') G(z - z') = \exp(i\mu na) \int_0^a dz'' \epsilon_p(z'') E(z'') G(z - z'' - na), \quad (I.7)$$

$$\int_{-(n+1)a}^{-na} dz' \epsilon_p(z') E(z') G(z - z') = \exp(-i\mu na) \times \int_{-a}^0 dz'' \epsilon_p(z'') E(z'') G(z - z'' + na).$$

Первое равенство получается с помощью замены $z' = z'' + na$ и с использованием условий

$$\epsilon_p(z') = \epsilon_p(z'' + na) = \epsilon_p(z''),$$

$$E(z') = E(z'' + na) = \exp(i\mu na) E(z'').$$

Во втором равенстве (1.7) нужно использовать замену $z' = z'' - na$. Поскольку

$$\int_{-a}^0 dz' \epsilon_p(z') E(z') G(z - z') = \int_0^a dx \epsilon_p(x) E(x) \exp(-i\mu a) G(z - x + a),$$

если $z' = x - a$, то с помощью этих соотношений получим

$$\int_0^{\infty} dz' \epsilon_p(z') E(z') G(z - z') =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \exp(i\mu na) \int_0^a dz' \varepsilon_p(z') E(z') G(z-z'-na), \\
&\int_{-\infty}^0 dz' \varepsilon_p(z') E(z') G(z-z') = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \exp(-i\mu na) \times \\
&\times \int_0^a dz' \varepsilon_p(z') E(z') G(z-z'+na). \quad (I.8)
\end{aligned}$$

Отсюда получается соотношение (9) с

$$g(z-z') = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(z-z'-na) \exp(i\mu na).$$

Последнее выражение для $g(z-z')$ в формуле (10) получается следующим образом.

3. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(z-na) \exp(i\mu na).$$

Путем замены переменных в сумме можно показать, что $g(z+a) = g(z) \exp(i\mu a)$. А это значит, что функция $f(z) = g(z) \exp(-i\mu z)$ периодична: $f(z+a) = f(z)$. Разложим ее в ряд Фурье

$$\begin{aligned}
f(z) &= g(z) \exp(-i\mu z) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} f_s \exp\left(\frac{2\pi i}{a} sz\right), \\
f_s &= \frac{1}{a} \int_0^a dz f(z) \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} sz\right). \quad (I.9)
\end{aligned}$$

Преобразуем f_s , подставляя $f(z) = g(z) \exp(-i\mu z)$, и для

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(z-na) \exp(i\mu na)$$

и используя замену переменных интегрирования $z' = z - na$, имеем

$$\begin{aligned}
f_s &= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^a dz G(z-na) \times \\
&\times \exp[-i\mu(z-na)] \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} sz\right) = \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-na}^{a-na} dz' G(z') \exp(-i\beta_s z') = \\
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' G(z') \exp(-i\beta_s z'), \quad (I.10)
\end{aligned}$$

где

$$\beta_s = \mu + \frac{2\pi}{a} s, \quad \exp(-2\pi i ns) = 1.$$

Подставляя последнее выражение для f_s в формулу

(I.9) для $f(z)$, получим для $g(z)$

$$\begin{aligned}
g(z) &= f(z) \exp(i\mu z) = \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(i\beta_n z) \int_{-\infty}^{+\infty} dy G(y) \exp(-i\beta_n y), \quad (I.11)
\end{aligned}$$

где индекс суммирования s в (I.9) заменен на n , а $z' = y$. Последний интеграл с

$$G(y) = \frac{i}{2\alpha} \exp(i\alpha |y|),$$

где $\alpha = k\varepsilon_0^{1/2}$, вычисляется с учетом того, что $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0$ и $\varepsilon''_0 > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dy G(y) \exp(-i\beta_n y) &= \int_0^{\infty} dy G(y) \exp(-i\beta_n y) + \\
&+ \int_{-\infty}^0 dy G(y) \exp(-i\beta_n y) = \frac{(-1)}{\alpha^2 - \beta_n^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (I.11), получаем исконую формулу (10).

