Январь 1993 г. Том 163, № 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПОВЕДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ И ФЛУКТУАЦИЙ В ПРОЦЕССАХ РОЖДЕНИЯ АДРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Э. А. Де Вольф, И.М. Дремин, В. Киттель

(Антверпенский университет, Вилрийк, Бельгия; Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва; Наймегенский университет, Наймеген, Нидерланды)

(*Получено 20.08.92 г. Расширенный вариант статьи будет опубликован на англ. языке в "Physics Reports"*)

СОДЕРЖАНИЕ

Достигнутого торжества игра и мука —
Натянутая тетива тугого лука.
Б. Пастернак

1. Введение. Открытие законов подобия в физике всегда являлось важным шагом в ее развитии. Проведенный недавно анализ корреляций и флуктуаций в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях вскрыл такие закономерности в их поведении, которые можно интерпретировать как законы подобия, связанные с внутренней динамикой процессов.

Поэтому проблема корреляций стала сейчас одной из наиболее активно изучаемых и обсуждаемых.

Она привлекла к себе внимание как экспериментаторов, так и теоретиков. Были обнаружены события с весьма неоднородно распределенными по его фазовому объему числами частиц. Этот факт потребовал объяснения. В частности, была предложена аналогия с явлением турбулентности, приведшая к формулировке закона подобия. Экспериментальные данные свидетельствуют в пользу такой гипотезы.

Если к найденному закону подобия относиться серьезно, то он требует более глубокого понимания и, возможно, укажет нам пути раскрытия механизма конфайнмента и его проявлений в квантовой хромодинамике (КХД). В данный момент мы находимся лишь в начальной стадии набора экспериментальных данных и развития теоретических идей. Мы попытаемся сделать обзор современной ситуации, не скрывая всей неполноты и противоречивости складывающейся картины.

Мы опишем и некоторые явления из других областей физики, где были использованы аналогичные подходы. Пока не ясно, сколь глубоки физические аналогии, но они могут помочь (и уже помогли!) в выработке новых подходов к этой проблеме. В то же время следует помнить, что законы подобия зачастую оказываются всего лишь приближенными (как, например, в случае КНО-скейлинга) и заменяются другим, более детальным описанием.

Таким образом, торжество начального периода открытия определенных закономерностей в поведении флуктуаций в процессах множественного рождения частиц само по себе призывает к дальнейшим интенсивным экспериментальным и теоретическим поискам понимания фундаментальных законов, лежащих в их основе.

План статьи таков: в разделе 2 собраны известные определения и соотношения, обычно широко разбросанные по литературе; в разделе 3 приведены экспериментальные данные о корреляциях и флуктуациях в процессах множественного рождения при соударениях различных частиц и ядер высокой энергии; в разделе 4 обсуждаются теоретические идеи, связанные с этой проблемой, и, наконец, в разделе 5 кратко подводятся итоги.

2. Математический формализм.

2.1. Определения и обозначения. В этом разделе мы соберем вместе основные определения и соотношения между физическими величинами, ис-

пользуемыми в дальнейшем. Это позволит нам четко задать все обозначения, широко варьируемые в различных статьях.

2.1.1. *Эксклюзивные и инклюзивные распределения.* Начнем с процесса взаимодействия частиц a и b, приводящего к рождению в точности n частиц в некоторой области Ω полного фазового объема Ω_{tot}. Обозначим символом y все кинематические переменные, необходимые для задания положения каждой частицы в этой области (это может быть просто быстрота, если в качестве такой области рассматривается некоторый быстротный интервал). Распределение частиц в фазовом объеме можно охарактеризовать непрерывной плотностью вероятности $P_n(y_1,\ldots,y_n)$, $n = 1,2,\ldots$ Пока предполагаем для простоты, что все частицы одинаковы. В этом случае *эксклюзивные* распределения $P_n(y_1,\ldots,y_n)$, полностью симметричны относительно перестановки аргументов и описывают распределения частиц, когда их число точно равно n.

Соответствующие *инклюзивные* распределения для $n = 1,2\ldots$ учитывают интегральный вклад процессов с более высокой множественностью в виде

$$\rho_n(y_1,\ldots,y_n) = P_n(y_1,\ldots,y_n) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\times$$

$$\times\int_{\Omega} P_{n+m}(y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_m)\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}y'_i\,. \qquad (2.1)$$

Обратное соотношение имеет вид

$$P_n(y_1,\ldots,y_n) = \rho_n(y_1,\ldots,y_n) + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!}\times$$

$$\times\int_{\Omega} \rho_{n+m}(y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_m)\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}y'_i\,. \qquad (2.2)$$

Таким образом, инклюзивная плотность $\rho_n(y_1,\ldots,y_n)$ задает плотность вероятности обнаружить n частиц в точках $y_1,\ldots,y_n$ независимо от наличия и расположения других частиц. Вероятность P_0 не найти ни одной частицы в заданном объеме равна

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Omega} P_n(y_1,\ldots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}y_i\,. \qquad (2.3)$$

Согласно (2.1) это означает, что $\rho_0 = 1$.

Соотношение описанного выше типа часто оказывается удобным получать с помощью метода производящего функционала

$$G^{\text{excl}}[z(y)] \equiv P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\times$$

$$\times\int_{\Omega} P_n(y_1,\ldots,y_n)z(y_1)\ldots z(y_n)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}y_i\,, \qquad (2.4)$$

где $z(y)$ — произвольная функция y в Ω.

Понятие производящих функций использовалось еще Эйлером, а производящие функционалы были применены в статистической механике Н.Н. Боголюбовым еще в 1946 г. [1].

Подставляя в (2.4)

$$z(y) = 1 + u(y), \qquad (2.5)$$

получим с учетом (2.1)

$$G^{\text{incl}}[u(y)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\times$$

$$\times\int_{\Omega} \rho_n(y_1,\ldots,y_n)u(y_1)\ldots u(y_n)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}y_i \qquad (2.6)$$

и соотношение

$$G^{\text{incl}}[z(y)] = G^{\text{excl}}[z(y) + 1]. \qquad (2.7)$$

Варьируя (2.4), (2.7), имеем

$$P_n(y_1,\ldots,y_n) = \left.\frac{\delta^n G[z(y)]}{\delta z(y_1)\ldots\delta z(y_n)}\right|_{z=0}, \qquad (2.8)$$

$$\rho_n(y_1,\ldots,y_n) = \left.\frac{\delta^n G(u(y))}{\delta u(y_1)\ldots\delta u(y_n)}\right|_{u=0}. \qquad (2.9)$$

Инклюзивные плотности ρ_n отвечают набору инклюзивных дифференциальных сечений. Так,

$$\sigma_{\text{inel}}^{-1}\mathrm{d}\sigma = \rho_1(y)\mathrm{d}y \qquad (2.10)$$

задает среднее число частиц в интервале $(\mathrm{d}y)$ в данном процессе;

$$\frac{1}{\sigma_{\text{inel}}}\mathrm{d}^2\sigma = \rho_2(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \qquad (2.11)$$

равно среднему числу пар частиц в интервале $(\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2)$ и т. д.; здесь σ_{inel} — неупругое сечение.

2.1.2. *Кумулянтные корреляционные функции.* Инклюзивные q-частичные плотности $\rho_q(y_1,\ldots,y_q)$ в общем случае содержат "тривиальные" вклады плотностей низшего порядка. Поэтому в определенных условиях предпочтительно рассматривать набор таких функций $C_q(y_1,\ldots,y_q)$, которые обращаются в нуль в случае, когда один из их аргументов становится статистически независимым от остальных. Хорошо известно, что величинами с такими свойствами являются корреляционные функции — зачастую называемые (факториальными) кумулянтными функциями или же, в интегральной форме, семиинвариантами Тиля [2]. Формальное доказательство этих свойств было дано Кубо [3] (см. также Чанг и др. [4]). Кумулянтные корреляционные функции определены аналогично тому, как это делается в кластерном разложении, известном в статистической механике, согласно последовательности соотношений [5—7]:

$$\rho_1(1) = C_1(1), \qquad (2.12)$$

$$\rho_2(1,2) = C_1(1)C_1(2) + C_2(1,2), \tag{2.13}$$

$$\rho_3(1,2,3) = C_1(1)C_1(2)C_1(3) + \\ + C_1(1)C_2(2,3) + C_1(2)C_2(1,3) + \\ + C_1(3)C_2(1,2) + C_3(1,2,3), \tag{2.14}$$

или в общем случае

$$\rho_m(1,\ldots,m) = \sum_{\{l_i\}_m} \sum_{\text{Пер.}} \underbrace{(C_1(\ldots)\ldots C_1(\ldots))}_{l_1 \text{ сомножителей}} \times \\ \times \underbrace{(C_2(\ldots)\ldots C_2(\ldots))}_{l_2 \text{ сомножителей}} \ldots \underbrace{(C_m(\ldots)\ldots C_m(\ldots))}_{l_m \text{ сомножителей}}; \tag{2.15}$$

здесь l_i равны либо нулю, либо положительному целому числу, а их полный набор удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{m} il_i = m. \tag{2.16}$$

Аргументы функций C_i задаются m возможными y_j, выбранными в любом порядке. Сумма по перестановкам соответствует различным путям заполнения этих аргументов. Таким образом, получается всего

$$\frac{m!}{[(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\ldots(m!)^{l_m}]\, l_1!l_2!\ldots l_m!} \tag{2.17}$$

членов. Полный набор соотношений задается функциональным тождеством

$$G^{\text{incl}}(u(y)) = \exp g[u(y)], \tag{2.18}$$

где

$$g[u(y)] = \int \rho_1(y)u(y)\mathrm{d}y + \\ + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} \int_{\Omega} C_q(y_1,\ldots,y_q)u(y_1)\ldots u(y_q) \prod_{i=1}^{q} \mathrm{d}y_i. \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что

$$C_q(y_1,\ldots,y_q) = \left.\frac{\delta^q g[u(y)]}{\delta u(y_1)\ldots\delta u(y_q)}\right|_{u=0}. \tag{2.20}$$

Соотношения (2.15) можно обратить так, что

$$C_2(1,2) = \rho_2(1,2) - \rho_1(1)\rho_1(2),$$

$$C_3(1,2,3) = \rho_3(1,2,3) - \\ - \sum_{(3)} \rho_1(1)\rho_2(2,3) + 2\rho_1(1)\rho_1(2)\rho_1(3),$$

$$C_4(1,2,3,4) = \rho_4(1,2,3,4) - \sum_{(4)} \rho_1(1)\rho_3(1,2,3) - \\ - \sum_{(3)} \rho_2(1,2)\rho_2(3,4) + \\ + 2\sum_{(6)} \rho_1(1)\rho_1(2)\rho_2(3,4) - \\ - 6\rho_1(1)\rho_1(2)\rho_1(3)\rho_1(4). \tag{2.21}$$

В этих соотношениях мы использовали сокращенную запись $C_q(1,2,\ldots,q)$ вместо $C_q(u_1,\ldots,y_q)$. Знаки суммирования указывают суммы по всем возможным перестановкам (их число приведено под соответствующим знаком). Формулы для корреляций более высоких порядков можно получить, использовав результаты работы [8].

Часто оказывается удобным разделить функции ρ_q и C_q на произведение одночастичных плотностей. Таким способом получаются нормированные инклюзивные плотности и корреляции

$$r_q(y_1,\ldots,y_q) = \rho_q(y_1,\ldots,y_q)/\rho_1(y_1)\ldots\rho_1(y_q), \tag{2.22}$$

$$K_q(y_1,\ldots,y_q) = C_q(y_1,\ldots,y_q)/\rho_1(y_1)\ldots\rho_1(y_q). \tag{2.23}$$

Из выражения (2.18) можно заключить, что при любой конечной энергии число отличных от нуля функций C_q бесконечно. Действительно, плотности ρ_q обращаются в нуль при $q > N$, где N — максимальное число частиц в объеме Ω, допустимое, например, законами сохранения энергии-импульса. В результате функционал G оказывается "полиномом" от $u(y)$. Это в свою очередь означает, что экспонента в (2.18) представляет собой "бесконечный ряд" по $u(y)$. Другими словами, корреляционные функции высших порядков должны сокращаться с функциями низших порядков, чтобы плотности обратились в нуль.

Феноменологически, отмеченная выше особенность означает, что корреляционные функции C_q можно осмысленно использовать лишь в тех случаях, когда число коррелирующих частиц в рассматриваемой области фазового объема Ω заметно меньше средней множественности в этой области. Эти условия явно не выполняются в большинстве современных экспериментов (за исключением, может быть, столкновений ядро — ядро при высоких энергиях) при выборе малых объемов фазового пространства. Экспериментальные данные для малых быстротных интервалов δy (см. разделы 3.2.3, 3.2.5) действительно указывают на то, что кумулянтные функции C_q высших порядков становятся все более существенными с уменьшением размеров интервалов. Однако это с необходимостью не означает, что все большее число частиц становится динамически коррелированным, а может быть истолковано, как артефакт, связанный с определением функций C_q.

2.1.3. *Корреляции частиц разных типов.* Метод производящих функционалов, изложенный в разделе 2.1.1, можно обобщить на ситуацию, в которой рассматривается рождение частиц нескольких различных типов. Мы не будем делать этого здесь, отсылая читателя к соответствующей литературе [9—11], а рассмотрим лишь корреляционные функции для частиц двух разных типов a и b. Двухчастичная

быстротная корреляционная функция записывается в этом случае в виде

$$C_2^{ab}(y_1, y_2) = \rho_2^{ab}(y_1, y_2) - f\rho_1^a(y_1)\rho_1^b(y_2), \qquad (2.24)$$

где

$$\rho_1^a(y_1) = \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}}\frac{\mathrm{d}\sigma^a}{\mathrm{d}y_1}, \quad \rho_2^{ab}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}}\frac{\mathrm{d}\sigma^{ab}}{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}; \qquad (2.25)$$

здесь y_1 и y_2 — быстроты в с.ц.и., a и b представляют свойства частиц (например, их заряды).

Условия нормировки таковы:

$$\int \rho_1^a(y_1)\mathrm{d}y_1 = \langle n_a \rangle,$$
$$\iint \rho_2^{ab}(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \langle n_a(n_b - \delta^{ab}) \rangle, \qquad (2.26)$$

$$\iint C_2^{ab}(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \langle n_a(n_b - \delta^{ab}) \rangle - f\langle n_a \rangle\langle n_b \rangle, \qquad (2.27)$$

где $\delta^{ab} = 0$ для разных a и b, и $\delta^{ab} = 1$ для $a = b$; n_a и n_b описывают множественности частиц соответствующего типа.

Зачастую пользуются условием

$$f = 1, \qquad (2.28)$$

так что интеграл от корреляционной функции (равный отношению $\overline{n}^2/k$ для отрицательного биномиального распределения [12]) обращается в нуль при пуассоновском распределении по множественности. Однако иногда используют условие

$$f = \langle n_a(n_b - \delta^{ab}) \rangle / \langle n_a \rangle\langle n_b \rangle, \qquad (2.29)$$

которое приводит к обращению интеграла в нуль даже для распределений, отличных от пуассоновского.

Чтобы сравнивать результаты разных экспериментов, мы будем использовать оба определения и, соответственно, обозначать корреляционную функцию $C_2^{ab}(y_1, y_2)$ при применении определения (2.28) или же $C'^{ab}_2(y_1, y_2)$ при определении (2.29). Кроме того, будет использоваться и приведенная форма определения (2.29):

$$\widetilde{C}_2^{ab}(y_1, y_2) = C'^{ab}_2(y_1, y_2)/\langle n_a(n_b - \delta^{ab})\rangle. \qquad (2.30)$$

Соответствующие нормированные корреляционные функции

$$K_2^{ab}(y_1, y_2) = C_2^{ab}(y_1, y_2)/f\rho_1^a(y_1)\rho_1^b(y_2) \qquad (2.31)$$

удовлетворяют соотношениям

$$K'_2 = f^{-1}(K_2 + 1) - 1 \qquad (2.32)$$

и $\widetilde{K}_2$ может быть определена как $\widetilde{K}_2 = K'_2$. Эти функции более удобны, чем C_2, когда необходимо сравнивать при разных средних множественностях. Они менее чувствительны к выборке частиц.

Корреляционные функции, определенные соотношениями (2.24) — (2.32), содержат псевдокорреляции, связанные с суммированием по событиям с различным числом заряженных частиц n и разными полуинклюзивными одночастичными плотностями $\rho_1^{(n)}$. Поэтому обычно записывают корреляционную функцию в виде

$$C_2(y_1, y_2) = C_{\text{S}}(y_1, y_2) + C_{\text{L}}(y_1, y_2), \qquad (2.33)$$

где значение $C_{\text{L}}(y_1, y_2)$ определяется отличием $\rho_1^{(n)}(y)$ от $\rho_1(y)$. При этом C_{S} связана с другими корреляциями и задается формулой

$$C_{\text{S}}(y_1, y_2) = \sum_n P_n C_2^{(n)}(y_1, y_2) = \sum_n P_n \rho_2^{(n)}(y_1, y_2) - \sum_n P_n \rho_1^{(n)}(y_1)\rho_1^{(n)}(y_2); \qquad (2.34)$$

здесь

$$P_n = \sigma_n / \sum_n \sigma_n \qquad (2.35)$$

и для каждой топологии соответствующие плотности распределений по быстроте равны

$$\rho_1^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}, \quad \rho_2^{(n)}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sigma_n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}. \qquad (2.36)$$

В нормированном виде получим

$$K_{\text{S}}(y_1, y_2) = \frac{C_{\text{S}}(y_1, y_2)}{\sum_n P_n \rho_1^{(n)}(y_1)\rho_1^{(n)}(y_2)} = \frac{\sum_n P_n \rho_2^{(n)}(y_1, y_2)}{\sum_n P_n \rho_1^{(n)}(y_1)\rho_1^{(n)}(y_2)} - 1. \qquad (2.37)$$

Соответствующим способом можно определить C'_S, $\widetilde{C}_S$ и их нормированные партнеры K'_S, $\widetilde{K}_S$, а также трехчастичные корреляторы (см, раздел 3.1.3).

Связь инклюзивных и полуинклюзивных корреляций была подробно изучена в работе [13]. Согласно (2.33) инклюзивная двухчастичная кумулянтная корреляционная функция не совпадает со средним от полуинклюзивных функций, а приобретает дополнительный вклад от флуктуаций одночастичных плотностей, так что

$$C_2(y_1, y_2) = \langle C_2^{(n)}(y_1, y_2) \rangle + \langle \Delta\rho_1^{(n)}(y_1)\Delta\rho_1^{(n)}(y_2) \rangle, \qquad (2.38)$$

где $\langle A^{(n)} \rangle = \sum_n P_n A^{(n)}$, $\Delta\rho_1^{(n)} = \rho_1^{(n)} - \rho_1$, причем $\rho_1^{(n)}$ и $C_2^{(n)}$ — плотность частиц и кумулянтная корреляционная функция для событий с n заряженными частицами.

2.1.4. *Факториальные и кумулянтные моменты.* Если заменить функцию $z(y)$ на постоянную z, то производящий функционал превращается в производящую функцию для распределения по множественности. Записав вероятность рождения n частиц P_n в виде

$$P_n = \sigma_n^{\text{excl}}/\sigma_{\text{inel}}, \qquad (2.39)$$

получим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1+z)^n =$$

$$= G^{\text{excl}}[z+1] = G^{\text{incl}}[z] = \quad (2.40)$$

$$= 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \int_{\Omega} \rho_q(y_1,\ldots,y_q)\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_q = \quad (2.41)$$

$$= 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!}\widetilde{F}_q. \quad (2.42)$$

Величины $\widetilde{F}_q$ называются ненормированными факториальными (или биномиальными) моментами

$$\langle n^{[q]} \rangle = \langle n(n-1)\ldots(n-q+1) \rangle =$$

$$= \int_{\Omega} \mathrm{d}y_1 \ldots \int \mathrm{d}y_q \rho_q(y_1,\ldots,y_q) =$$

$$= \sum_n P_n n(n-1)\ldots(n-q+1). \quad (2.43)$$

Формально соответствующая обратная формула выглядит так:

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\widetilde{F}_{k+n}}{k!}. \quad (2.44)$$

В соотношении (2.43) величина n обозначает число частиц в элементе фазового объема Ω, и усреднение проводится по всему ансамблю событий. Все интегралы берутся по одному и тому же объему Ω такому, что $y_i \in \Omega \ \ \forall i \in \{1,\ldots,q\}$. Используя кластерное разложение корреляционной функции, имеем

$$\ln G(z) = \langle n \rangle z + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{z^q}{q!} f_q. \quad (2.45)$$

Величины f_q называются ненормированными факториальными кумулянтами и известны также под названием мюллеровских моментов [7]

$$f_q = \int_{\Omega} \mathrm{d}y_1 \ldots \int_{\Omega} \mathrm{d}y_q C_q(y_1,\ldots,y_q). \quad (2.46)$$

Здесь интегрирование производится так же, как и в (2.43). Величины $\widetilde{F}_q$ и f_q легко найти, если известна $G(z)$:

$$\widetilde{F}_q = \left.\frac{\mathrm{d}^q G(z)}{\mathrm{d}z^q}\right|_{z=0}, \quad (2.47)$$

$$f_q = \left.\frac{\mathrm{d}^q \ln G(z)}{\mathrm{d}z^q}\right|_{z=0}, \quad (2.48)$$

$$P_q = \frac{1}{q!}\left.\frac{\mathrm{d}^q G(z)}{\mathrm{d}z^q}\right|_{z=-1}. \quad (2.49)$$

Используя теорему Коши, вероятность P_q можно записать также в виде

$$P_q = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{G(z)}{(1+z)^{q+1}}\mathrm{d}z, \quad (2.50)$$

где интегрирование ведется вдоль окружности вокруг точки $z = -1$. Формула (2.50) полезна при выводе относительно простых асимптотических выражений, связывающих P_q с факториальными моментами или кумулянтами [14, 7].

В качестве простого примера рассмотрим пуассоновское распределение

$$P_n = e^{-\langle n \rangle}\langle n \rangle^n / n!,$$

для которого

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1+z)^n = \exp(\langle n \rangle z), \quad (2.51)$$

откуда следует, что $f_q \equiv 0$ при $q > 1$. В этом случае имеем

$$\widetilde{F}_q = \langle n(n-1)\ldots(n-q+1) \rangle = \langle n \rangle^q. \quad (2.52)$$

Нетрудно получить выражения для интегрированных функций распределения по быстротам через кумулянтные корреляционные функции, а также обратные им:

$$1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!}\widetilde{F}_q = \exp\Big(\langle n \rangle z + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{z^q}{q!} f_q\Big), \quad (2.53)$$

$$\ln\Big(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!}\widetilde{F}_q\Big) = \langle n \rangle z + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{z^q}{q!} f_q, \quad (2.54)$$

разлагая либо экспоненту в (2.53), либо логарифм в (2.54) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z. Тогда получим [8]:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1 &= f_1, \\
\widetilde{F}_2 &= f_2 + f_1^2, \\
\widetilde{F}_3 &= f_3 + 3f_2 f_1 + f_1^3, \\
\widetilde{F}_4 &= f_4 + 4f_3 f_1 + 3f_2^2 + 6f_2 f_1^2 + f_1^4, \\
\widetilde{F}_5 &= f_5 + 5f_4 f_1 + 10f_3 f_2 + 10f_3 f_1^2 + \\
&\quad + 15f_2^2 f_1 + 10f_2 f_1^3 + f_1^5,
\end{aligned} \quad (2.55)$$

или, в общем виде,

$$\widetilde{F}_q = q! \sum_{\{l\}_q} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{f_j}{j!}\right)^{l_j} \frac{1}{l_j!}, \quad (2.56)$$

когда суммирование ведется, как в (2.15) и $\sum_{i=1}^{q} i l_i = q$. Последняя формула может быть переписана следующим образом:

$$\widetilde{F}_q = \sum_{l=0}^{q-1} \binom{q-1}{l} f_{q-l}\widetilde{F}_l, \quad (2.57)$$

(с $\widetilde{F}_0 \equiv 1$, $f_0 \equiv 0$) и удобна для компьютерных расчетов. Эквивалентное, но менее удобное соотношение было выведено Мюллером [7].

Обычные моменты

$$\mu_q \equiv \langle n^q \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^q P_n \tag{2.58}$$

можно получить из производящей функции моментов

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} P_n \tag{2.59}$$

с помощью дифференцирования

$$\mu_q = \left.\frac{\mathrm{d}^q M(z)}{\mathrm{d}z^q}\right|_{z=0}. \tag{2.60}$$

Отметим полезные соотношения

$$M(z) = G(e^z - 1), \tag{2.61}$$

$$G(z) = M(\ln(1 + z)). \tag{2.62}$$

Обычные моменты и факториальные моменты выражаются друг через друга с помощью рядов. Используя тождества [15]

$$n(n-1)\ldots(n-q+1) = \sum_{m=0}^{q} S_q^{(m)} n^m, \tag{2.63}$$

$$n^q = \sum_{m=0}^{q} \sigma_q^{(m)} n(n-1)\ldots(n-m+1), \tag{2.64}$$

где $S_q^{(m)}$ и $\sigma_q^{(m)}$ называются числами Стирлинга первого и второго рода соответственно; легко получить

$$\widetilde{F}_q = \sum_{m=0}^{q} S_q^{(m)} \mu_m, \tag{2.65}$$

$$\mu_q = \sum_{m=0}^{q} \sigma_q^{(m)} \widetilde{F}_m. \tag{2.66}$$

Кумулянты $\varkappa_q$ можно выразить через моменты μ_q аналогичным образом [16, 8]. Они подчиняются соотношениям типа (2.55). Кумулянты получаются интегрированием вида (2.46) из дифференциальных величин, известных как моменты плотности. Они обсуждаются в работах [17,18].

2.1.5. *Усредненные факториальные моменты и кумулянты.* При практической работе с ограниченной статистикой почти всегда приходится проводить усреднение по нескольким ячейкам фазового объема. Пусть Ω_m будет одной из таких ячеек (например, один быстротный интервал шириной δy). Разделим весь фазовый объем на M неперекрывающихся ячеек Ω_m размера $\delta\Omega$, не зависящего от m. Пусть n_m будет числом частиц, а ρ_m — плотностью числа частиц в ячейке Ω_m. Можно рассмотреть различные методы усреднения моментов и получить соответственно разные величины.

Здесь и в дальнейшем мы будем для определенности использовать пространство быстрот.

Вертикальные моменты получают путем следующего усреднения нормированных факториальных моментов [19, 20]:

$$F_q^{\mathrm{V}}(\delta y) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\langle n_m(n_m-1)\ldots(n_m-q+1)\rangle}{\langle n_m \rangle^q} \equiv \tag{2.67}$$

$$\equiv \frac{1}{M(\delta y)^q} \sum_{m=1}^{M} \int_{\delta y} \prod_i \mathrm{d}y_i \frac{\rho_q(y_1,\ldots,y_q)}{(\bar{\rho}_m)^q}, \tag{2.68}$$

где символ $\langle\ \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю событий. Полный быстротный интервал ΔY поделен на M равных отрезков: $\Delta Y = M\delta y$, причем каждое из y_i находится на отрезке δy, а $\langle n_m \rangle \equiv \bar{\rho}_m \delta y$.

Горизонтальные моменты определены соотношением

$$F_q^{\mathrm{H}}(\delta y) \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\langle n_m(n_m-1)\ldots(n_m-q+1)\rangle}{\langle \bar{n} \rangle^q}, \tag{2.69}$$

где

$$\bar{n}_m = \sum_m n_m/M,\ \langle \bar{n}_m \rangle = \langle n \rangle/M,\ n = \sum_m n_m.$$

Горизонтальные и вертикальные моменты одинаковы, если $M = 1$. Вертикальные моменты нормированы локальным образом и потому чувствуют только флуктуации в отдельных ячейках, а не форму одночастичных распределений. Горизонтальные моменты сильно зависят от формы одночастичных распределений по y и, кроме того, чувствительны даже к корреляциям между ячейками. Чтобы устранить эффект зависимости от конкретного вида распределения по быстроте, можно либо вводить поправочные множители [21], либо использовать "кумулятивные" переменные, с помощью которых произвольно заданное распределение превращается в плоское [22,23].

Подобным же образом усредненные нормированные факториальные кумулянтные моменты могут быть определены как

$$K_q(\delta y) = \frac{1}{M(\delta y)^q} \sum_{m=1}^{M} \int_{\delta y} \prod_i \mathrm{d}y_i \frac{C_q(y_1,\ldots,y_q)}{(\bar{\rho}_m)^q} \tag{2.70}$$

и связаны [24] с факториальными моментами соотношениями

$$F_2 = 1 + K_2,$$

$$F_3 = 1 + 3K_2 + K_3,$$

$$F_4 = 1 + 6K_2 + 3\overline{K_2^2} + 4K_3 + K_4. \tag{2.71}$$

Соотношения для моментов высших порядков см. в [24].

В моментах высшего порядка, начиная с четвертого, появляются усредненные значения степеней низших моментов. Они определены как

$$\overline{AB} \equiv \sum_m A_m B_m / M.$$

2.1.6. *Многомерные распределения.* Одномерные факториальные моменты $\widetilde{F}_q$ описывают флуктуации числа частиц в отдельных ячейках фазового объема и потому отражают только локальные свойства распределений. Больше информации можно получить, изучая корреляции между флуктуациями в двух или более ячейках (для одного и того же события). Это привело к необходимости введения многомерных факториальных моментов. При неперекрывающихся ячейках двойные факториальные моменты, которые называют также корреляторами, определяются следующим образом:

$$\widetilde{F}_{pq} = \langle n_m^{[p]} n_{m'}^{[q]} \rangle, \tag{2.72}$$

где $n_m(n_{m'})$ — число частиц в ячейке $m(m')$. Нормированный двойной коррелятор определен как [19]

$$F_{pq} = n_m^{[p]} n_{m'}^{[q]} / \widetilde{F}_p \widetilde{F}_q. \tag{2.73}$$

Ввиду ограниченности статистики эти величины обычно усредняют по многим парам ячеек, сохраняя "расстояние" (D) между ячейками в паре постоянным.

В одномерном пространстве быстрот D определено как расстояние между центрами двух быстротных интервалов; в многомерном фазовом объеме надо вводить соответствующее определение.

При таком усреднении надо иметь в виду все те проблемы (связанные с одночастичными распределениями), которые мы уже обсуждали выше в связи с обычными факториальными моментами.

Многомерные факториальные моменты хорошо известны и широко используются в радиофизике и в квантовой оптике [25]. Там они выявляют связь между одновременными измерениями чисел фотоэлектронов, детектируемых, скажем, в M интервалах или же в M точках пространства, откуда извлекается распределение вероятностей $P_M(n_1, n_2, \ldots, n_M)$. Значение многомерных моментов вытекает из того факта, что, например, в двумерном случае величина $\widetilde{F}_{11} = \langle n_m n_{m'} \rangle$ непосредственно связана с автокорреляционной функцией поля излучения и подчиняется в случае малых интервалов соотношению Зигерта [25] независимо от статистической природы этого поля. Моменты высших порядков оказываются чувствительными к более высоким корреляциям и к величине фазы поля.

Факториальные моменты и факториальные корреляторы весьма тесно связаны. В терминах инклюзивных величин имеем

$$\widetilde{F}_{pq} = \int_{\Omega_1} dy_1 \ldots dy_p \int_{\Omega_2} dy_{p+1} \ldots dy_{p+q} \times \rho_{p+q}(y_1, \ldots, y_p; y_{p+1}, \ldots, y_{p+q}), \tag{2.74}$$

где ρ_{p+q} обозначает инклюзивную плотность распределения порядка $p + q$. Интегрирование ведется по двум произвольным (возможно, перекрывающимся) ячейкам фазового объема Ω_1 и Ω_2, разделенных "расстоянием" D.

Следует отметить, что определение (2.74) более общее, нежели (2.72). При $\Omega_1 = \Omega_2$ или $D = 0$ соотношение (2.74) сводится к правильному определению $\widetilde{F}_2$, тогда как (2.72) в этом случае оказывается равным $\langle n^2 \rangle$ и не учитывает члена равного $-\langle n \rangle$.

Таким образом, факториальные моменты и факториальные корреляторы одинакового порядка, как видно, отличаются только выбором областей интегрирования. Отметим, что при $p \neq q$ определение (2.74) не симметрично по p и q и поэтому зачастую при обработке экспериментальных данных используют симметризованное выражение

$$\widetilde{F}_{pq}^{(s)} = (\widetilde{F}_{pq} + \widetilde{F}_{qp})/2. \tag{2.75}$$

Из определения (2.74) вытекает, что F_{11} непосредственно извлекается из измеренных двухчастичных корреляционных функций или из соответствующих аналитических параметризаций. Корреляторы высших порядков содержат функции распределения плотности высших порядков, которые, вообще говоря, неизвестны.

Обсудим теперь многомерные факториальные кумулянты. В случае M неперекрывающихся ячеек введем M-мерное распределение чисел частиц $P_M(n_1, \ldots, n_M)$ и соответствующие производящие функции для обычных моментов и факториальных моментов:

$$M(z_1, \ldots, z_M) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_M=0}^{\infty} e^{z_1 n_1 + \ldots + z_M n_M} P(n_1, \ldots, n_M), \tag{2.76}$$

$$G(z_1, \ldots, z_M) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_M=0}^{\infty} (1 + z_1)^{n_1} \ldots (1 + z_M)^{n_M} \times P(n_1, \ldots, n_M), \tag{2.77}$$

с помощью которых эти моменты легко получаются путем дифференцирования

$$\mu_{q_1 \ldots q_M} = \langle n_1^{q_1} \ldots n_M^{q_M} \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{q_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_M}\right)^{q_M} \times M(z_1, \ldots, z_M) \Big|_{z_1 = \ldots = z_M = 0}, \tag{2.78}$$

$$\widetilde{F}_{q_1, \ldots, q_M} = \langle n_1^{[q_1]} \ldots n_M^{[q_M]} \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{q_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_M}\right)^{q_M} \times G(z_1, \ldots, z_M) \Big|_{z_1 = \ldots = z_M = 0}. \tag{2.79}$$

Многомерные (обычные) кумулянты $\varkappa_{q_1, \ldots, q_M}$ и многомерные факториальные кумулянты $f_{q_1, \ldots, q_M}$ можно получить аналогичным способом, заменив

$M(\cdot)$ и $G(\cdot)$ в (2.78) и (2.79) их натуральными логарифмами [26]. Соотношения между многомерными моментами и кумулянтами подобны соответствующим одномерным выражениям.

В случае $M=2$ при неперекрывающихся ячейках нетрудно получить тождество (см. ур. (2.53)):

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^l(-z_2)^m}{l!m!}\tilde{F}_{lm} = \exp\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^l(-z_2)^m}{l!m!}f_{lm}\right], \tag{2.80}$$

где $\tilde{F}_{00}\equiv 1$ и $f_{00}\equiv 0$. Таким образом, имеем (см. также [27])

$$\tilde{F}_{11} = f_{11} + f_{01}f_{10}, \tag{2.81}$$

$$\tilde{F}_{12} = f_{12} + f_{01}f_{20} + 2f_{10}f_{11} + f_{01}f_{10}^2, \tag{2.82}$$

$$\tilde{F}_{13} = f_{13} + f_{01}f_{30} + 3f_{11}f_{20} + 3f_{01}f_{10}f_{20} + 3f_{10}f_{12} + 3f_{10}^2f_{11} + f_{01}f_{10}^2, \tag{2.83}$$

$$\tilde{F}_{22} = f_{22} + 2f_{10}f_{21} + f_{02}f_{20} + f_{01}^2f_{20} + 2f_{01}f_{12} + 2f_{11}^2 + 4f_{01}f_{10}f_{11} + f_{02}f_{10}^2 + f_{01}^2f_{10}^2, \tag{2.84}$$

$$\tilde{F}_{23} = f_{23} + f_{02}f_{30} + f_{01}^2f_{30} + 3f_{10}f_{22} + 3f_{20}f_{21} + 3f_{10}^2f_{21} + 6f_{01}f_{11}f_{20} + 3f_{02}f_{10}f_{20} + 3f_{01}^2f_{10}f_{20} + 2f_{01}f_{13} + 6f_{11}f_{12} + 6f_{01}f_{10}f_{12} + 6f_{10}f_{11}^2 + 6f_{01}f_{10}^2f_{11} + f_{02}f_{10}^3 + f_{01}^2f_{10}^3, \tag{2.85}$$

$$\tilde{F}_{33} = f_{33} + 3f_{10}f_{32} + 3f_{20}f_{31} + 3f_{10}^2f_{31} + f_{03}f_{30} + 3f_{01}f_{02}f_{30} + f_{01}^3f_{30} + 3f_{01}f_{23} + 9f_{11}f_{22} + 9f_{01}f_{10}f_{22} + 9f_{01}f_{20}f_{21} + 9f_{12}f_{21} + 18f_{10}f_{11}f_{21} + 9f_{01}f_{10}^2f_{21} + 9f_{02}f_{11}f_{20} + 9f_{01}^2f_{11}f_{20} + 3f_{03}f_{10}f_{20} + 9f_{01}f_{02}f_{10}f_{20} + 3f_{01}^3f_{10}f_{20} + 3f_{02}f_{13} + 3f_{01}^3f_{13} + 18f_{01}f_{11}f_{12} + 9f_{02}f_{10}f_{12} + 9f_{01}^2f_{10}f_{12} + 6f_{11}^3 + 18f_{01}f_{10}f_{11}^2 + 9f_{01}^2f_{10}^2f_{11} + f_{03}f_{10}^2 + 3f_{01}f_{02}f_{10}^3 + f_{01}^3f_{10}^3. \tag{2.86}$$

Подобным же образом, разлагая логарифм в соотношении

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^l(-z_2)^m}{l!m!}f_{lm} = \ln\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^l(-z_2)^m}{l!m!}\tilde{F}_{lm}\right] \tag{2.87}$$

по степеням s и t и приравнивая коэффициенты, получим обратные соотношения

$$f_{11} = \tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}, \tag{2.88}$$

$$f_{12} = \tilde{F}_{12} - \tilde{F}_{01}\tilde{F}_{20} - 2\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{11} + 2\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}^2, \tag{2.89}$$

$$f_{13} = \tilde{F}_{13} - \tilde{F}_{01}\tilde{F}_{20} - 3\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{20} + 6\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} - 3\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{12} + 6\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{11} - 6\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}^3, \tag{2.90}$$

$$f_{22} = \tilde{F}_{22} - 2\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{21} - \tilde{F}_{02}\tilde{F}_{20} + 2\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{20} - 2\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{12} - 2\tilde{F}_{11}^2 + 8\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{11} + 2\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}^2 - 6\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{10}^2, \tag{2.91}$$

$$f_{23} = \tilde{F}_{23} - \tilde{F}_{02}\tilde{F}_{30} + 2\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{30} - 3\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{22} - 3\tilde{F}_{20}\tilde{F}_{21} + 6\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{21} + 12\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{20} + 6\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} - 18\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} - 2\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{13} - 6\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{12} + 12\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{12} + 12\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{11}^2 - 36\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{11} - 6\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}^3 + 24\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{10}^3, \tag{2.92}$$

$$f_{33} = \tilde{F}_{33} - 3\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{32} - 3\tilde{F}_{20}\tilde{F}_{31} + 6\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{31} - \tilde{F}_{03}\tilde{F}_{30} + 6\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{30} - 6\tilde{F}_{01}^3\tilde{F}_{30} - 3\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{23} - 9\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{22} + 18\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{22} + 18\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{20}\tilde{F}_{21} - 9\tilde{F}_{12}\tilde{F}_{21} + 36\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{21} - 54\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{21} + 18\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{20} - 54\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{20} + 6\tilde{F}_{03}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} - 54\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} + 72\tilde{F}_{01}^3\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{20} - 3\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{13} + 6\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{13} + 36\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{11}\tilde{F}_{12} + 18\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{12} - 54\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{12} + 12\tilde{F}_{11}^3 - 108\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{10}\tilde{F}_{11}^2 - 54\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{11} + 216\tilde{F}_{01}^2\tilde{F}_{10}^2\tilde{F}_{11} - 6\tilde{F}_{03}\tilde{F}_{10}^3 + 72\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{02}\tilde{F}_{10}^3 - 120\tilde{F}_{01}^3\tilde{F}_{10}^3. \tag{2.93}$$

Величины $\tilde{F}_{0i}$, $\tilde{F}_{i0}$, f_{0i} и f_{i0} равны, соответственно, одномерным факториальным моментам и факториальным кумулянтам. По определению, f_{01} задает среднюю множественность в ячейке 2 и $f_{01} = \tilde{F}_{01}$.