4. Покажем, что интегральное уравнение (9) с выражением для $g(z-z')$ вида (10) приводит к системе Флоке—Блоха (6). Для этого нужно подставить в формулу (9) разложения в ряды Фурье

$$\begin{aligned}
E(z') &= \exp(i\mu z') \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_l \exp\left(\frac{2\pi i}{a} lz'\right), \\
\varepsilon_p(z') &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz'\right), \quad (I.12)
\end{aligned}$$

$$g(z-z') = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\exp[i\beta_n(z-z')]}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_n^2},$$

$$\beta_n = \mu + \frac{2\pi}{a} n.$$

После сокращения на $\exp(i\mu z)$ с учетом того, что

$$\frac{1}{a} \int_0^a dz' \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m-n+l')z'\right] = \delta_{n,m+l'},$$

получим

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_l \exp\left(\frac{2\pi i}{a} lz\right) &= -k^2 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{l'=+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) \times \\
&\times \frac{A_{l'} \exp[(2\pi i/a)(m+l')z]}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_{m+l'}^2}, \quad (I.13)
\end{aligned}$$

где

$$\beta_{m+l'} = \mu + \frac{2\pi}{a} (m+l').$$

Если сделать замену индексов суммирования $m+l' = l$, то получим

$$A_l = -\frac{k^2}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_l^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) A_{l-m}. \quad (I.14)$$

Умножив на $k^2 \varepsilon_0 - \beta_l^2$ и заменив $l - m$ на m' , т.е. при $m = l - m'$, получим

$$\begin{aligned} & \left[k^2 \varepsilon_0 - \left(\mu + \frac{2\pi}{a} l \right)^2 \right] A_l = \\ & \sum_{m'=-\infty}^{m'+\infty} \varepsilon_{l-m'} A_{m'} (1 - \delta_{m'l}), \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

что совпадает с системой Флоке—Блоха (6).

II. Вывод приближенных формул в теории связанных волн и обсуждение условий их справедливости. Дифференцируя по z равенства в (22'), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка для $A^{(\pm)}(z)$

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} &= i\kappa(z) A^{(+)}(z) + \\ &+ i\kappa(z) A^{(-)}(z) \exp(-2ik\varepsilon_0^{1/2}z), \\ \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} &= -i\kappa(z) A^{(-)}(z) - \\ &- i\kappa(z) A^{(+)}(z) \exp(2ik\varepsilon_0^{1/2}z), \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

где $\kappa(z) = k\varepsilon_p(z)/2\varepsilon_0^{1/2}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left[\frac{dA^{(+)}(z)}{dz} \exp(ik\varepsilon_0^{1/2}z) + \right. \\ & \left. + \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} \exp(-ik\varepsilon_0^{1/2}z) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из системы (II.1), кстати, следует, что поле $E(z)$ вида (19) удовлетворяет волновому уравнению (1). Это еще раз подтверждает его эквивалентность интегральному уравнению (7).

При периодической зависимости $\varepsilon_p(z)$ и вблизи n -го брэгговского резонанса системы (22'), или (II.1), могут быть решены методом усреднения, дающим быстроходящийся асимптотический ряд теории возмущений. Действительно, подставляя в (22') разложение (5) для $\varepsilon_p(z)$ и выделяя слагаемое с n -м резонансом, получим точную систему

$$\begin{aligned} A^{(+)}(z) &= i\kappa_n \int_{-\infty}^z dz' A^{(-)}(z') \exp[(\alpha - 2i\delta)z'] + \\ &+ \sum_{m \neq 0}' i\kappa_{-m} \int_{-\infty}^z dz' A^{(+)}(z') \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz'\right) + \\ &+ \sum_{m \neq (0,n)}'' i\kappa_m \int_{-\infty}^z dz' A^{(-)}(z') \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m-n)z' + \right. \\ & \left. + (\alpha - 2i\delta)z'\right]; \\ A^{(-)}(z) &= i\kappa_{-n} \int_z^{\infty} dz' A^{(+)}(z') \exp[-(\alpha - 2i\delta)z'] + \\ &+ \sum_{m \neq 0}' i\kappa_m \int_z^{\infty} dz' A^{(-)}(z') \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz'\right) + \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{m \neq (0,-n)}'' i\kappa_m \int_z^{\infty} dz' A^{(+)}(z') \times \\ & \times \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m+n)z' - (\alpha - 2i\delta)z'\right], \end{aligned}$$