Следует отметить, что соотношения для двумерных распределений сводятся к одномерным связям (2.55) путем простого сложения индексов. Так, например, из условия

$$\tilde{F}_{12} = f_{12} + f_{01}f_{20} + 2f_{10}f_{11} + f_{01}f_{10}^2 \tag{2.94}$$

легко получить путем такого суммирования

$$\tilde{F}_3 = f_3 + 3f_1f_2 + f_1^3. \tag{2.95}$$

Как показано в [8] (см. там раздел 13.12), выписанные выше соотношения, хотя и кажутся довольно сложными, обладают, в действительности, весьма элегантной структурой, кроющейся в простых алгебраических свойствах полностью симметричных функций. Более детальное обсуждение этих вопросов, а также других полезных свойств можно найти в работе [26].

Обобщение на случай большего числа ячеек не представляет принципиальных трудностей, но приводит к несколько усложненным алгебраическим вы-

ражениям.

2.2. Подавление пуассоновского шума. Для того чтобы выявить чисто динамические флуктуации в плотности частиц, рожденных в процессах взаимодействий при высоких энергиях, надо разработать метод устранения или хотя бы максимально возможного подавления статистических флуктуаций, связанных с конечностью числа частиц, попадающих в ту или иную ячейку фазового объема. Этому требованию можно удовлетворить в достаточной степени, исследуя факториальные моменты и их многомерные обобщения. Это предложение составляет основу метода, предложенного впервые для изучения процессов множественного рождения Бяласом и Пещанским [19, 20].

Метод основан на предположении, что многомерное распределение $P_M(n_1,...,n_M)$ можно записать в виде

$$P_M(n_1,...,n_M) = \int d\rho_1 \ldots d\rho_M P_\rho(\rho_1,...,\rho_M) \times \times \prod_{m=1}^{M} \frac{(\rho_m\delta)^{n_m}}{n_m!} \exp(-\rho_m\delta). \quad (2.96)$$

Пуассоновский множитель отвечает некоррелированным флуктуациям n_m относительно среднего значения $\rho_m\delta = \langle n_m \rangle$ в m-ом интервале (δ обозначает здесь размер интервала). Это выражение можно также переписать в виде

$$P_M(n_1,...,n_M) = \langle \prod_{m=1}^{M} \frac{\langle n_m \rangle^{n_m}}{n_m!} \exp(-\langle n_m \rangle) \rangle_\rho, \quad (2.97)$$

где внешние скобки указывают на усреднение по ансаблю плотностей ρ_m, учитывающее только динамические флуктуации. Формулы (2.96), (2.97) формально совпадают с выражениями для многомерных распределений плотности вероятности числа фотоэлектронов в квантовой оптике. Они основаны на известной формуле Манделя [28, 29], связывающей распределение вероятностей данного числа фотоэлектронов с распределениями интенсивности поля.

В оптике величина ρ_m пропорциональна интегральной интенсивности электромагнитного поля в данной пространственной (или временной) ячейке. Усреднение по ансамблю проводится с помощью матрицы плотности поля.

Уравнения (2.96), (2.97) представляют $P_M(n_1,..., n_M)$ в виде линейного преобразования $P_\rho(\rho_1,...,\rho_M)$ с "пуассоновским ядром". Это преобразование известно [30] под названием "пуассоновского образа" распределения P_ρ.

Из уравнения (2.97) легко получить, что производящая функция многомерных факториальных моментов имеет простой вид

$$G(z_1,...,z_M) = \langle \prod_{j=1}^{M} \exp(z_j\rho_j\delta) \rangle_\rho, \quad (2.98)$$

где статистическое усреднение проводится по ансамблю плотностей $\rho_1,...,\rho_M$, что и указано с помощью индекса ρ у знака усреднения.

С другой стороны, производящая функция обычных моментов может быть записана в виде

$$Q(z_1,...,z_M) = \int P_\rho(\rho_1,...,\rho_M) \times \times \exp(\rho_1 z_1 + \ldots + \rho_M z_M) d\rho_1 \ldots d\rho_M = \quad (2.99)$$

$$= \langle \prod_{j=1}^{M} e^{\rho_j z_j} \rangle_\rho. \quad (2.100)$$

Сравнивая (2.98) и (2.100), имеем

$$G(z_1,...,z_M) = Q(d\rho_1 z_1,...,d\rho_M z_M). \quad (2.101)$$

Из этого соотношения следует, что нормированные многомерные факториальные моменты распределений по множественности

$$F_{q_1 \ldots q_M} = \widetilde{F}_{q_1 \ldots q_M} / (\langle n_1 \rangle^{q_1} \ldots \langle n_M \rangle^{q_M}) \quad (2.102)$$

равны обычным нормированным многомерным моментам флуктуаций относительной плотности $\rho_m / \langle \rho_m \rangle$. Это утверждение и составляет основу метода "подавления шума", использованного Бяласом и Пещанским.

Эта теорема основана на предположении о пуассоновском характере шума (см. (2.96)) при неограниченном числе отсчетов во всех интервалах (а значит, при бесконечно большой множественности).

Если множественность (сумма отсчетов по всем интервалам) конечна, то нетрудно получить несколько более сложное соотношение при бернуллиевском распределении для шума [19].

Именно за счет свойства подавления пуассоновского шума изучение факториальных моментов превратилось в стандартный метод анализа экспериментальных распределений, например, в квантовой оптике, с целью выявления статистических свойств произвольных конфигураций электромагнитного поля по распределениям отсчетов фотонов. Их практическая ценность была явно продемонстрирована для одномерного случая Бедардом [31] и Чангом и др. [4], а позже этот метод был обобщен на многомерные распределения Кантреллом [26]. Чанг и др. подчеркивают также преимущества факториальных кумулянтов по сравнению с факториальными моментами, поскольку они отражают истинные корреляции, тогда как моменты содержат большие дополнительные комбинаторные члены, которые могут замаскировать основополагающие динамические корреляции (см., однако, обсуждение в разделе 2.1.2).

Многомерные факториальные кумулянты можно получить из производящей функции, содержащей

натуральные логарифмы факториальных моментов. Логарифмируя обе стороны соотношения (2.101), найдем, что многомерные нормированные факториальные кумулянты распределения чисел частиц равны многомерным нормированным обычным кумулянтам плотностей $[\rho\delta]$. Это утверждение расширяет "теорему" Бляласа — Пещанского на кумулянты. Оно широко известно и используется во многих областях, начиная от квантовой оптики [26] до радио- и астрофизики (см., например, [32]).

2.3. Правила сумм. Существуют интересные соотношения между факториальными моментами разных размерностей. Например, в физике частиц такие соотношения были получены [33] при изучении так называемой α-модели (см. раздел 4.2.3). Независимо от размерности фазового объема можно установить следующую связь

$$F_{11}(D) = 2F_2(2D) - F_2(D) \tag{2.103}$$

между коррелятором $F_{11}(D,\delta)$ (если он не зависит от интервала δ в области $\delta < D \le \delta_0$, D — расстояние между интервалами) и одномерными факториальными моментами.

Соотношения такого типа — правила сумм — хорошо известны в оптике с начала 70-х годов. Они используются при анализе многих экспериментов (см., например, [34, 35] и ссылки там).

Рассмотрим вновь многомерное распределение множественности $P_M(n_1,\ldots,n_M)$, дающее вероятность появления n_1 частиц в ячейке $\Omega_1,\ldots$, а n_M частиц в ячейке Ω_M для $\Omega_i \cap \Omega_j = 0$, $\forall\, i, j$ и $i \ne j$. Пусть n обозначает число частиц, зарегистрированных во всем объеме, содержащем M ячеек:

$$n = \sum_{m=1}^{M} n_m\,. \tag{2.104}$$

Распределение вероятности данного значения n дается выражением

$$P(n) = \sum_{n_1=0}^{n} \ldots \sum_{n_M=0}^{n} p_M(n_1,\ldots,n_M)\delta_{n,n_1+\ldots+n_M}\,. \tag{2.105}$$

Определим производящую функцию одномерных факториальных моментов, как

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+z)^n P(n). \tag{2.106}$$

Функцию $g(z)$ можно выразить через многомерную производящую функцию (2.77):

$$g(z) = G_M(z_1,\ldots,z_M)\Big|_{z_1=z_2=\ldots=z_M=z}. \tag{2.107}$$

Это соотношение позволяет выразить одномерные факториальные моменты через многомерные. Применяя правило Лейбница

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k f(z) = \sum_{\{a_j\}} \frac{k!}{a_1!a_2!\ldots a_k!} \times$$
$$\times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{a_1} f_1(z)\ldots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{a_k} f_M(z)$$

к функции

$$f(z) = f_1(z)\ldots f_M(z),$$

получим немедленно соотношение

$$\widetilde{F}_q = \sum_{\{a_j\}} \widetilde{F}^{(M)}_{a_1\ldots a_M} \frac{q!}{a_1!\ldots a_M!}. \tag{2.108}$$

Здесь суммирование проводится по всем наборам $\{a_j\}$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющим условию

$$\sum_{j=1}^{M} a_j = q.$$

Формулу (2.108) можно рассматривать как обобщение обычной полиномиальной теоремы на факториальные моменты.

Точно таким же способом, взяв натуральные логарифмы от обеих частей соотношения (2.107), легко получить связь между одномерными и многомерными факториальными кумулянтами, которая оказывается идентичной соотношению (2.108).

В качестве примера приведем формулы в случае двух интервалов быстрот ($M = 2$) размером δ, разделенных расстоянием D:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_2 &= \widetilde{F}^{(2)}_{02} + 2\widetilde{F}^{(2)}_{11} + \widetilde{F}^{(2)}_{20}\,,\\
\widetilde{F}_3 &= \widetilde{F}^{(2)}_{03} + 3(\widetilde{F}^{(2)}_{12} + \widetilde{F}^{(2)}_{21}) + \widetilde{F}^{(2)}_{30}\,,\\
\widetilde{F}_4 &= \widetilde{F}^{(2)}_{04} + 4(\widetilde{F}^{(2)}_{13} + \widetilde{F}^{(2)}_{31}) + 6\widetilde{F}^{(2)}_{22} + \widetilde{F}^{(2)}_{40}\,.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Факториальные моменты $\widetilde{F}_{0i}$ определяются из распределений в отдельных ячейках, тогда как факториальные моменты $\widetilde{F}_q$ связаны с суммарным отсчетом в двух ячейках.

Соотношение (2.103), полученное в работе [33], непосредственно вытекает из (2.109), если рассмотреть две соседние ячейки и правильно учесть нормировку. Поскольку вывод уравнения (2.108) проводился при весьма общих условиях, оно верно для пространства любой размерности.

Соотношения (2.109) нетрудно обобщить на случай большего числа ячеек. Таким образом, можно изучать поведение корреляторов высших порядков, меняя расстояния между ячейками. В оптике и радиофизике такие соотношения обычно используются при исследованиях свойств пространственной когерентности произвольного электромагнитного поля.

2.4. Законы подобия. В дальнейшем мы будем подробно рассматривать законы подобия для факториальных моментов (2.67) для факториальных мо-

ментов в процессах множественного рождения частиц. Такое скейлинговое поведение обычно связывают с понятиями о перемежаемости и фрактальности, которые мы определим в этом разделе, применим к анализу экспериментальных данных в разделе 3 и обсудим несколько подробнее в разделе 4.

Свойство перемежаемости определяется формально математически именно в виде скейлингового поведения факториальных моментов (2.67) как функций размера ячейки δy при достаточно малой величине ячейки:

$$F_q^V(\delta y) \sim (\delta y)^{-\phi_q} \ (\delta y \to 0), \tag{2.110}$$

где $\phi_q > 0$ — постоянная величина при заданном значении q.

Степенные зависимости типичны для фракталов [36, 37], т.е. для самоподобных объектов с нецелочисленной размерностью. Примеры таких объектов можно найти как среди чисто математических конструкций (Канторово множество, кривая Кох, ковер Серпинского и т.д.), так и среди реальных объектов в природе (береговые линии, облака, легкие, полимеры и т.п.). Обзорные статьи по этой теме см., например, в [38—41].

Фрактальная размерность D_F определяется как величина, при которой остается конечным произведение минимального числа гиперкубов $N(\varepsilon)$ с линейным размером $l = \varepsilon$ (определение Колмогорова) или $l \le \varepsilon$ (определение Хаусдорфа), покрывающих заданный объект, на фактор ε^{D_F} в пределе $\varepsilon \to 0$:

$$0 < \lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon)\varepsilon^{D_F} < \infty. \tag{2.111}$$

Это определение может стать более понятным физикам, если его записать как связь между размером объекта l и его массой M в виде закона подобия

$$M \sim l^{D_F}, \tag{2.112}$$

подчеркнув при этом, что тот же закон справедлив и для подсистем внутри данного объекта, т.е. при $l \to 0$ для каждой точки в этом объекте. Для привычных всем однородных объектов фрактальная размерность совпадает с топологической размерностью (например, для линий $D_F = 1$, для плоских фигур $D_F = 2$ и т.д.).

Вероятность $p_i(l)$ находиться в гиперкубе $N_i(l)$ пропорциональна l^{D_F} при малых l. Поэтому сумма моментов на фрактале равна

$$\sum_i p_i^q(l) \sim l^{qD_F} \ (D_F = \text{const}). \tag{2.113}$$

Дальнейшее расширение понятия фрактальности состоит в изучении мультифракталов, для которых выполняется условие

$$\sum_i p_i^q(l) \sim l^{\phi(q)}, \tag{2.114}$$

где

$$\phi(q) = qD_{q+1}. \tag{2.115}$$

Величины D_{q+1} называются размерностями Реньи [42] или обобщенными размерностями и зависят от q (вообще говоря, для мультифракталов они являются убывающими функциями q).

Иногда удобно описывать мультифракталы не их размерностями, а их спектральными свойствами, фактически указывающими, с каким весом та или иная фрактальная размерность представлена в данном мультифрактале. Для этого сгруппируем все гиперкубы с сингулярностью типа α (т.е. те, для которых $p_i(l) \sim l^\alpha$ при $l \to 0$) в набор $S(\alpha)$, где α называется локальной размерностью. Число гиперкубов $dN_\alpha(l)$, принадлежащих $S(\alpha)$, равно

$$dN_\alpha(l) \sim d\rho(\alpha) l^{-f(\alpha)}, \tag{2.116}$$

где $f(\alpha)$ является фрактальной размерностью набора $S(\alpha)$, соответствующей его размерности Реньи. Для суммы моментов получим

$$\sum_{i=1}^{N_i(l)} p_i^q(l) \sim \int d\rho(\alpha) l^{\alpha q - f(\alpha)}. \tag{2.117}$$

Отсюда, используя метод перевала, легко получить

$$D_q = \frac{1}{q-1} \min_\alpha (\alpha q - f(\alpha)) = \\ = \frac{1}{q-1}(\bar{\alpha} q - f(\bar{\alpha})) \tag{2.118}$$

с $\bar{\alpha}$, определяемой условием

$$\frac{df}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}} = q(\bar{\alpha}). \tag{2.119}$$

Понятие размерности Реньи D_q включает, как частные случаи, фрактальную размерность $D_0 = D_F$, информационную размерность D_1 и корреляционную размерность $D_2 = \nu$. Поэтому D_q часто называют обобщенной размерностью. Разность между обычной топологической размерностью D и размерностью Реньи называется аномальной размерностью (или коразмерностью)

$$d_q = D - D_q. \tag{2.120}$$

Мультифрактальный анализ широко используется в различных областях физики (см., например, [38—41]).

3. Обзор экспериментальных данных.

3.1. Двухчастичные корреляции.

3.1.1. *Быстротные корреляции.* Изучение корреляционных эффектов в процессах рождения частиц служит источником информации о динамике, дополняющей сведения, полученные из одночастич-

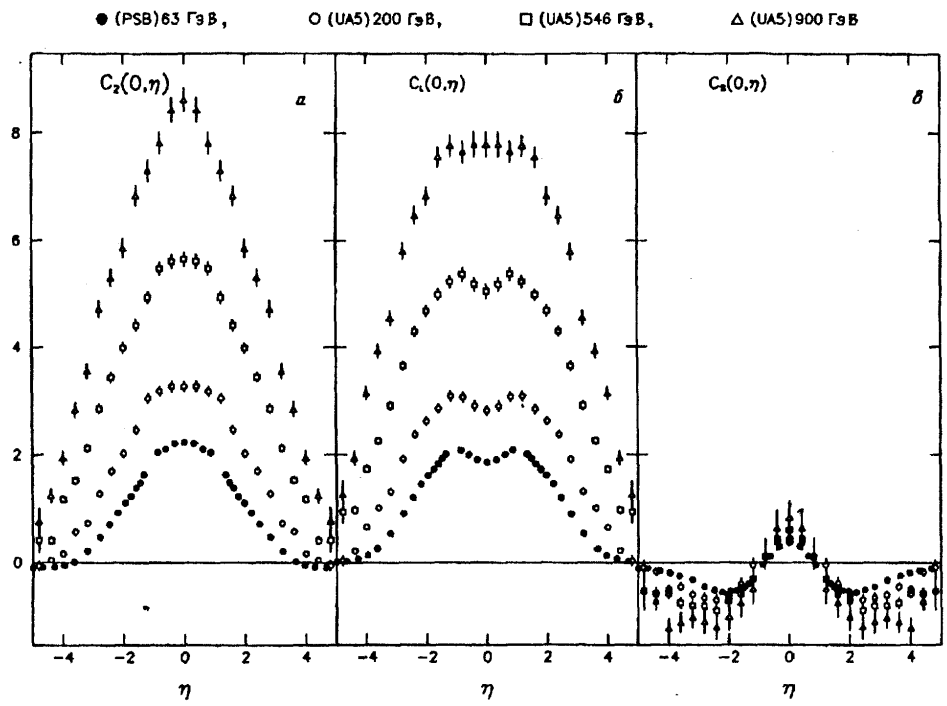

Рис. 1. *а* — Корреляционная функция $C_2(\eta_1, \eta_2)$ для заряженных частиц при фиксированном $\eta_1 = 0$ в функции от $\eta_2 = \eta$ при энергиях 63, 200, 546 и 900 ГэВ. *б* — "Дальнодействующие" корреляции C_L. *в* — Вклад короткодействующих корреляций C_S [45]

ных инклюзивных распределений. Быстротные корреляции, определенные в соответствии с соотношениями, описанными в разделе 2.1, использовались в многочисленных экспериментах по соударениям адронов с адронами и ядрами, лептонов с адронами и ядрами, e^+e^- и ядер с ядрами при высоких энергиях. В том или ином виде наблюдались сильные корреляции рожденных частиц по быстроте, зависящие от конкретного выбора вида корреляционной функции, типа взаимодействия, сорта частиц, рассматриваемой кинематической области и т.п. Ранние обзоры см., например, в [43, 44].

Недавний рост интереса к быстротным корреляциям связан с изучением их поведения при очень малых быстротных интервалах, которое связывают с явлением перемежаемости и свойством фрактальности, определенными в разделе 2.4 и обсуждаемыми подробнее в разделах 3.2 и 4.2.2.

3.1.1-1. Корреляции в адрон-адронных процессах. — На рис. 1 приведена двухчастичная псевдобыстротная корреляционная функция $C_2(\eta_1, \eta_2)$, заданная выше соотношением (2.24) и определяющая зависимость корреляций от псевдобыстроты $\eta_2 = \eta$, когда псевдобыстрота первой частицы фиксирована: $\eta_1 = 0$. Энергии сталкивающихся протонов и антипротонов изменялись в интервале от $s^{1/2} = 63$ до 900 ГэВ [45]. Видно, что $C_2(0, \eta)$ сильно зависит от энергии. В то же время ближние корреляции C_S, определенные согласно (2.34), если и зависят от энергии, то очень слабо, а ширина корреляционного пика при этом составляет около 2 единиц по оси псевдобыстрот. Как подчеркивалось выше, функция C_L не представляет истинно двухчастичных корреляций, а определяется различием одночастичных распределений при разных числах рожденных частиц. Как видно из рис. *1,б*, C_L заметно шире, нежели C_S, и быстро растет с энергией (данные при 63 ГэВ взяты из работы [46]).

Полуинклюзивные корреляции $C_2^{(n)}(\eta_1, \eta_2)$ для $p\bar{p}$-соударений при 900 ГэВ [47], приведенные на рис. 2, сравниваются там с результатами монтекарловских расчетов по моделям GENCL (кластерная модель, предложенная коллаборацией UA5) [48], FRITIOF2 [49] и PYTHIA (модели Лундской группы) [50] в интервале множественностей заряженных частиц $34 \le n \le 38$. Кластерная модель была специально разработана, чтобы фитировать эти короткодействующие корреляции. Вместе с тем видно, что и FRITIOF2 оказывается способной довольно хорошо описывать их. Однако в разделе 3.2 мы увидим, что это согласие с опытом совершенно случайно и не сохраняется ни при бо́льших, ни при меньших множественностях.

При более низкой энергии $s^{1/2} = 26$ ГэВ коллаборация NA23 [51] изучала короткодействующие корреляции заряженных частиц в pp-соударениях с помощью функции $K_2(y_1, y_2)$, определенной согласно (2.31). Использовались только события с зарядовой множественностью $n \ge 6$. Положительные короткодействующие корреляции согласуются с найденны-

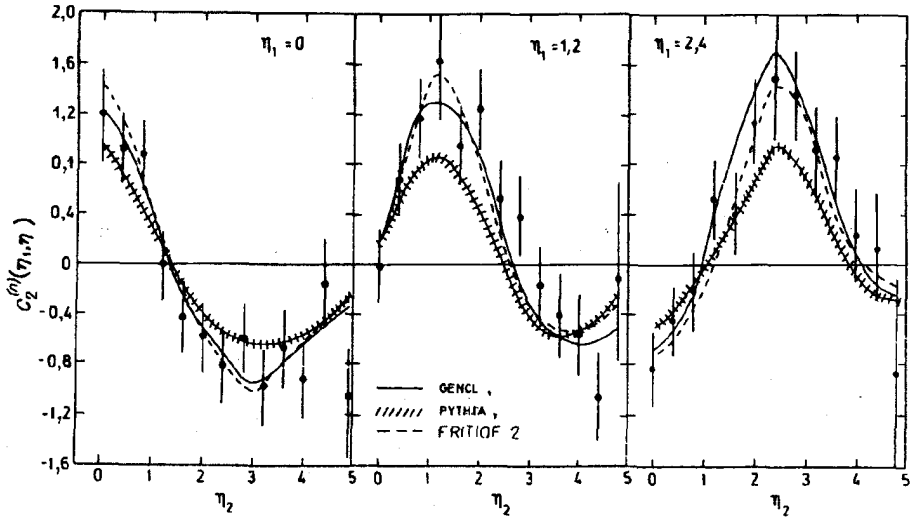

Рис. 2. Полуинклюзивная корреляционная функция $C_2^{(n)}(\eta_1, \eta_2)$ для $34 \le n \le 38$ в $p\bar{p}$-столкновениях при 900 ГэВ, сопоставленная с кластерной моделью GENCL, моделями PYTHIA и FRITIOF2 [47]

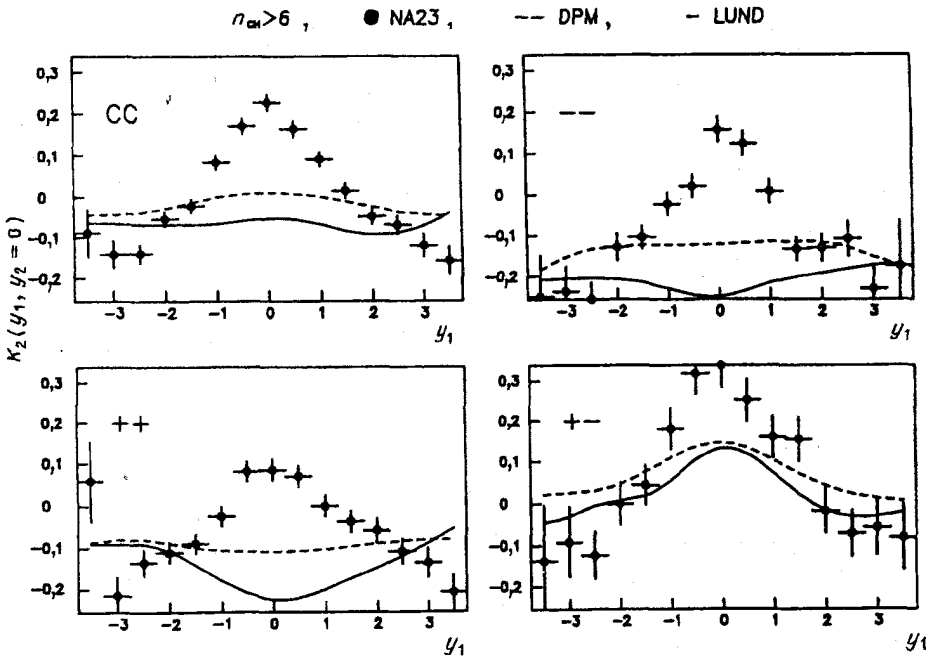

Рис. 3. Нормированная корреляционная функция $K_2(y_1, y_2 = 0)$ для комбинаций (cc), (– –), (+ +) и (+ –) при $n \ge 6$ в pp-соударениях при 360 ГэВ/c, сопоставленная с моделями LUND с одной струной и DPM с двумя струнами [51]

ми ранее при $s^{1/2} = 53$ Гэв [52].

Данные группы NA23 сравниваются на рис. 3 с моделью LUND (с разрывом лишь одной струны [53, 54]) и двухлестничной моделью DPM [55]. Модель с одной струной (без излучения глюонов) совершенно не может описать короткодействующие быстротные корреляции, наблюдаемые на опыте. Модель двух "лестниц" оказывается несколько лучше, но все-таки не достаточно хорошей. Ситуация улучшается, но не становится все же полностью удовлетворительной при перенормировке теоретических монтекарловских событий таким образом, чтобы описать экспериментальное распределение по множественности (мы не приводим соответствующего графика). Влияние бозе-эйнштейновских корреляций в данных для (+ +)- и (– –)-пар оказывается несущественным. Ясно, что необходимо большее число "лестниц" (возможно, с бо́льшими p_T), чтобы объяснить короткодействующие корреляции с помощью таких моделей даже в области энергий ниже $s^{1/2} \approx 30$ ГэВ.

Результаты, полученные коллаборацией NA22 для $C_2(0, y_2)$ и $\tilde{C}_2(0, y_2)$ в π^+p- и K^+p-соударениях при $s^{1/2} = 22$ ГэВ [56], сравниваются с предсказаниями моделей FRITIOF2, двухлестничной DPM и

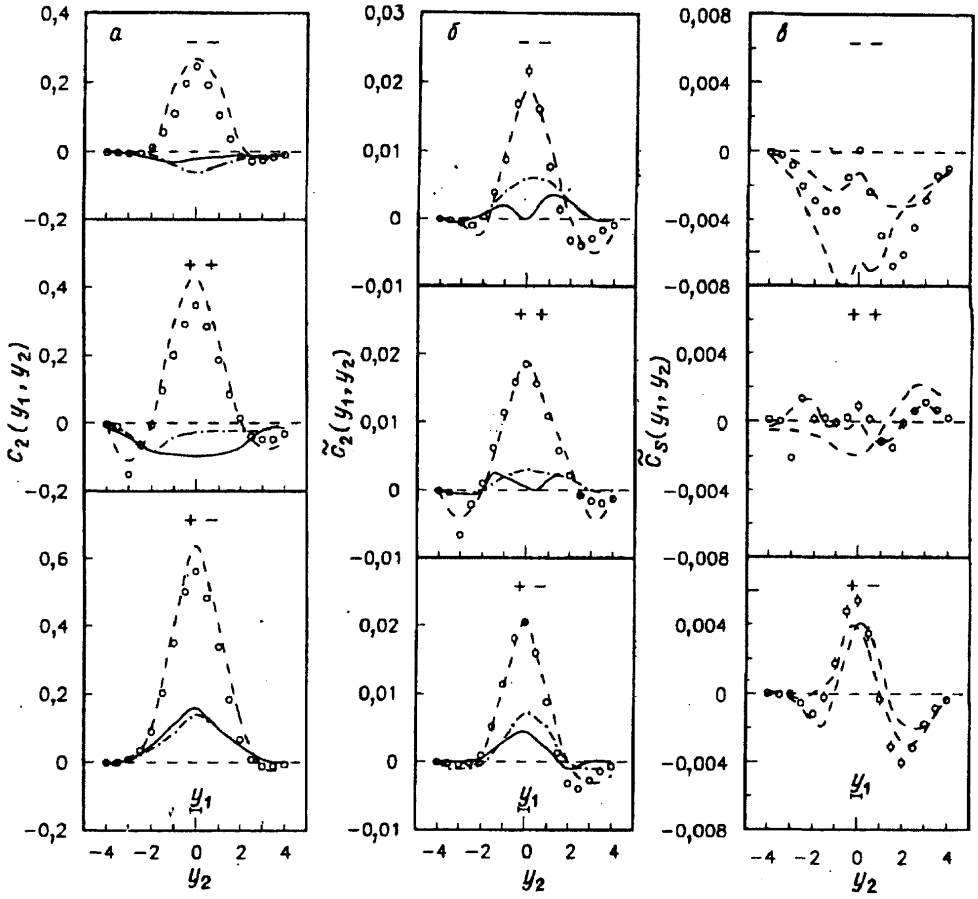

Рис. 4. *а, б* — Корреляционные функции $C_2(0, y)$ и $\tilde{C}_2(0, y)$ для M^+p-реакций, сопоставленные с расчетами по FRITIOF (кривая с точками). DPM (сплошная кривая) и QGSM (пунктир) (без однократной дифракции). *в* — Корреляционные функции $\tilde{C}_S(0, y_2)$ для M^+p-реакций в сравнении с FRITIOF (с точками) и QGSM (пунктир) [56]

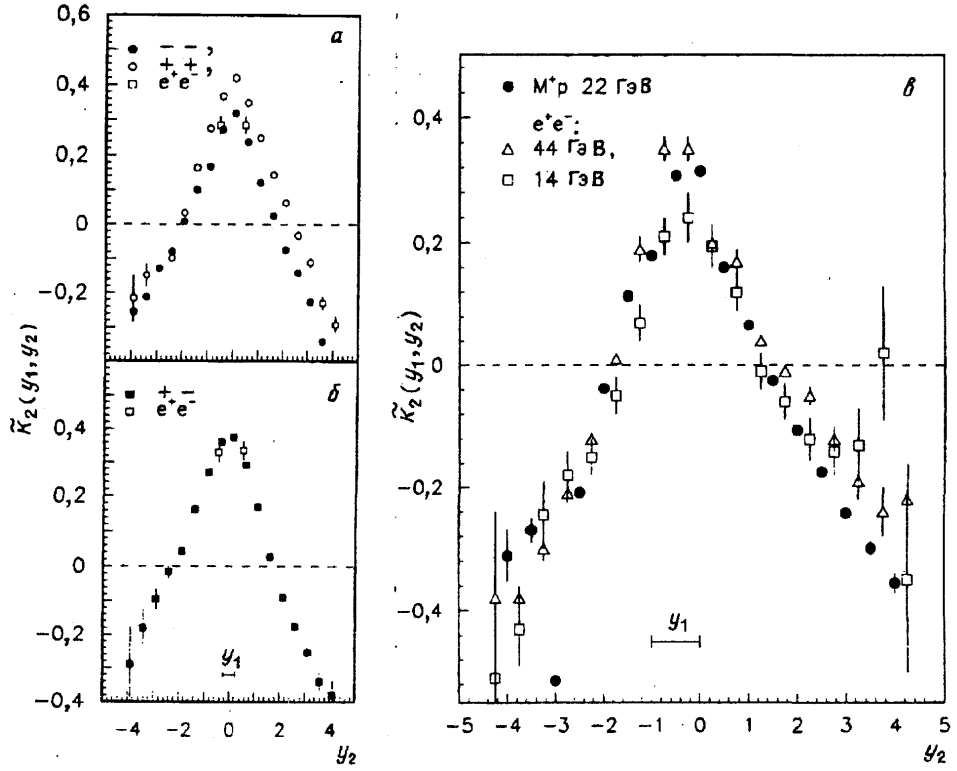

Рис. 5. *а, б* — Нормированные корреляционные функции $\tilde{K}_2(0, y)$ для M^+p-реакций (без однократной дифракции) и e^+e^--аннигиляции при $s^{1/2} = 22$ ГэВ. *в* — Нормированная корреляционная функция $\tilde{K}_2^{cc}(y_1, y_2)$ при $y_1 = -1 \div 0$ в M^+p-реакции (без однократной дифракции) при 22 ГэВ и e^+e^--аннигиляции при 14 и 44 ГэВ [56]

QGSM [57, 58] на рис. 4,*а*,*б*. FRITIOF и DPM дают заметно заниженные значения корреляций. QGSM воспроизводит $C_2^{--}(0, y_2)$ достаточно хорошо и приводит даже к несколько большим значениям для $C_2^{++}(0, y_2)$ и $C_2^{+-}(0, y_2)$. Было проверено, что это отличие QGSM от FRITIOF и DPM не связано с тем, что в двух последних учитываются и тензорные мезоны.

На рис. 4,*в* проведено сравнение FRITIOF и QGSM с данными NA22 о короткодействующем вкладе в корреляции $\widetilde{C}_S(0, y_2)$. Обе модели довольно хорошо воспроизводят короткодействующие корреляции для (+ –)-пар. Однако в случае одинаковых зарядов эксперимент не подтверждает наличия сильной антикорреляции, ожидаемой согласно FRITIOF. В модели QGSM появляется небольшая корреляция для пар с одинаковым зарядом за счет учета кластеров, но ее величина все же оказывается недостаточно большой. Эти заключения справедливы для каждой комбинации зарядов и при разных множественностях (мы не приводим здесь соответствующих графиков). Более того, описание полуинклюзивных распределений оказывается заметно хуже, нежели инклюзивных, даже в рамках модели QGSM.

Итак, используемые сейчас монтекарловские версии разных моделей взаимодействий с малыми поперечными импульсами обычно занижают величину двухчастичных корреляций в адрон-адронных столкновениях.

3.1.1-2. Корреляции в e^+e^- и μ^+p-соударениях. — На рис. 5,*а*,*б* мы сопоставляем корреляционную функцию $\widetilde{K}_2(0, y)$ для набора M^+p (M — мезон) данных $n \geq 2$ группы NA22 без учета неупругих однократных дифракционных процессов [56] с соответствующими данными для e^+e^--аннигиляции [59] при той же энергии ($s^{1/2} = 22$ ГэВ). В мезон-протонных процессах значения $\widetilde{K}_2(0, y)$ для (+ +)-пар оказываются больше, чем для (– –)-пар. Корреляции в e^+e^--аннигиляции в центральной области согласуются по величине с соответствующими корреляциями для (– –) и (+ –)-пар в M^+p-процессах.

На рис. 5,*в* проведено сравнение корреляционных функций для e^+e^--аннигиляции и недифракционных M^+p-взаимодействий во всей кинематической области при $y_1 = -1 \div 0$ для пар заряженных частиц (сс). Данные для e^+e^--процессов [59] получены при энергиях $s^{1/2} = 14$ и 44 ГэВ. Корреляции в M^+p при 22 ГэВ и $y_1 = y_2$ оказываются лежащими между соответствующими результатами в e^+e^-, но их форма более симметрична, нежели для e^+e^-.

Рис. 6 сопоставляет корреляционную функцию $K_2(y_1, y_2)$ при $y_1 = -0{,}5 \div 0{,}5$ для μ^+p-взаимодействий при лаб. энергии 280 ГэВ в области энергий адронной системы $13 < W < 20$ ГэВ и $n \geq 3$ [60] с соответствующими результатами для недифракционных M^+p-событий ($n \geq 2$), полученных группой NA22 [56]. Корреляции в μ^+p кажутся несколько меньшими, чем для NA22, но следует учитывать возможную энергетическую зависимость. Действительно, экстраполируя зависимость от энергии для $K_2(0, 0)$, приведенную в работе [60], можно ожидать и в случае μ^+p при энергии 22 ГэВ таких же значений корреляции, что и в данных NA22.

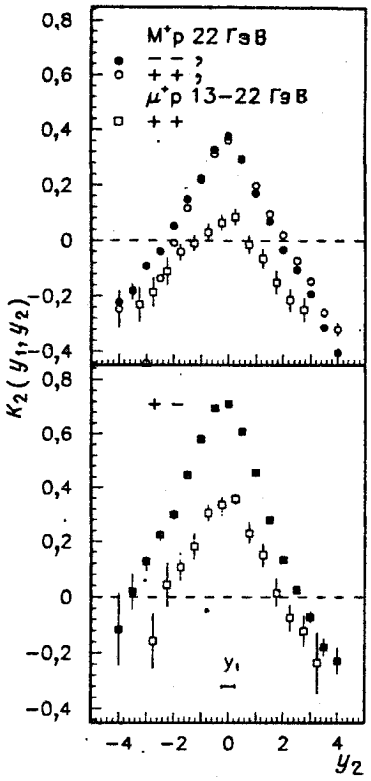

Рис. 6. Нормированные корреляционные функции $K_2(0, y)$ для M^+p-реакции (без однократной дифракции) и μ^+p-взаимодействий при 280 ГэВ/с ($13 < W < 22$ ГэВ) [60]

Большинство экспериментальных распределений в e^+e^- [59,61] и μ^+p-соударениях [60,62,63] достаточно хорошо описываются моделями типа LUMD. Учет как мягких, так и жестких глюонов в модели приводит к хорошему согласию с экспериментом [51]. Однако все же заметна некоторая недооценка значений $K_2(y_1, y_2)$ как в центральной области, так и в области фрагментации тока. Это наглядно демонстрируется на рис. 7 для e^+e^--данных [61], где $K_2(y_1, y_2)$ сравнивается с моделью LUND (JETSET 7.2 PS) в функции от $y_1 - y_2$ (штриховая линия) как для полного набора событий (верхние кривые), так и для набора двухструйных событий (нижние кривые). Во всех случаях модель LUND дает несколько заниженные значения корреляций при $y_1 - y_2 = 0$. Вообще говоря, разногласие уменьшается при учете бозе-эйнштейновских корреляций (сплошные линии).

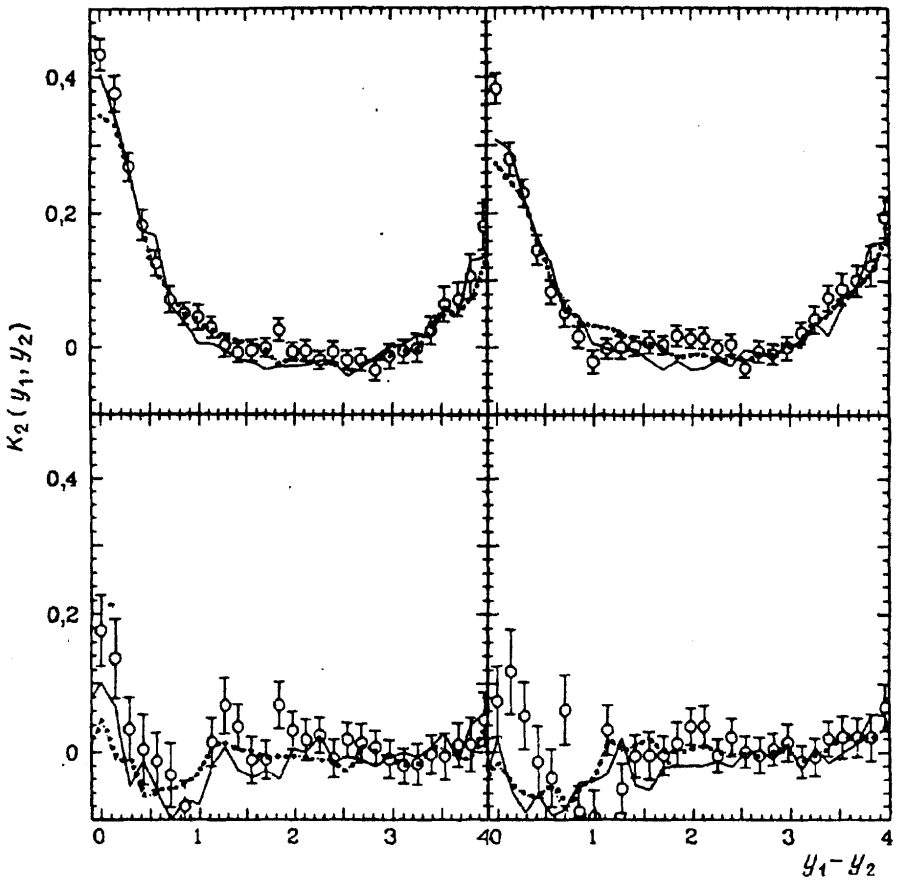

Рис. 7. Нормированные корреляционные функции $K_2(y_1, y_2)$ для полного набора событий (верхние графики) и для двухструйных событий (нижние графики). Слева приводятся данные, усредненные по области $-1 \le y_1 + y_2 \le 0$, справа — по области $0 \le y_1 + y_2 \le 1$. Данные (кружки) сопоставляются с моделью JETSET 7.2 PS с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктир) бозе-эйнштейновских корреляций [61]

Однако основной эффект остается—корреляции намного слабее в двухструнных событиях (нижние кривые), нежели в полном наборе событий (верхние кривые). Более того, корреляции оказываются наибольшими для $y \le 0$ (график слева), т.е. в полусфере, противоположной самой энергичной струе (сравни с графиком справа для $y > 0$). Эти два факта еще раз подчеркивают, что излучение жесткого глюона является основным источником двухчастичных корреляций в e^+e^--соударениях.

В связи с проблемами описания корреляций между частицами одинакового заряда в адрон-адронных процессах с помощью моделей адронизации путем развала струн, было бы важно сопоставить по отдельности (+ –)- и (+ +)-, (– –)-комбинации с предсказаниями моделей e^+e^--аннигиляции.

3.1.1-3. Зависимость от знака заряда. — Зарядовая зависимость C_s и $\tilde{C}_s$ показана на рис. 8 для комбинаций (– –), (+ +) и (+ –) в данных группы NA22 [56]. Короткодействующие корреляции заметно сильнее для пар (+ –) по сравнению с комбинациями (– –) и (+ +). Возможным источником этого различия могут служить распады резонансов. Для случая одинаковых зарядов, где видно небольшое превышение в точке $y_1 \approx y_2 \approx 0$ над большим отрицательным фоном, можно заподозрить бозе-эйнштейновскую интерференцию в качестве возможного источника такого эффекта.

3.1.1-4. Зависимость от множественности. — Зависимость $\tilde{C}_2^{(n)}(0, y)$ от числа заряженных частиц для (+ –) пар показана на рис. 9 [56]. Максимум при $y = 0$ приблизительно напоминает гауссову кривую и становится уже с ростом n. На рис. 10,*а* приведены значения $\tilde{C}_2^{(n)}(0, 0)$ при разных n для всех трех комбинаций зарядов. В пределах ошибок измерения $\tilde{C}_2^{(n)}(0, 0)$ не зависят от n, но оказываются заметно большими для (+ –) и (– –) по сравнению с (+ +) парами. Причина отличия (– –) и (+ +), возможно, связана с положительным знаком заряда как у налетающей частицы, так и у частицы мишени.

В то же время обнаружен [64] рост величины $\tilde{C}_2^{(n)}(|\eta_1 - \eta_2|)$ с увеличением $1/(n - 1)$ при усреднении по области псевдобыстрот $|\eta| < 2$ (см. рис. 10,*б*). Поскольку $\tilde{C}_2$ уменьшается при удалении от центра на оси быстрот и это происходит быстрее при большем числе частиц n, две описанных закономерности, возможно, и не противоречат друг другу.

3.1.1-5. Зависимость корреляционной функции от поперечного импульса. — Нормированная корреляционная функция $K_2(0, y_2)$

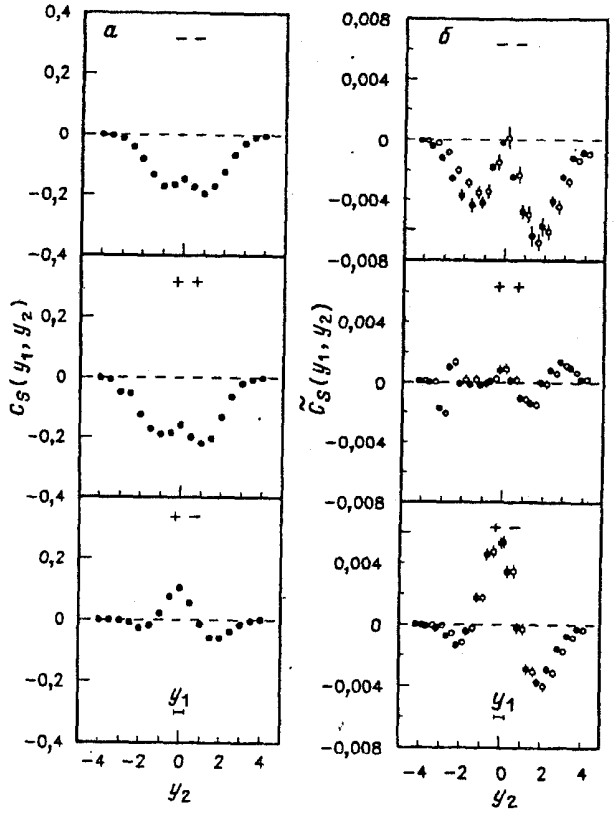

Рис. 8. Корреляционные функции $C_S(0, y)$ (*а*) и $\tilde{C}_S(0, y)$ (*б*) в M^+p-взаимодействиях при 250 ГэВ/с [56]

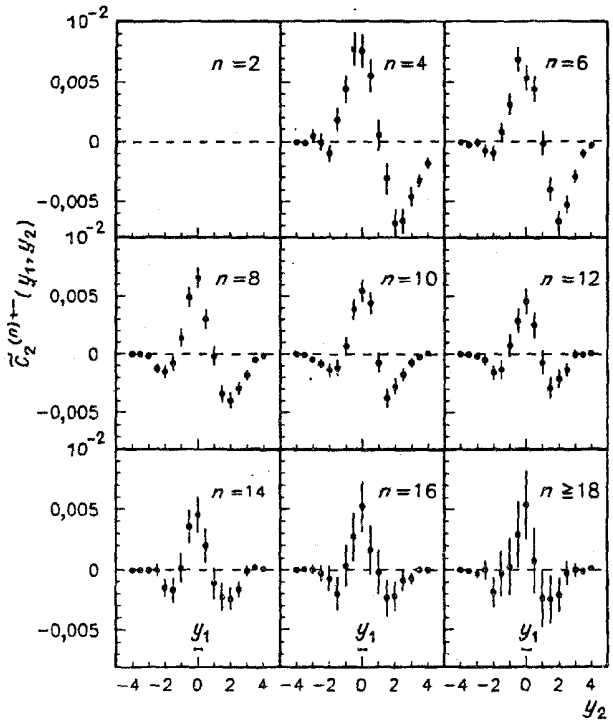

Рис. 9. Топологические корреляционные функции $\tilde{C}_2^{(n)}(0, y)$ в M^+p-реакциях при 250 ГэВ/*с* для (+ −)-пар [56]

используется для анализа зависимости корреляционных явлений от поперечного импульса. На рис. 11 функция $K_2(0, y_2)$ приведена для всех изучаемых частиц, для частиц с $p_T < 0,30$ ГэВ/*с* и $p_T > 0,30$ ГэВ/*с* [65]. Для частиц с малыми p_T функция $K_2(0, y_2)$ оказывается больше в точке максимума и обладает заметно ярче выраженным пиком по сравнению со случаем больших p_T. Особенно четко это проявляется для (+ −) комбинаций. Данные о $K_2(0,y_2)$, приведенные на рис. 11, фитируются функциями

$$f_1 = c\exp\{-[(y - y_0)/\sigma]^2/2\} \text{ (сплошная линия)}, \quad (3.1)$$

$$f_2 = a\exp(-b|y|) \text{ (пунктирная линия)}, \quad (3.2)$$

где величины c, y_0, σ, a и b являются подгоночными параметрами. Гауссова подгонка (3.1) оказывается лучше экспоненциальной (3.2) при одномерной быстротной проекции, хотя при малых поперечных импульсах в точке $y_2 = 0$ заметно явное превышение над подгоночной кривой. При переходе к переменным $x_1 = (y_1 + y_2)/2$ и $x_2 = (y_2 - y_1)/2$ наблюдается некоторое укручение в области малых x_2 (не показано на рис. 11). Оно становится особенно заметным для пар частиц с одинаковым зарядом при размерах бин, уменьшенных до значений $\sigma x_2 = 0{,}1$. В этом случае функция $C_2(x_1, x_2)$ растет и описывается как гауссовой, так и простой экспонентами.

3.1.1-6. Странные частицы. — Сравнение модельных предсказаний короткодействующих корреляций для нестранных мезонов затрудняется появлением большого комбинаторного фона кварк-антикварковых пар. Желательно иметь какой-то указатель того, что такие пары были рождены вместе. Такое указание можно получить, если изучать странные частицы. Действительно, для $s\bar{s}$-пар комбинаторный фон заметно уменьшается из-за подавления моря странных кварков.

Хорошая идентификация странных частиц возможна в TPC-детекторе, где изучалась e^+e^--аннигиляция при $s^{1/2} = 29$ ГэВ [66]. Были отмечены сильные короткодействующие корреляции K^+K^- по быстроте. Они хорошо воспроизводятся моделями типа LUND и КХД-моделью, изученной Веббером.

В адрон-адронных процессах пары странных частиц изучались коллаборацией NA23 [67]. Распределение двух K^0-мезонов по разности быстрот между ними Δy приведено на рис. 12,*а*, а для пар K^0 и Λ^0 — на рис. 12,*б*. Результаты сравниваются с моделью LUND (с развалом одной струны). Как и в случае нестранных частиц, модель несколько занижает величину быстротных корреляций.

3.1.2. *Азимутальные корреляции.* При взаимодействиях неполяризованных частиц не существует никакого выделенного направления в плоскости,

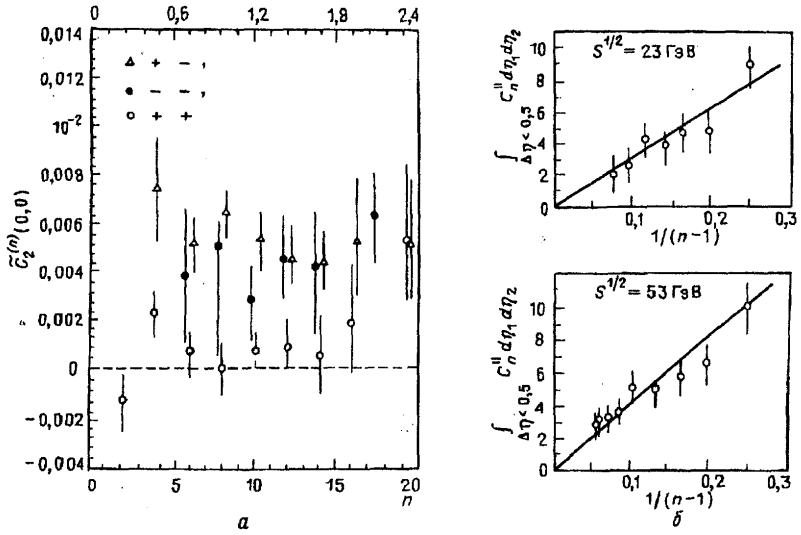

Рис. 10. *а* — Зависимость $\tilde{C}_2^{(n)}(0,0)$ от n и $z = n/\langle n\rangle$ для M^+p-взаимодействий при 250 ГэВ/*c*. Последние точки в (– –) отвечают $n \geq 16$, в (+ +)- и (– –)-парах $n \geq 18$ [56]. *б* — $\tilde{C}_2^{(n)}(|\eta_1 - \eta_2|)$ как функция от $1/(n-1)$ для pp-соударений при энергиях ISR [64]

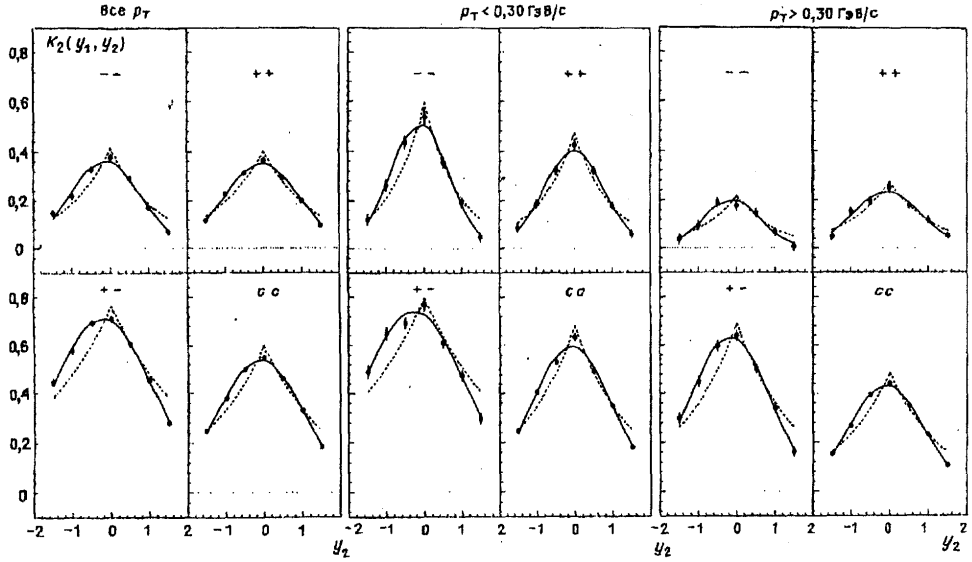

Рис. 11. Нормированные корреляционные функции $K_2(0, y)$ для частиц с любыми p_T, $p_T < 0{,}3$ ГэВ/*c* и $p_T > 0{,}3$ ГэВ/*c* в сопоставлении с функциями (3.1) (сплошная кривая) и (3.2) (пунктир) [56]

перпендикулярной направлению движения пучка, и потому распределение по азимутальному углу изотропно. Однако двухчастичные корреляции в этой плоскости существуют и могут быть выражены в виде распределения $W(\Delta\varphi)$ по азимутальному углу между двумя частицами $\Delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, изменяющемуся в пределах от 0 до π. Азимутальные корреляции могут зависеть от зарядов частиц пары, от их разделенности по оси быстрот $\Delta y = |y_1 - y_2|$ и от поперечных импульсов.

Первые же эксперименты с большой статистикой, в которых изучались двухчастичные корреляции в функции от разностей быстрот и азимутальных углов [64, 68], показали, что при малых разностях быстрот корреляции оказываются самыми сильными, когда две частицы рождаются с близкими или же противоположно направленными поперечными импульсами (рис. 13). Протяженность области коррелированности больше в направлении $\Delta\varphi = \pi$, нежели по направлению $\Delta\varphi = 0$. Кроме того, были обнаружены существенные отличия в форме двумерных (по быстроте и азимутальному углу) корреляционных функций для пар одинаково и противоположно заряженных пионов [68].

На рис. 14 показано распределение $W(\Delta\varphi, \Delta y)$, нормированное на единичную площадь, как функция $\Delta\varphi$ для всех комбинаций зарядов при выборе трех интервалов Δy: $\Delta y < 1$, $1 < \Delta y < 2$ и $2 < \Delta y < 3$ [65]. Горизонтальной линией указано среднее значение $1/\pi$, получившееся бы при плоском распреде-

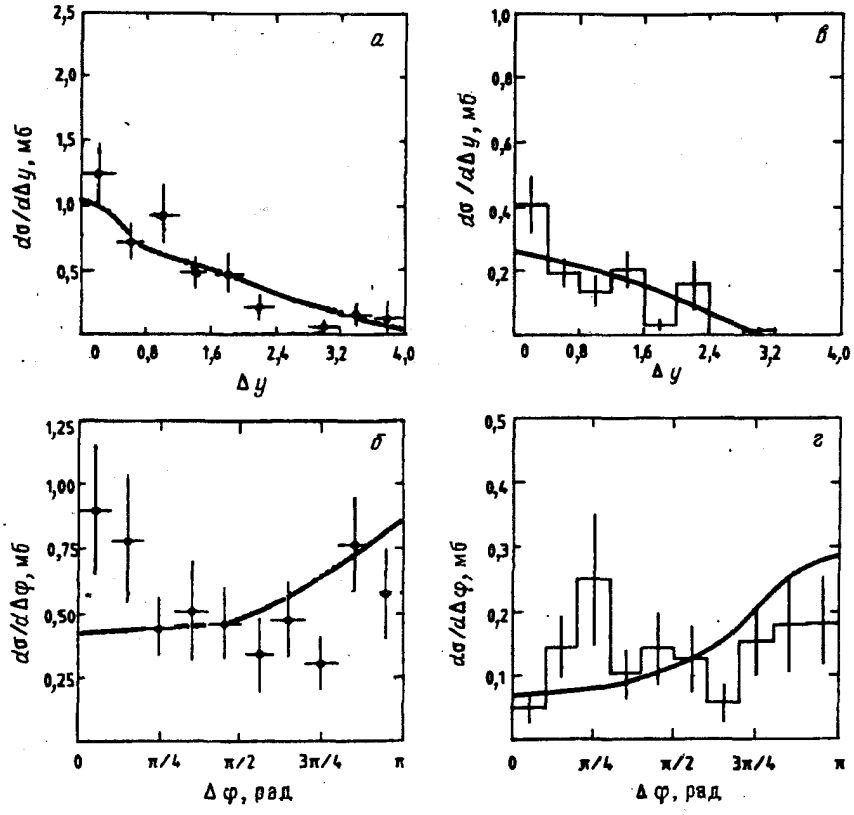

Рис. 12. Распределения по быстротным щелям Δy (*а*) и азимутальному расстоянию $\Delta\varphi$ (*б*) для $K_S^0K_S^0$-пар в pp-взаимодействиях при 360 ГэВ/*с*. *в*, *г* — То же для $K_S^0\Lambda$-пар [67]. Кривые получены по модели LUND

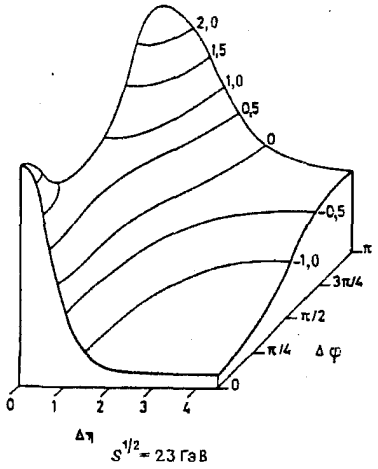

Рис. 13. Усредненная по множественности угловая корреляционная функция $\langle(n-1)\widetilde{C}_2^{(n)}(\eta_1,\varphi_1;\eta_2,\varphi_2)\rangle$ в единицах 10^{-3} [64]

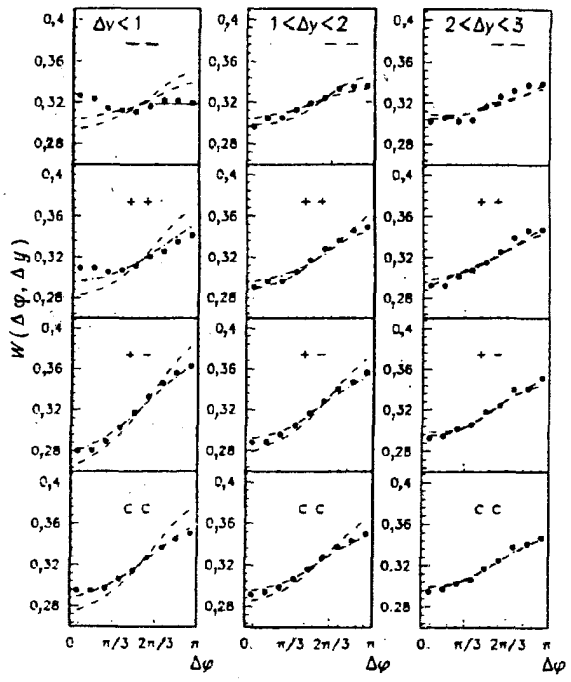

Рис. 14. $W(\Delta\varphi, \Delta y)$ для инклюзивных (без однократной дифракции) π^+p-процессов при 250 ГэВ/*с* в сопоставлении с DPM (пунктир) и QGSM (штрихпунктир) [65]

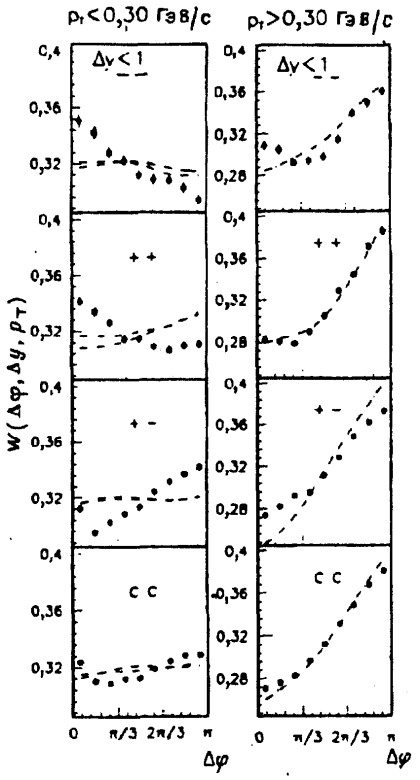

Рис. 15. $W(\Delta\varphi, \Delta y, p_T)$ в сопоставлении с расчетами по DPM (пунктир) и QGSM (штрихпунктир) для $\Delta y < 1$ и указанных обрезаний по p_T [65]

лении по $\Delta\varphi$. Отличие от постоянного значения обусловлено законами сохранения, бозе-эйнштейновскими корреляциями (для частиц с одинаковым зарядом), распадом резонансов (для частиц разных зарядов) и другими возможными динамическими причинами. Во всех случаях W оказывается больше $1/\pi$ при $\Delta\varphi > \pi/2$ и обладает максимумом при $\Delta\varphi = \pi$. При $\Delta\varphi < \pi/2$ она оказывается всюду меньше $1/\pi$ за исключением случая (− −)-пар с $\Delta y < 1$. Источником такой глобальной антикорреляции служит закон сохранения поперечного импульса.

Предсказания двухлестничной модели DPM (пунктир) и многострунной QGSM (штрихпунктир) приведены на рис. 14. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что предсказывать азимутальные корреляции при больших Δy значительно легче, чем на малых быстротных интервалах. В последнем случае модели отличаются по своим предсказаниям как друг от друга, так и, что более важно, от экспериментальных данных. Модель струн QGSM находится в несколько лучшей ситуации, чем модель DPM. Это обусловлено учетом большого числа струн, когда сильные азимутальные корреляции, существующие в отдельно взятой струне, разрушаются и потому зависимость от $\Delta\varphi$ оказывается слабее, нежели в модели DPM с двумя струнами.

Обе модели заметно отличаются от эксперимента в области малых $\Delta\varphi$ и $\Delta y < 1$ для всех зарядовых комбинаций и, в особенности, для (− −)-пар. Возможно, самой важной причиной этого разногласия могут оказаться бозе-эйнштейновские корреляции, не учитывавшиеся в модельных расчетах. Влияние этих корреляций может проявиться и для (+ +)-пар, но там оно должно быть не столь заметным из-за положительности зарядов сталкивающихся частиц.

На рис. 15 приведены азимутальные корреляции для частиц с $\Delta y < 1$ при $p_T < 0{,}30$ ГэВ/c и $p_T > 0{,}30$ ГэВ/c в сопоставлении с результатами модельных расчетов. Сравнение кривых приводит к выводу о сильной зависимости азимутальных распределений от поперечного импульса. Частицы с малым поперечным импульсом обнаруживают сильные положительные азимутальные корреляции при $\Delta y < 1$. С ростом поперечного импульса становится более заметным пик при $\Delta\varphi = \pi$, что проявляется и в модельных расчетах и обусловлено компенсацией импульсов.

Азимутальная корреляция пар $\Lambda\bar{\Lambda}$ наблюдалась на установке MARK II при 29 ГэВ [69]. Подобные же корреляции пар K^+K^- видны в эксклюзивных каналах реакции $K^-p \to pK^+K^-K^-\pi^+\pi^-$ при 32 ГэВ/c [70].

В μp соударениях [62] азимутальные корреляции пар (+ −), (+ +), (− −) изучались при $|\Delta y| < 1$ и $|\Delta y| > 1$. Распределение $W(\Delta\varphi)$ достаточно хорошо описывается моделью струн LUND с учетом первичного k_T и излучения глюонов с небольшим занижением антикорреляции (+ −) пар и завышением этого эффекта для (+ +) и (− −) пар при $|\Delta y| < 1$.

Экспериментальные данные группы NA23 [67] указывают также на наличие пар с малыми $\Delta\varphi$, не описываемых моделью LUND (сплошная линия на рис. 12,*б*,*г*), при изучении азимутальных корреляций пар K^0-мезонов (рис. 12,*б*) и $K^0\Lambda^0$ (рис. 12,*г*).

Та же группа изучала [51] азимутальные корреляции с помощью параметра асимметрии при $\Delta y < 2$ и $\Delta y > 2$.

$$B = [N(\Delta\varphi > \pi/2) - N(\Delta\varphi < \pi/2)]/N_{\rm all} \qquad (3.3)$$

для адронных пар: а) с противоположными зарядами (h^+h^-), б) с равными зарядами ($h^+h^+ + h^-h^-$), в) с разной странностью (Λ^0h^+, $x_\Lambda < -0{,}2$), г) с заведомым отсутствием частиц противоположной странности (Λ^0h^-, $x_\Lambda < -0{,}2$). Ни в одном из этих случаев не наблюдалось никакой азимутальной корреляции для $\Delta y > 2$, а для $\Delta y < 2$ ее не было лишь для частиц без общих кварк-антикварковых пар ($h^+h^- + h^-h^-$, Λ^0h^-). Для h^+h^- и Λ^0h^+ параметр B сопоставляется с предсказаниями моделей LUND и DPM:

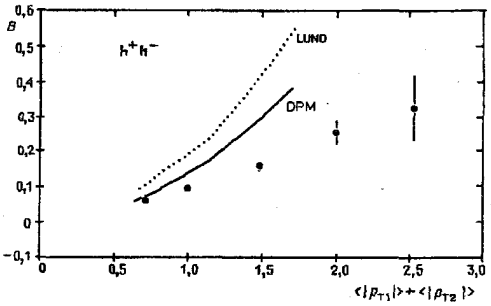

Рис. 16. Зависимость от поперечного импульса азимутального корреляционного параметра B для h^+h^--пар в pp-взаимодействиях при 360 ГэВ/c в сопоставлении с моделями LUND и DPM [51]

	Эксперимент:	LUND:	DPM:
$\Lambda^0 h^+$ ($\Delta y < 2$)	0,18 ± 0,03	0,30 ± 0,01	0,19 ± 0,01
h^+h^- ($\Delta y < 2$)	0,066 ± 0,003	0,126 ± 0,002	0,106 ±0,002.

Параметр B сильно завышен в модели LUMD с одной струной и малыми поперечными импульсами и несколько великоват и в DPM с двумя струнами. Как следует из рис. 16, параметр B растет с ростом суммарного поперечного импульса. В моделях этот рост также оказывается слишком сильным

Можно изучать и азимутальную корреляцию $c\bar{c}$-пар в рождении $D\bar{D}$. И там была наблюдена асимметрия (при изучении π^-p-взаимодействий при 360 ГэВ/c [71]). Опять-таки предсказания модели LUND превышают наблюдаемый эффект.

3.1.3. *Трехчастичные быстротные корреляции.* Интересен вопрос о быстротных корреляциях в группах из трех и более частиц. Трехчастичные быстротные корреляции были изучены в нескольких экспериментах [44, 56, 72—74]. Нормированный факториальный кумулянт третьего порядка имеет вид

$$K_3(y_1, y_2, y_3) = C_3(y_1, y_2, y_3) \times \left(\frac{1}{\sigma_{\text{inel}}^3}\frac{d\sigma}{dy_1}\frac{d\sigma}{dy_2}\frac{d\sigma}{dy_3}\right)^{-1}, \tag{3.4}$$

$$C_3(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}}\frac{d^3\sigma}{dy_1 dy_2 dy_3} + 2\frac{1}{\sigma_{\text{inel}}^3}\frac{d\sigma}{dy_1}\frac{d\sigma}{dy_2}\frac{d\sigma}{dy_3} - \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}^2}\frac{d^2\sigma}{dy_1 dy_2}\frac{d\sigma}{dy_3} - \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}^2}\frac{d^2\sigma}{dy_2 dy_3}\frac{d\sigma}{dy_1} - \frac{1}{\sigma_{\text{inel}}^2}\frac{d^2\sigma}{dy_1 dy_3}\frac{d\sigma}{dy_2} \tag{3.5}$$

с

$$\sigma_{\text{inel}} = \sum_{n\geq 8}\sigma_n .$$

Корреляционная функция $\tilde{C}_S(y_1, y_2, y_3)$ определяется как сумма топологических корреляционных функций

$$\tilde{C}_S(y_1, y_2, y_3) = \sum_{n\geq 8} P_n \tilde{C}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3), \tag{3.6}$$

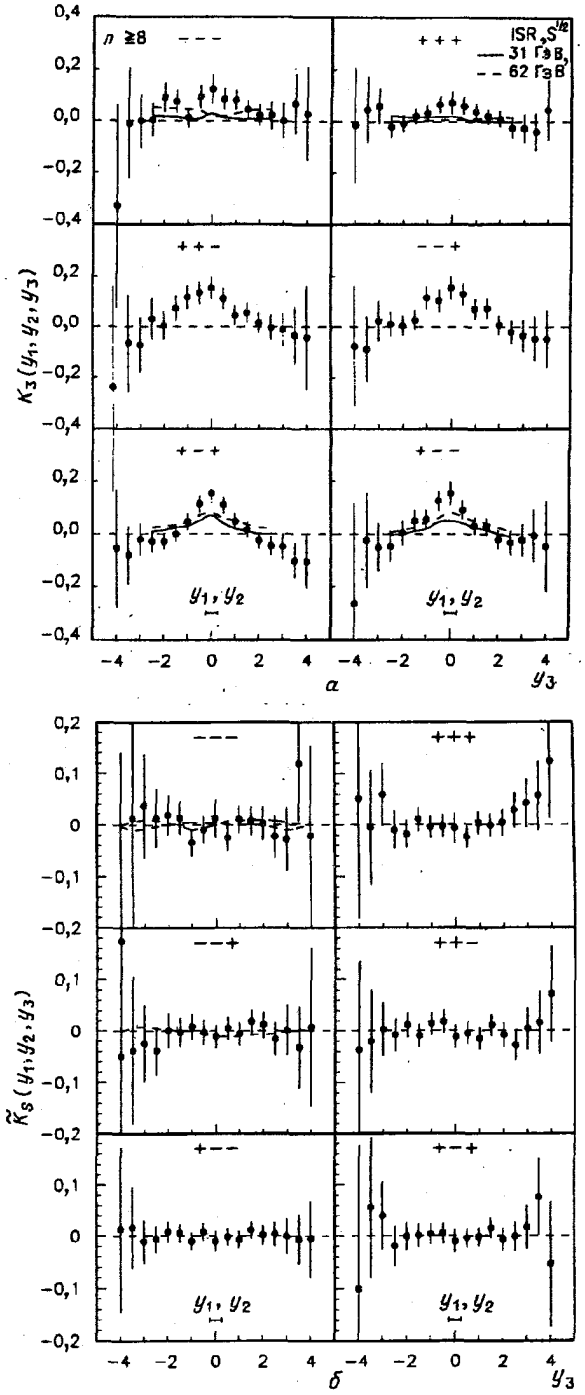

Рис. 17. Трехчастичные корреляции по быстроте $K_3(0, 0, y)$ (*а*) и $\tilde{K}_3(0, 0, y)$ (*б*) для M^+p-взаимодействий при 250 ГэВ/c. Предсказания FRITIOF (штрихпунктир) указаны для комбинации зарядов (− − −), а QGSM (пунктир) — для (− − −) и (− − +) [56]

$$\tilde{C}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3) = \tilde{\rho}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3) - \tilde{A}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3), \tag{3.7}$$

$$\tilde{A}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3) = \tilde{\rho}_2^{(n)}(y_1, y_2)\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_3) + \tilde{\rho}_2^{(n)}(y_2, y_3)\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_1) + \tilde{\rho}_2^{(n)}(y_1, y_3)\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_2) - 2\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_1)\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_2)\tilde{\rho}_1^{(n)}(y_3),$$

$$\tilde{\rho}_3^{(n)}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{n(1,2,3)} \frac{1}{\sigma_n} \frac{d^3\sigma}{dy_1 dy_2 dy_3}, \qquad (3.8)$$

где $n(1, 2, 3)$ означает среднее число трехчастичных комбинаций в событиях с множественностью заряженных частиц, равной n.

Соответствующая нормированная функция определяется как

$$\tilde{K}_S(y_1, y_2, y_3) = \tilde{C}_S(y_1, y_2, y_3) \times$$

$$\times \left(\sum_n P_n \tilde{\rho}_1^{(n)}(y_1) \tilde{\rho}_1^{(n)}(y_2) \tilde{\rho}_1^{(n)}(y_3) \right)^{-1}. \qquad (3.9)$$

Из-за малой статистики эксперимента эти корреляции не удалось обнаружить в pp-взаимодействиях при 200 ГэВ/c во FNAL [44]. При изучении K^-p-взаимодействий при 32 ГэВ/c [72] трехчастичные корреляции были представлены с помощью функций $\tilde{C}_S(y_1, y_2, y_3)$ и $\tilde{K}_S(y_1, y_2, y_3)$. Не было замечено никаких короткодействующих положительных корреляций. Корреляции были замечены при анализе функций K в центральной области быстрот в экспериментах на ISR [74] при $n \geq 8$.

На рис. 17 приведены функции $K_3(0, 0, y)$ и $\tilde{K}_S(0, 0, y)$ для суммарного набора M^+p-взаимодействий при 250 ГэВ/c [56]. Там же приведены данные о $K_3(0, 0, y)$ [74] для pp при $s^{1/2}$ = 31–62 ГэВ (линии). В этих данных группы NA22 действительно заметны инклюзивные трехчастичные корреляции $K_3(0, 0, y)$. Они сильнее всего, когда третья частица компенсирует частично заряд пары одинаковых частиц. Однако в функции $\tilde{K}_S(0, 0, y)$ не видно никаких корреляционных эффектов. В моделях FRITIOF и QGSM нет трехчастотных корреляций ни в функции $K_3(0,0,y)$, ни в $\tilde{K}_S(0, 0, y)$.

Недавно было предложено представить нормированные трехчастичные корреляции в виде произведений "связанных пар" двухчастичных корреляций [75—77]:

$$K_3(y_1, y_2, y_3) = K_2(y_1, y_2)K_2(y_2, y_3) +$$

$$+ K_2(y_1, y_3)K_2(y_3, y_2). \qquad (3.10)$$

Сравнение предсказаний формулы (3.10) с экспериментальными данными приводится в таблице при $n \geq 2$ и разрешении по быстроте, равном 0,5. В этом случае предположение о связанных парах приводит к согласию в трехчастичных корреляциях в пределах двух стандартных отклонений. Интересно отметить, что быстротные корреляции также сильно возрастают, если ограничиться лишь частицами с малыми поперечными импульсами. При этом гипотеза связанных пар хорошо работает и в этом случае.

Сравнение трехчастичных корреляций с предсказаниями приближения связанных пар (ПСП) (приведены данные без однократной дифракции с $n \geq 2$)

	Все p_T		p_T < 0,15 ГэВ/c	
	Данные	ПСП	Данные	ПСП
$K_3^{---}(0,0,0)$	0,23 ± 0,10	0,30 ± 0,03	2,3 ± 1,7	2,0 ± 0,4
$K_3^{+++}(0,0,0)$	0,14 ± 0,06	0,21 ± 0,02	1,2 ± 0,6	1,0 ± 0,2
$K_3^{ccc}(0,0,0)$	0,39 ± 0,04	0,53 ± 0,03	1,9 ±0,5	1,7 ± 0,2

Из приведенного выше анализа трехчастичных корреляций становится очевидным, что экстраполяция на корреляции высших порядков весьма сложна и ограничена статистикой эксперимента. Поэтому необходимо использовать другие подходы. Наиболее успешные из них будут обсуждаться в разделе 3.2.

3.1.4. *Основные выводы.*

1. Основной вклад в корреляционные функции C_2 и C_3 получается за счет смеси событий с разной множественностью и разными одночастичными распределениями, однако заметный эффект остается и в так называемой короткодействующей корреляционной части этих функций.

2. $C_2(0, y_2)$ увеличивается с ростом энергии заметно быстрее, чем ее короткодействующая составляющая.

3. Короткодействующие корреляции намного больше для (+ –) пар по сравнению с парами с одинаковыми зарядами и положительны в заметной области для $C_2(y_1, y_2 = y_1)$.

4. В отличие от $C_2^{(n)}(0, y_2)$ корреляционные функции $\tilde{C}_2^{(n)}(0, y_2)$ весьма близки друг другу при разных числах частиц n, хотя и наблюдается эффект сужения пика функции $\tilde{C}_2^{(n)+-}$ с ростом n.

5. Корреляционные функции сильно зависят от поперечного импульса и достигают наибольших значений при малых поперечных импульсах.

6. В центральной области быстрот корреляции, наблюдавшиеся в M^+p-соударениях при $s^{1/2}$ = 22 ГэВ, похожи на корреляции в e^+e^--аннигиляции при той же энергии и на экстраполяцию из μp-соударений к энергии адронной системы W = 22 ГэВ. Хотя модели несколько занижают быстротные корреляции во всех типах соударений, они приводят к качественному выводу о роли эффектов испускания (жестких) глюонов.

7. Комбинаторный фон можно подавить, изучая корреляции странных частиц. Пока еще данных немного, но они подтверждают выводы, полученные из исследований свойств нестранных частиц.

8. Монтекарловские расчеты по кластерной модели GENCL и модели FRITIOF описывают поведение

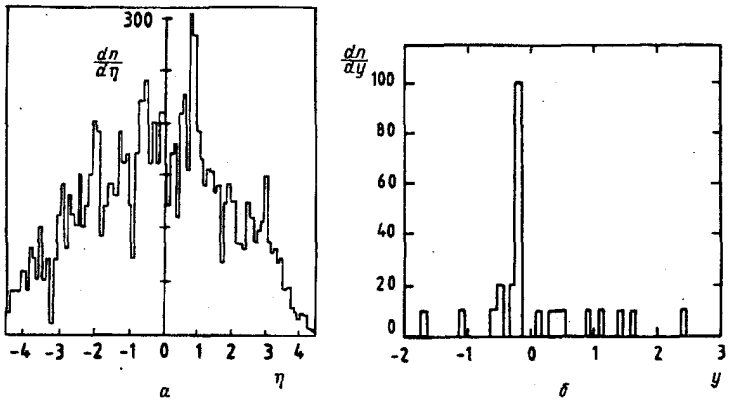

Рис. 18. *а* — Событие коллаборации JACEE [81]. *б* — Событие коллаборации NA22 [89]

$C_2^{(n)}(\eta_1, \eta_2)$ при энергиях коллайдера ЦЕРНа, по крайней мере для $34 \le n \le 38$. При меньших энергиях ($20 \lesssim s^{1/2} \lesssim 30$ Гэв) модель LUND с одной струной предсказывает слишком сильную антикорреляцию для рождения частиц с одинаковым знаком заряда. FRITIOF и DPM приводят к отрицательным значениям для $C_2(y_1, y_2)$ и $K_2(y_1, y_2)$ в центральной области быстрот при одинаковых зарядах. Для частиц с разными зарядами они предсказывают положительную корреляцию, но намного меньшую экспериментально наблюдаемой величины. QGSM воспроизводит $C_2(y_1, y_2)$ и $\tilde{C}_2(y_1, y_2)$ для всех зарядовых комбинаций, но не описывает короткодействующей составляющей $\tilde{C}_S(y_1, y_2)$.