или эквивалентную (II.1) точную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} &= i\kappa_n A^{(-)}(z) \exp[(\alpha - 2i\delta)z] + \\ &+ A^{(+)}(z) \sum_{m \neq 0}' i\kappa_m \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right) + \\ &+ A^{(-)}(z) \exp[(\alpha - 2i\delta)z] \sum_{m \neq (0,n)}'' i\kappa_m \times \\ & \times \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m-n)z\right], \\ \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} &= -i\kappa_{-n} A^{(+)}(z) \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] - \\ &- A^{(-)}(z) \sum_{m \neq 0}' i\kappa_m \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right) - \\ &- A^{(+)}(z) \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] \times \\ & \times \sum_{m \neq (0,-n)}'' i\kappa_m \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m+n)z\right], \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

где $\kappa_m = k\varepsilon_m/2\varepsilon_0^{1/2}$, ε_0 и ε_m — комплексные величины, а суммирование по m ведется от $-\infty$ до $+\infty$ за исключением выделенных значений: $m \neq (0, \pm n)$.

Если функции $A^{(\pm)}(z)$ и $\exp[\pm(\alpha - 2i\delta)z]$ мало меняются на периоде структуры a , т.е.

$$\{|\kappa_n|a, |\delta|a, \alpha a\} \ll 1, \quad (\text{II.4})$$

где $a = \pi n/k(\varepsilon_0')^{1/2} = \lambda n/2(\varepsilon_0')^{1/2}$, то решения для $A^{(\pm)}(z)$ можно искать в виде асимптотического ряда теории возмущений

$$A^{(\pm)}(z) = A_0^{(\pm)}(z) + A_1^{(\pm)}(z) + \dots, \quad (\text{II.5})$$

где функции $A_0^{(\pm)}(z)$ можно считать на периоде структуры a постоянными. Тогда из (II.2) получим для $A_0^{(\pm)}(z)$ приближенную систему

$$\begin{aligned} A_0^{(+)}(z) &= i\kappa_n \int_{-\infty}^z dz' A_0^{(-)}(z') \exp[(\alpha - 2i\delta)z'], \\ A_0^{(-)}(z) &= i\kappa_{-n} \int_z^{\infty} dz' A_0^{(+)}(z') \exp[-(\alpha - 2i\delta)z'], \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

ибо интегралы от быстроосциллирующих функций в суммах по m в формулах (II.2) обращаются в нуль. Система (II.6) после дифференцирования по z переходит в

$$\begin{aligned} \frac{dA_0^{(+)}(z)}{dz} &= i\kappa_n A_0^{(-)}(z) \exp[(\alpha - 2i\delta)z], \\ \frac{dA_0^{(-)}(z)}{dz} &= -i\kappa_{-n} A_0^{(+)}(z) \exp[-(\alpha - 2i\delta)z]. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Такая же система получается из уравнения (II.3) при их усреднении по периоду структуры a . Она совпадает с системой уравнений связанных волн (22).

Следующие приближения $A_1^{(\pm)}(z)$ к точным решениям $A_0^{(\pm)}(z)$ в (II.5) проще всего определить из точной системы интегральных уравнений (II.2). Для этого в отброшенные вторые и третьи слагаемые с суммами по m нужно вместо $A^{(\pm)}(z)$ подставить $A_0^{(\pm)}(z)$.

Тогда получим

$$A_1^{(+)}(z) = \sum_{m \neq (0,n)}'' \int_{-\infty}^z dz' A_0^{(-)}(z') \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2\pi i}{a} (m-n)z' + (\alpha - 2i\delta)z' \right\} + \\ + \sum_{m \neq 0}' \int_{-\infty}^z dz' A_0^{(+)}(z') \exp \left(\frac{2\pi i}{a} z'm \right), \quad (II.8)$$

$$A_1^{(-)}(z) = \sum_{m \neq (0,-n)}'' \int_z^{\infty} dz' A_0^{(+)}(z') \times \\ \times \exp \left[\frac{2\pi i}{a} (m+n)z' - (\alpha - 2i\delta)z' \right] + \\ + \sum_{m \neq 0}' \int_z^{\infty} dz' A_0^{(-)}(z') \exp \left(\frac{2\pi i}{a} mz' \right).$$

Условие сходимости функционального ряда (II.5), т.е. $|A_1^{(\pm)}(z)| \ll |A_0^{(\pm)}(z)|$, позволяет уточнить исходные условия (II.4) справедливости уравнений связанных волн,