9. Положительные корреляции наблюдены для больших значений азимутального угла $\Delta\varphi$, как и ожидалось из закона сохранения поперечного импульса. Заметные отклонения от предсказаний моделей DPM и QGSM отмечаются при малых значениях $\Delta\varphi$ и Δy для пар частиц с одинаковым знаком заряда, где может существенно сказываться эффект бозе-эйнштейновских корреляций, не учтенный в моделях. Эти эффекты усиливаются для частиц с малым поперечным импульсом.

10. В e^+e^--аннигиляции модели типа LUND и модель Веббера достаточно хорошо описывают короткодействующие корреляции для странных частиц. В то же время короткодействующие корреляции в hh-соударениях занижены по быстротам и завышены в азимутальной плоскости, если используются модели с одной или двумя струнами и не учитываются эффекты внутреннего поперечного импульса и излучения глюонов. Мы полагаем, что неудача моделей LUMD и DPM связана и с недооценкой высоты "крыльев" в "эффекте чайки" [78], т.е. недоучетом роли "жестких" эффектов, ответственных за дополнительный поперечный импульс между струнами или же в каждой из них.

11. Трехчастичные корреляции наблюдались для всех зарядовых комбинаций. Они особенно велики для частиц с малым поперечным импульсом. В пределах двух стандартных отклонений они согласуются с моделью "связанных пар". Не наблюдено короткодействующих корреляций среди трехчастичных корреляционных функций. Для изучения корреляций среди групп с большим числом частиц надо использовать другие подходы.

3.2. Флуктуации, перемежаемость и фрактальность.

3.2.1. *Введение.* Вслед за ранними исследованиями в космических лучах [79] и в pN-взаимодействиях при энергии 200 ГэВ [80], указавшими на появление плотных групп частиц на оси (псевдо) быстрот, в последние годы были проведены многочисленные эксперименты по изучению таких групп. На рис. 18,*а* показано событие коллаборации JACEE [81] с локальными флуктуациями на оси псевдобыстрот $dn/d\eta \approx 300$ при ширине интервала $\delta\eta = 0{,}1$, причем отношение сигнала к шуму было примерно равным 1:1. Событие NA22 коллаборации [82], изображенное на рис. 18,*б*, содержит пик на оси быстрот с $dn/d\eta = 100$ при разрешении по быстроте $\delta y = 0{,}1$. Это превышает среднюю плотность в этом эксперименте в 60 раз. Группа UA5 [83] также сообщила о пиках с плотностью $dn/d\eta$ вплоть до 30 (т.е. превышающих средние значения в 10 раз) одновременно с данными JACEE, но нашла, что они согласуются с их монте-карловской кластерной моделью. Также и коллаборация EMU-01 [84] обнаружила пики с $dn/d\eta = 140$ и удовлетворительно объясняет их в рамках модели FRITIOF.

Несомненно, что флуктуации локальной плотности существуют. Проблема заключается в том, чтобы понять, обусловлены ли они статистическими или динамическими причинами, являются ли соответствующие распределения плотностей вероятности непрерывными или перемежаемыми.

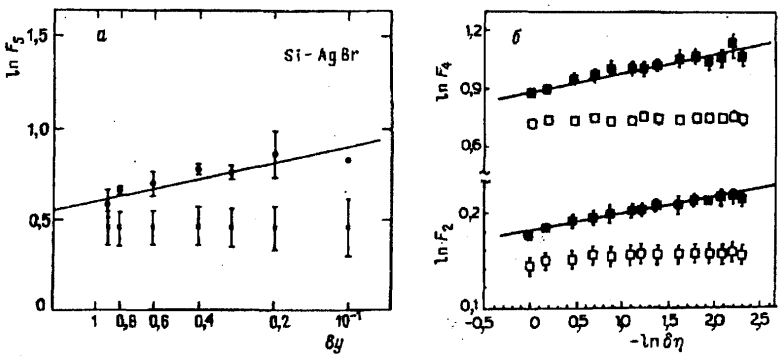

Рис. 19. *а:* $\ln F_5$ как функция $-\ln \delta\eta$ для события JACEE [19,20]. *б*: $\ln F_2$ и $\ln F_4$ как функции $-\ln \delta\eta$ для O^{16}Em при 200А ГэВ (KLM-коллаборация) [101]

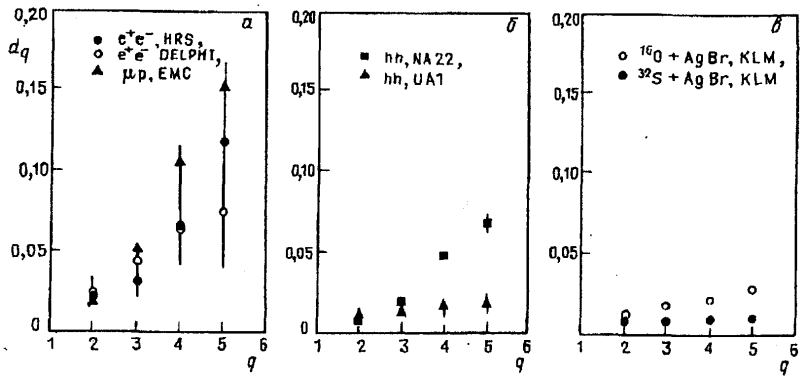

Рис. 20. Аномальней размерность d_q как функция порядка q для μp и e^+e^--соударений(*а*), NA22 и UA1 (*б*) и KLM (*в*) [107]

3.2.2. *Метод.* Для решения указанной выше проблемы было предложено [19, 20] изучать поведение нормированных факториальных моментов, определенных соотношениями (2.67) или (2.69), в функции разрешения δy. Моменты высших порядков чувствительны к поведению хвоста распределения по множественности (к большим n_m), а потому оказываются особенно чувствительными к флуктуациям множественности при различных интервалах δy, используемых в таком анализе.

Было показано, что факториальные моменты F_q не зависят от δy при $\delta y \to 0$, если распределение по быстроте достаточно гладкое (непрерывность плотности вероятности), тогда как они подчиняются степенному закону

$$F_q \sim (\delta y)^{-\phi_q} \ (\phi_q > 0), \tag{3.11}$$

если распределение фрактальное (плотность вероятности "перемежаема"). Как обсуждается в разделах 2.4 и 4.2.2, степени ϕ_q (наклоны в дваждылогарифмическом масштабе) связаны [85, 86, 87] с аномальными размерностями $d_q = \phi_q/(q-1)$, указывающими на отклонение от целочисленной размерности. Уравнение (3.11) устанавливает закон подобия, поскольку отношение

$$R = F_q(l)/F_q(L) = (L/l)^{\phi_q} \tag{3.12}$$

зависит лишь от отношения размеров интервалов разрешения L и l.

В разделе 3.1.3 мы подчеркивали, что изучение многочастичных корреляций традиционными методами оказывается очень сложной задачей даже в случае всего лишь трех частиц. Анализ факториальных моментов не только делает доступным исследование таких корреляций даже при весьма малых интервалах, но и связывает возможное скейлинговое поведение таких корреляций с физикой фрактальных объектов.

Поэтому первым шагом в изучении этих закономерностей были поиски более или менее линейного роста $\ln F_q$ как функции $-\ln \delta y$. Эти поиски были проведены за удивительно короткое время в e^+e^- [88—93], μp [94], νA [95], hh [96—100], hA [101, 102] и AA [101,103—106] соударениях для одномерного случая. Одномерный анализ не всегда достаточно убедителен и потому он был расширен на два и три измерения (см. раздел 3.2.6), а также улучшен путем использования новых методов интегрирования (см. раздел 3.2.14).

3.2.3. *Дваждылогарифмические графики* (*одномерная проекция*). На рис. 19,*а* приведена зависимость $\ln F_5$ в функции от $-\ln \delta\eta$ для события JACEE. Там же показаны результаты монтекарловского рас-

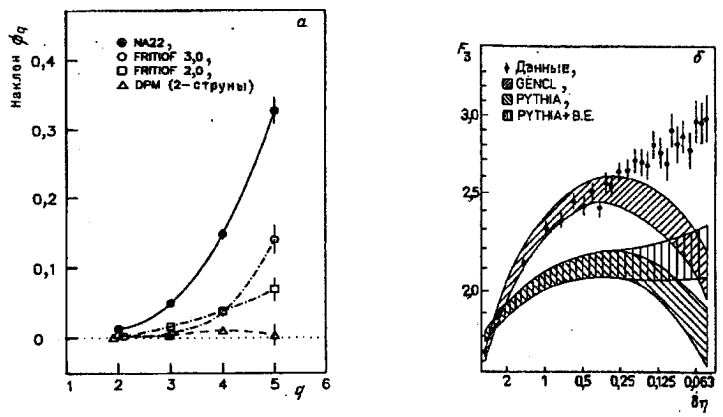

Рис. 21. *а* — Наклон ϕ_q как функция порядка q для NA22 [96], двух версий FRITIOF и двухструнной модели DPM. *б* — F_3 vs $\delta\eta$ поданным UA1 [97] в сравнении с GENCL, PYTHIA и PYTHIA + бозе-эйнштейновские корреляции

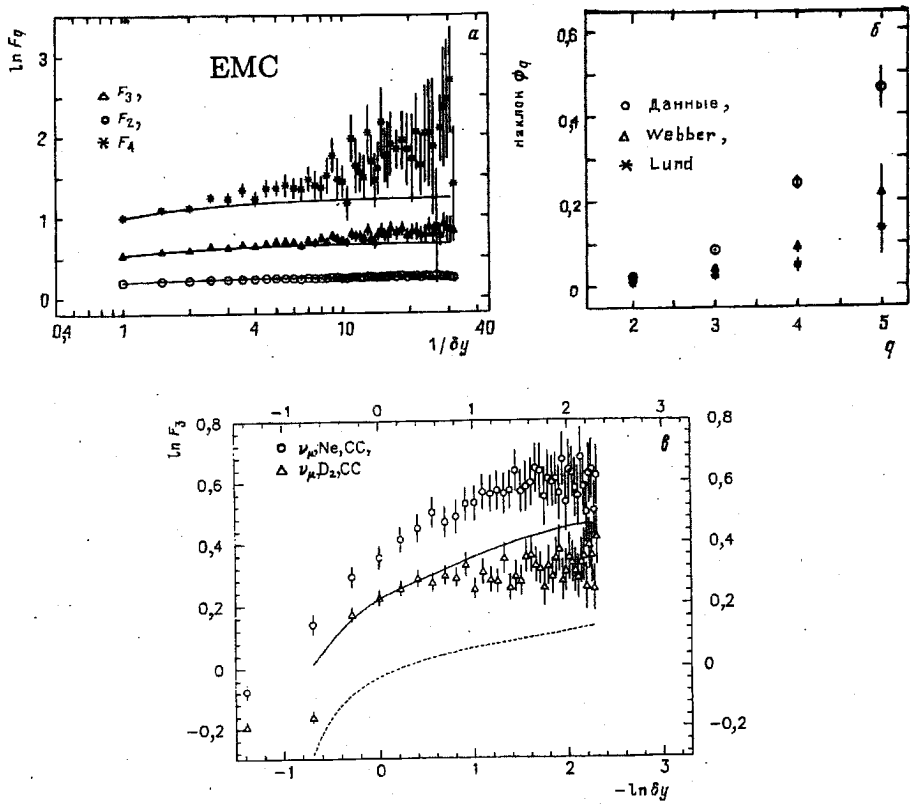

Рис. 22. *а* — Результаты коллаборации EMC [94] в сравнении с теоретическими предсказаниями работы [76]. *б* — Наклоны ϕ_q для EMC данных в сравнении с моделями Веббера и LUND, *в* — Данные о νA-реакциях [95] в сопоставлении с моделью LUND

чета по модели независимого испускания, модифицированной таким образом, чтобы воспроизвести среднее распределение по псевдобыстроте на рис. 18,*а* и общее распределение по множественности. В то время как монтекарловская модель предсказывает постоянство величины F_5, событие JACEE указывает на ее линейный рост, т.е. на перемежаемость (см. раздел 2.4).

Другие примеры, приведенные KLM-коллаборацией, показаны на рис. 19,*б* и сравниваются опять-таки с моделью независимого испускания частиц. И в этих данных наблюдается приблизительно линейный рост в интервале псевдобыстротных интервалов $\delta\eta < 1$ $(-\ln\delta\eta > 0)$.

Значения аномальных размерностей, полученные путем фитирования в области $0{,}1 < \delta y(\delta\eta) < 1{,}0$, приведены на рис. 20 [107]. Характерные величины аномальных размерностей заключены между 0,01 и 0,1, так что фрактальные (Реньи) размерности $D_q = 1 - d_q$ близки к единице. Они больше по величине и растут быстрее с ростом q в μp и e^+e^- (рис. 20,*а*), чем в hh (рис. 20,*б*) соударениях и оказываются со-

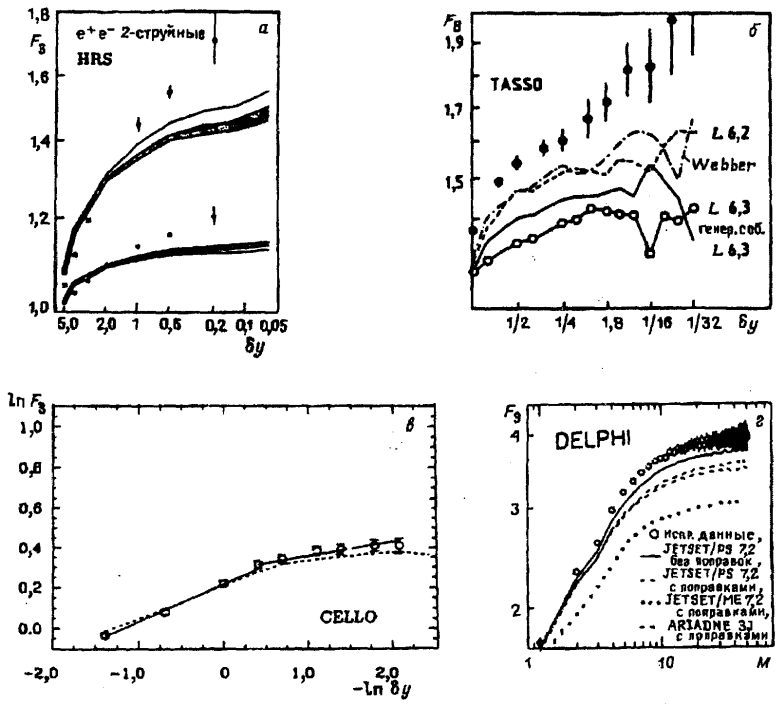

Рис. 23. $\ln F_3$ (и $\ln F_2$) как функции $-\ln \delta y$ для данных HRS [88] (*а*), TASSO [89] (*б*), CELLO [90] (*в*) и DELPHI [91] в сопоставлении с моделями Веббера и LUND (*г*)

всем небольшими и практически не зависящими от q в соударениях тяжелых ионов (рис. 20,*в*). В hh-взаимодействиях их рост оказывается заметно быстрее в данных NA22 (при $s^{1/2}$ = 22 ГэВ) по сравнению с данными UA1 (при 630 ГэВ).

3.2.4. *Что предсказывают модели*?

3.2.4-1. Адрон-адронные соударения. — Если результаты модельных расчетов наклонов ϕ_q поместить на тот же график, что и данные группы NA22 (рис. 21,*а*), то будет наглядно видно, что в двухлестничной версии модели DPM при 22 ГэВ перемежаемость полностью отсутствует, а FRITIOF дает сильно заниженные значения наклонов [96]. Рис. 21,*б* демонстрирует, что модель PYTHIA предсказывает значения меньше, чем дает группа UA1 [97], даже после учета бозе-эйнштейновской интерференции одинаковых частиц. Кластерная модель группы UA5 GENCL, прекрасно воспроизводящая обычные короткодействующие корреляции, следует данным вплоть до интервалов величиной $\delta\eta \approx 0{,}3$, а затем резко расходится с данными при меньших интервалах.

Сравнительно недавно была сопоставлена с опытом по корреляциям и версиям DPM с многими струнами и учетом рождения министруй [108]. Сравнение с данными NA22 и UA1 показывает, что предсказания наклонов в теории примерно вдвое меньше, чем их значения на эксперименте.

Таким образом, используемые сейчас модели рождения частиц в адрон-адронных взаимодействиях не описывают явление перемежаемости, наблюдаемое на эксперименте.

3.2.4-2. Лептон-адронные соударения, — На рис. 22,*а* данные коллаборации EMC [94] сравниваются со значениями, ожидаемыми из экстраполяции обычных короткодействующих и дальних корреляций [76]. Экспериментальные результаты заметно выше ожидаемых при малых δy. Как видно из рис. 22,*б*, наклоны ϕ_q, извлеченные из тех же данных, существенно превышают предсказания модели LUND и версии Веббера. Точно так же рис. 22,*в* демонстрирует, что значения $\ln F_3$ по модели LUND для νNe и νD_2 соударений значительно меньше их экспериментальных величин [95].

Таким образом, используемые сейчас модели рождения частиц в лептон-адронных взаимодействиях не способны воспроизвести явление перемежаемости, наблюдаемое в этих процессах на эксперименте.

3.2.4-3. e^+e^--соударения. — В этом случае ситуация менее определенная. Первоначальный (косвенный) анализ [88] данных HRS и анализ данных TASSO [89] показали отклонения от результатов модельных расчетов, аналогичные тому, что известно из lh- и hh-данных (рис. 23,*а*, *б*). Однако недавно CELLO [90] и в особенности коллаборации, работающие на LEP [91—93], продемонстрировали "разумное" согласие их данных с монтекарловской версией партонной каскадной модели LUND (рис. 23,*в*, *г*), В то же время после увеличения статистиче-

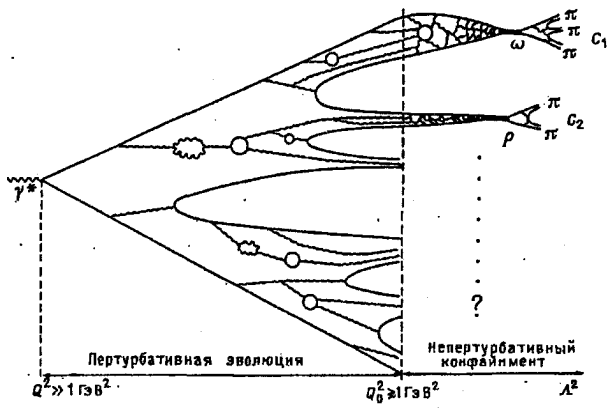

Рис. 24. Эволюция струн: самоподобие партонного каскада возникает за счет подобия на каждом этапе эволюции [110]

ской обеспеченности своих данных коллаборация DELPHI указала на статистически значимые расхождения, в том числе и с "улучшенной" версией модели (рис. 23,*г*).

Отметим, что идея "ветвящихся" самоподобных струй, изображенных на рис. 24, появилась уже давно [109—111]. В частности, по словам автора второй из цитируемых здесь работ, "результирующая картина струи формально подобна неким математическим объектам, известным под названием фракталов, которые выглядят все более и более нерегулярными и сложными, по мере того как мы изучаем их все с лучшим и лучшим разрешением". Если струя оканчивается образованием резонансов, как указано на рис. 24, то перемежаемость подавляется на уровне частиц из-за большой энергии, уходящей в частицы при его распаде.

Если на мгновение забыть о расхождениях между CELLO и TASSO, то можно представить себе, что партонный ливень (который представляет собой каскадный процесс и потому, как ожидается, приводит к перемежаемости) еще слишком короток в моделях при их применении к области энергий PEP/PETRA и развивается достаточно сильно лишь на LEP. Однако сравнение дваждылогарифмических графиков на партонном и адронном уровнях, представленное на рис. 25,*а*, *б* [112], показывает, что в известной версии модели JETSET 6,3 рост $\ln F_q$ при больших значениях $-\ln \delta y$ происходит не за счет партонного ливня, а из-за адронизации!

Перемежаемость становится заметной и на партонном уровне только лишь, если разрешить партонному ливню развиваться до очень малых значений Q_0^2 (см. рис. 25,*в*, *г* при $Q_0^2 = 0{,}4$ ГэВ^2 и предположении о локальной партон-адронной дуальности). Конечно, роль величины Q_0^2, как было проверено, оказывается заметно меньшей при очень больших энергиях, скажем, при 1 ТэВ.

С другой стороны, в модели Веббера [113] перемежаемость оказывается полностью развитой на партонном уровне уже при энергии 91 ГэВ и, более того, подавляется при адронизации.

Чувствительность к выбору процедуры обрезания пертурбативного КХД-каскада и взаимная роль мягкой и жесткой фаз подробно обсуждались в рамках модели дипольного излучения ARIADNE [114].

Перемежаемость может быть усилена в мягкой стадии за счет увеличения отношения π/ρ, которое необходимо произвести согласно результатам пря-

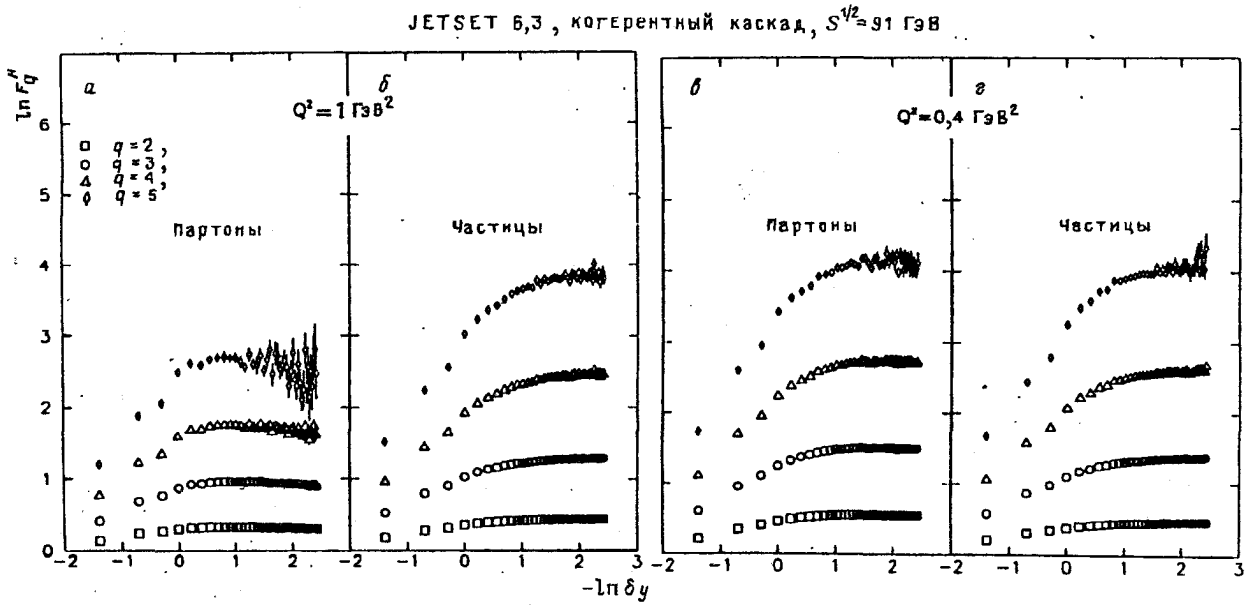

Рис. 25. $\ln F_q^H$ в функции от $-\ln \delta y$ в модели JETSET 6.3 при $s^{1/2} =$ 91 ГэВ на партонной (*а*), адронной стадиях при обрезании $Q_0^2 = 1$ ГэВ^2 (*б*) и при обрезании $Q_0^2 = 0{,}4$ ГэВ^2 (*в*,*г*) [112]

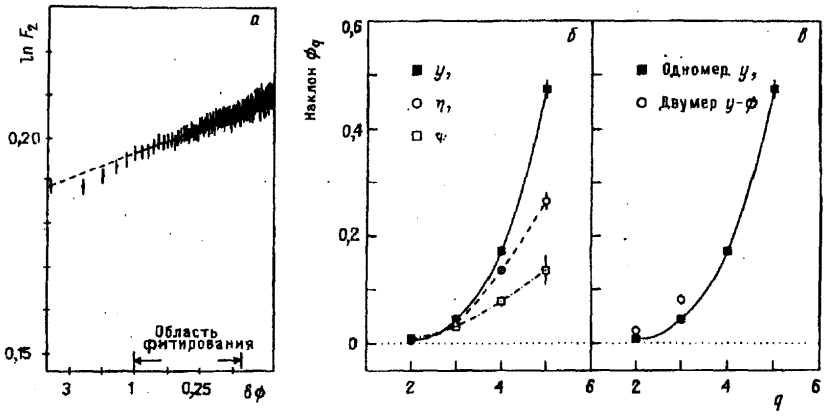

Рис. 26. *а:* ln F, в функции от $-\ln \delta\varphi$ для данных UA1 [97]. *б, в* - Наклоны ϕ_q в функции от порядка q при выборе в качестве переменных y, η, φ, (или y, φ) в данных NA22 [96]

мых измерений групп NA22 [115] и EMC [116]. Прямые пионы лучше воспроизводят изначальную партонную структуру, нежели более массивные резонансы. Вследствие рождения за счет механизма туннелирования эти пионы, как ожидается, должны иметь меньшие поперечные импульсы, нежели другие частицы, а это свойство пока еще не учитывалось в монтекарловских программах.

В любом случае необходимо рассмотреть проблему возникновения перемежаемости в монтекарловских расчетах партонных каскадов с двух сторон:

1. С учетом упомянутых выше оговорок, партонные каскады являются хорошими кандидатами для объяснения перемежаемости в *жесткой* фазе и их следует использовать для разных процессов. Однако сначала надо более детально изучить существующие монтекарловские варианты и проверить модели с помощью более чувствительных распределений, которые мы еще обсудим ниже. Вместе с тем необходимы и дальнейшие исследования при более высоких энергиях, где партонные каскады должны быть более развитыми и, как ожидается, будут доминировать над мягкой фазой.

2. Как оказалось, перемежаемость весьма чувствительна к конкретному описанию *мягкой* стадии процесса. Эту фазу необходимо детально изучать с высокой статистикой при низких энергиях, где она еще не затмевается каскадированием в жесткой фазе.

3.2.5. *Предостережения.* Прежде чем приступать к дальнейшим необходимым разработкам, надо хорошо оценивать влияние возможных побочных эффектов. Как и задумывалось изначально и в соответствии с их определением, высшие моменты наиболее чувствительны к небольшому числу событий на хвосте распределения по множественности в малых ячейках фазового объема.

Величина момента может быть *занижена* за счет плохого разрешения двух треков, потери треков из-за ограниченной чувствительности детектора или же плохой реконструкции, неправильного выбора переменной или же просто за счет обрезания распределения по множественности.

Величина момента может быть *завышена* вследствие двойного счета трека (ошибки в совмещении треков), далитцевских распадов и конверсии γ-квантов либо распадов K^0 или Λ. Опасное завышение возникает при обычно используемом "горизонтальном" усреднении, если предполагать постоянным во всей области ΔY усредненное распределение по (псевдо)быстроте. Мы хотим подчеркнуть, в отличие от широко распространенного мнения, что эта проблема не может считаться *полностью* решенной при использовании лишь поправочных факторов, предложенных в работе [21]!

Дальнейшее влияние на извлекаемые выводы оказывает выбор изучаемого набора событий (например, все неупругие или же только недифракционные), обрезания по множественности, ограничения по поперечному импульсу, выбор событий с $n \geq n_0$ в некем интервале быстрот (где важны также размер и положение этого интервала), область быстротных интервалов, в котором проводится фитирование, и корреляция ошибок измерения при выборе интервалов, по которым идет усреднение.

Многие из этих эффектов сейчас подробно изучены в различных экспериментах и можно ознакомиться с их результатами, в частности, по работам [117,118].

3.2.6. *Высшие размерности.* Данные группы UA1, представленные на рис. 26,*а* [97], ясно показывают, что перемежаемость обнаруживается и по азимутальному углу в плоскости, перпендикулярной оси соударения частиц. Наклоны ϕ_q, полученные группой NA22, сравниваются на рис. 26,б [96] при использовании в качестве переменной быстроты y,

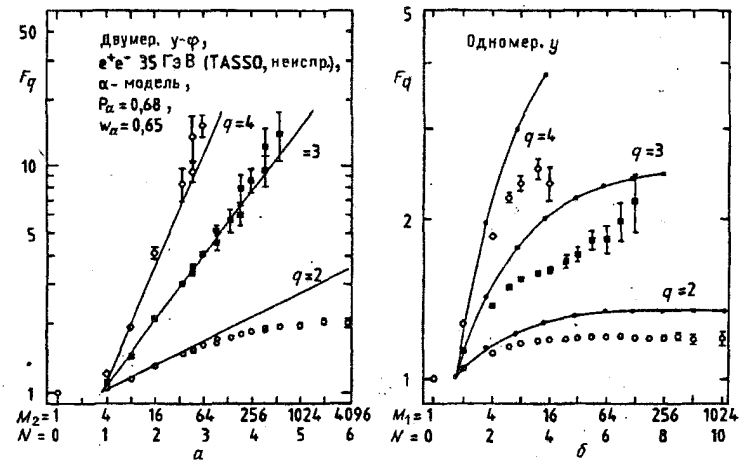

Рис. 27. Дваждылогарифмический график для данных TASSO для двумерных бин φ, y (*а*) и одномерных бин y (*б*) в сопоставлении с двумерной α-моделью [89,22]

псевдобыстроты η и азимутального угла φ. Самый сильный эффект проявляется для быстроты y, но он заметен и в φ.

Очень важное наблюдение заключается в том, что этот эффект усиливается в случае, если анализ проводится в двух измерениях (рис. 26,*в*). Это усиление особенно заметно в e^+e^--процессах, где наклоны ϕ_q возрастают примерно в 6 раз по сравнению с одномерным случаем (рис. 27,*а*, *б*).

Этот рост в точности совпадает с тем, который предсказывается, если перемежаемость является следствием каскадной эволюции кварков и глюонов в трехмерном импульсном пространстве, а одномерный анализ, обсуждавшийся выше, отражает всего лишь соответствующую проекцию реального эффекта [22,119]. Пожалуй, наиболее понятной аналогией является тот факт, что мы можем наслаждаться практически сплошной тенью дерева (проекция на двумерную поверхность), тогда как четко видим его самоподобную ветвящуюся структуру в трех измерениях. Действительно, одномерные проекции (рис. 27,*б*) двумерных результатов α-модели (рис. 27,*а*) явно приводят к заметно меньшим наклонам (учтите разницу в масштабах), а также к выполаживанию распределения при $\delta y \to 0$ [22].

Соответствующее выполаживание, заметное и на рис. 27,*а*, служит указанием на то, что реально важны все три измерения фазового объема. Поэтому необходимо провести расчеты и для этого случая. Однако необходимо аккуратно следить за тем, чтобы исходные распределения сводились к постоянной величине в соответствующих переменных.

Просто невозможно проводить трехмерный анализ в обычных переменных быстроту y, азимутального угла φ и поперечного импульса p_T, поскольку распределения по этим переменным не постоянны (особенно быстро меняется последнее из них). Поэтому было предложено [22,23] использовать нормированные кумулятивные переменные

$$X(y) = \int_{y_{min}}^{y} \rho(y')dy' \left(\int_{y_{min}}^{y_{max}} \rho(y')dy'\right)^{-1}. \qquad (3.13)$$

Переход к высшим размерностям осуществляется в работе [22] в рамках предположения о факторизуемости распределений по разным переменным

$$\rho(y, \varphi, p_T) = \rho(y)\rho(\varphi)\rho(p_T). \qquad (3.14)$$

В рамках этого весьма сильного предположения можно независимо вычислять кумулятивные распределения по трем переменным. Однако это не обязательно необходимо, как показано в [23].

На рис. 28 проведено сопоставление поведения функций F_2 в зависимости от величины ячеек в разных размерностях для e^+e^-- [91] и hh-столкновений [96,97]. Во всех случаях применимость степенных закономерностей типа (3.11) становится более очевидной в двух измерениях, нежели в одном. Из рис. 28,*а* также следует, что предсказания модели JETSET PS довольно хорошо согласуются с данными по e^+e^--аннигиляции и в высших размерностях.

Переходя к случаю трех измерений, подчеркнем, что по данным NA22 появляется изгиб кверху в факториальных моментах (рис. 28,*в*), в то время как в одном измерении была тенденция к насыщению на малых интервалах. Этот эффект сохраняется даже после исключения далитцевских пар и процессов внутренней конверсии. Подобный же подъем над линейной экстраполяцией наблюдается и при трехмерном анализе данных группы NA35 [105] по соударениям разных частиц с ядрами Au (рис. 29,*а*). Следуя предложению работы [120], группа MA35 показывает также, что, заменив F_2 нормированным кумулян-

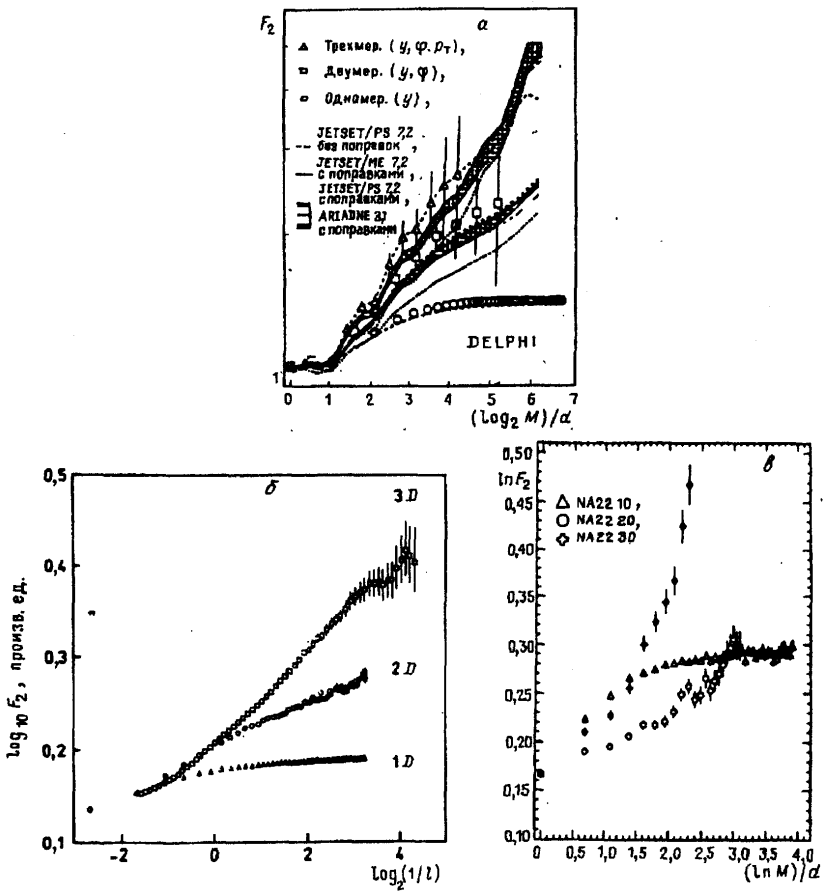

Рис. 28. Факториальный момент второго порядка для 1-, 2- и 3-мерного анализа данных DELPHI [91] (*а*), UA1 [97] (*б*) и NA22 [96] (*в*) в функции от $(\log_2 M)/d$ и $(\ln M)/d$ соответственно; здесь M означает полное число ячеек при d-мерном анализе

том $K_2 = F_2 - 1$, можно улучшить линейность подгонки в дваждылогарифмической шкале (рис. 29,*б*).

В то же время, сравнение [120] данных об F_2, полученных из трехмерного анализа реакций μp [94], π/Kp [96], pAu, OAu и SAu [105] при близких энергиях, указывает на важную и многообещающую универсальность. Как отмечается в [121], при не чересчур малых δy нужно ожидать следующего (более реалистичного, нежели (2.110)) поведения F_2:

$$F_2 = 1 + c(M^3)^{\phi_2} + c', \tag{3.15}$$

где первый член связан с некоррелированным фоном как в (2.71), второй член отвечает K_2, а третий получается за счет несингулярных (дальних?) корреляций. Это аналитическое выражение сравнивается с данными, приведенными на рис. 30, при значениях параметров, указанных в подписи к рисунку. Несингулярный вклад c' пренебрежимо мал для μp и AA-соударений и оказывается заметным в мезон-протонных и pA-столкновениях. Однако наклоны ϕ_2, кажется, все близки к универсальному значению $\phi_2 = 0{,}45$—$0{,}5$ (за исключением самых тяжелых ядер, что демонстрируется на рис. 30,*д*).

Очень важно получить хорошие данные по e^+e^--аннигиляции, чтобы проверить, распространяется ли на них эта универсальность в трехмерном случае.

3.2.7. *Обобщенный закон подобия.* Было замечено [122], что в каскадных моделях одномерные моменты следуют обобщенному закону подобия

$$F_q \sim (g(\delta y))^{\phi_q}, \tag{3.16}$$

где $g(\delta y)$ есть некоторая функция δy. Выражая g через F_2, получим линейное соотношение

$$\ln F_q = c_q + (\phi_q/\phi_2) \ln F_2, \tag{3.17}$$

которое оказалось весьма успешным не только в одном измерении, а во всех [22]. Более того, отношения ϕ_q/ϕ_2 оказываются практически не зависящими не только от числа измерений (рис. 31,*а*), но и от типа соударения (рис. 31,*б*).

Соответствующее поведение отношения аномальных размерностей $d_q (= \phi_q/(q-1))$ и d_2 показано на рис. 32. Зависимость наклонов от порядка момента может указать на характер процесса, приводящего к перемежаемости. Если он является процессом каскадного типа, приводящим к степенному закону, тогда в гауссовом приближении моменты подчиняются соотношению [19,20]

$$\frac{d_q}{d_2} = \frac{\phi_q}{\phi_2}\frac{1}{q-1} = \frac{q}{2}. \tag{3.18}$$

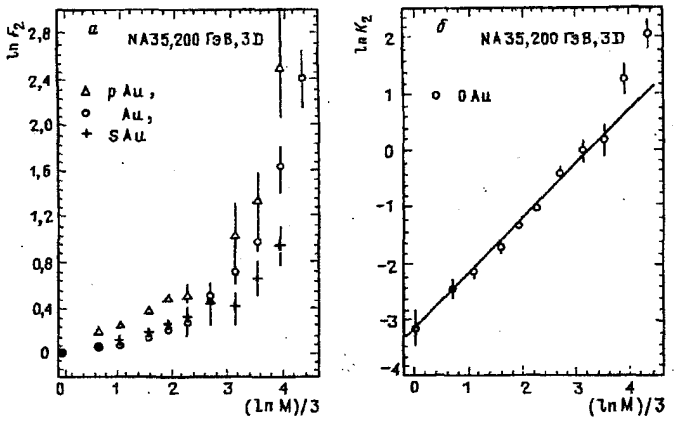

Рис. 29. *а* — Факториальный момент $\ln F_2$ в функции от $(\ln M)/d$ при трехмерном анализе отрицательно заряженных частиц в pAu- и центральных OAu- и SAu-соударениях [105]. *б* — Факториальный кумулянт K_2 при таком же анализе в центральных OAu-соударениях [105]

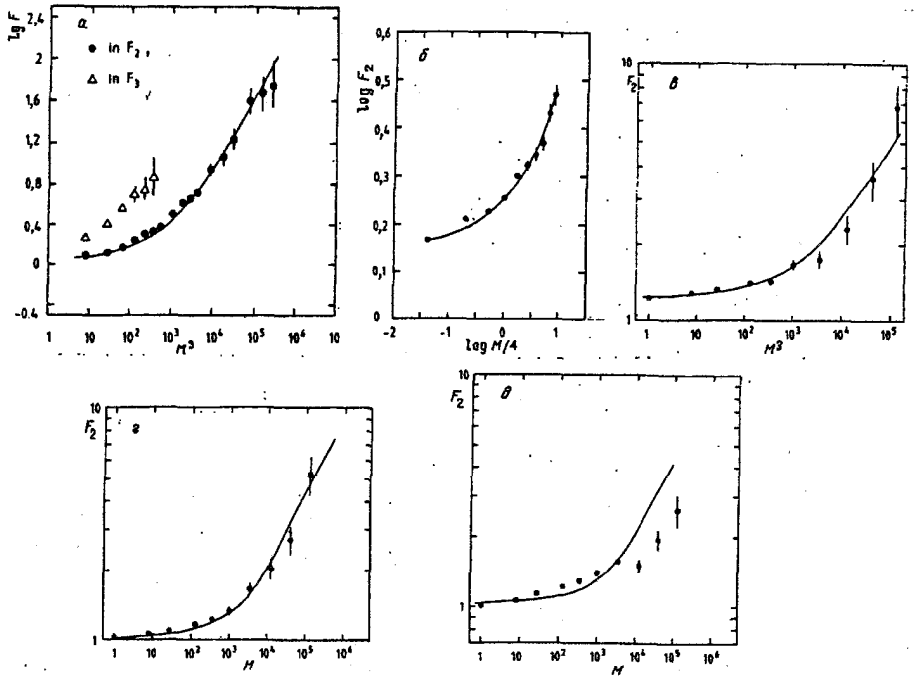

Рис. 30. *а* — Второй факториальный момент как функция от числа ячеек M^3 на дваждылогарифмической шкале [121] для данных о μp-взаимодействиях [94] (*а*), π/Kp-данных [96] (*б*), pAu (*в*)-, OAu (*г*)- и SAu (*д*)-данных [105]. Сплошные линии отвечают уравнению (3.15) со следующими значениями параметров: *а*) $c = 0{,}025$, $\phi_2 = 0{,}45$, $c' = 0$; *б*) $c = 0{,}02$, $\phi_2 = 0{,}45$, $c' = 0{,}16$; *в*) $c = 0{,}02$, $\phi_2 = 0{,}45$, $c' = 0{,}2$; *г*, *д*) $C = 0{,}01$, $\phi_2 = 0{,}5$, $c' = 0$

Как показано в работе [123], центральная предельная теорема служит лишь первым приближением для описания мультипликативных процессов (например, в рамках α-модели). Было предложено [124] использовать более общее поведение типа

$$\frac{d_q}{d_2} = \frac{1}{2^\mu - 2}\,\frac{q^\mu - q}{q - 1}, \tag{3.19}$$

которое называется законом Леви и приводит к формуле (3.18) в частном случае $\mu = 2$.