III. Вывод граничных условий и выражений для r_{Σ}^L в общем случае несогласованного слоя.

1. *Граничные условия и следствия из них.* Для решения граничной задачи нужно записать решения для $E(z)$ и $H(z) = (i/k) dE(z)/dz$ в трех областях: $z \leq 0$, $0 \leq z \leq L$ и $z \geq L$ и сплечь их при $z=0$ и $z=L$:

$$z \leq 0: E(z) = [A_0 \exp(ikn_1 z) + A_1 \exp(-ikn_1 z)], \\ H(z) = -n_1 [A_0 \exp(ikn_1 z) - \\ - A_1 \exp(-ikn_1 z)], \quad (III.1)$$

$$0 \leq z \leq L: E(z) = \frac{1}{\sqrt{n(z)}} [A^{(+)}(z) \exp(i\psi(z)) + \\ + A^{(-)}(z) \exp(-i\psi(z))], \\ H(z) = -\sqrt{n(z)} [A^{(+)}(z) \exp(i\psi(z)) - \\ - A^{(-)}(z) \exp(-i\psi(z))],$$

$$z \geq L: E(z) = A_2 \exp(ikn_2 z), \\ H(z) = -n_2 A_2 \exp(ikn_2 z),$$

где

$$\psi(z) = k \int_0^z n(z') dz',$$

а $n(z) = (e(z))^{1/2}$ — комплексная функция.

Условие непрерывности $E(z)$ и $H(z)$ при $z=0$ дает

$$A_0 + A_1 = \frac{1}{(n(0))^{1/2}} (A^{(+)}(0) + A^{(-)}(0)), \quad (III.2)$$

$$n_1(A_0 - A_1) = (n(0))^{1/2} \times \\ \times (A^{(+)}(0) - A^{(-)}(0)).$$

Отсюда нетрудно получить

$$(A^{(+)}(0) + r_1 A^{(-)}(0)) = (1 + r_1) A_0 (n(0))^{1/2},$$

$$r_1 = \frac{n_1 - n(0)}{n_1 + n(0)},$$

$$r_{\Sigma}^L = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_1 A^{(+)}(0) + A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0) + r_1 A^{(-)}(0)} = \frac{r_1 + \tilde{r}}{1 + r_1 \tilde{r}},$$

$$\tilde{r} = \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)}. \quad (III.3)$$

Отличие на $(n(0))^{1/2}$ в первом граничном условии связано с различным видом решений в теории связанных волн Когельника, где

$$E(z) = A^{(+)}(z) \exp(i\psi_k(z)) + A^{(-)}(z) \exp(-i\psi_k(z))$$

при $\psi_k(z) = k\varepsilon_0^{1/2} z$ с похожей записью в модифицированной теории связанных волн

$$E(z) = \frac{A^{(+)}(z)}{(n(z))^{1/2}} \exp(i\psi(z)) + \\ + \frac{A^{(-)}(z)}{(n(z))^{1/2}} \exp(-i\psi(z)),$$

где

$$\psi(z) = k \int_0^z n(z') dz'.$$

Видно, что $A^{(\pm)}(z)/(n(z))^{1/2}$ в последнем случае аналогичны $A^{(\pm)}(z)$ в теории Когельника. Такое различие исчезает там, где имеет место отношение величины $A^{(-)}(z)$ к $A^{(+)}(z)$.

Условие непрерывности $E(z)$ и $H(z)$ при $z=L$ дает

$$\frac{1}{(n(L))^{1/2}} [A^{(+)}(L) \exp(i\psi(L)) + \\ + A^{(-)}(L) \exp(-i\psi(L))] = A_2 \exp(ikn_2 L), \quad (III.4)$$

$$(n(L))^{1/2} [A^{(+)}(L) \exp(i\psi(L)) - \\ - A^{(-)}(L) \exp(-i\psi(L))] = n_2 A_2 \exp(ikn_2 L).$$