С другой стороны, в работе [125] были приведены аргументы в пользу того, что при фазовом переходе второго рода мультифрактальное поведение типа (3.18), (3.19) может превратиться в монофрактальное, когда

$$d_q/d_2 = 1, \tag{3.20}$$

что соответствует частному случаю $\mu = 0$ и приводит к аномальным размерностям, не зависящим от порядка момента. Такое поведение могло бы указывать на переход к фазе кварк-глюонной плазмы.

Экспериментальные данные, видимо, лучше все-

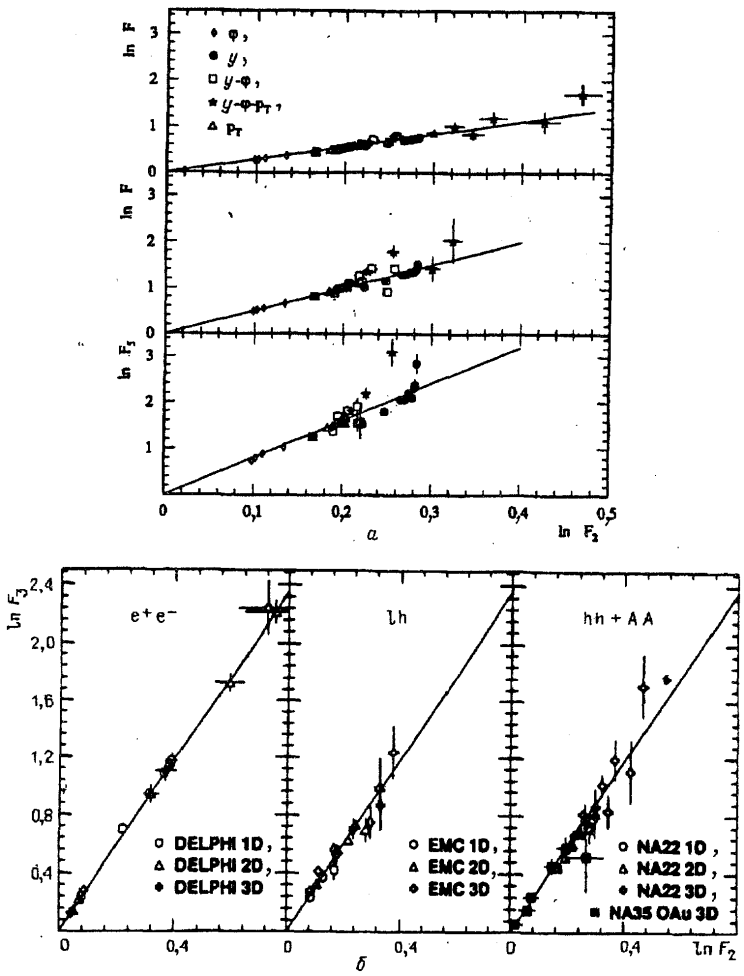

Рис. 31. *а* — Иллюстрация модифицированного степенного поведения. Линии проведены "на глаз". Использованы только те данные, где F_2 сильно изменяется в бинах. *б* — Проверка универсальности степенного поведения (3.15) для второго и третьего факториальных моментов в e^+e^--, lh-, hh- и AA-соударениях. Прямая линия получена подгонкой под e^+e^--данные и воспроизведена на других данных [22]

го описываются решением Леви с $\mu = 1{,}6$, что ниже ожидаемого из гауссова приближения, но заведомо выше того, что предсказывается в [125] для фазовых переходов второго рода.

Однако анализ, проведенный недавно группой NA22 (см. рис. 32,*а*), заставляют относиться осторожно к сделанным выше утверждениям. В то время как усредненный результат подгонок по всем переменным и размерностям (заполненные кружки), а

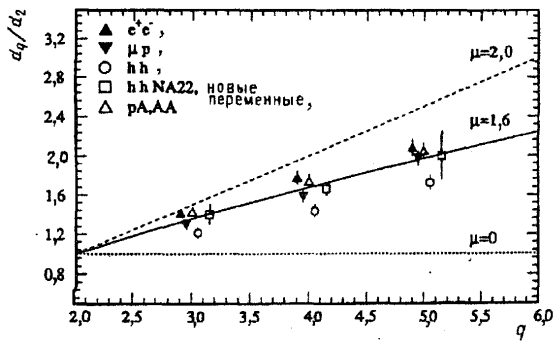

Рис. 32. Отношение аномальных размерностей в функции порядка q [22]

также взвешенные средние по отдельным подгонкам приводят к значениям μ, близким к приводимым в работе [22], трехмерные данные дают $\mu > 2$, что не допускается общей теорией законов Леви. Этот важный вывод следует проверить в последующих экспериментах.

3.2.8. *Зависимость от знаков зарядов.* Возможной причиной, вызывающей перемежаемость, могла бы служить бозе-эйнштейновская интерференция одинаковых частиц на малых расстояниях в фазовом объеме [76, 126, 127]. Обзоры современного состояния вопроса об этой интерференции см. в работах [128, 129]. Согласно работе [127] следует ожидать увеличения наклонов примерно вдвое, если при анализе использовать только тождественные частицы с одинаковым знаком заряда.

Однако TASSO и DELPHI обнаружили меньше перемежаемости для тождественных частиц, что явно противоречит сделанным в [127] предсказаниям. EMC наблюдает некое усиление эффекта для положительно заряженных частиц, но не видит практически никакого изменения для отрицательных заря-

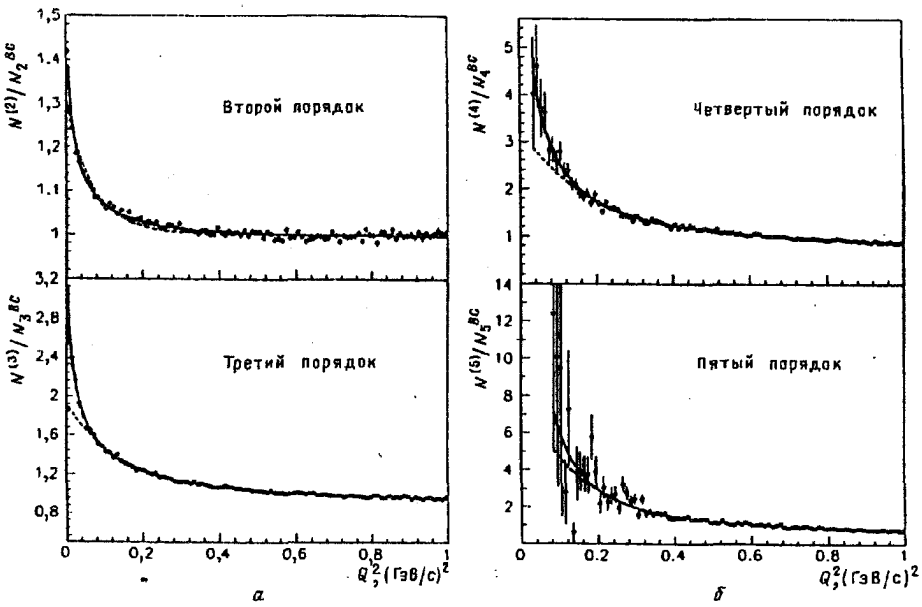

Рис. 33. Бозе-эйнштейновские корреляции от 2-го до 5-го порядка. Пунктир—подгонка гауссовыми экспонентами, сплошные линии — подгонка обычными экспонентами. Учтены поправки на кулоновское взаимодействие [131]

дов при одномерным анализе, а в трехмерном случае все наклоны оказываются примерно одинаковыми. NA22 замечает усиление для отрицательных зарядов, но не для положительных. UA1 не видит никаких отличий, а NA35 указывает на некоторый рост.

CELLO считает, что учет бозе-эйнштейновской интерференции необходим для объяснения наблюдаемого отличия эксперимента от модели JETSET 7.2, но количественное согласие оказывается возможным при неофизическом (слишком большом) параметре! DELPHI считает, что даже при таком параметре не удается достичь хорошего согласия.

Следуя предложению, выдвинутому в работе [130], коллаборация UA1 изучила [131] бозе-эйнштейновские корреляции вплоть до пятого порядка. При этом корреляционная функция q-го порядка определяется в виде

$$R_q(Q^2_{q\pi}) = N_q(Q^2_{q\pi})/N_q^{BG}(Q^2_{q\pi}) \qquad (3.21)$$

отношений распределений пар, триплетов, ..., q-плетов одинаково заряженных пионов $N_q(Q^2_{q\pi})$ к распределению фоновых пар, триплетов, ..., q-плетов $N_q^{BG}(Q^2_{q\pi})$, получаемых при случайном перемешивании событий. Переменная $Q^2_{q\pi}$ определяется как сумма по всем перестановкам квадратов разностей 4 импульсов $Q^2_{ij} = -(p_i - p_j)^2$ частиц i и j:

$$Q^2_{q\pi} = Q^2_{12} + Q^2_{13} + \ldots + Q^2_{(q-1)q}. \qquad (3.22)$$

Результаты приведены на рис. 33. Их можно описать, если в разложении $R_q(Q^2_{q\pi})$ с помощью гауссовых функций, предложенном в работе [130], заменить их на простые экспоненты (ср. сплошные линии (экспоненты) и пунктирные (гауссовы) на рис. 33).

Следует отметить, что пары с малыми Q^2_{ij} теряются из-за ограниченности разрешения двух таких треков в детекторе, а потому измеренные корреляционные функции при наименьших значениях Q^2_{ij} надо трактовать как их нижний предел. Значит, нельзя исключить степенного поведения, диктуемого перемежаемостью.

Интересно сопоставить вклады в корреляционные функции от пар с одинаковыми и с разными зарядами. В функции от $Q^2_{q\pi}$ они приведены на рис. 34 (результаты группы UA1 [97]). Возможная сингулярность степенного вида могла бы проявиться в парах с одинаковым зарядом (пунктир), но не в парах с разным зарядом (точки).

Мы приходим к выводу, что бозе-эйнштейновская интерференция, несомненно, приводит к дополнительным корреляциям и ее влияние на перемежаемость могло бы оказаться сильнее, чем это можно было бы заключить, придавая абсолютное значение успеху каскадных партонных моделей, не учитывающих этот эффект. Мы е щ е раз вернемся к этому вопросу в разделе 3.2.15.

3.2.9. *Зависимость от поперечного импульса.* Исследование этой зависимости нацелено на ответ на вопрос о том, какие процессы лежат в основе явления перемежаемости — полужесткие эффекты [132], которые играют роль в зависимости от поперечного импульса уже при энергиях NA22 [78], или же мягкие подпроцессы с малыми p_T [133,134]. Первым указанием на возможную роль мягких процессов было наблюдение наиболее известного события NA22 [82], в котором пять треков (из десяти, лежав-

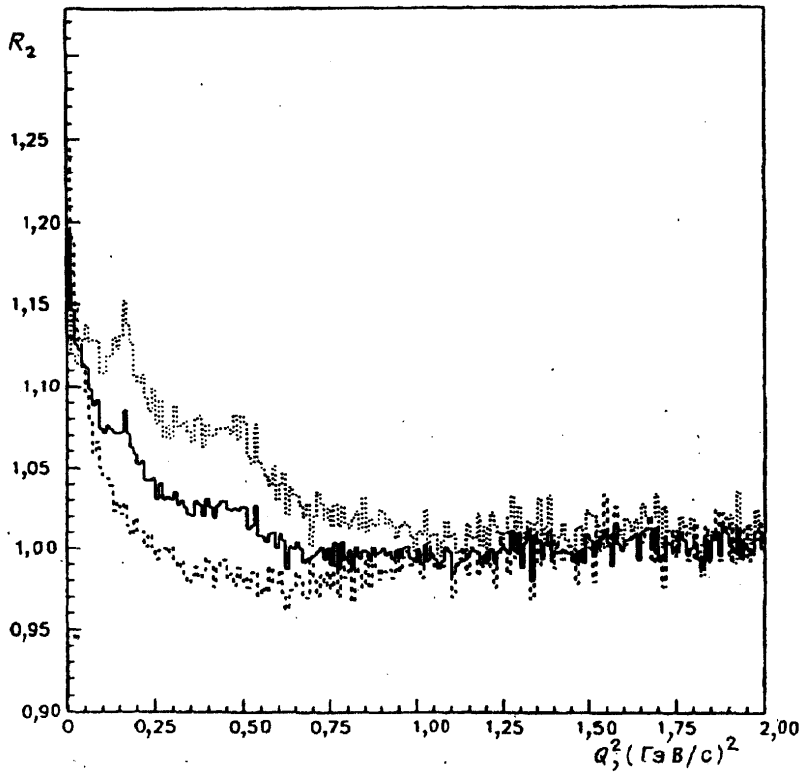

Рис. 34. Зависимость $R_2 = N_2/N_2^{BG}$ от $Q^2_{q\pi}$ ля всех пар заряженных частиц (сплошные кривые), для пар с противоположными знаками зарядов (точки) и для пар с одинаковым зарядом (пунктир) [97]

ших в области "пика") обладали очень малым поперечным импульсом $p_T < 0{,}15$ ГэВ/c.

На рис. 35,*а* приведена дваждылогарифмическая зависимость факториальных моментов от интервала быстрот для частиц с поперечным импульсом ниже и выше 0,15 ГэВ/c, а также для разделения их на две группы при 0,3 ГэВ/c. Частицы с малыми поперечными импульсами (слева) приводят к более сильному эффекту перемежаемости, нежели обладающие большими импульсами (справа). Фитирование проводится здесь не для демонстрации линейного закона, а для указания на рост $\ln F_q$ в области $1 > \delta y > 0{,}1$. В верхней части рис. 35,*б*, полученные значения наклонов сопоставляются с их величинами, полученными во всей области поперечных импульсов, путем записи их через аномальные размерности $d_q = \phi_q/(q-1)$. Ограничивая анализ частицами с малыми p_T, получаем большие значения d_q, тогда как для больших p_T отмечаются меньшие величины для d_q.

В нижней части рис. 35,*б* приведены предсказания модели FRITIOF с подобной же статистикой как для всех частиц, так и при соответствующих разбиениях на группы с малыми и большими поперечными импульсами. Помимо уже отмеченного выше факта [96], что эта модель дает чересчур малые наклоны для полного набора, из этого рисунка видно, что она не воспроизводит и зависимости эффекта от поперечного импульса.

В экспериментах UA1 [97] треки с $p_T < 0{,}15$ ГэВ/c не используются, но сопоставляются данные с низкими ($0{,}15 < p_T < 0{,}5$ ГэВ/c) и любыми ($p_T > 0{,}15$ ГэВ/c) поперечными импульсами (см. рис. 26,*б*). И здесь отбор малых p_T приводит к росту наклонов, тогда как модельные расчеты указывают на противоположные тенденции. На возможную связь этого эффекта с зависимостью от множественности, обсуждаемой ниже, указано в работе [135].

Мы делаем вывод, что перемежаемость, наблюдаемая в эксперименте NA22, связана с частицами с малым поперечным импульсом, а не с полужесткими эффектами. В то же время, поскольку именно такие эффекты доминируют в e^+e^-- и lh-соударениях. изучение зависимости от поперечного импульса в этих процессах представляется чрезвычайно важным для выяснения вопроса о происхождении эффекта перемежаемости.

Действительно, как показано на рис. 36, разделение частиц по поперечным импульсам в данных DELPHI приводит к двум существенным выводам:

1. Дваждылогарифмические графики для группы частиц с малыми поперечными импульсами демонстрируют меньшее насыщение (т.е. большую перемежаемость), чем данные для частиц с большими

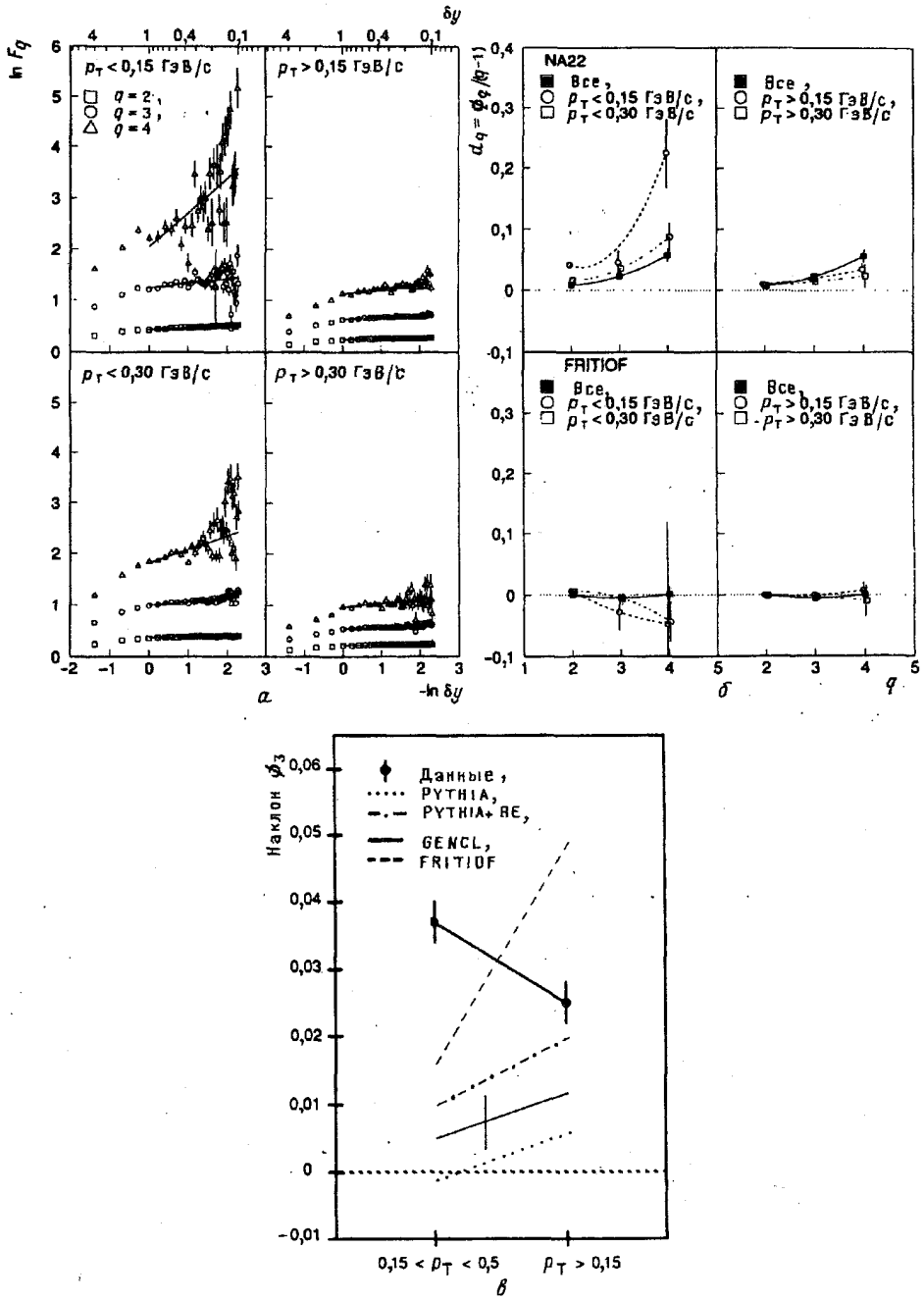

Рис. 35. *а:* $\ln F_q$ в функции от $-\ln \delta y$ для разных обрезаний по p_T (как указано на рисунке) [96]. *б* — Аномальные размерности d_q как функции от порядка q при разных обрезаниях по p_T (линии проведены "на глаз") [92]. *в* — Наклон ϕ_2 для UA1 данных с малыми p_T в сравнении с результатом по полному набору данных и с предсказаниями монтекарловских моделей [97]

p_T. Таким образом, перемежаемость оказывается сильнее в той области p_T, где эффекты жестких глюонов слабее!

2. Появляется расхождение между данными и моделью (лишь слегка намечающееся на рис. 23,*г*) в области поперечных импульсов $0{,}255 < p_T < 0{,}532$ ГэВ/*с*.

На первый взгляд это может показаться удивительным, но мы покажем ниже, что такое разногласие может быть еще сильнее для отдельных каналов реакции, нежели для полной их смеси.

3.2.10. *Зависимость от множественности.* Сильная зависимость показателей перемежаемости от множественности была наблюдена коллаборацией UA1 в hh-соударениях [97]. Она демонстрируется на рис. 37,*а*. Наблюдаемые тенденции отличны от того, что ожидалось из расчетов по моделям, использованным этой коллаборацией. Однако их можно объяснить путем учета смешивания независимых источников частиц [86]. Пересечение экспериментальных и теоретических (FRITIOF) кривых при промежуточных значениях множественности объясняет оче-

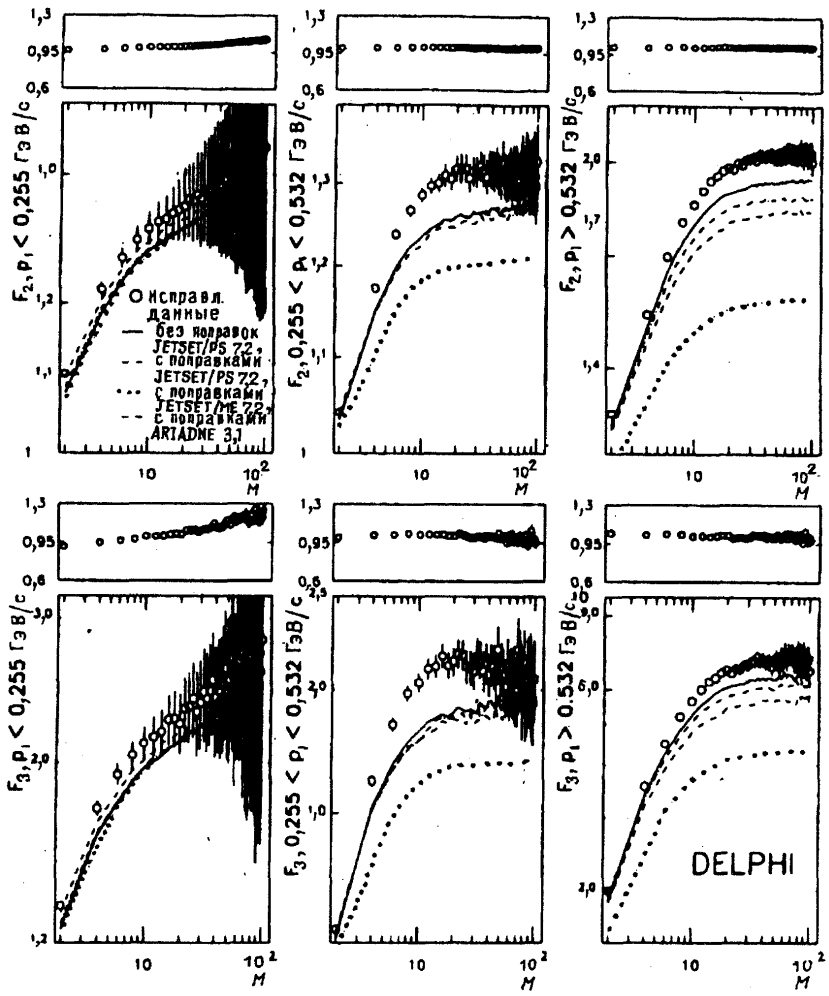

Рис. 36. Факториальные моменты F_2 и F_3 в функции от интервала разрешения для трех наборов данных о e^+e^- аннигиляции с указанными обрезаниями по p_T [91]. Линии соответствуют указанным около них моделям. Приведены соответствующие поправочные коэффициенты

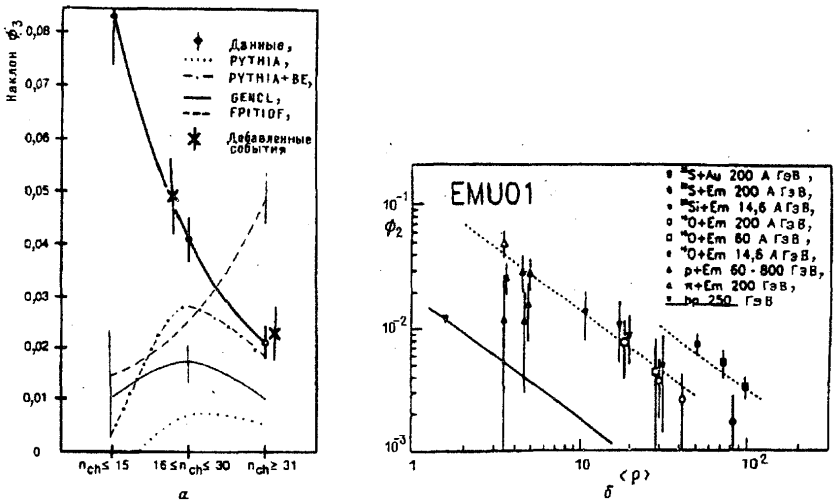

Рис. 37. *а* — Зависимость от множественности наклона ϕ_3 в сопоставлении с ожиданиями ряда моделей. Крестики отвечают комбинации независимых событий [97]. *б* — Наклон ϕ_2 в функции от плотности числа частиц для данных NA22 (hp при 250 ГэВ/с) и для столкновений тяжелых ионов [103]. Сплошная линия соответствует экстраполяции от точки NA22 к более высоким плотностям согласие формуле (3.23). Пунктирные линии соответствуют подгонкам данных для ^{16}O, ^{28}Si, ^{32}S

видный успех модели FRITIOF на рис. 2 при числах частиц, близких к 30. Смешивание источников приводит к уменьшению наклонов ϕ_q с ростом плотности числа частиц $\langle \rho \rangle$ на оси быстрот по закону [136, 76, 137]

$$\phi_q \sim \langle \rho \rangle^{-1}. \tag{3.23}$$

Такой спад, действительно, наблюдался группой UA1 [97]. Поскольку смесь независимых источников является характерной особенностью модели DPM с многими струнами, эта модель приводит к правильной зависимости от множественности, но с отличием вдвое по величине от экспериментальных данных [138]. Интересно отметить, что модель прицельных параметров [139] также обладает этим свойством и объясняет падение ϕ_q с ростом n.

И здесь сопоставление данных по e^+e^--аннигиляции и модели JETSET представляется крайне важным. Результаты LEP фактически указывают на отсутствие такой зависимости или на чрезвычайную слабость ее. Однако при наинизших множественностях это не так. А ведь именно там наклоны наибольшие и разногласия между данными и JETSET также самые большие. В то же время экспериментальные неточности здесь тоже столь велики, что все выводы пока можно принимать как сугубо предварительные. Тем не менее, они побуждают к дальнейшим исследованиям в этой области.

Далее, рис. 37,*а* указывает на то, почему этот эффект столь слабо проявляется в соударениях тяжелых ионов (см. рис. 20). Плотность (а значит, и смесь различных источников) очень велика в этом случае. На рис. 36,*б*, взятом из работ EMU-01 [103], проводится сопоставление ϕ_q для NA22 (hp при 250 ГэВ) с соударениями тяжелых ионов при близких импульсах на нуклон в функции от плотности числа частиц. В то же время как при усреднении по всем множественностям (см. рис.20) наклоны в AA-соударениях оказываются ниже, чем в NA22, при фиксированной плотности $\langle \rho \rangle$ они, в действительности, оказываются выше, чем ожидалось из экстраполяции адрон-адронных данных к большим плотностям. Более того, они даже растут с увеличением размеров ядер. Это может быть свидетельством в пользу перерассеяния (см. [95]) или же другого (коллективного) эффекта. Однако коллаборация HELIOS предостерегает [106] от определенных выводов, пока не будут учтены полностью эффекты внутренней конверсии.

3.2.11. *Зависимость от топологии струй.* В проведенном недавно анализе [91] коллаборация DELPHI использовала двух- и трехструнные события, применяя алгоритм инвариантной массы JADE при величине параметра разрешения $y_{\text{cut}} = 0{,}04$ и 0,01 и с рядом дополнительных критериев отбора двух- и трехструйных событий. В случае ячеек большого размера факториальные моменты растут с уменьшением размера быстрее (и больше по величине) в трехструйных событиях, нежели в двухструйных. Такое поведение при больших ячейках можно было бы ожидать при испускании жестких глюонов. Для ячеек малого размера рост моментов становится практически одинаковым в двух- и трехструйных событиях.

Были вычислены факториальные моменты в трехструйных событиях по отдельности для частиц, принадлежащих струям 1, 2 и 3, упорядоченным по энергии. Быстрота определялась по отношению к оси данной струи. Эффект оказывается самым слабым для струи 3 и наиболее сильным в струе 2, где сильнее всего проявляются и отличия от JETSET.

3.2.12. *Факториальные кумулянты.* Кумулянтные моменты, введенные впервые в [7] и изученные недавно в [24], определяются как интегралы от корреляционных функций, из которых вычтен фон, в соответствии с (2.24) (при $f = 1$) или (3.5). Нормированные факториальные моменты F_q могут быть выражены через нормированные кумулянтные моменты K_q согласно (2.71). Это разложение, разные члены которого отвечают вкладам истинных q, $(q - 1)$, ..., 2-частичных корреляций, сходится довольно быстро [24].

Феноменологический анализ факториальных кумулянтных моментов проведен в работе [24]. Приблизительные оценки их величин по данным группы UA1 при $s^{1/2} = 630$ ГэВ таковы: $K_2 \sim 0{,}6$, $K_3 \sim 0{,}7$, $K_4 \lesssim 1{,}0$, $K_5 \lesssim 1{,}5$. (Неравенства в K_4 и K_5 появляются из-за замены $\overline{AB}$ на $\overline{A} \cdot \overline{B}$ в (2.71), так как нет прямых измерений таких величин.) Двухчастичный вклад в факториальные моменты оказывается, таким образом, довольно большим. При низких энергиях (таких как в NA22) K_2 мал (~0,2), а K_5 не так уж мал (~0,45).

В рамках приближения связанных пар [24] кумулянтные функции высших порядков выразить через произведения функций K_2 (см. также работу [140], где учтена независимая суперпозиция источников) следующим образом:

$$K_q = A_q K_2^{q-1} \tag{3.24}$$

с произвольными константами A_q. Эти формулы хорошо описывают данные UA1, но не данные NA22.

Из формулы (2.71) следует, что вклад $F_q^{(2)}$ в F_q от двухчастичных корреляций можно записать в виде

$$F_3^{(2)} = 1 + 3K_2, \quad F_4^{(2)} = 1 + 6K_2 + 3\overline{K_2^2},$$

а вклад $F_q^{(3)}$ от двух- и трехчастичных корреляций равен

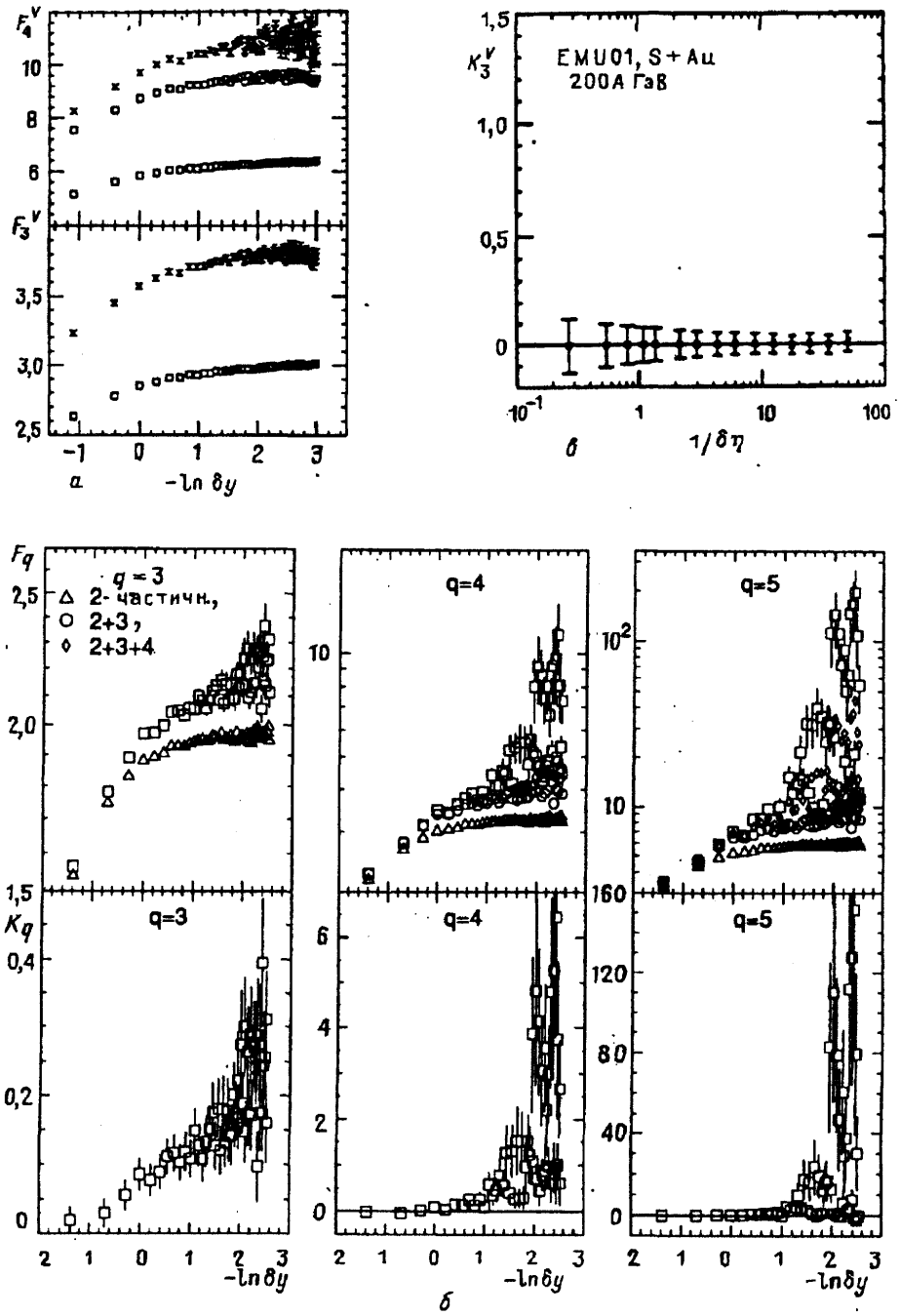

Рис. 38. *а* — Факториальные моменты (UA1), разложенные на кумулянтные вклады: нижние квадраты отвечают двухчастичным, а верхние — двух+трехчастичным вкладам [141]. *б* — Верхний ряд: нормированные факториальные моменты F_q по данным NA22 (квадратики) с выделенными вкладами от двухчастичных; корреляций (треугольники), суммой двух- и трехчастичных корреляций (кружки) и суммой двух-, трех- и четырехчастичных корреляций (ромбы). Нижний ряд: нормирование кумулянтные моменты K_q [96]. *в* — K_3 для ядерных соударений [41]

$$F_4^{(3)} = 1 + 6K_2 + \overline{3K_2^2} + 4K_3.$$

На рис. 38,*а* приведены соответствующие вклады для F_3 и F_4 согласно данным UA1 [141]. Различие кривых явно указывает на большие вклады истинных корреляций высших порядков. Подобные же результаты были получены группой NA22 [96] (см. рис. 38,*б*) для $p = 2$ и 3 и $q = 3$ и 4 в одно-, двух- и трехмерном фазовом пространствах (y, $y - \varphi$, $y - \varphi - p_T$). Вообще, разница растет с ростом $\ln M$ (уменьшением размера ячейки). Отсюда можно сделать вывод, что вклад многочастичных корреляций высших порядков растет с уменьшением размеров ячеек. Исключение составляет лишь переменная φ, для которой существенны только двухчастичные корреляции (не показано на рис.).

В соударениях тяжелых ионов все $K_q \approx 0$ при $q > 2$ (рис. 38,*в*) и, следовательно, все моменты F_q описываются последовательными двухчастичными корреляциями [141].

3.2.13. *Факториальные корреляторы.* Локальные флуктуации плотности в фазовом объеме, выяв-

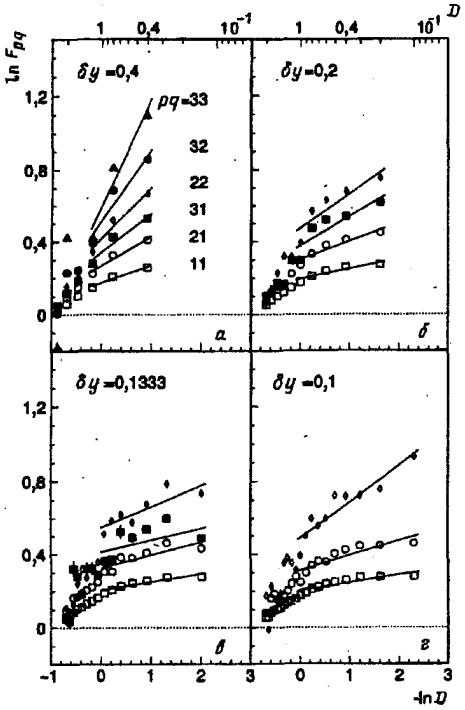

Рис. 39. ln F_{pq} как функция —ln D для указанных четырех значений δy [143]

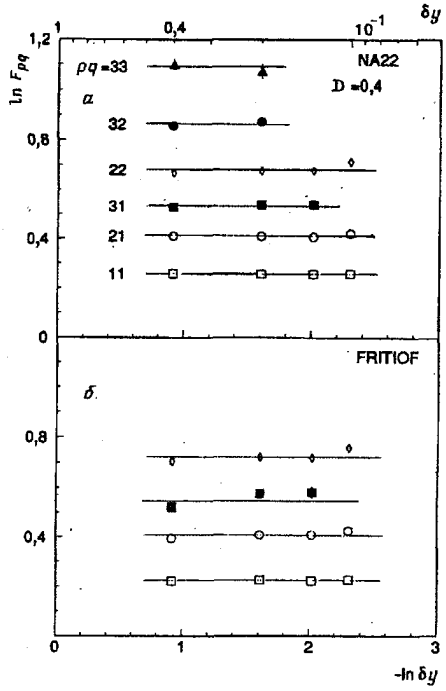

Рис. 40. Зависимость ln F_{pq} от размера бины δy при корреляционном расстоянии $D = 0{,}4$ *а* для данных NA22 (*а*) и для набора 60000 монтекарловских событий по модели FRITIOF (*б*). Пунктирные линии указывают горизонтальную подгонку по точкам [143]

ляемые с помощью факториальных моментов, определенных формулой (2.67), могут оказаться коррелированными друг с другом при их появлении в разных областях в данном событии. Из этих корреляций можно извлечь дополнительную информацию о флуктуациях. Корреляция обнаруживается при помощи факториальных корреляторов, определяемых соотношением (2.73). При заданной ширине каждой из ячеек δy вычисляется коррелятор для всех комбинаций mm' пар таких ячеек, разделенных интервалом D, и усредняется по всем возможным комбинациям.