Отсюда граничное условие при $z=L$ принимает вид

$$A^{(-)}(L) = r_2 A^{(+)}(L) \exp(2i\psi(L)),$$

$$r_2 = (n(L) - n_2)/(n(L) + n_2). \quad (III.5)$$

2. *Вывод формулы для r_{Σ}^L .* Из решений (23) основного текста для $A^{(\pm)}(z)$ и формулы для \tilde{r} (III.3) следует, что

$$\tilde{r} = \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)} =$$

$$= \left(r_B^\infty + \frac{\kappa_{-n}}{\kappa_n} \frac{1}{r_B^\infty} \frac{C_2}{C_1} \right) \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right)^{-1}. \quad (III.6)$$

Отношение C_2/C_1 можно определить из граничного условия (III.5), если в него подставить $A^{(\pm)}(L)$, получаемые из формул (23) основного текста

$$\frac{C_2}{C_1} = - \frac{\kappa_n}{\kappa_{-n}} r_B^\infty \exp(-2\gamma L) \times \frac{r_B^\infty - r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}{1 - (\kappa_n/\kappa_{-n}) r_B^\infty r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}, \quad (III.7)$$

где

$$\varphi_n(L) = \psi(L) - i \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right) = \frac{\pi}{a} nL + \int_0^L \kappa_p(z) dz,$$

$$\kappa_p(z) = k\varepsilon_p(z)/2(\varepsilon'_0)^{1/2}, \quad \varepsilon_p = \varepsilon(z) - \varepsilon_0$$

и было использовано условие брэгговского резонанса $k(\varepsilon'_0)^{1/2} = (\pi/a)n + \delta$ и малость потерь: $\varepsilon''_0 \ll \varepsilon'_0$. При $r_2 = 0$ (согласованный позади слой) формула (III.7) для C_2/C_1 совпадает с формулой (25) основного текста. Если подставить (III.7) в (III.6), то после преобразования получим

$$\tilde{r} = \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)} = \frac{r_B^L + \frac{\exp(-2\gamma L) - (\kappa_n/\kappa_{-n}) (r_B^\infty)^2}{1 - (\kappa_n/\kappa_{-n}) (r_B^\infty)^2 \exp(-2\gamma L)} r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}{1 + (-\kappa_n/\kappa_{-n}) r_B^L r_2 \exp(2i\varphi_n(L))}, \quad (III.8)$$

где

$$r_B^L = r_B^\infty \frac{1 - \exp(-2\gamma L)}{1 - (\kappa_n/\kappa_{-n}) (r_B^\infty)^2 \exp(-2\gamma L)}, \quad (III.9)$$

$$r_B^\infty = \frac{i\kappa_{-n}}{\gamma + (\alpha/2) - i\delta},$$

а для модифицированной теории связанных волн нужно сделать замены: $\kappa_n = -i\kappa_n^{(-)}$, $\kappa_{-n} = i\kappa_{-n}^{(+)}$ так, что $\kappa_n/\kappa_{-n} = -\kappa_n^{(-)}/\kappa_n^{(+)}$, а $\kappa_n\kappa_{-n} = \kappa_n^{(-)}\kappa_{-n}^{(+)}$.

При согласованном позади слое, когда $\varepsilon(L) = \varepsilon_2$, величина $r_2 = 0$ и тогда $\tilde{r} = r_B^L$, т.е. \tilde{r} совпадает с коэффициентом брэгговского отражения в (26). При отражении от полубесконечной периодической структуры $\tilde{r} = r_B^\infty$. Действительно, при наличии сколь угодно малого поглощения α величина

$$\gamma = \left[\kappa_n\kappa_{-n} + \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right)^2 \right] = \gamma' + i\gamma''$$

всегда комплексно, а

$$\gamma' = \text{Re}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(\kappa^2 - \delta^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 + \alpha^2\delta^2 \right]^{1/2} + \left(\kappa^2 - \delta^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \right\}$$

всегда положительна. Тогда при $L \rightarrow \infty$

$\exp(-2\gamma L) \rightarrow 0$ получим

$$\tilde{r}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{r} = \frac{r_B^\infty - (\kappa_n/\kappa_{-n}) (r_B^\infty)^2 r_2 \exp(2i\varphi_n(\infty))}{1 - (\kappa_n/\kappa_{-n}) r_B^\infty r_2 \exp(2i\varphi_n(\infty))} = r_B^\infty$$

при любом r_2 .

IV. Коэффициенты R_∞ (49) и R_L (55).

1. Система уравнений (47) для $A^{(\pm)}(z)$ в почти периодической среде с помощью подстановки

$$A^{(\pm)}(z) = U^{(\pm)}(z) \exp\left(\mp i \frac{\sigma}{4} z^2\right) \quad (IV.1)$$

сводится к уравнениям вида

$$\frac{d^2 U^{(\pm)}(z)}{dz^2} + \left[\frac{\sigma^2}{4} z^2 - \kappa_n\kappa_{-n} - \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right)^2 \mp i \frac{\sigma}{2} \right] U^{(\pm)}(z) = 0. \quad (IV.2)$$

Решениями этого уравнения являются функции параболического цилиндра [42]. При $\alpha = 0$ и $\delta = 0$ в качестве независимых решений выберем функции Уиттекера

$$V\left(i\rho \mp \frac{1}{2}, z\sigma^{1/2} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$V\left(-i\rho \pm \frac{1}{2}, z\sigma^{1/2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

с $\rho = |\kappa_n|^2/\sigma$, которые при $z \rightarrow \infty$ соответствуют волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлении оси z . Тогда общее решение системы уравнений (47) с учетом (IV.1) представим в виде суперпозиции (48) этих волн.

Для полубесконечной периодической среды, для которой брэгговский резонанс, т.е. $\delta = 0$, осуществляется прямо на границе раздела при $z = 0$, можно в формулах (48) положить $C_2 = 0$. Чтобы это показать строго, нужно в общих решениях (48) использовать граничные условия (24), а затем, вводя для ρ малую отрицательную мнимую добавку, перейти к пределу $L \rightarrow \infty$. Если $C_2 = 0$, то из решений (48) с учетом (IV.1) сразу получается выражение для коэффициента отражения от полубесконечной ОПС

$$r_B^\infty = \frac{A^{(-)}(0)}{A^{(+)}(0)} = \frac{\kappa_{-n}}{\sigma^{1/2}} \exp\left(i \frac{3\pi}{4}\right) \times \frac{V(i\rho - (1/2), 0)}{V(i\rho + (1/2), 0)}. \quad (IV.3)$$

Поскольку согласно [42]

$$V(q, 0) = \sqrt{\pi} 2^{-\frac{1}{4} - \frac{q}{2}} \left(\Gamma\left(q + \frac{3}{4}\right) \right)^{-1}, \quad (IV.4)$$

то, учитывая свойства гамма-функций $\Gamma(x)$, для коэффициента брэгговского отражения по интенсивности $R_\infty = |r_B^\infty|^2$ сразу получаем формулу (49).

2. Выражения (55) для R_L и соотношение (56) получаются из системы уравнений (53) следующим образом. Если ввести безразмерные функцию

$y = a_F^2/E_c^2$, где $E_c = (2\alpha/3\xi)^{1/2}$, и переменную $x = 2\alpha z$, то из системы (53) с учетом интегралов (54), можно получить уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = \left\{ \left(y(x) - J_L \right) \times \left[y(x) - (y(x) - J_L) \left(y(x) + \frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (\text{IV.5})$$

где $J_L = \Gamma_1/E_c^2 \equiv a_F^2(L)/E_c^2$. Решение этого уравнения выражается через эллиптические функции Якоби [42]. В простейшем случае $\delta = 0$, вводя новую функцию $v(x) = y(x) - (J_L/2)$ и параметры $a^2 = 1 + (J_L/4)$ и $b^2 = J_L/4$, уравнение (IV.5) можно записать в виде

$$\frac{dv(x)}{dx} = (v^2(x) - b^2)^{1/2} (a^2 - v^2(x))^{1/2}. \quad (\text{IV.6})$$

Интегрируя это уравнение и переходя к переменным $y(z)$ и z , получим решение $y(z)$ в виде

$$y(z) = J_L \left[1 + nd(2\alpha x(z - L)/a^{-2}) \right]^{1/2}, \quad (\text{IV.7})$$