Согласно простейшей каскадной модели, приводящей к перемежаемости (α-модель) и описанной в [19, 20], факториальные корреляторы должны зависеть от D, но не от δy, причем должен быть справедлив степенной закон

$$F_{pq} \sim (\Delta Y/D)^{\phi_{pq}}. \tag{3.25}$$

Степени ϕ_{pq} (наклоны в дваждылогарифмической шкале) должны подчиняться следующим соотношениям

$$\phi_{pq} = \phi_{p+q} - \phi_p - \phi_q = pq\phi_2, \tag{3.26}$$

где первое равенство следует из α-модели, а второе получается для логарифмически нормального распределения. Так как в соответствии с (3.25) $\phi_{11} = \phi_2$, это соотношение можно записать и так

$$\phi_{pq} = pq\phi_{11}. \tag{3.27}$$

Предварительные результаты были получены коллаборацией HELIOS [142] при разрешении по псевдобыстроте $\delta\eta \geq 0{,}2$. Однако в этих опытах приходилось оценивать множественность путем измерения поперечной энергии $E_{T,m}$, выделенной в ячейке m, и деления ее на среднюю поперечную энергию одной частицы с последующим округлением результата до ближайшего целого числа. Первые непосредственные измерения факториальных корреляторов были проведены группой NA22 [143] и их результаты показаны на рис. 39. При четырех значениях $\delta y \geq 0{,}1$, отвечающих соответственно значениям $M = 10$, 20, 30 и 40, была определена величина ln F_{pq} как функция -ln D. Статистические ошибки (оценивавшиеся по дисперсии распределения F_{pq}) оказались меньше размеров символов на рисунке. Для относительно больших значений $\delta y = 0{,}4$ удается оценить F_{pq} вплоть до третьего порядка по p и по q (рис. 39,*а*), тогда как при малых $\delta y = 0{,}1$ анализ ограничивается первым и вторым порядками (рис. 39,*г*). Так как наименьшее возможное значение D равно размеру интервала δy, на рис. 39,*а* приведены значения D вплоть до $D = 0{,}4$, а на рис. 39,*г* — вплоть до $D = 0{,}1$. Во всех случаях отмечен рост ln F_{pq} с ростом –ln D. Весьма похожие результаты были недавно приведены группой EMC [94].

На рис. 40,*а* показано поведение ln F_{pq} при заданном значении $D = 0{,}4$ при четырех различных вели-

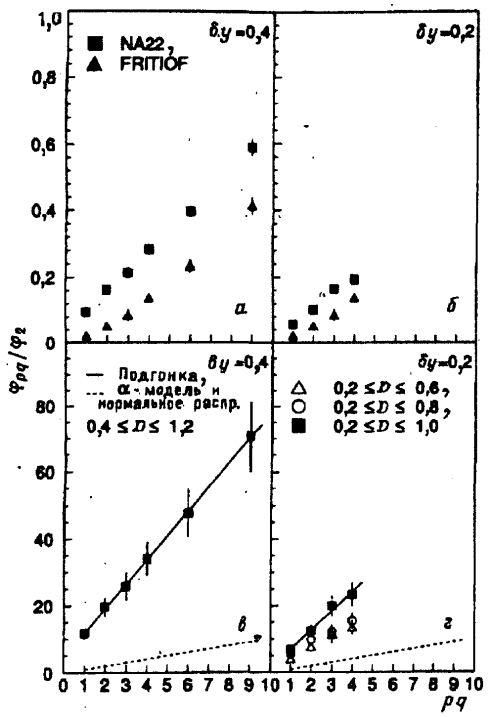

Рис. 41. *а*, *б*—Рост наклонов ϕ_{pq} с ростом порядка pq по сравнению с ожидаемым из модели FRITIOF (для двух значений δy соответственно). *в*, *г* — Рост отношения ϕ_{pq}/ϕ_2 с ростом порядка pq по сравнению с ожидаемым из α-модели (пунктир) также для двух значений δy [143]

чинах δy. Пунктирные линии указывают подгонку горизонтальной линией, проходящей через экспериментальные точки. Как и ожидалось в α-модели, факториальные корреляторы, действительно, не зависят от δy. Этот результат был также подтвержден данными ЕМС [94]. Однако это свойство более общее, нежели α-модель. Рис. 40,*б* показывает, что независимость от δy характерна и для модели FRITIOF. Возможно, оно типично для всех моделей с короткодействующим упорядочением. Даже численные значения $\ln F_{pq}$ хорошо воспроизводятся моделью при $D = 0{,}4$.

Независимость от δy величины F_{11} может быть получена путем интегрирования двухчастичных корреляций по двум областям размером δy, разделенным расстоянием D. Используя экспоненциальный вид короткодействующих корреляций [77], имеем

$$F_{11} - 1 \sim \frac{1}{a^2} e^{-D/L}(e^a - 1)(1 - e^{-a}), \qquad (3.28)$$

где L — корреляционная длина и $a = \delta y/L$. Согласно формуле (3.28) F_{11} не зависит от δy при $a < 1$. Поскольку $e^{-D/L} \to 1$ при $D \to 0$, такая формула приводит к отклонениям от (3.25), наблюдаемым в виде искривления графика на рис. 39.

Вследствие этого искривления, получаемые в результате линейной подгонки, наклоны ϕ_{pq} можно использовать лишь для указания на рост в соответствующей области. На рис. 41,*а*, *б* их значения сравниваются с моделью FRITIOF для двух интервалов δy. Как уже отмечалось в случае факториальных моментов [96], модель FRITIOF и здесь приводит к чересчур малым наклонам (теперь уже для корреляторов). Эта неудача модели FRITIOF связана с ее неспособностью воспроизвести двухчастичные корреляции, что уже обсуждалось в разделе 3.1. Однако заметим, что опыт, полученный при работе с моделью кварк-глюонов струн [57], подсказывает нам возможность и такой ситуации, когда двухчастичные корреляции описываются удовлетворительно, а факториальные моменты отфитировать не удается. Дальнейшие модификации моделей должны учитывать это обстоятельство.

Согласно формуле (3.26), отношение ϕ_{pq}/ϕ_2 должно расти с увеличением p и q как их произведение. На рис. 41,*в*, *г* это утверждение проверяется для $\delta y = 0{,}4$ и $\delta y = 0{,}2$, соответственно. В обоих случаях экспериментальные результаты лежат намного выше пунктирной линии, отвечающей ожидаемому росту. Поскольку зависимость $\ln F_{pq}$ от $-\ln D$ не совсем линейная, это сопоставление зависит от области значений δy и D, использованной для определения величин ϕ_2 и ϕ_{pq}. Именно поэтому на рис. 41,*г* проводится сравнение различных подгонок. Наклоны уменьшаются, если верхний предел D понижается, но все равно не достигают предсказаний α-модели (пунктирная линия).

Можно показать, что разногласие (во всяком случае, для высших порядков) с формулой (3.26), в основном, относится ко второму равенству.

Это приближение, как было подчеркнуто в работе [123], справедливо лишь для тех случаев, когда либо флуктуации слабы, либо они имеют логарифмически нормальное распределение. Из данных NA22 следует, что ни одно из этих условий не выполняется.

Мы приходим к выводу, что корреляторы F_{pq} растут при уменьшении длины корреляций D, но не могут быть описаны простым степенным законом. При заданном значении D величина F_{pq} не зависит от интервала δy, что и ожидалось в α-модели, но получалось также и в модели FRITIOF, а, возможно, окажется общей чертой всех моделей с ближним порядком. Показатели степени ϕ_{pq} растут практически линейно с увеличением произведения pq, но по величине оказываются намного больше ожидавшихся согласно FRITIOF или же простой α-модели.

3.2.14. *Мультифрактальный анализ.*

3.2.14-1. Метод. — Конечно, желательно использовать и другие методы анализа, помимо факториальных и кумулянтных моментов, которые вычисляются лишь при целых положительных значениях их порядков. Расширение на область отрица-

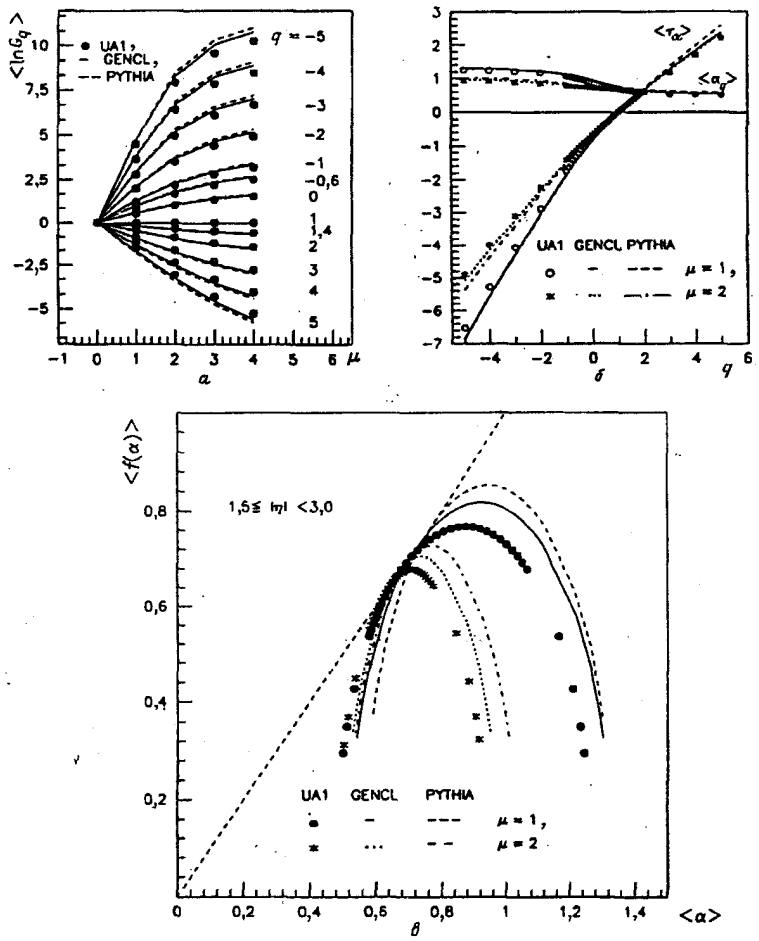

Рис. 42. *а* — $\langle \ln G_q \rangle$ в функции от разрешения ($M = 2^{\mu}$) для данных UA1 по сравнению с ожиданиями из монтекарловских моделей GENCL и PYTHIA. *б* — $\langle \alpha_q \rangle$ и $\langle \tau_q \rangle$ в функции от q. *в* — Мультифрактальная спектральная функция $\langle f(\alpha_q) \rangle$ в зависимости от $\langle \alpha_q \rangle$ [149]

тельных и нецелых значений q доступно в методе G-моментов [37], предложенном с целью изучения (мульти)фрактальности в процессах множественного рождения [87,144]

$$G_q = \sum_{m=1}^{M}{}' p_m^q \ , \ p_m = n_m/n, \ n = \sum_{m=1}^{M} n_m. \qquad (3.29)$$

Штрих у знака суммы означает, что пустые интервалы не содержатся в этой сумме, а потому величина q может принимать любые вещественные значения. Как и в случае факториальных моментов, флуктуации плотности самоподобного типа, вообще говоря, должны приводить к скейлинговому поведению G-моментов

$$G_q \sim (\delta y)^{\tau_q} \text{ для } \delta y \to 0. \qquad (3.30)$$

При фрактальном анализе (см. раздел 2.4) определяют наклон кривой в дваждылогарифмическом масштабе

$$\tau(q,M) = -\partial\langle \ln G_q(M) \rangle / \partial \ln M \qquad (3.31)$$

после усреднения по всему набору событий. Мультифрактальная спектральная функция определена как

$$f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau_q, \qquad (3.32)$$

где

$$\alpha_q = \partial\tau_q/\partial q. \qquad (3.33)$$

Обобщенные (Реньи) размерности равны

$$D_q = \tau_q/(q-1) = (q\alpha_q - f(\alpha_q))/(q-1). \qquad (3.34)$$

3.2.14-2. Экспериментальные результаты. — Анализ с помощью G-моментов был проведен в ряде экспериментов [94, 145—148]. В качестве примера на рис. 42 приведены результаты группы UA1 [149, 150]. Поведение усредненной по всем событиям величины $\langle \ln G_q \rangle$ показано на рис. 42,*а* в зависимости от разрешения ($M = 2^{\mu}$). Будучи нормированными согласно (3.29) таким образом, что $\langle \ln G_q \rangle = 0$ при $\mu = 0$, G-моменты растут с ростом μ при $q < 1$ и падают при $q > 1$. Однако при больших значениях μ наклон уменьшается и $\langle \ln G_q \rangle$ стремится к насыщению. Это насыщение вызвано возрастающим числом интервалов, в которых нет ни одной частицы или появляется всего лишь одна частица, т.е.

$$G_q(M) \to N(1/N)^q = N^{1-q} \text{ для } M \to \infty. \qquad (3.35)$$

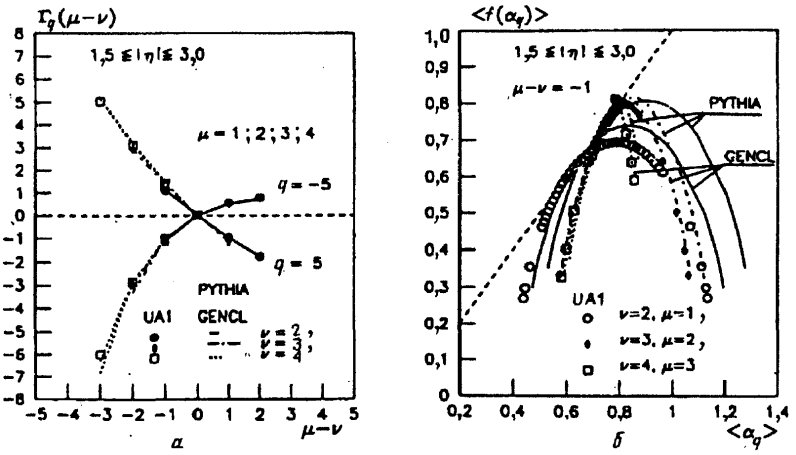

Рис. 43. *а* — Универсальная функция Γ_q в зависимости от $\xi = \mu - \nu$ для $q = \pm 5$ по данным UA1. *б* — Спектральная функция $\langle f(\alpha_q)\rangle$ в зависимости от $\langle \alpha_q \rangle$ [149]

Если ограничиться при анализе достаточно малыми значениями $M = 2^\mu$, то получим величины $\langle \tau_q \rangle$ и $\langle \alpha_q \rangle$ в функции от q, показанные на рис. 42,*б*, и мультифрактальную спектральную функцию $f(\alpha_q)$ в зависимости от $\langle \alpha_q \rangle$, приведенную на рис. 42,*в*. Тот факт, что спектральная функция не вырождается в δ-символ, мог бы указывать на мультифрактальность процесса рождения частиц, по крайней мере, как это наблюдается при больших интервалах $\delta y = \Delta Y/M$ (малые μ). Однако при малых размерах функция как бы зеркально отражается и уходит в нефизическую область над пунктирной линией (мы не приводим этой ветви функции), что ставит под сомнение делаемые выводы.

3.2.14-3. Универсальность. — Как видно из рис. 42,*в*, функция $\langle f(\alpha)\rangle$ зависит от μ. Более того, она зависит и от энергии (или от полной множественности $n = 2^\nu$, где ν — число парных ветвлений). Поэтому в работе [151] было предположено, что G-моменты при заданной величине q окажутся функциями только от $\xi = \mu - \nu$, т.е. от средней множественности частиц в данном интервале $n/M = 2^{\nu-\mu} = 2^\xi$. В частности, в рамках каскадной модели было получено следующее свойство универсальности

$$\Gamma_q(\xi) = \ln G_q(\mu, \nu) - \ln G_q(\nu, \nu). \qquad (3.36)$$

На рис. 43,*а* показана зависимость Γ_q от $\xi = \mu - \nu$ для $q = \pm 5$. Все экспериментальные точки довольно тесно ложатся вблизи единых линий, указывая таким образом на универсальное поведение.

Более того, было предсказано, что $\langle f(\alpha_q)\rangle$ также универсальна при заданной величине ξ. Рис. 43,*б* показывает, что это предсказание не выполняется, если использовать данные UA1 [149]. Для данных EMC [94] левая ветвь кривой достаточно универсальна, а правая не обладает этим свойством. Помимо повышенной чувствительности функции $\langle f(\alpha_q)\rangle$ к нарушению универсальности, эта функция оказывается особо чувствительна к конкретным деталям модельных расчетов (см. рис. 43,*б* с сопоставлением моделей PYTHIA и GENCL).

3.2.14-4. Насыщение и статистические флуктуации. — Преимуществом G-моментов является то обстоятельство, что в анализе используются не только пики, но и провалы в распределении числа частиц по ячейкам, так как можно рассматривать и отрицательные значения q. К недостаткам же следует отнести насыщение моментов при $\delta y \to 0$, когда во всех непустых ячейках остается по одной частице, а также тот весьма важный факт, что статистические флуктуации здесь не устраняются (см. также [152]).

Поэтому в работе [153] была предложена процедура подавления статистических флуктуаций путем обогащения набора событий за счет событий с большими пиками и уменьшения роли глубоких провалов. Согласно этому предложению, отбираются события, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\ln G_q > Z\langle \ln G_q \rangle \text{ для } q > 1, \\ &\ln G_q < Z\langle \ln G_q \rangle \text{ для } q < 1, \end{aligned} \qquad (3.37)$$

где Z подбирается так, чтобы обеспечить линейное поведение $\langle \ln G_q \rangle$ в функции от μ. Более того, по аналогии с графиками Окса (рис. 31), можно представить $\langle \ln G_q \rangle$ в функции от $-\langle \ln G_2 \rangle$. Действительно, на рис. 44,*а* получены прямые линии вплоть до $\mu = 4$ ($-\langle \ln G_2 \rangle = 0{,}38$) [149]. В случае $\mu = 1$ и 2 спектральные функции показаны на рис. 44,*б*. Однако и здесь спектральные функции приобретают нефизические ветви для $\mu > 2$ (не приведена). Возможно, это обусловлено слишком низкой множественностью даже при энергиях коллайдеров. Следует отметить заметное расхождение между экспериментальными данными и предсказаниями моделей даже в

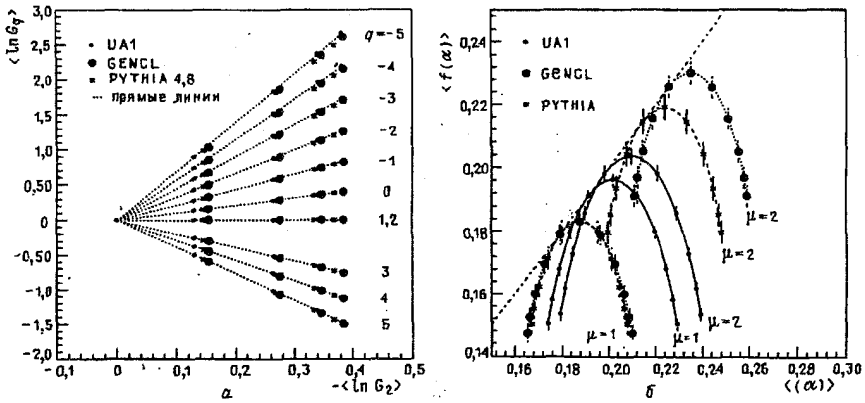

Рис. 44. *а* — $\langle \ln G_q \rangle$ как функция $-\langle \ln G_2 \rangle$ для данных UA1 в сравнении с монтекарловскими расчетами по моделям GENCL и PYTHIA. *б* — Спектральная функция $\langle f(\alpha_q) \rangle$ в зависимости от $\langle \alpha_q \rangle$ [149]

области больших размеров ячеек (соответствующих малым значениям μ), т.е. там, где параметры моделей специально были выбраны таким образом, чтобы те же данные описывались в других, более привычных переменных.

Интересная модификация формулы (3.29) была предложена в работе [154], цель которой состоит в том, чтобы вклад в моменты давали лишь события, в которых есть ячейка, с числом частиц в них, превышающем порядок момента, т.е.

$$G_q = \sum_{m=1}^{M} p_m^q \theta(n_m - q). \tag{3.38}$$

При очень больших n (как это имеет место для статистических систем) $n/m \gg q$ и (3.38) совпадает с (3.29). В физике частиц величина n ограничена и ступенчатая функция сильно влияет на G-моменты. Она накладывает неаналитическое обрезание при целых положительных значениях q. С помощью монтекарловской программы (ECCO), основанной на геометрической каскадной модели, было показано, что $\ln\langle G_q \rangle$ зависит линейным образом от $\ln M$ при $q > 1$ в этой модели и не выходит на константу. Более того, авторы показывают, как динамические составляющие можно отделить от статистических флуктуаций и, в частности, как извлечь D_q^{dyn} из экспериментальных данных.

При $q > 1$ такая линейная зависимость была получена в экспериментах по μp-, p$\bar{\mathrm{p}}$- и $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-соударениям [146, 149]. Во всех трех случаях наклоны оказались весьма похожими с $\tau_q \approx -0{,}9(q-1)$. Как и ожидалось из анализа одномерной проекции, динамическая составляющая отвечает плоскому распределению по быстротам.

Мы приходим к выводу, что мультифрактальная спектральная функция $f(\alpha)$ отвечает условиям, вытекающим из свойств мультифракталов. Эта функция очень чувствительна к нарушению универсальности и к конкретным деталям монтекарловских расчетов. Однако с помощью используемого сейчас метода удается установить мультифрактальность лишь при сравнительно больших размерах ячеек (сопоставьте это с определением фракталов!). К сожалению, эффекты конечности числа частиц оказываются очень важными и отделить их от чисто динамических эффектов очень трудно. Предлагалось и такое определение G-моментов, которое подчеркивало бы большие множественности и помогало бы усилить роль динамических эффектов, но для этого необходимо проводить анализ высших порядков, требующий большой статистической обеспеченности экспериментальных данных.

3.2.15. *Корреляционный интеграл по полосе.* Одним из наиболее обещающих продвижений за последнее время является, по-видимому, использование метода интегрирования корреляционных функций вдоль полосы в фазовом объеме [85, 155, 156]. Интегрирование инклюзивных плотностей корреляций по такой полосе (вместо суммирования по отдельным ячейкам) позволяет не только избежать дробления пиков границами ячеек, но и заметно увеличить размер области интегрирования при заданном разрешении.

В терминах обычных интегралов, (вертикальный) факториальный момент записывается в одномерном случае в виде

$$F_q(\delta y) \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\langle n_m^{[q]} \rangle}{\langle n_m \rangle^q} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\int\limits_{\Omega_m} \prod\limits_i \mathrm{d}y_i \rho_q(y_1,\ldots,y_q)}{\int\limits_{\Omega_m} \prod\limits_i \mathrm{d}y_i \rho_1(y_1)\ldots\rho_1(y_q)}. \tag{3.39}$$

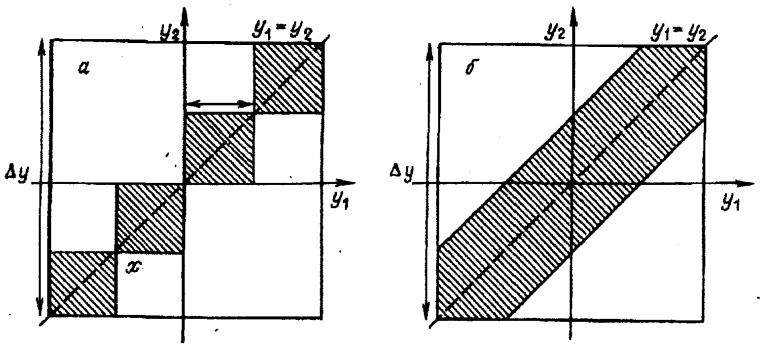

Рис. 45. *а* — Область интегрирования $\Omega_B = \sum_m \Omega_m$ функции $\rho_2(y_1, y_2)$ для усреднения факториальных моментов. *б* — Соответствующая область интегрирования Ω_S для интегралов от плотности [156]

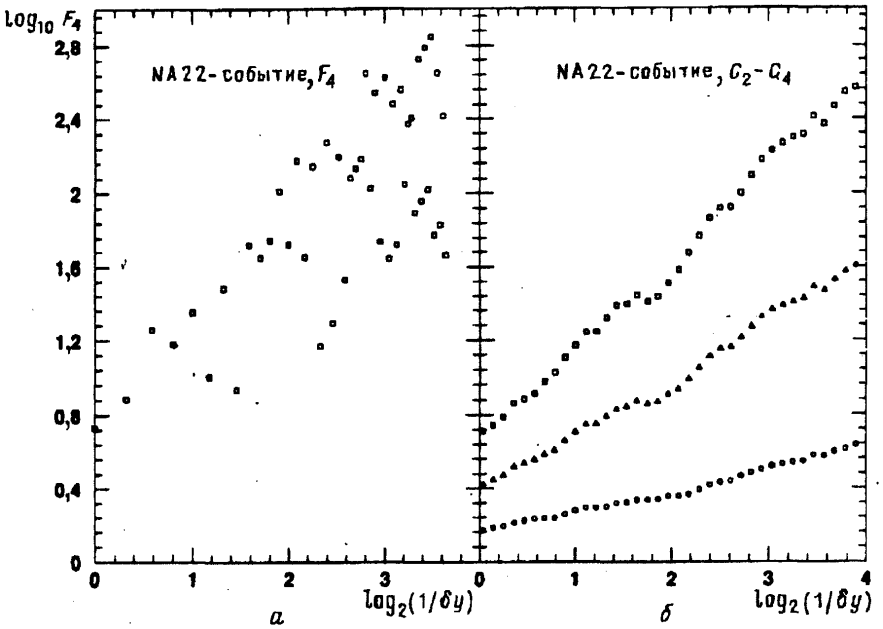

Рис. 46. *а* — Четвертый факториальный момент особого события (с пиком) NA22 [82]. *б* — Интегралы по полосе для q = 2—4 [156]

При этом область интегрирования $\Omega_B = \sum_{m=1}^{M} \Omega_m$ состоит из Mq-мерных ячеек Ω_m с длиной ребра δy. Для случая $q=2$, Ω_B представляет собой область, изображенную на рис. 45,*а*. Точка в ячейке m соответствует паре (y_1, y_2) с расстоянием между частицами пары $|y_1 - y_2| < \delta y$, причем обе частицы находятся в одной и той же ячейке m. Точки, находящиеся на таком же расстоянии, но лежащие в соседних ячейках (например, точка x на рис. 45,*а*), не учитываются. Статистическую обеспеченность можно почти удвоить, если заменить область Ω_B единой полосой, изображенной на рис. 45,*б*. Для еще более высоких порядков q увеличение объема интегрирования (т.е. снижение квадрированной статистической ошибки) оказывается примерно пропорциональным порядку корреляции. Этот прирост еще увеличивается при работе с двух- или трехмерным фазовым объемом.

Интегралы (вертикальные) от инклюзивных корреляций по полосе (или по гипертрубам при $q > 2$) имеют вид

$$C_q(\delta y) \equiv \int_{\Omega_S} \prod_i dy_i \rho_q(y_1, \ldots, y_q) \times \times \left(\int_{\Omega_S} \prod_i dy_i \rho_1(y_1) \ldots \rho_1(y_q) \right)^{-1}. \qquad (3.40)$$

Их можно вычислять, непосредственно используя экспериментальные данные при выборе соответствующей меры расстояний ($|y_i - y_j|$, $[(y_i - y_j)^2 + (\varphi_i - \varphi_j)^2]^{1/2}$ или же 4-импульс $Q_{ij}^2 = -(p_i - p_j)^2$) после задания правильной топологии (GHP-интеграл [85], интеграл-змея [75]).

В качестве примера сопоставим на рис. 46,*а* $F_4(\delta y)$ с $C_4(\delta y)$ (а также C_2 и C_3) для NA22-события с пиком [82] (размер ошибок не проставлен, так как здесь представлено всего лишь одно событие). Факториальный момент F_4 сильно флуктуирует в зависимости от того, лежит ли весь пик внутри одной ячейки

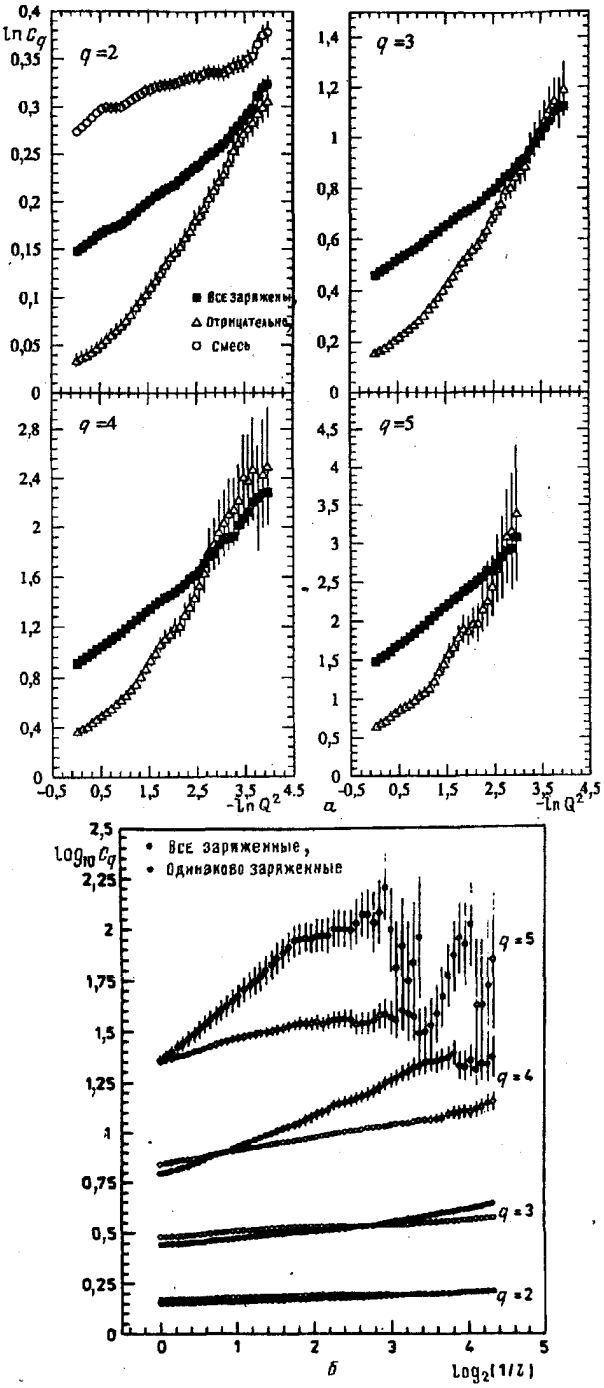

Рис. 47. Интегралы по полосе C_q при $q = 2$—5 для всех заряженных, отрицательных и положительных частиц в π^+p- и K^+p-соударениях при $s^{1/2} = 22$ ГэВ. Интеграл C_2 приводится также для случая комбинаций зарядов (+ –) [157]

или же он поделен границей между ячейками. Такие флуктуации практически исчезают в C_4 (рис. 46,*б*).

Сравнение с монтекарловскими версиями модели FRITIOF 2.0 показывает, что первоначальная версия не описывает данных NA22 для всех заряженных частиц, однако с учетом поправок (далитцевские распады плюс 0,25 % недетектируемой внутренней конверсии γ-квантов) она приближается к экспериментальным данным. Тем не менее, как и ожидалось, ни одна из версий не может описать данных о частицах с одинаковым знаком заряда. Теоретические предсказания оказываются заметно, ниже экспериментальных результатов. В то же время, учет γ-конверсии приводит к заметной переоценке F_2 для (+ –) комбинаций. Если же конверсия не учитывается, то совпадение результатов получается достаточно хорошим.

Сколь сильно удается уменьшить статистические ошибки, видно из рис. 47, где данные NA22 [157] представлены в функции от $-\ln \delta Q^2$ со всеми двухчастичными комбинациями, содержащимися в n-плете с $Q_{ij}^2 < \delta Q^2$ [85]. Анализируя этот рисунок, можно прийти к следующим выводам:

а) ошибки существенно уменьшаются по сравнению, например, с рис. 35,*а*;

б) одномерный анализ с переменной Q_{ij}^2 приводит фактически к столь же быстрому росту, как и трехмерный по y (см., например, рис. 28,*в*);

в) при выборе Q_{ij}^2 в качестве переменной вместо y наблюдается одинаковое поведение для отрицательно и положительно заряженных частиц, но теперь они приводят по отдельности к вдвое более крутому росту нежели их смесь (особенно при малых Q_{ij}^2);

г) хотя C_2 и слабее растет для разных зарядов, нежели для одинаковых, но насыщения не наступает.

Два первых вывода, показывают преимущества этого метода и выбора правильной переменной. Два последних утверждения фактически показывают заметное влияние (при выборе таких переменных) интерференции тождественных частиц (бозе-эйнштейновских корреляций) на факториальные моменты. Поскольку фрагментация струн приводит к сильной антикорреляции одинаково заряженных частиц, одним из наиболее жгучих вопросов теперь становится соответствие e^+e^--данных с моделями (JETSET и т.п.) по поведению интегралов вдоль полосы при разных комбинациях зарядов рождающихся частиц. Если наблюдаемый эффект будет подтвержден, то он окажет поддержку высказанной недавно точке зрения [157], что перемежаемость объясняется бозе-эйнштейновскими корреляциями пионов с одинаковым зарядом при степенном поведении, получающемся за счет флуктуаций размеров и/или формы источников. Этот эффект флуктуаций важен, поскольку бозе-эйнштейновские корреляции при статическом источнике не приводят к степенному поведению. Каким-то образом это связано с самоорганизующейся системой партонных лавин. Несмотря на всю гипотетичность, эта новая точка зрения представляется интересной. Например, такое объяснение не затрагивается фрагментацией и рождением резо-

нансов, поскольку перемежаемость объясняется как результат взаимодействия в конечном состоянии.

3.2.16. *Основные выводы.*

1. Перемежаемость наблюдается для всех типов соударений. Аномальные размерности малы ($d_q = 0{,}01$–$0{,}1$) при обычном одномерном анализе, однако их значения заметно возрастают, а (дваждылогарифмические) графики выглядят более похожими на прямые при расширении анализа на более высокие размерности. Это свидетельствует о том, что множественное рождение частиц в соударениях при высоких энергиях обладает свойством самоподобия, проявляющимся при последовательном улучшении разрешения в фазовом объеме.

2. Партонные каскадные модели, разыгранные методом Монте-Карло, оказались хорошими кандидатами на описание e^+e^--столкновений при высоких энергиях и могли бы быть использованы и для lh- и hh-соударений, где используемые сейчас модели пока не полностью оправдывают себя. При таком подходе важна будет новая информация о процессах перехода от кварк-глюонной стадии процесса к конечным адронам. Необходимо точно установить причину появления перемежаемости в каскадных моделях и провести дальнейшие проверки их выводов по зависимости от поперечного импульса и множественности.

3. Используемые методы пока еще весьма чувствительны к тем или иным погрешностям в экспериментальных данных и потому необходимо подробно исследовать все такие погрешности прежде, чем делать окончательные выводы. С другой стороны, благодаря такой чувствительности эти методы как раз и могут быть использованы для выявления таких погрешностей.

4. Очень полезное и универсальное соотношение о линейной связи логарифмов моментов разного порядка было неоднократно проверено и привело к установлению связи между разными аномальными размерностями. Исходя из этого, например, в работе [125] делается вывод о том, что фазовый переход второго рода вряд ли может служить причиной появления перемежаемости.

5. Зависимость от знаков зарядов еще не позволяет сделать окончательных выводов, но ясно, что бозе-эйнштейновские корреляции присутствуют и их влияние следует изучать и далее. Однако успех партонных каскадных моделей в описании свойств e^+e^--аннигиляции указывает на то, что такие корреляции не могут быть основным источником перемежаемости.

6. В адрон-адронных процессах отмечено усиление перемежаемости при малых поперечных импульсах. Представляется важным изучение возможности появления аналогичного эффекта в e^+e^--процессах и в монте-карловских версиях моделей партонных каскадов.

7. Зависимость эффекта перемежаемости от множественности в адрон-адронных процессах согласуется со смесью независимых источников. Но при заданной плотности числа частиц, соударения тяжелых ионов указывают на бо́льшую перемежаемость, нежели адрон-адронные соударения. Возможно, это служит проявлением какого-то коллективного эффекта.

8. Факториальные кумулянты можно использовать для выделения истинных корреляций высших порядков. Такие корреляции явно видны в адрон-адронных процессах, в особенности при малых размерах ячеек, но не заметны в соударениях тяжелых ионов.

9. Факториальные корреляторы применяются для изучения корреляций между разными ячейками. Корреляторы F_{pq} растут с уменьшением расстояния между ячейками, но вряд ли могут быть описаны степенным законом даже для $D \lesssim 1$. При заданном значении D величина F_{pq} не зависит от размера интервала δy, что ожидалось согласно α-модели, но успешно описывается также моделью FRITIOF и, видимо, является общей чертой всех моделей с короткодействием. Показатели степени ϕ_{pq} линейно растут при росте pq, но оказываются заметно большими, нежели ожидаемые как по α-модели, так и по модели FRITIOF.

10. Анализ G-моментов приводит к заключению о том, что с помощью используемых сейчас методов можно установить разве лишь мультифрактальность при ячейках большого размера. Недавно это определение было обобщено и на меньшие множественности в данной ячейке, но при таком анализе потребуется изучать моменты более высоких порядков.

11. Статистические ошибки и роль границ между ячейками могут быть заметно понижены, если использовать корреляционные интегралы, взятые по полосе (гипертрубам). Используя в качестве переменной квадрат 4-импульса Q_{ij}^2 между двумя частицами, можно наблюдать быстрый рост моментов, аналогичный тому, что получалось при трехмерном анализе. Этот рост связан в основном с корреляциями пар частиц с одинаковым зарядом. Применение этого метода к данным о e^+e^--процессах могло бы прояснить причины успеха моделей партонных линий в описании таких процессов.

4. Теоретическое описание корреляций и флуктуаций. Природа появления больших флуктуаций и

общих степенных законов, наблюдаемых при малых интервалах (псевдо)быстрот, служит предметом оживленных обсуждений в последнее время. Принимая квантовую Хромодинамику (КХД) в качестве теории сильных взаимодействий, хотелось бы связать эти интересные данные с предсказаниями КХД. К сожалению, нерешенная пока проблема удержания кварков и глюонов не позволяет активно использовать КХД в мягких адронных процессах и приходится, в той или иной степени, основываться на феноменологической трактовке перехода от кварков и глюонов к экспериментально наблюдаемым адронам. Тем не менее, идеи КХД превалируют в феноменологических расчетах, в том числе и в монтекарловских вариантах моделей, которые, как было уже описано выше, широко используются для сопоставления с экспериментальными данными.

И все же существует и другая возможность — экспериментальные данные могут оказаться не очень чувствительны к конкретному виду лагранжиана, а иметь более общую основу. Еще не ясно, что является столь же основополагающим в описании процессов с малыми поперечными импульсами, как конституентные кварки в спектроскопии адронов или же токовые кварки и глюоны в жестких процессах.

Прежде чем переходить к описанию динамических подходов, мы остановимся на некоторых приближениях, широко используемых сейчас.

4.1. Простейшие приближения.