где $hd(x/q)$ — одна из функций Якоби [42] с $0 \leq q \leq 1$. Полагая в решении (IV.7) $z = 0$ и вводя $J_0 \equiv I = a_F^2(0)/E_c^2$, получаем соотношение (56). А отсюда нетрудно получить и выражение для коэффициента отражения R_L в (55).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Kronig R., Penny W.G.* Quantum mechanics of electrons in crystals // Proc. Roy. Soc. London. 1930. V. A13. P. 499—513.
2. *Шик А.Я.* Сверхрешетки — периодические полупроводниковые структуры // ФТП, 1974. Т. 8, вып. 9. С. 1841—1864. *Голубев Л.В., Леонов Е.И.* Сверхрешетки. М., 1977.
3. *Силин А.П.* Полупроводниковые сверхрешетки // УФН. 1985. Т. 14, вып. 3. С. 485—521. *Андрюшин Е.А., Быков А.А.* От сверхрешеток к сверхатомам // УФН, 1988. Т. 154, вып. 1. С. 122—132.
4. *Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л.* Оптическая голография. М.: Мир, 1973.
5. *Милер М.* Голография. Теория, эксперимент, применение. М.: Машиностроение, 1979.
6. *Гуляев Ю.В., Проклов В.В., Шкердин Г.Н.* Дифракция света на звуке в твердых телах // УФН. 1978. Т. 124, вып. 1. С. 61—111.
7. *Яковкин И.Б., Петров Д.В.* Дифракция света на акустических поверхностных волнах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1979.
8. Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1978.
9. Основы волоконно-оптической связи / Под ред. М. Барноски. М.: Мир, 1980.
10. *Хансперджер Р.* Интегральная оптика. Теория и технология. М.: Мир, 1985.
- [11] *Пискер З.Г.* Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. М.: Наука, 1974.
12. *Андреев А.В.* Рентгеновская оптика поверхности (отражение и дифракция при скольжении углов падения) // УФН. 1985. Т. 145, вып. 1. С. 113—136.
13. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959.
14. *Элаши Ш.* Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64, вып. 12. С. 22—57.
15. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: ГИФМЛ, 1963. Гл. 19.
16. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984. Гл. 11:
17. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
18. *Мак-Лаклан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Иностранная литература, 1953.
19. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. Гл. IV.
20. *Tamir T., Wang H.C., Oliner A.A.* Wave propagation in sinusoidally stratified media // IEEE Trans, Microwave Theory and Techn. 1964. V. MTT-12, No. 3. P. 324—335.
- [21] *Jaggard D.L., Elachi C.* Floquet and coupled-wave analysis of higher-order Bragg coupling in a periodic medium // JOSA. 1976. V. 66, No. 7. P. 674—682.
22. *Su S.K., Gaylord T.K.* Calculations of arbitrary order diffraction efficiencies of thick gratings with arbitrary gratings shape // JOSA. 1975. V. 65, No. 1. P. 59—64.
23. *Beularbi B., Cooke D.J., Solimar L.* Higher order modes in thick phase gratings // Optica Acta. 1980. V. 27, No. 7. P. 885—895.
24. *Ярув А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. Гл. 6.
25. *Столяров С.Н.* Соответствие решений в приближении сильной и слабой связи для волн в одномерных периодических структурах // Кр. сообщ. физ., ФИАН (КСФ). 1987. № 11. С. 12—14.
26. *Гейлорд Т.К., Мохарам М.Г.* Анализ и применение оптической дифракции на решетках (обзор) // ТИИЭР. 1985. Т. 73, № 5. С. 53—103.
27. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. Гл. IV.
28. *Карпов С.Ю., Константинов О.В., Райх М.Э.* Модифицированная теория возмущений для расчета зонной структуры в одномерном периодическом потенциале // ФТТ. 1980. Т. 22, вып. 11. С. 3402—3408.
29. *Kogelnik H.* Coupled wave theory for thick hologram grating // BSTJ. 1969. V. 48, No. 9. P. 2909—2947.
30. *Мартынов Н.Н., Столяров С.Н.* К теории распространения волн в периодических структурах // КЭ. 1978. Т. 5, вып. 8. С. 1853—1855.
- [31] *Мартынов Н.Н.* Уравнения связанных волн для гофрированного волновода // КЭ. 1979. Т. 6, № 8. С. 1798—1801.
32. *Мартынов Н.Н.* Решение уравнений поперечного сечения в случае плоского волновода с периодически гофрированной границей // Радиотехн. и Электр. 1980. Т. 25, вып. 9. С. 1851—1860.
33. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. Гл. 4.
34. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
35. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
37. *Рытов С.М.* Дифракция света на ультразвуковых волнах // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1937. Вып. 2. С. 223—259.
38. *Кляцкин В.И., Кошель К.В.* Численное моделирование распространения волн в периодических средах // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып. 6, С. 2092—2098.
39. *Жилев Ю.В., Константинов О.В., Панахов М.М., Романов Ю.Ф.* Отражение плоской электромагнитной волны от границы среды с синусоидальной модуляцией диэлектрической проницаемости // ФТТ. 1977. Т. 19, вып. 6. С. 1798—1805.
40. *Гуревич С.А., Карпов С.Ю., Портной Е.Л.* О спектральной зависимости коэффициента отражения брэгговского зеркала // Письма ЖТФ. 1984. Т. 10, вып. 15. С. 945—949.
- [41] *Гуревич С.А., Карпов С.Ю., Портной Е.Л.* Фазовые особенности отражения света брэгговским зеркалом, обусловленные скачком диэлектрической проницаемости на его границе // Письма ЖТФ. 1985. Т. 11, вып. 16. С. 989—993.
42. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979.
43. *Константинов О.В., Райх М.Э.* Влияние неоднородности границы волновода на коэффициент отражения света брэг-