4.1.2. *Приближение связанных пар.* Если быстротное распределение не изменяется существенным образом на данном интервале (это оправдано, по крайней мере, для очень малых интервалов), то можно заменить (2.70) приближенно на следующее выражение

$$K_q(\delta y) \approx \frac{1}{M(\delta y)^q} \sum_{m=1}^{M} \int_{\delta y} \prod_i \mathrm{d}y_i\, R_q(y_1,\ldots,y_q). \quad (4.1)$$

Аргументы кумулянтных функций C_q и K_q должны быть каким-то образом связаны динамикой процесса, так как статистически независимых вкладов в них нет. При изучении корреляций между галактиками [158] было предположено, что функцию K_q можно представить в виде произведения связанных пар, т.е. парных кумулянтов K_2 с зацепленными друг за друга аргументами. Конкретно было предложено выразить все многочастичные корреляции через последовательные двухчастичные корреляции таким образом, что вся цепочка частиц оказывается связанной. Это условие абсолютно необходимо, поскольку в нашем случае, как мы уже видели выше, проявляются истинные многочастичные корреляции.

Таким образом, корреляционные функции записываются в виде

$$K_3(y_1, y_2, y_3) = \frac{A_3}{3} \sum_{\text{Пер.}} K_2(y_1, y_2) K_2(y_2, y_3), \quad (4.2)$$

$$K_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{A_4}{12} \sum_{\text{Пер.}} K_2(y_1, y_2) \times$$
$$\times K_2(y_2, y_3) K_2(y_3, y_4) \quad (4.3)$$

и т.д.; здесь идет суммирование по всем перестановкам индексов 1,..., q. Число таких перестановок равно знаменателям выражений, стоящих перед знаком суммы. Числитель же определяет нормировку, свою в каждом порядке корреляций.

Но даже в этом случае оказывается не просто проинтегрировать выражение (4.1). Поэтому было предложено [7] ввести предположение о трансляционной инвариантности кумулянтов K_q, а также использовать интегрирование вдоль полосы (т.е. вместо того чтобы интегрировать по набору гиперкубов с линейным размером δy, в качестве области интегрирования выбирается полоса вдоль основной оси $Y = (y_1 + y_2)/2$ с шириной $\zeta_i = y_{i+1} - y_i$. При подходе получается простое приближенное выражение [24]

$$K_q \approx A_q (K_2)^{q-1}. \quad (4.4)$$

Подставляя его в (2.71), можно выразить момент любого порядка через моменты второго порядка так, что, например,

$$F_3 = 1 + 3K_2 + A_3 K_2^2. \quad (4.5)$$

Дополнительный "постоянный" параметр A_q появляется в каждом порядке.

Как упоминалось в разделе 3.2.12, можно описать [24] экспериментальные данные групп UA1 и UA5 по факториальным моментам при энергиях от $s^{1/2} =$ = 200 ГэВ до 900 ГэВ с постоянными значениями A_q при всех интервалах δy. Все же показатели перемежаемости, полученные в рамках приближения связанных пар, оказываются несколько меньше их значений, извлекаемых из экспериментальных данных. При более низких энергиях (данные группы NA22) необходимо использовать заметно большее значение для A_3, если просто применять выписанные выше формулы [96]. Однако надо помнить, что предположение о трансляционной инвариантности, сделанное при их выводе, в этом случае вряд ли оправдано и потому трудно придавать серьезное значение этому факту.

Помимо этой проблемы возникает ряд других, возможно, даже более важных вопросов, которые требуют ответа на них. Прежде всего, даже оставаясь в рамках приближения связанных пар, сформулированного в виде соотношения (4.2), можно добавить

член с произведением трех K_2 (петлевые или кольцевые графы) и, более того, члены с многократной связью пар. До сих пор не предложено никакого динамического объяснения приближения связанных пар, хотя оно и выглядит весьма привлекательно.

4.1.2. *Сингулярности корреляционных функций,* Сингулярное поведение факториальных моментов на малых быстротных интервалах должно возникать согласно соотношениям (2.68) — (2.71) вследствие наличия сингулярностей в корреляционных функциях при мало отличающихся аргументах. В частности, ведущие сингулярности корреляционных функций ρ_2 и C_2 должны совпадать с сингулярностями соответствуюгдего факториального момента F_2, если изучается чисто математический предел $\delta y \to 0$ при бесконечной множественности, т.е. при

$$F_2 \sim (\delta y)^{-\phi_2} \quad (\delta y \to 0) \tag{4.6}$$

получим

$$C_2(y_1, y_2) \sim C_2^{(L)}(y_1, y_2)\,|y_1 - y_2|^{-\beta} + \\ + C_2^{(N)}(y_1, y_2), \tag{4.7}$$

где $\beta = \phi_2$, $C_2^{(L)}$ является регулярной функцией $(y_1 - y_2)$, тогда как $C_2^{(N)}$ может обладать не лидирующими сингулярностями (менее сингулярна, чем первое слагаемое).

Двухкомпонентная модель такого типа была использована в работе [159], где $C_2^{(N)}$ (а также ее аналоги в высших порядках) выбиралась в виде регулярной функции, приводящей к постоянному слагаемому в F_2. Согласно работе [159] появление сингулярного члена приписывалось фазовому переходу.

Для того чтобы сингулярный член доминировал, он должен давать основной вклад в F_2 даже численно. Однако приведенные выше экспериментальные данные четко указывают, что это условие не выполняется. Линейная зависимость на дважды логарифмических графиках проявляется в доступной на опыте области δy лишь на фоне весьма большого постоянного вклада. Это означает, что в исследованной области интегральный вклад $F_2^{(L)}$ сингулярных членов в (4.7) весьма мал, т.е.

$$F_2^{(L)} \ll F_2. \tag{4.8}$$

Такая ситуация приводит к возможности [159, 160] заметного занижения показателей перемежаемости при обработке эксперимента. Учитывая численную малость $F_2^{(L)}$, получим:

$$\ln F_2 \approx \ln(1 + F_2^{(N)}) + [F_2^{(L)}/(1 + F_2^{(N)})]. \tag{4.9}$$

Отсюда можно было бы даже сделать вывод о логарифмической зависимости $F_2^{(L)}$ от δy: $F_2^{(L)} \sim \ln \delta y$, отвечающей логарифмической сингулярности корреляционной функции при совпадающих быстротах. Однако это поведение практически не отличается от степенного при малых показателях степени β и ограниченной области изменения интервалов быстрот (например, $0{,}1 < \delta y < 1$), в которой ведется подгонка под экспериментальные значения. Действительно, если $\beta \ln y \ll 1$, легко получить

$$\ln F_2 \approx \ln(1 + F_2^{(N)}) + (\tilde{C}_2^{(L)}/\rho_1^2)(\delta y)^{-\beta} \approx \\ \approx \alpha_2 - \phi_2 \ln \delta y, \tag{4.10}$$

где

$$\alpha_2 = \ln(1 + F_2^{(N)}) + (\tilde{C}_2^{(L)}/\rho_1^2), \\ \phi_2 = \beta \tilde{C}_2^{(L)}/\rho_1^2. \tag{4.11}$$

Отсюда вытекает, что измеряемый показатель перемежаемости оказывается намного меньше сингулярности корреляционной функции. Тем не менее различие между логарифмической и степенной особенностям может быть заметным в моментах высших порядков при малых δy в виде искривления вверх в случае дваждылогарифмического масштаба при степенной зависимости. Оно усиливается при меньших δy, больших q и больших β. Но при этом все же не следует использовать область очень малых δy, где эффект почти пустых интервалов может стать определяющим и привести к резкому падению факториальных моментов на малых интервалах.

Существующие экспериментальные данные по факториальным моментам не противоречат, хотя и не подтверждают, более быстрому (чем линейный) росту высших моментов из-за больших нерегулярностей в их поведении на малых интервалах. Эти нерегулярности подавлены, если использовать метод корреляционных сумм (или интегрировать вдоль полосы) [75, 85, 97, 155], когда разбиение на ячейки заменяется процедурой, более естественной следующей структуре события. Это обсуждалось в разделе 3.2.15. Более того, природа особенностей выявляется лучше, если вместо факториальных моментов использовать факториальные кумулянты (2.70) [120].

4.2. Динамические подходы.

4.2.1. *Разные теоретические модели.* Большие флуктуации числа частиц в малых быстротных интервалах, несомненно, свидетельствуют о важной роли многочастичных корреляций. Тот факт, что значительная доля этих корреляций сводится к парным, как это следует из приближения связанных пар, отнюдь не уменьшает их роли и, более того, требует динамического объяснения. Однако несмотря на большое число предложенных гипотез и интересные аналогии из других областей физики, полного описания этого явления пока не существует.

Помимо непосредственно проглядывающейся связи с корреляциями многих частиц, выдвигались в

качестве кандидатов на объяснение флуктуаций и такие общие свойства как симметрия в системе тождественных частиц (бозе-эйнштейновские корреляции) [127] или же статистические корреляции в частично когерентных излучающих системах [161].

С точки зрения теоретика, лучше всего было бы подойти к описанию экспериментальных результатов, основываясь на квантовой хромодинамике (КХД). Некоторые попытки объяснить корреляции и флуктуации таким образом описаны в разделе 4.2.6. К сожалению, как уже упоминалось, применение КХД к таким процессам ограничено ввиду отсутствия ясной картины конфайнмента, связанного с непертурбативными эффектами. Поэтому мы вынуждены либо рассматривать общие соотношения типа описанных выше, либо развивать феноменологические модели и фитировать результаты эксперимента. Сейчас уже предложено множество моделей. Идеи, навеянные КХД, активно используются в картине партонных ливней и ее феноменологических аналогах — дуальной топологической модели (DTU-DPM) и модели кварк-глюонных струн (QGSM) [53—55,57, 58, 162—164]; в модели когерентного испускания глюонных струй (в частности, черенковских глюонов) [165]; в модели холодной кварк-глюонной плазмы [133]. Использовались и более феноменологические подходы наподобие кластерных моделей [47, 166—168], модель кланов [169], испускание узких адронных струй [170]. Хотя все они и предлагают некоторые рецепты объяснений флуктуаций в множественном рождении, их основной недостаток заключается в отсутствии ясной физической картины появления законов подобия дои факториальных моментов.

С этой точки зрения предпочтительны каскадные модели [19, 20, 171] и/или более общие подходы, связанные с изучением фазовых переходов [172—175]. Каскадные модели используют аналогию с турбулентностью и при некоторых параметрах также приводят к фазовым переходам. Рассмотрение перехода от партонной к адронной фазе процесса обычно основано на общих свойствах теории поля с сильной связью, расчетами на решетке и конформной симметрией. В обоих случаях степенное поведение факториальных моментов возникает наиболее естественным образом и потому эти подходы представляются наиболее привлекательными с познавательной точки зрения, но, конечно, они пока не могут соревноваться с монтекарловскими моделями в детальном описании экспериментальных данных. Мы обсудим их чуть позже вместе с идеями перемежаемости и фрактальности, а сейчас кратко коснемся разных феноменологических моделей, предложенных для описания флуктуационных явлений.

Прежде всего отметим, что в большинстве моделей обычно не учитывается такое общее свойство всех взаимодействий, как корреляции тождественных частиц. Из теоретического анализа, проведенного в работе [160], следует, что показатели перемежаемости для тождественных частиц должны быть вдвое больше, нежели для противоположно заряженных частиц. Однако экспериментальные данные не дают указаний на сильную зависимость от зарядов, из чего можно заключить, что роль бозе-эйнштейновских корреляций в формировании факториальных моментов сравнительно невелика. Тем не менее, эту проблему вряд ли можно считать окончательно решенной и, по-видимому, к ее более детальному изучению еще предстоит вернуться. Например, как мы уже обсуждали в разделе 3.2.15, выбор в качестве переменной величины Q_{ij} вместо быстроты δy подчеркивает заметно большее влияние бозе-эйнштейновских корреляций.

Учитывая сделанное замечание, перейдем теперь к наиболее разработанным монтекарловским вариантам моделей партонных струй или кварк-глюонных струн [53—58, 162—164], которые наиболее тесно связаны с идеями КХД. На качественном уровне все эти модели дают указания на короткодействующие корреляции, проявляющиеся в виде максимума корреляционных функций $C_2(y_1, y_2)$ (см. (2.24)) при совпадающих быстротах. Однако они пока не способны описать количественно эти корреляции в адрон-адронных взаимодействиях для всех топологий и при разных критериях отбора. Во всех моделях показатели перемежаемости получаются заметно меньше экспериментально измеренных. На начальном этапе [176,177] это проявилось в неспособности описания поведения числа флуктуаций в зависимости от множественности при заданной ширине быстротного интервала в адронных процессах. Менее определенна ситуация с такими моделями в электрон-позитронной аннигиляции, как это уже обсуждалось в разделе 3.2.4-3. Например, если вначале коллаборация DELPHI заявила о согласии их данных с моделью LUND, то после десятикратного увеличения статистики эксперимента были обнаружены [90] расхождения на уровне 10—20 % (см. рис. 23,*г*). Необходимы дальнейшие уточнения.

Итак, флуктуационные характеристики процессов оказались наиболее критичными для выбора модели и задания ее параметров (особенно в адрон-адронных взаимодействиях).

Следует подчеркнуть, что первые указания на наличие заметных флуктуаций были получены еще из исследований в космических лучах при анализе отдельных событий с очень большой множественно-

стью. Самой отличительной особенностью таких событий была азимутальная симметрия вылета большого числа частиц с близкими значениями полярного угла (псевдобыстроты). В плоскости, перпендикулярной направлению движения налетающей частицы, следы, оставленные такими вновь рожденными частицами, образовывали кольца. Именно поэтому первой попыткой объяснения таких флуктуаций была гипотеза об аналогии с черенковским излучением фотонов.

Предположение о когерентном испускании глюонных струй [165] (включающее, в частности, и черенковские глюоны) привело к предсказанию излучения таких струй в узкие интервалы псевдобыстроты при достаточно больших углах излучения в системе центра масс сталкивающихся частиц. Все последующие модели не указывают на какую-либо выделенность определенного интервала полярных углов для плотных групп вторичных частиц. Эта специфическая особенность была проверена в pp-взаимодействиях при 205 и 360 ГэВ/c [178]. Оказалось, что распределение Центров плотных групп частиц, действительно, обладает несколькими максимумами, проявляющимися над довольно большим гладким фоновым распределением. Отсюда вытекает, что предложенный механизм, видимо, проявляется в этих реакциях, но не является преобладающим.

Наличие другого механизма, приводящего к большим флуктуациям, следует и из появления их в электрон-позитронной аннигиляции, где трудно (хотя и возможно) вообразить условия, необходимые для когерентного испускания глюонных струй.

Большие флуктуации могут возникать и в достаточно протяженной холодной кварк-глюонной плазме [133]. Это явление оказывается здесь связанным с другим интересным эффектом — рождением мягких частиц и частиц с малым поперечным импульсом. Однако в этой модели не удается объяснить большие значения показателей перемежаемости в электрон-позитронной аннигиляции по сравнению с процессами взаимодействия адронов и ядер. Более того, ее предсказания прямо противоположны результатам наблюдений.

Более мобильными оказываются модели с кластерами [167, 168] или кланами [169], поскольку они допускают варьирование свободных параметров. В частности, модели с кланами приводят [133, 179] к степенному росту факториальных моментов при малых быстротных интервалах, хотя количественного сравнения с опытом не производилось. Что касается кластерных моделей, с их помощью удалось описать в ряде случаев распределение по множественности в симметричных быстротных интервалах разного размера [47, 166], а также двухчастичную корреляционную функцию, как уже обсуждалось выше. Но этого может оказаться недостаточным для воспроизведения всех факториальных моментов, которые чувствительны к более тонким деталям поведения корреляций, не проявляющимся при таком рассмотрении.

Дополнительные свободные параметры появляются при интерпретации множественного рождения в рамках предположения [161, 126] о наличии двух типов источников — хаотического и когерентного.

Многие из рассмотренных моделей пытаются добиться согласия с экспериментом, сводя распределения по множественности в интервалах разной величины к отрицательному биномиальному распределению. В кластерных моделях этого можно добиться изменением параметров кластеров. В модели кланов производится свертка пуассоновского распределения по числу кланов с логарифмическим распределением при их распаде. В статистической модели с двумя типами источников возникает комбинация отрицательного биномиального распределения для хаотических источников и пуассоновской компоненты, обязанной когерентным излучателям.

4.2.2. *Перемежаемость и фрактальность.* В рассмотренных выше моделях приходится специальным образом подбирать параметры, чтобы описать результаты экспериментов по факториальным моментам (если это вообще удается). Сейчас имеется лишь два подхода, в которых степенное поведение моментов возникает естественным образом — каскадный механизм и фазовые переходы. Фактически каскадная модель и была использована с самого начала [19, 20] для предсказания важного свойства многочастичной динамики — эффекта перемежаемости.

Понятие перемежаемости заимствовано из теории турбулентности. Оно отвечает специфическому свойству турбулентной жидкости, в которой число вихрей заданного размера описывается степенным законом, отвечающим самоподобной структуре. Эти вихри не заполняют весь объем, а перемежаются с областями ламинарного течения. Математически это свойство может быть определено и как степенная зависимость моментов распределения вихрей по их размерам. Именно поэтому показатели ϕ_q в степенном законе поведения факториальных моментов $F_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\phi_q}$ в формуле (2.110) и были названы показателями перемежаемости.

Самоподобность вихрей непосредственно подразумевает связь между явлением перемежаемости и фрактальностью, как это уже обсуждалось в разделе. 2.2. Ведь фракталы — это самоподобные объекты с нецелочисленной размерностью, определяемой не-

посредственным обобщением обычной топологической размерности на нецелые числа. Более сложные самоподобные объекты, мультифракталы, состоят из набора взвешенных с разным весом фракталов, обладающих разными размерностями. Они характеризуются обобщенными размерностями D_q (или размерностями Реньи), зависящими от порядка моментов распределения в таких объектах.

Формальные определения были уже даны в разделе 2.2. Более подробно с этими понятиями можно ознакомиться по обзорным статьям [38—4], а также по цитированным там работам. В связи с процессами множественного рождения первые упоминания о фракталах появились в работах [109—111, 180, 181].

Здесь мы хотели бы отметить лишь связь между размерностями Реньи D_q и показателями перемежаемости ϕ_q [86]:

$$D_q = D - \frac{\phi_q}{q-1}. \tag{4.12}$$

Аномальная размерность ($d_q = D - D_q$) оказывается согласно (4.12) пропорциональной показателю перемежаемости ϕ_q или же, другими словами, размерности Реньи "обычных" объектов с $\phi_q = 0$, есть ни что иное как их топологические размерности.

Несмотря на полное формализованное соответствие, понятие фрактальное в познавательном смысле идет дальше чисто формального определения перемежаемости, связывая наблюдаемое значение размерности с геометрическими и термодинамическими свойствами объекта, а также со свойствами распределений над этим объектом [38, 85]. Степенное поведение факториальных моментов вскрывает фрактальную структуру распределений по быстроте в индивидуальных событиях. Ее связь с геометрическими и термодинамическими свойствами еще будет обсуждаться нами.

Вместе с тем, надо сказать несколько слов о предосторожности, которую необходимо проявлять, когда речь идет о применении всех этих понятий к процессам множественного рождения. Как уже упоминалось в разделе 3, окончательные выводы обычно затруднены из-за конечной статистики эксперимента, относительно небольшого числа частиц в отдельном событии и, более того, в отдельной фазовой ячейке данного события, применения конкретного метода разбиения на эти ячейки, сравнительно малого интервала наборов размеров ячеек, в которых удается зафиксировать степенное поведение факториальных моментов и т.п. Более подробно с этими проблемами можно ознакомиться, например, в работах [41,182].

4.2.3. *Модели случайных каскадов.* Теоретическая интерпретация эффекта перемежаемости в случае турбулентности впервые была дана в рамках каскадных моделей [183]. Их модификации успешно применяются сейчас и к процессам множественного рождения [19, 20].

В этих моделях изучается последовательность самоподобных разбиений фазового объема на все более мелкие ячейки. Обозначим через M число ячеек, получающих в результате последовательного разбиения полного фазового объема на λ частей при каждой из ν итераций самоподобного каскада. В результате $M \equiv \lambda^\nu$ ($\equiv Y/\delta y$, если рассматривается раздел полного быстротного интервала Y на бины шириной δy). Модели случайных каскадов используют распределение вероятностей $r(W)$, зависящее от некого параметра W, с соответствующими моментами

$$\langle W^q \rangle = \int dW\, r(W) W^q, \ \langle 1 \rangle = \langle W \rangle = 1. \tag{4.13}$$

Эти вероятности задают и те флуктуации, которые при разбиении быстротного интервала на все меньшие и меньшие отрезки. Вероятность нахождения в m-й бине задается мультипликативным законом

$$P_m = \frac{1}{M} \prod_{n=1}^{\nu} W_n \equiv \frac{1}{M} \frac{\rho_{(m)}}{\langle \rho_{(m)} \rangle}, \tag{4.14}$$

где последовательность индексов n приводит точно к заранее выбранному интервалу m, в котором плотность частиц описывается функцией $\rho_{(m)}$. Предполагается, что существует такой интервал масштабов, в рамках которого весовые множители W остаются постоянными, т.е. не зависящими от того масштаба, на котором они действуют.

Отсюда нетрудно обнаружить свойство перемежаемости в моделях такого типа:

$$F_q = \langle (MP_m)^q \rangle = \langle \prod_{n=1}^{\nu} W_n \rangle = \\ = (Y/\delta y)^{\ln\langle W^q \rangle / \ln \lambda}. \tag{4.15}$$

Показатели перемежаемости равны

$$\phi_q = \ln\langle W^q \rangle / \ln \lambda, \tag{4.16}$$

т.е. модели случайных каскадов приводят к мультифрактальному спектру [41].

В принципе, можно задавать распределения $r(W)$ произвольным образом, стараясь, конечно, найти соответствие решаемой физической задаче. При этом простейшими классами таких распределений являются β-модели, в которых имеется всего лишь один уровень (они соответствуют монофрактальному случаю и не представляют большого интереса), и α-модели [183, 19, 20], задаваемые двухуровневым распределением вероятностей:

$$r(W) = p\delta(W - W_-) + (1-p)\delta(W - W_+), \tag{4.17}$$

где $0 \le W_- < 1 < W_+$ и $pW_- + (1-p)W_+ = 1$ вслед-

ствие условия нормировки (4.13). Физический смысл формулы (4.17) состоит в том, что с вероятностью p плотность распределения понижается на фактор $W_- < 1$, но может произойти и увеличение плотности $W_+ > 1$ с вероятностью $1 - p$. За счет этого возникают "провалы" и "пики" в соответствующих распределениях. Показатели перемежаемости задаются выражением

$$\phi_q = \ln[pW_-^q + (1-p)W_+^q]/\ln\lambda. \qquad (4.18)$$

Изучение моментов и мультифрактальный анализ вскрывают новые интересные особенности. При изменении параметров p и λ в модели появляются различные фазовые переходы [41, 185, 186]. Для их выявления полезно исследовать поведение моментов факториальных моментов, поскольку сами распределения факториальных моментов оказываются весьма нерегулярными [187]. Вводя нормированные моменты моментов и приписывая им соответствующ е е степенное поведение при малых размерах бин в виде

$$\langle Z_q^p \rangle = \langle F_q^p(\delta y) \rangle / \langle F_q(\delta y) \rangle^p \sim$$
$$\sim (\delta y)^{p\phi_q} \langle F_q^p(\delta y) \rangle \sim (\delta y)^{\varepsilon_{p,q}}, \qquad (4.19)$$

можно проанализировать в рамках α-моделей зависимости показателей $\varepsilon_{p,q}$ от параметров этих моделей. Оказывается [185], что эта зависимость выделяет четыре области в пространстве параметров p, λ, соответствующих четырем разным фазам, причем показатель $\varepsilon_{p,q}$ играет роль параметра порядка.

Те же выводы вытекают из изучения [186] нормированных факториальных корреляторов $C_{p,q}/F_pF_q$. Другим важным свойством таких корреляторов является их независимость от ширины бины [19, 20]. Оно подтверждается экспериментом (см. раздел 3.2.12), хотя, возможно, и не специфично только лишь для каскадных моделей. Вместе с тем, α-модель не дает правильной зависимости от расстояния между бинами. Она предсказывает степенное поведение с весьма определенным показателем

$$\phi_{pq} = \phi_{p+q} - \phi_p - \phi_q, \qquad (4.20)$$

выражающимся через обычные показатели перемежаемости. Экспериментальные точки не укладываются на прямую в дваждылогарифмическом масштабе. Более того, трудно найти такие области быстротных интервалов, в которых удовлетворялось бы это соотношение даже при грубой аппроксимации с помощью прямых линий. Обычно экспериментально извлекаемые значения ϕ_{pq} при такой процедуре оказываются больше предсказываемых в α-модели.

Конечно, всегда следует помнить, что это всего лишь простейшая модель, которая, если и может претендовать на количественное описание, то только лишь для случая асимптотически длинных каскадов, а значит, при исключительно высоких энергиях и больших множественностях. Практически следует работать с монтекарловскими моделями [182], но при этом теряется наглядность аналитических формул. В частности, для такой хорошо известной математической модели, как канторово множество, было показано [188], что выявление его фрактальной размерности (известной заранее) путем изучения факториальных моментов на конечном числе итераций ν оказывается отнюдь не простой задачей.

Тем не менее, эвристическое значение α-моделей в описании качественных характеристик процесса достаточно велико, особенно в связи с указаниями на возможные фазовые переходы. Природа этих переходов и их связь с преобразованием кварков в адроны пока е щ е не выяснены. Интересным наблюдением является возможность появления "нетепловых" переходов, подобных тем, что обнаружены в системах типа спиновых стекол. Они отличаются от обычных переходов типа "порядок — беспорядок" тем, что соответствуют "разному порядку" в различных областях фазового пространства так, что их можно назвать переходами "кластерного порядка — беспорядка". Их характерным признаком мог бы быть более быстрый, нежели линейный, рост показателей перемежаемости с увеличением порядка момента. Дополнительные сведения о фазовых переходах можно извлечь, используя наглядные аналоги с системами, изучаемыми в статистической механике [173, 175, 186].

4.2.4. *Теоретико-полевой подход и фазовые переходы.* Помимо сценария самоподобного каскадирования, предлагается и другая экстремальная возможность появления заметных флуктуаций и эффекта перемежаемости за счет фазового перехода кварков в адроны [159, 175]. Конечно, наиболее адекватным здесь является аппарат статистической механики. Адронизация кварк-глюонной системы (плазмы?) становится источником особых событий с большими флуктуациями, наблюдаемых на мощном фоне "обычных" событий. Такая точка зрения находит поддержку в исследованиях двумерной решетки изинговских спинов [189,190], в которой перемежаемое поведение системы возникает точно при температуре перехода, т.е. перемежаемость непосредственно связана с фазовым переходом, а показатели перемежаемости — с критическими индексами изучаемой системы.

Возможно, что этот подход и не исключает роль каскадирования, если принять точку зрения, что фазовый переход от кварков к адронам проявляется как раз в том, что он фиксирует фрактальную структуру,

образованную в процессе развития каскада. Флуктуации "замерзают" в точке перехода и потому их можно вычислять, рассматривая только эту точку.

Существует хорошо разработанная теоретико-полевая методика изучения флуктуаций и фазовых переходов в обычных средах [191]. Прежде всего следует определить параметр порядка и рассматривать его как эффективное флуктуирующее поле. В случае множественного рождения частиц можно было бы выбрать в качестве такового распределение плотности числа частиц по быстроте (или же в трехмерном фазовом объеме) в индивидуальных событиях $\rho_{(e)}(y)$ (либо некоторую функцию от него). Это "поле" флуктуирует около инклюзивного среднего распределения $\rho(y)$ в каждой точке y. Возможность использования такой величины в качестве параметра порядка ясно вытекает из успехов гипотезы о локальной партон-адронной дуальности в описании экспериментальных результатов для процессов электрон-позитронной аннигиляции. Действительно, согласно этой гипотезе, средние значения $\rho_{(e)}(y)$ на партонной $\rho_{(p)}$ и адронной $\rho_{(h)}$ стадиях процесса отличаются всего лишь общим (для всех быстрот) числовым множителем. Например, если определить [175] флуктуирующее поле таким образом

$$\varepsilon(y) = (\rho_{(e)}(y)/\rho_{(h)}(y)) - 1, \tag{4.21}$$

то его среднее на адронной стадии равно нулю, тогда как на партонной стадии оно отлично от нуля (и равно примерно 0,2 согласно эксперименту по электрон-позитронной аннигиляции):

$$\langle \varepsilon(y) \rangle_{(p)} = (\rho_{(p)}(y)/\rho_{(h)}(y)) - 1 = \text{const}.$$

Возможны и другие варианты выбора флуктуирующего поля (например, $\rho^{1/2}(y)$ [173, 174, 192] или же $\rho - \rho_{(h)}$). У них есть разные достоинства и недостатки, которые мы не будем обсуждать здесь. Покажем лишь общую схему использования введенного параметра порядка.

Вероятность флуктуации дается выражением

$$W(\varepsilon) = z^{-1} \exp(-F(\varepsilon)), \tag{4.22}$$

$$Z = \int D\varepsilon \exp(-F(\varepsilon)), \tag{4.23}$$

где $F(\varepsilon)$ — свободная энергия, а Z — статистическая сумма. Добавив к $F(\varepsilon)$ член $J(y)\varepsilon(y)$ с внешним током $J(y)$, получим неприводимые функции Грина

$$\langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \rangle = \frac{\delta^q \ln Z}{\delta J(y_1) \ldots \delta J(y_q)} \Big|_{J=0}, \tag{4.24}$$

которые связаны с корреляционными функциями так, что, например,

$$\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle = (\rho_2(y_1, y_2)/\rho_1(y_1)\rho_1(y_2)) - 1 \equiv \equiv K_2(y_1, y_2). \tag{4.25}$$

Факториальные моменты легко получить из выражений типа

$$F_q(\delta y) = (\delta y)^{1-q} \int_0^{\delta y} d\eta_1 \ldots \int_0^{\delta y} d\eta_{q-1} \times \times r_q(\eta_1, \ldots, \eta_{q-1}), \tag{4.26}$$

где

$$\eta_i = y_{i+1} - y_i, \quad r_q = \rho_q(y_1, \ldots, y_q)/(\rho_1(y_1) \ldots \rho_1(y_q)). \tag{4.27}$$

На первый взгляд, флуктуационная теория поля не связана напрямую с основополагающей структурой КХД. Тем не менее они, конечно, связаны друг с другом поведением флуктуаций в индивидуальных событиях $\rho_{(e)}(y)$, которое должно описываться обеими теориями, если они правильные. Таким образом, наши гипотезы о флуктуационном поле $\varepsilon(y)$ должны отражать специфические особенности сочетания партонных каскадов и конфайнмента в КХД.

В случае небольших флуктуаций можно разложить $F(\varepsilon)$ в ряд Тейлора

$$F(\varepsilon) = F_0 + + \int dy \left[\frac{b}{2} \left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4 + \ldots \right], \tag{4.28}$$

который отвечает гамильтониану Гинзбурга—Ландау для $c = 0$, $d \neq 0$ при нулевых высших членах. Для свободных полей (т.е. при $c = d = \ldots = 0$) получим

$$\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_f = \gamma \exp(-|y_1 - y_2|/\xi), \tag{4.29}$$

$$\gamma = \pi\xi/b, \quad \xi = (b/a)^{1/2}. \tag{4.30}$$

Хотя такая экспоненциальная зависимость корреляционной функции довольно хорошо отвечает экспериментальным данным на качественном уровне, она не приводит к перемежаемости при малых δy. Поэтому приходится сделать вывод о том, что флуктуации сильны в малых интервалах и такой пертурбативный подход не оправдан. Эффект перемежаемости следует описывать в рамках теории с сильной связью, где методы теории возмущений неприменимы. В связи с этим были использованы методы ренормализационной группы и предложение о конформной симметрии [175] теории флуктуационного поля. В обоих случаях естественно возникает степенное поведение функций Грина и факториальных моментов на малых быстротных интервалах, так что было предложено использовать в качестве подгоночной формулы следующее поведение корреляционной функции при всех быстротных интервалах:

$$C(y_1, y_2) \sim |y_1 - y_2|^{-\varkappa} \times \times \exp(-|y_1 - y_2|/\xi) \quad (\varkappa < 1). \tag{4.31}$$

При разностях быстрот, меньших корреляционной длины ξ, доминирует степенное поведение корреляционной функции с интегрируемой сингулярностью

при совпадающих быстротах. Такая сингулярность в корреляционной функции должна приводить к смягчению энергетических спектров и распределений по поперечным импульсам. В тех процессах, где показатели перемежаемости наибольшие, должно быть наиболее заметно рождение частиц с малыми поперечными импульсами. В простейшем приближении показатели перемежаемости растут линейно с ростом момента.

Подобные проблемы обсуждались и в рамках моделей фейнман-вильсоновской жидкости [159, 173, 174]. Однако введение понятия о температуре при дополнительных предположениях о тепловом равновесии, о кадановском скейлинге при критической температуре, об относительной роли обычной и стохастической (в фазе кварк-глюонной плазмы) компонент и т.п. делают этот подход менее наглядным.

Здесь хотелось бы подчеркнуть существенное отличие проведенного выше рассмотрения от обычной трактовки фазовых переходов. В нашем случае корреляционная длина ξ не стремится к бесконечности и экспоненциальный закон не заменяется степенным на больших интервалах, как это обычно имеет место. Просто степенная сингулярность появляется при малых интервалах, не влияя практически на поведение корреляций при больших разностях быстрот. Это происходит потому, что быстроты в фейнмановской жидкости играют роль координат при обычном анализе так, что теперь приходится иметь дело с ультрафиолетово-стабильной (а не инфракрасной) точкой функции Гелл-Манна—Лоу. Интересно было бы понять, не связано ли это с тем, что частицы, находящиеся далеко друг от друга по шкале быстрот, определяются динамикой процесса с конечной корреляционной длиной, связанной с конкретной формой лагранжиана, тогда как находящиеся в близких точках являются свидетелями некоторого самоорганизующегося критического процесса с законом самоподобия, не связанным непосредственно с видом лагранжиана (явление песчаных дюн).

Итак, корреляции появляются в виде "замерзших (вследствие адронизации) звуков" партонных каскадов. Изучение роли фазовых переходов в множественном рождении находится пока е щ е на очень ранней стадии и привело только к результатам на качественном уровне. Не ясна даже связь между адронизацией и фазовыми переходами в рамках рассмотренных в предыдущем разделе каскадных моделей.

Вообще, относительная роль партонной каскадной стадии и адронизации находится в стадии обсуждений. Эта проблема ясна лишь в экстремальных случаях. Именно партонный каскад с "бесконечным" числом шагов привел бы к показателям перемежаемости, квадратично растущим с ростом порядка момента, тогда как фазовый переход второго рода отвечает монофрактальному поведению, т.е. линейному росту. Однако эти два предельных случая требуют введения поправок. За счет конечности каскада получится более слабый рост показателей, тоща как высшие члены операторного разложения при изучении фазовых переходов могут привести к более быстрому, нежели линейный, росту. Оба подхода могут сблизиться — требуются дальнейшие исследования.

4.2.5. *Формализм статистической механики.* Статистические аналогии оказываются полезным методом изучения свойств хаотических динамических систем [193] вообще и мультифракталов и каскадных моделей в частности [194, 172]. Он основан на возможности задания статистической суммы $Z(q)$ системы в виде

$$Z(q) = \sum_{m=1}^{M} p_m^q , \tag{4.32}$$

где

$$p_m = \rho_{(m)}/M\langle \rho_{(m)} \rangle \tag{4.33}$$

является нормированной вероятностью, заданной на ансамбле бин (m), с величиной $\rho_{(m)}$, задающей случайную плотность по быстроте, регистрируемую в каждой бине m.

Ее связь с мультифрактальными свойствами системы (или с перемежаемостью) легко устанавливается, если рассмотреть системы, для которых вероятность появления в бине m пропорциональна размеру бины в некоторой степени α_m, причем число вырожденных бин (обладающих одинаковым значением α_m) также задается степенным законом. Тогда, переходя к непрерывному пределу, получим в полном соответствии с формулой (2.118):

$$Z_q \approx \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} M^{f(\alpha)-q\alpha} \mathrm{d}\alpha, \tag{4.34}$$

откуда легко прослеживается мультифрактальный спектр системы $f(\alpha)$ (см., например, [39,40, 195]).

Вспоминая определение показателей перемежаемости ϕ_q, связываем их со спектром $f(\alpha)$

$$f(\tilde{\alpha}) = -q^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \frac{\phi_q + 1}{q}, \tag{4.35}$$

где $\tilde{\alpha}$ определено как

$$\tilde{\alpha}(q) = 1 - (\mathrm{d}\phi_q/\mathrm{d}q). \tag{4.36}$$

Интерпретация $f(\alpha)$ весьма прозрачна, так как эта функция взвешивает число вырожденных бин. Поэтому она отвечает понятию энтропии в статистической механике. Тем же способом порядок момента q можно интерпретировать как обратную температу-

ру $\beta = 1/T$ и соотношение (4.35) отвечает термодинамической формуле

$$S = -\mathrm{d}F/\mathrm{d}T, \tag{4.37}$$

где S — энтропия, а F — свободная энергия, роль которой выполняет теперь величина

$$\lambda(q) = (\phi_q + 1)/q. \tag{4.38}$$

Две особенности этой аналогии особенно полезны. С одной стороны, применение термодинамического формализма допускает покрытие мультифракталов гиперкубами разных размеров, т.е. более детальное описание индивидуальных событий (вспомните о различии определений Колмогорова и Хаусдорфа!). Это обстоятельство было фактически использовано в предложениях корреляционных мер с неоднородным покрытием [85, 97, 155]. С другой стороны, мультифрактальная интерпретация позволяет расширить применимость термодинамического формализма на неравновесные системы. Эта возможность использовалась для классификации фазовых переходов в α-моделях и для обнаружения в многочастичных процессах новых фаз, подобных состояниям систем типа спиновых стекол [41, 172].

Важно отметить, что минимум свободной энергии (4.38) соответствует, согласно (4.35), нулям фрактального спектра. Это служит сигналом фазового перехода в термодинамической системе.

Опять-таки развитие этих аналогий пока е щ е находится в начальной стадии и можно ожидать появления новых возможностей. В частности, е щ е не анализировались аналитические свойства статистической суммы, которые обычно нередко используют в связи с проблемой фазовых переходов.

4.2.6. *Уравнения эволюции и перемежаемость.* Степенной рост факториальных моментов при все уменьшающихся ячейках фазового объема указывает на характерное поведение распределений по множественности в таких ячейках при все возрастающей роли флуктуаций ("хвоста" распределения). Идут интенсивные поиски полного теоретического описания явления перемежаемости. Упомянутые выше две крайних возможности (упрощенные каскадные модели и фазовые переходы) демонстрируют продуктивности феноменологических подходов.

Конечно, было бы желательно получить полное объяснение явления скейлинга корреляций в процессах множественного рождения, исходя только из, так сказать, первых принципов, т.е. в рамках квантовой хромодинамики (КХД). Нетрудно указать на качественные черты теории, говорящие в пользу такого подхода. Действительно, множественное рождение принято описывать здесь как результат кварк-глюонного ливня, трансформирующегося затем в адроны. Любой самоподобный мультипликативный процесс (каскад или ливень) должен приводить к скейлинговому режиму. Можно было бы возразить, что такой каскад хорошо оправдан лишь в пертурбативной КХД при больших передачах импульса (или виртуальностях), тогда как мы имеем дело с мягкими процессами. Тем не менее, вряд ли кто-то станет возражать против возможности появления такого режима на начальном этапе каскада в электрон-позитронной аннигиляции.

Хотя это соображение и вызывает сомнения в возможностях прямой трактовки КХД-каскадов в мягких адронных процессах, но имеется контраргумент, связанный с усилением роли нелинейных членов в уравнениях эволюции [196] при переходе от жестких к полужестким и мягким процессам. Нелинейность может привести к перемежаемости. Последовательный разрыв струн и явление адронизации также могут послужить причиной появления больших флуктуаций.

Указания на эффект перемежаемости были получены вначале из уравнений эволюции в приближении древесных диаграмм теории ϕ^3 и упрощенного варианта КХД [144, 197, 198] из изучения швингеровского механизма туннелирования [199] или из подхода, основанного на эффективном лангранжиане [192].