- говским зеркалом // ЖТФ. 1979. Т. 49, вып. 4. С. 703—709.
44. *Winful H.G., Marburger J.H., Garmire E.* Theory of bistability in nonlinear distributed feedback structure // *Appl. Phys. Lett.* 1979. V. 35, No. 5. P. 379—381.
45. *Волощенко Ю., Рыжов Ю.Н., Сотин В.Е.* Стационарные волны в нелинейных периодически модулированных средах с большим групповым замедлением // ЖТФ. 1981. Т. 51, вып. 5. С. 902—907.
46. *Wu S.M., Shin C.C.* Construction of solvable Hill equation // *Phys. Rev.* 1985. V. A32, No. 6. P. 3736—3738.
47. *Игнатович В.К.* Эпюд об одномерном периодическом потенциале // УФН, 1986. Т. 150, вып. 1. С. 145—158.
48. *Беляков В.А.* Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры. М.: Наука, 1988.
49. *Босс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П.* Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989.
50. *Беляков В.А., Сонин А.С.* Оптика холестерических жидких кристаллов. М.: Наука, 1982.
- [51] *Ерицян О.С.* Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван: Айастан, 1988.
52. *Belyakov V.A., Dmitrienko V.E.* Optics of chiral liquid crystals // *Soviet Physics Reviews / Ed. by I.M. Khalatnikov.* Harwood Academic Publishers, 1989. V. 13. Pt.1.
53. *Бреховский Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
54. *Столяров С.Н.* Бреговское преобразование волн в одномерных периодических структурах с учетом более высоких порядков теории возмущений // Физические основы твердотельных устройств обработки информации. М.: МФТИ, 1989. С. 37—41.
55. *Столяров С.Н.* Модификация метода связанных волн Когельника // Импульсные лазеры и их применение. М.: МФТИ, 1988. С. 120—122.
56. *Столяров С.Н.* Расчет отражения от слоя с модулированным поглощением и одномерный аналог эффекта Бормана // Оптические и электронные средства обработки информации. М.: МФТИ, 1990. С. 85—90.
57. *Болотовский Б.М., Воловельский В.Е., Мартынов Н.Н., Столяров С.Н.* Приближенные аналитические решения в периодически неоднородных средах и расчет коэффициента отражения. Препринт ФИАН № 101, Москва, 1989.
58. *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* Отражение света от движущегося зеркала и родственные задачи // УФН. 1989. Т. 159, вып. 1. С. 155—180.
59. *Воловельский В.Е.* Диссертация... кандидата физ.-мат. наук "Аналитические методы расчета характеристик электромагнитных волн в периодических диэлектрических структурах". М.: МГУ, 1990.
60. *Мартынов Н.Н.* Кандидатская диссертация "К теории распространения электромагнитных волн в периодических диэлектрических структурах". М.: МФТИ, 1979.
- [61] *Столяров С.Н.* Отражение волн от интерференционного покрытия // КСФ. 1987. № 6. С. 21—23; Влияние интерференционных покрытий на оптическую стойкость зеркал полупроводниковых лазеров // КЭ. 1988. Т. 15, № 8. С. 1637—1643.
62. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: ГИФМЛ, 1963. С. 554.