Хорошо известно, что пертурбативный КХД-каскад приводит [200] к быстро растущей с ростом энергии средней множественности партонов. Уравнения для высших моментов распределений по множественности довольно сложные [201, 202]. Существенно, что партонные распределения оказываются заметно шире пуассоновского. Проблема инфракрасного обрезания играет важную роль. Если предположить, что сингулярность устраняется аналогично тому, как это происходит с электромагнитным ливнем в обычном веществе, то можно оценить [181] фрактальную размерность внутреннего движения партонов в струе и она оказывается сравнительно небольшой для отдельной струи в электрон-позитронной аннигиляции.

Было проведено [203] более полное рассмотрение КХД-ливней в рамках дипольного формализма с учетом эффектов когерентности. Мультифрактальная размерность партонного каскада падает от 1 при $q = 0$ до $(6\alpha_S/\pi)^{1/2}$ при больших q, что указывает на некоторую зависимость размерности от разрешения, поскольку бегущая константа связи зависит от $s(\delta y)^2$. Была предложена геометрическая интерпретация аномальной размерности в КХД.

Конечно, чтобы проводить сравнение с опытом, надо вводить модель адронизации. При аналитиче-

ских расчетах обычно неявно подразумевается, что процесс адронизации не вносит изменений в форму распределений, однако для доступных на опыте энергий, конечно, нельзя пренебрегать мягкой адронизацией. Различные, предположения об этой стадии используются в монтекарловских версиях разных моделей и обычно данные по электрон-позитронной аннигиляции удается описать довольно хорошо. Однако поведение факториальных моментов в мягких адронных процессах не столь легко поддается описанию. Возможно, столь прямолинейный подход не проходит из-за нашего незнания свойств нелинейных уравнений эволюции, которые следует использовать в этом случае. Определенный прогресс для глубоко неупругих процессов был достигнут в работе [196], где переход от бьеркеновского предела к реджевской области происходит через некоторую промежуточную область, в которой появляются квадратичные (по полю) члены, приводящие к поглощению партонов при их высокой плотности. При этом уравнение эволюции для числа глюонов $xG(x, q^2)$ в волновой функции адрона в системе бесконечного импульса при их поперечных размерах порядка q^{-1} и малой величине бьёркеновской переменной x выглядит следующим образом

$$\frac{\partial^2 xG(x, q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln q^2} = \alpha_S xG(x, q^2) - \\ - \frac{C\alpha_S^2}{q^2}(xG(x, q^2))^2, \qquad (4.39)$$

где α_S — бегущая константа связи КХД, а C — некоторая постоянная. Это уравнение основано на идеях КХД и реджеонной феноменологии, но пока е щ е не доказано строго. К сожалению, не удалось е щ е проанализировать его следствия для факториальных моментов. Качественно, однако, понятно, что общий эффект введения квадратичных членов должен состоять в сужении распределений по множественности (см., например, [204]) и уменьшении факториальных моментов.

Некоторые ориентиры в этом отношении можно получить из простейших кинетических уравнений эволюции для ветвящихся процессов типа рождения — уничтожения (или выигрыша — проигрыша), которые подробно изучались в ряде монографий [205, 206] и были использованы в применениях к процессам множественного рождения [207—211]. При этом исследуются обычные дифференциальные уравнения вместо уравнений в частных произвольных в КХД. Обычно, временная эволюция числа кластеров (под этим можно понимать партоны, резонансы и т.п.) описывается прямым или обратным уравнениями Колмогорова, которые связывают производную по времени от производящего функционала c некоторыми функциями от него (конкретным примером служит уравнение Смолуховского, рассмотренное в работе [212]). Термины "прямое" и "обратное" подразумевают, что любая древесная диаграмма может быть рассмотрена либо как разбиение на увеличивающееся число "тонких" ветвей, либо как слияние во все более "толстые" ветви, если ее рассматривать с противоположных сторон.

В случае линейных уравнений решения сильно зависят непосредственно от начальных условий [130], тогда как нелинейные версии могут приводить к решениям, не зависящим в асимптотике от их предистории [210,212]. Стационарные режимы возникают, если аннигиляция кластеров происходит сильнее, нежели их зарождение. В этом случае дисперсия пропорциональна средней множественности и перемежаемость может возникнуть при коэффициенте пропорциональности, превышающем единицу, а средняя множественность соответственно убывает в меньших бинах. Это показывается легко на примере второго факториального момента. Подчеркнем также, что могут появиться общие характеристики процесса, которые не требуют знания детального вида уравнений (например, такие как удвоение периода и т.п.). Некоторые идеи в этом направлении, использующие свойства стохастических систем и фейгенбаумовских аттракторов, уже были высказаны [213, 214].

Более детальный анализ перемежаемости в рамках уравнения Смолуховского [212] привел к выявлению разных режимов эволюции и каскадирования, появляющихся при разных значениях параметров. Отметим, что это уравнение — из типа обратных уравнений и его правая часть выглядит в чем-то похожей на предыдущее уравнение, поскольку содержит как линейный, так и квадратичный по производящему функционалу G (теперь это не структурная функция!) члены с противоположными знаками. В формальных обозначениях оно выглядит так:

$$\frac{dG}{dt} = G * G - G * G_1, \qquad (4.40)$$

где $G(u, t) = \sum_{n\geq 1} N(n, t)u^n$, $G_1 = G(1, t)$, $N(n, t)$ дает число кластеров с (целочисленной) массой n в момент времени t, а свертка $*$ определяется агрегационными коэффициентами кластеров. С помощью этого уравнения удается выявить фрактальные свойства агрегатов и изучить свойства фазовых переходов.

Мы привели два уравнения специально, чтобы показать, что несмотря на всю их внешнюю схожесть, они существенно отличаются. Как хорошо известно [201, 202, 215], уравнения КХД для производящих функционалов глюонных и кварковых струй

являются нелинейными уравнениями, тогда как соответствующие уравнения для структурных функций — это обычные линейные уравнения. Так, производящий функционал для партона (p) записывается в виде

$$G_{\mathrm{p}}(u, v, x, Y) = \sum_{n_{\mathrm{q}}, n_{\mathrm{g}}} \frac{1}{n_{\mathrm{q}}! n_{\mathrm{g}}!} \prod \int \mathrm{d}x_{\mathrm{q},i} \mathrm{d}x_{\mathrm{q},j} \times$$

$$\times\, u(x_1) u(x_j) W^{p}_{n_{\mathrm{q}} n_{\mathrm{g}}}(x, x_i, x_j, Y), \qquad (4.41)$$

где W — дифференциальная вероятность рождения n_{q} кварков и n_{g} глюонов при параметре эволюции $Y \sim \ln \ln Q^2$ в струе p. В упрощенном подходе, когда никакие эффекты когерентности и конфайнмента не учитываются, уравнения для производящих функций имеют вид

$$\frac{\partial G_{\mathrm{q}}(x, Y)}{\partial Y} = \int_0^1 \mathrm{d}x' P_{\mathrm{qq}}(x', x)(G_{\mathrm{q}}(x', Y) \times$$

$$\times\, G_{\mathrm{g}}(1 - x', Y) - G_{\mathrm{q}}(x, Y)), \qquad (4.42)$$

$$\frac{\partial G_{\mathrm{g}}(x, Y)}{\partial Y} = \int_0^1 \mathrm{d}x' (P_{\mathrm{gg}}(x', x)(G_{\mathrm{g}}(x', Y) \times$$

$$\times\, G_{\mathrm{g}}(1 - x', Y) - G_{\mathrm{g}}(x', Y)) + n_{\mathrm{f}} P_{\mathrm{qg}}(x', x) \times$$

$$\times\, G_{\mathrm{q}}(x', Y) G_{\mathrm{g}}(1 - x', Y)), \qquad (4.43)$$

где P обозначают соответствующие пертурбативные ядра уравнений, n_{f} — число ароматов, а начальные условия заданы так, что при $Y=0$ $G_{\mathrm{q}} = u$ и $G_{\mathrm{g}} = v$ для отдельной струи.

Если использовать упрощенный вариант уравнения (4.43), опустив кварковый вклад (глюодинамика), то можно показать [215], что факториальные моменты глюонного каскада обнаруживают свойство перемежаемости

$$F_q \sim \left(\ln \frac{Q}{\Lambda}\right)^{-\phi_q} \qquad (4.44)$$

с

$$\phi_q = A(\mu^q \Gamma(q) - \mu q + q - 1), \qquad (4.45)$$

где A и μ — некоторые постоянные. Можно говорить о перемежаемости в пространстве быстрот, если заменить логарифм виртуальности на быстротную ячейку (см. [181,215]). Было даже указано на удовлетворительное качественное согласие с опытом [215] и на возможность структурного фазового перехода при сравнительно низком порядке факториального момента вблизи 4.

Однако правильная трактовка эффектов когерентности и удержания (или суммирования мягких глюонов) остается одной из важнейших. Поэтому, проведенный выше анализ надо оценивать лишь как весьма предварительный. В частности, формула (4.45) не соответствует результатам [203] по аномальной КХД-размерности, обсуждавшимся выше. Модифицированное уравнение для производящих функций хорошо известно [202] и приводит к правильной аномальной размерности. Недавно был проведен анализ этого уравнения [216, 217], который выявил правильные свойства перемежаемости, восстановив согласие с аномальной размерностью, и указал на интересные свойства флуктуации в КХД-каскадах. Вместе с тем, количественного сравнения с опытом пока не проведено. Эффекты удержания удается трактовать лишь в рамках партон-адронной дуальности.

Тем не менее, появление свойства перемежаемости в решениях КХД-уравнений само по себе играет важную роль и стимулирует дальнейшие исследования в этом направлении, которые должны привести к новым результатам.

5. Заключение. Сечение (мягкого) рождения адронов является наибольшим сечением при взаимодействиях любых частиц высоких энергий. Динамическая природа этого процесса все е щ е остается "твердым орешком" для теоретической физики. Предсказания судьбы "логарифмической физики", ранее сделанные для этой области, были поколеблены недавними наблюдениями больших флуктуаций в индивидуальных событиях. Это явление оказалось весьма универсальным для процессов различного типа. Именно поэтому оно привлекло внимание многих экспериментаторов и теоретиков. Новый скейлинговый закон был подробно изучен и широко обсуждался в связи с идеями перемежаемости и фрактальности, хотя он и проявляется пока лишь в довольно ограниченном интервале размеров бин по сравнению с аналогами из других разделов физики. Однако если оставить в стороне некоторые нерешенные проблемы и принять этот закон за основу, то необходимо выяснить природу его появления. Его следствия для каскадных механизмов (включая партонные ливни в КХД) и/или для фазовых переходов являются весьма многообещающими, но их следует е щ е изучить более подробно.

Основные экспериментальные выводы мы привели в разделах 3.1.4 и особенно 3.2.16.

Конечно, многие проблемы е щ е остаются нерешенными, но если скейлинг действительно имеет место, наша задача состоит в раскрытии лежащих в его основе физических причин и природы его универсальности. Вопрос в том, является ли эта физика "новой" или "старой", важен, но не определяет собой все. Изучение этой проблемы уже привело к существенному прогрессу в понимании корреляционных свойств процессов множественного рождения.

Большая активность в этой области служит хорошим предзнаменованием для ее будущего развития.

В заключение подчеркнем, что изучение корреляций и флуктуаций плотности числа частиц в процессах множественного рождения вызвало к жизни ряд новых подходов к исследованию динамики сильных взаимодействий. Последние пять лет были исключительно плодотворными на экспериментальные результаты и теоретические идеи. Некоторые из них пока еще находятся только в начальной стадии развития и можно ожидать как дальнейшего прогресса в их развитии, так и появления новых предложений и подходов в ближайшем будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
2. *Thiele T.N.* The theory of obsenration // Ann. Math. Stat. V. 2. 1931. P. 165.
3. *Kubo R.*// J. Phys. Soc. Japan. 1962. V. 17. P. 1100.
4. *Chang R.F., Korenman V., Alley C.O., Detenbeck R.W.*// Phys. Rev. 1969. V. 178. P. 612.
5. *Kahn B., Uhlenbeck G.E.* // Physica. 1938. V. 5. P. 399.
6. *Huang K.* Statistical Mechanics. John Wiley and Sons, 1963.
7. *Mueller A.H.* // Phys. Rev. 1971. V. D4. P. 150.
8. *Kendall M.G., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. V. 1. London: C. Griffin and Co., 1969.
9. *Koba Z* // Acta Phys. Pol. 1973. V. B4. P. 95.
10. *B.R. Webber* // Nucl. Phys. 1972. V. B43. P. 541.
[11] *Eggers H.C.* Intermittency, moments and corrections in distributions of particles created in high energy collisions. PhD. Thesis. Univ. of Arizona, 1991.
12. *Giovonnini A., Van Hove L.* // Zs. Phys. — Particles and Fields. 1986. V. 30. P. 391.
13. *Carruthers P.* Preprint AZPH-TH/90-53.
14. *Weisberger W.I.* // Phys. Rev. 1973. V. D8. P. 1387.
15. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover publications, 1964.
16. *Cramer H.* Mathematics Methods of Statistics. Princeton, N.J., 1946.
17. *Weingarten* // Nucl. Phys. 1974. V. B70. P. 501.
18. *Koba Z., Weingarten D.* // Nucl. Phys. 1974. V. B70. P. 534.
19. *Bialas A, Peschanski R.* // Nucl. Phys. 1986. V. B273. P. 703.
20. *Bialas A., Peschanski R.* // Nucl. Phys. 1988. V. B308. P. 857.
[21] *Fialkomki K., Wosiek B., Wosiek J.* // Acta Phys. Pol. 1989. V. B20. P. 639.
22. *Ochs W.* // Phys. Lett. 1990. V. B247. P. 101; Zs. Phys. — Particles and Fields. 1991. V. C50. P. 339.
23. *Bialas A., Gazdzicki M.* // Phys. Lett. 1990. V. B252. P. 483.
24. *Carruthers P., Eggers H.C., Sarcevic I.* // Phys. Lett. 1991. V. B254. P. 258; Preprint AZPH-TH 91-17.
25. *Saleh B.* // Photoelectron Statistics. Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1978.
26. *Cantrell C.D.* // Phys. Rev. 1970. V. A1. P. 672.
27. *Eggers H.C., Carruthers P., Lipa P., Sarcevic I.* // Phys. Rev. 1991. V.D44. P. 1975.
28. *Mangel L.* // Proc. Phys. Soc. 1958. V. 72. P. 1037.
29. *Mangel L.* // Proc. Phys. Soc. 1959. V. 74. P. 233.
30. *Wolf E., Mehta C.L.* // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 705.
[31] *Bédard G.* // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 90. P. 131.
32. *Fry J.N.* // Astrophys. J. 1985. V. 289. P. 10.
33. *Peschanski R, Seixas J.* // Preprint CER14-TH-5903/90.
34. *Cantrell C.D., Fields J.R.* // Phys. Rev. 1973. V. A7. P. 2063.
35. *Bures J.* // Can. J. Phys. 1972. V. 50. P. 706.
36. *Mandelbrot B.* // The Fractal Geometry of Nsiture. New York: Freeman, 1982.
37. *Feder J.* // Fractals. Plenum Press. New York; London, 1988.
38. *Зельдович Я.Б. и др.* // УФН. 1987. Т. 152. С. 3.
39. *Paladin G., Vulpiani A.* // Phys. Rep. 1987. V. 156. P. 147.
40. *Дремин И.М.* // УФН. 1990. Т. 160. С. 647.
[41] *Peschanski R.* // Int. J. Mod. Phys. 1991. V. A6. P. 3081.
42. *Renyi A.* Probability theory. Amsterdam: North-Holland, 1970.
43. *Foá L.*// Phys. Rep. 1975. V, 22C. P.1.
44. *Whitmore J.* //Phys. Rep. 1976. V. 27C. P. 187.
45. *Ansorge R.E. et al.* (UA5) // Zs. Phys. C — Particles and Fields. 1988. V. 37. P. 191.
46. *Amendolia S.R. et al.* // Nuovo Cimento. 1976. V. A31. P. 19.
47. *Fuglesang Ch.* Ph. D. Thesis. Univ. of Stockholm, 1987.
48. *Alner G.J.* (UA5) // Nucl. Phys. 1987. V. B291. P. 445.
49. *Andersson B., Gustafson G., Nilson-Almqvist B.* // Nucl. Phys. 1987. V. B281. P. 289; A High Energy String Dymunics Model for Hadronic Interactions. Lund preprint LUTP 87-6.
50. *Bengtsson H.U., Sjöstrand T.* // Сотр. Phys. Com. 1987. V. 46. P. 43.
[51] *Bailly J. et al.* (NA23) // Zs. Phys. C — Particles and Field. 1988. V. 40. P. 13.
52. *Breakstone A. et al.* // Phys. Lett. 1982. V. 114B. P. 383.
53. *Andersson B., Gustafson G., Holgersson I., Mansson O.* // Nucl. Phys. 1981.V.B178. P.242.
54. *Sjöstrand T.* // Сотр. Phys. Com. 1986. V. 39. P. 347.
55. *Capella A.* // Proc. Europ. Study Conf. on Protons and Soft Hadronic Int. Erice/Ed. R.T. Van de Walle. Singapore a. o.: World Scientific, 1982. P. 199.
De Wolf E.A. // Proc. XV Int. Symp. on Multiparticle Dynamics. Lund/Ed. G. Gustafson. Singapore a. o.: World Scientific, 1984. P.1.
56. *Aivazyan V.V. et al.* (NA22) // Zs. Phys. C — Particles a n d Fields. 1991. V. 51. P. 167.
57. *Кайдалов А.Б., Тер-Мартиросян К.А.* //ЯФ. 1984. Т. 39. С. 979; Т. 40. С. 135.
58. *Амелин Н.С. и др.* // ЯФ. 1990. Т. 51. С. 133, 535. Т. 52. С. 362.
59. *Althoff M. et al.* //Zs. Phys. C — Particlesand Fields. 1985. V. 29. P. 347.
Chwastowski J. Charged Pmticle Multiplicities and Correlations in e^+e^- Annihilation between 14 and 43.6 GeV. Thesis. Hamburg; DESY, 1988.
60. *Malecki P.* // Festschrift Léon Van Hove /Eds. A. Giovannini, W. Kittel. Singjipore a. o.: World Scientific, 1990. P. 159.
Figiel J. Heidronization of Pertons in Muon-Mucleon Interactions at 280 GeV/c. Krakow preprint IFJ 1398/Ph. 1988.
[61] *Podobrin O.* CELLO Results on Multiparticle Production. Preprint DESY 91-111.
62. *Arneodo M. et al.* // Zs. Phys. C — Perticles and Fields. 1986. V. 31. P. 333.
63. *Arneodo M. et al.* // Zs. Phys. C — Particles and Fields. 1988. V. 40. P. 347.
64. *Eggert K. et al.* // Nucl. Phys. 1975. V. B86. P. 201.
65. NA22 Collaboration preprint.
66. *Aihara H. et al.* //Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 2199.
67. *Asai M. et al.* (NA23) // Zs. Phys. 1987. V. C34. P. 429.
68. *Oh B. Y. et al.* // Phys. Lett. 1975. V. 56 B. P. 201.
69. *De C. la Vaissiere et al.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2071.
70. *Ma W.G. et al.* // Zs. Phys. 1986. V. C30. P. 191.
[71] *Aguilar-Benitez M. et al.* (NA27) // Phys. Lett. 1985. V. B164. P. 404.
72. *Бумажнов В.А. и др.* Препринт ИФВЭ 79-181. — 1979; ЯФ. 1987. Т. 46. С. 289; 1984. Т. 40. С. 96.
73. *Азимов С.А. и др.* // Докл. АН УзбССР. 1980. № 9. С. 31.
74. *Breakstone A. et al.* // Mod. Phys. Lett. 1991. V. A6. P. 1562.
75. *Carruthers P., Sarcevic I.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V.63. P. 1562.
76. *Capella P., Fialkowski K., Krzymcki A.* // Phys. Lett. 1989. V. 230B. P. 149.
77. *De Wolf E.A.* // Acta Phys. Pol. 1990. V. B21. P. 611.
78. *Ajinenko I.V. et al.* (NA22) // Phys. Lett. 1987. V. B197. P. 457.
79. *Апанасенко А.В. и др.* // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 157.
Дремин И.М., Третьякова М.И. // Proc. XVIII Int. Cosmic Ray Conference. Paris, 1981.
Славатинский С.А. и др. // Proc. XVIII Int. Cosmic Ray Conference. Paris, 1981.

Азимов С.А. и др. // Proc. XVIII Int. Cosmic Ray Conference. Paris, 1981.
80. *Марутян Н.А. и др.* // ЯФ. 1979. Т. 29. С. 1566.
[81] *Burnett T.H. et al.* (JACEE) // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 2062.
82. *Adamus M. et al.* (NA22) // Phys. Lett. 1987. V. B185. P. 200.
83. *Carbon P.* (UA5) // Proc. 4th Topical Workshop on pp Collider Physics. Bern, March 1983.
Alner G.J. et al. (UA5) // Phys. Rep. 1987. V. 154. P. 247.
84. *Adamovich M.J. et al.* (EMU-01) // Phys. Lett. 1988. V. B201. P. 397.
85. *Hentschel H.G.E., Procaccia I.* // Physica. 1983. V. 8D. P. 435.
Grassberger P. // Phys. Lett. 1983. V. 97A. P. 227.
86. *Lipa P., Buschbeck B.* //Phys. Lett. 1989. V. B223. P. 465.
87. *Hwa R.* // Phys.Rev. 1990. V. D41. P. 1456.
88. *Buschbeck B., Lipa P., Peschanski R.* // Phys. Lett. 1988. V. B215. P. 788.
Abachl S. et al. (HRS) // Study of Intermittency In e^+e^- Annihilations at 29 GeV. Preprint ANK-HEP-CP-90-50.
89. *Braunschweig W. et al.* (TASSO) // Phys. Lett. 1989. V. B231. P. 548.
90. *Behrend H.-J. et al.* (CELLO) // Phys. Lett. 1991. V. B256. P. 97.
Podobrin P. (CELLO) // Proc. XXVI Rencontre de Moriond. Les Arcs 1991 / Ed. J. Tran Thanh Van. Editions Frontieres, 1991. P. 311.
[91] *Abreu P. et al.* (DELPHI) // Phys. Lett. 1990. V. B247. P. 137.
De Angelis A. // Mod. Phys. Lett. 1990. V. A5. P. 2395.
De Angels A., Demaria N. // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production // Eds, R.Hwa et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 1.
Abreu P. et al. (DELPHI) (draft).
92. *Akrawy M.Z. et al.* (OPAL) // Phys. Lett. 1991. V.B262. P. 351.
Geddes N. // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 16.
93. *Decamp D. et al.* (ALEPH) // Zs Phys. C — Particles and Fields. 1992. V. 53. P. 21.
Lieske N. // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. —Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 32
Raab V. // Ibidem. P. 46.
94. *Derado I., Jancso G., Schmitz N., Stopa P.* (EMC) // Zs. Phys. 1990. V. C47. P. 23,
Derado I., Figiel J., Jansco G., Schmitz N. (EMC) Preprint M.P.I.-PhE/91-08.
95. *Verluyten L. et al.* (WA59 and E180) // Phys. Lett. 1991. V. B260. P. 456.
96. *Ajinenko I.V. et al.* (NA22) // Phys. Lett. 1989. V. B222. P. 306; 1990. V. B235. P. 373,
Agababyan N.M. et al. (NA22) // Phys. Lett. 1991. V. B261. P. 165.
Botterweck F. et al. (NA22) // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / eds. R. Hwa et al. Singapore a. o: World Scientific, 1992. P. 125.
Charlet M. (NA22) // Ibidem. P. 140.
97. *Albajar C. et al.* (UA1) // Nucl. Phys. 1990. V. B345. P. 1.
Buschbeck B. // Festschrift Leon Van Hove / Eds. A. Giovannini, W. Kittel. Singapore a. o.: World Scientific, 1990. P. 211.
Lipa P. Ph. D. Thesis, Univ. of Vienna 1990.
Lipa P. et al. (UA1) // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a. o: World Scientific, 1992. P. 111.
98. *Arena V. et al.* (IHSC) Study of Intermittency in Hadron-Hadron Collisions at 16.7 GeV. Paper contributed to the LP-HEP Conference. Geneva, 1991.
99. *Бравина Л.В. и др.* (Mirabelle). Factorial Moments in Interactions at 32 GeV/c. Preprint.
100. *Rimondi F.* (CDF) // Proc. XXI Int. Symposium on Multiparticle Dynamics. Wuhan, China, 1991 (to be publ.).
[101] *Holynski R. et al.* (KLM) // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 733; Phys. Rev. 1989. V. C40. P. R2449.
102. *Botterweck F. et al.* (NA22) // Zs. Phys. 1991. V. C51. P. 37.
103. *Adamovich M.I. et al.* (EMU-01) // Phys. Rev. 1990. V. 65. P. 412
Adamovich M.I. et al. (EMU-01) // Phys. Lett. 1991. V. B263. P. 539;
Adamovich M.I. et al. (EMU-01) // Zs. Phys. C491991. P. 395.
104. *Sengupta K, Jain P.L., Singh G., Kim S.N.* (EMU-08) // Phys. Lett. 1990. V. B236. P. 219.
Jain P.L., Singh G. One- and Two-Dimensional Analysis of Intermtttency in Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Interactions (to be publ. in Phys. Rev. C).
105. *Derado I.* (NA35) // Festschrift Leon Van Hove / Eds. A. Giovannini, W. Kittel. Singapore a. o.: World Scientific 1990. P. 257; Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 184.
106. *Akesson P. et al.* (HELIOS) // Phys. Lett. 1990. V. B252. P. 303.
107. *Bialas A.* // Nucl. Phys. 1991. V. A525. P. 345c;
Buschbeck // Proc. XXV Rencontre de Moriond, Les Arcs / Ed. Tran Thanh Van J. Editions Frontieres, 1991. P. 299.
De Angelis A., Lipa P., Ochs W. // Proc. Joint Int. Lepton—Photon Symp. and Europhys. Conf. on High Energy Physics /Eds. S. Hegarfy et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. V. I. P. 184.
108. *Bopp F.W., Capella A., Ranft J., Tran Thanh Van J.* // Zs. Phys. 1991. V. C51. P. 99.
109. *Feynman R.P.* // Proc. 3rd Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory. Florence, 1979 / Eds. R. Casalbuoni et al. Baltimore: John Hopkins University Press.
110. *Veneziano G.* // Proc. 3rd Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, Florence, 1979 / Eds. R. Casalbuoni et al. Baltimore. John Hopkins University Press.
[111] *Giovannini A.* // Proc. 10th Int. Symp. on Multiparlicle Dynamics / Eds. S.N. Ganguli, P.K. Malhotra, A. Subramanian. Singapore a. o.: World Scientific, 1980.
112. *Botterweck F.* (частное сообщение),
Buschbeck B., Lipa P. (частное сообщение).
113. *M. Jedrzejczak* // Phys. Lett. 1989. V. B228. P. 259.
114. *Dahlqvist P., Gustafson G., Andersson B.* // Nucl. Phys. 1989. V. B328. P. 76,
Andersson B., Gustafson G., Nilsson A., preprint LUTP 90-4.
Gustafson G., Nilsson A. // Nucl. Phys. 1991. V. B355. P. 106. // Phys. Lett. 1990. V. B248. P. 430.
115. *Agababyan et al.* (NA22) // Zs. Phys. 1990. V. C46. P. 387.
116. *Ameodo M. et al.* (EMC) // Zs. Phys. 1986. V. C33. P. 167.
117. *Wosiek B.* Krakow preprint INP 1496/PH. 1990.
Ekspong G., Peschanski R., Wosiek J. Saclay preprint SPhT/90-104.1990.
Seibert D. Analysis of Correlated Data. Preprint. 1990.
118. *Friedtander E.M.* // Mod. Phys. Lett. 1989. V. A4. P. 2457.
Lipa P., Eggers H.C., Botterweck F., Charlet M. // Zs. Phys. 1992. V. C54. P. 115.
119. *Bialas A., Seixas J.* // Phys. Lett. 1990. V. B250. P. 161.
120. *Fialkowski K.* // Phys. Lett. 1991. V. B272. P. 139.
[121] *Fialkomki K.* // Acta Phys. Pol. 1991. V. B22. P. 397.
122. *Ochs W., Wosiek R.* // Phys. Lett. 1991. V. B253. P. 225.
123. *Alberty J., Bialas A.* // Zs. Phys. 1991. V. C50. P. 315.
124. *Brax Ph., Peschanski R.* // Phys. Lett. 1991. V. B253. P. 225.
125. *Bialas A., Hwa R.* // Phys. Lett. 1991. V. B253. P. 436.
126. *Carruthers P., Friedfdnder E.M., Shin C.C., Weiner R.M.* // Phys. Lett. 1989. V. B222. P. 487.
127. *Gyulassy M.* // Festschrift Leon Van Hove / Eds. A. Giovannini, W. Kittel. Singapore a. o.: World Scientific, 1990. P. 479.
128. *Zajc W.A.* // Proc. Int. Workshop on Correlations and Multiparticle Production, Marburg / Eds. M. Plümer et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1991. P. 439.
129. *Macellini St.* // Proc. LP-HEP 91 / Eds. S. Hegarty et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. V. I. P. 750.
130. *Biyajima et al.* // Prog. Theor. Phys. 1990. V. 84. P. 931.
[131] *Neumeister N. et al.* (UA1) // Phys. Lett. 1992. V.B275. P. 186.
132. *Ochs W., Wosiek J.* // Phys. Lett. V. B214. P. 617.1988; 1989. V. B232. P. 271.
133. *Van Hove L.* // Ann. of Phys. 1989. V. 192. P. 66.
134. *Bialas A. et al.* // Phys. Lett. 1989. V. B229. P. 398.

135. *Wu Y.F., Liu L.S.* // Zs. Phys. 1992. V. C53. P. 273.
136. *Bialas A.* // Festschrift Leon Van Hove / Eds. A. Giovsinnini, W. Kittel. Singapure a.o.: World Scientiflc, 1989. P. 75.
137. *Seibert D.* // Phys. Lett. 1990. V. B240. P. 215.
138. *Aurenche P. et al.* // Phys. Rev. 1992. V. D45. P. 92.
Bopp F. W. et al. // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore *a.* o.:World Scientific, 1992. P. 313.
139. *Barshay S.* //Zs. Phys. 1990. V. C47. P. 199.
140. *Dias de Deus J.* // Phys. Lett. 1990. V. B240. P. 481; Lisboa preprint IST-DF-7/91.
[141] *Eggers H.C.* // Ph. D. Thesis. University of Arizoiw 1991.
Elze T., Sarcevic I. Arizona preprint AZPH-TH/91-24.
Sarcevic J. // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a.o.: World Singapore, 1992. P. 206.
142. HELIOS. Paper submitted to the EPS Conf. on High Energy Physics. Madrid, 1989.
143. *Aivazyan V.V. et al.* (NA22) // Phys. Lett. 1991. V. B258. P. 487.
144. *Hwa R.C.* // Phys. Rev. 1990. V. D41. P. 1456. *Chiu C.B., Hwa R.C.* Phys. Rev. 1991. V. D43. P. 100.
145. *Sugano K.* (HRS) // Proc. Santa Fe Workshop Intennittency in High Energy Collisions. 1990 / Eds. F. Cooper, R.C. Hwa, I. Sarcevic, Singapore a. o.: World Scientific, 1991. P. 1; Proc. Int. Workshop on Corrections and Multiparticle Production, Marburg 1991 / Eds. M. Plümer, S. Raha, R.M. Weiner. Singapore a. o.: World Scientific, 1991. P. 240.
146. *Derado I., Hwa R.C., Jancso G., Schmitz N.* (EMC) Preprints MPI-PhE/91-05 and OITS-471,1991.
147. *Boca G. et al.* (IHSC). Some Fractal Aspects of Multiparticle Production in Hadron-Hadron Collisions at s = 16.7 Ge Paper submitted to the 25th Int. Conf. on High Energy Physics. Singapore, 1991.
148. *Botterweck F.* Ph. D. Thesis. Univ. of Nijmegen, 1992.
149. *Dibon H.* (UA1) // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 82.
Dibon H., Mandl F., Markytan M., Neumeister N. Proc. XXI Int. Symp. on Multiparticle Dyimmics. Wuhan, Chine, 1991 (to be pubU.
150. *Rimondi F.* (CDF) // Proc. Int. Workshop on Corrections and Multiparticle Production. Marburg, 1991 / Eds. M. Raha, R.M. Weiner. Singapore a. o.: World Scientific, 1991. P. 276.
[151] *Florkomki W., Hwa R.C.* // Phys. Rev. 1991. V. D43. P. 1548.
152. *Seibert D.* Seeing of Weak Corrections. University of Minnesota Preprint. 1990.
153. *Chiu C.B., Hwa R.C.* Preprint OITS-466. 1991.
154. *Hwa R.C., J.C. Pan* // Phys. Rev. 1992. V. D45. P. 1476.
155. *Dremin I.M.* // Mod. Phys. Lett. 1988. V. A13. P. 1333.
156. *Carruthers P.* Astrophys. J. 1991. V. 380. P. 24.
Jipd P., Carruthers P., Eggers H.C., Buschbeck B. Arizona preprint AZPH-TH/91 -53.
157. *Bialas A.* // Acta Phys. Pol. 1992. V. B23. P. 561; Preprint TPJU-8/92.
158. *Peebles P.J.F.* The Large Scale Structure of the Universe. Princeton, N.J., 1980.
159. *Antoniou N.G., Contogouris A.P., Papadopoulos C.G., Vlassopulos S.D.P.* // Phys. Lett. 1990. V. B245. P. 619.
160. *Fialkowski K.* // Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production / Eds. R. Hwa et al. Singapore a. o.: World Scientific, 1992. P. 249.
[161] *Fowler F.N., Weiner R.M.* // Phys.Rev. 1978. V. D17. P. 3117.
162. *Capella A., Tran Thanh Var J.* // Zs. Phys. 1988. V. C38. P. 177.
163. *Andersson B. et al.* // Nud.Phys. 1987. V.B281.P. 289.
164. *Kaidalov A.B.* // Phys. Lett. 1982. V. B116. P. 459.
165. *Дремин И.М.* // Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 30. С. 140; Физ. ЭЧАЯ. 1987, Т. 18. С. 31.
166. *Fuglesang C.* // Proc. 19th Int. Symposium on Multiparticle Dynamics. Aries, France. Editions Frontiers, 1988. P. 257.
167. *Dremin I.M., Dunaevskii A.M.* // Phys. Rep. 1975. V. 18. P. 159.
168. *Liu L.S., Meng T.O.* // Phys. Rev. 1984. V. D27. P. 2640.
169. *Giovannird A, Van Hove L.* // Acta Phys. Pol. 1988. P. 495, 917, 931.
170. *Ochs W., Wosiek J.* // Phys. Lett. 1988. V. B207. P. 617
[171] *Bialas A., Peschanski R.* // Phys. Lett. 1988. V. B207. P. 59.
172. *Peschanski R.* // Nucl. Phys. 1989. V. B327. P. 144.
173. *Antoniou N.G. et al.* // Phys. Lett. 1990. V. B245. P. 619.
174. *Carruthers P., Sarcevic I.* // Phys. Lett. 1987, V. B189. P. 442.
175. *Dremin I.M., Nazirov M.T.* // Proc. 26th Moriond Meeting / Ed. J. Tran Thjmh Van. Editions Frontiers, 1991. P. 341; ЯФ. 1992 Т.56. С. 197; Т. 57, №3(9).
176. *Peschanski R., Tran Thanh Van J.* // Proc. 18th Intern. Symp Multiparticle Dynamics. Teshkent, Singapore a. o.: World Scientific, 1987. P. 149.
177. *Andersson B. et al.* // Proc. 19th Intern. Symp. Multiparticlc Dynamics. Aries, France. Editions Frontiers, 1988. P. 347.
178. *Дремин И.М. и др.* //ЯФ. 1990. Т. 52. С. 840.
179. *Seibert D.* // Phys. Lett. 1989. V. 63. P. 136.
180. *Carruthers P., Minh Duong-Van.* Preprint L3-UR-83-2419 1983.
[181] *Дремин И.М.* // Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 643.
182. *Leonidov A.V., Tsypin M.M.* // Mod. Phys. Lett. V. A6. 1991. P. 1203.
183. *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941.Т. 30. С. 301.
Новиков Е.А., Стюарт Р.В. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. №3. С. 408.
184. *Schertzer D., Lovejoy S.* // Turbulent Shear Flows 4. Berlin a.o,: Springer-Verteg, 1984.
Frish U. et al. // J. Fluid Mech, 1978. V. 87. P. 719.
185. *Bialas A., Szczerba A., Zalewski K.* // Zs. Phys. 1990. V. C46, P 163.
186. *Brax Ph., Peschanski R.* // Nucl. Phys. 1990. V. B346. P. 65.
187. *Dremin I.M.* // Proc. 21th Intern. Symp. Multiparticle Dynamics GutHolmecke, Germany. Singapure a.o.: World Scientific, 1991 P. 459.
188. *Levtchenko B.B.* Preprint MPI-PAE/EXP.EL 219. 1990.
189. *Wosiek J.* // Nucl. Phys. B.Suppl. 9.1989. P. 640.
190. *Satz H.* // Nucl. Phys. 1989. V. B326. P. 613.
[191] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
192. *Scalapino D.J., Sugar R.L.* // Phys. Rev. 1973. V. D8. P. 2284.
193. *Синай Я.* // Рос. Мат. обзор. 1972. № 166. С. 21.
194. *Tel T.* // Zs. Naturforsch. 1988. Bd. 43a. S. 1154.
195. *Dremin I.M.* // Festschrift Leon Van Hove. Singapure a.o. World Scientific, 1990. P. 455.
196. *Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G.* // Phys. Rep. 1983, V 100. P.1.
197. *Hwa R.C.* // Nud. Phys. 1989. V. B328. P. 59.
198. *Chiu C.B., Hwa R.C.* Preprint TPJU-13/89; Phys. Rev. V. D43 1991. P. 100.
199. *Bialis A. et al.* // Phys. Lett. 1989. V. B229. P. 398.
200. *Altarelli G., Parisi G.* // Nucl. Phys. 1977. V. B126. P. 298.
[201] *Андреев И.В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях:. М.: Наука, 1981.
202. *Dokshitzer Yu.L., Khoze V.A., Mueller A.H., Troyan S.I.* Basic:, of Perturbative QCD. Editions Frontieres, 1992.
203. *Gustafson G., Nilsson A.* // Zs. Phys. 1991. V. C52. P. 533.
204. *Batunin A.V.* // Mod. Phys. Lett. 1989. V. B3. P. 543.
205. *Bartlett M. S.* An Introduction to Stochastic Processes with Specia Reference to Methods and Applications. Camb. Univ. Press, 1955
206. *Севастьянов Б.А* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
207. *Giovannini A.* // Nucl. Phys. 1979. V. B161. P. 429.
208. *Lam C.S., Walton M.A* // Phys. Lett. 1984. V. B140. P. 246.
209. *Shih C.C.* // Phys. Rev. 1986. V. D33. P. 3391; V. D34. P. 2710
210. *Batunin A.V.* // Phys. Lett. 1988. V. B212. P. 495.
[211] *Chliapnikov P.V., Tchikilev O.G.* // Phys. Lett. 1990.V. B242 P. 275.
212. *Meunier J.-L., Peschanski R.* Saclay preprint SPHT-91-163.
213. *Dias de Deus J.* // Phys. Lett. 1987. V. B194. P. 297.
214. *Батунин А.В.* // ЯФ. 1992. Т. 57. № 3 (9).
215. *Brax Ph., Peschanski R.* Preprint SPht/92-005. 1992.
216. *Brax Ph., Dokshitzer Yu.L., Meunier J.-L., Peschanski R.* // Proc. 22 Int. Sump, on Multiparticle Dyiwmics. 1992. Singapurt a. o.: World Scientific (to ne publ.).
217. *Ochs W., Wosiek J.* // Proc. 22th Int. Symposium on Miltiparticle Dynamics, 1992. Singapure a. o.: World Scientific (to be publ.).