

530.182

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ БЕСПОРЯДОК

М.И. Рабинович, А.Л. Фабрикант, Л.Ш. Цимринг

(Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород)

СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. О предмете статьи . . . . .                                             | 1  |
| 2. Квазикристаллы . . . . .                                                | 4  |
| 3. Конечномерный беспорядок. Примеры и определения . . . . .               | 7  |
| 4. Модельные уравнения . . . . .                                           | 16 |
| 5. Эволюционность одномерного беспорядка . . . . .                         | 21 |
| 6. Беспорядок дефектов. Пример . . . . .                                   | 28 |
| 7. Конечномерный беспорядок в $x - y$ - и $x - t$ -пространствах . . . . . | 31 |
| 8. Диагностика конечномерного беспорядка на фоне спекл-шума . . . . .      | 37 |
| 9. Вместо заключения . . . . .                                             | 39 |
| Примечания . . . . .                                                       | 41 |
| Список литературы . . . . .                                                | 41 |

"Попробуйте организовать порядок. Беспорядок получится сам".

(Из расхожих советов)

1. О предмете статьи<sup>(1\*)</sup>

Когда мы говорим "беспорядок", то даже у физиков возникают совершенно разные ассоциации. Многие вспоминают о беспорядочном положении молекул газа или жидкости в каждый момент времени, специалисты по физике твердого тела могут думать о беспорядке магнитных доменов, ориентации спинов и т.д. Вообще беспорядок — сложное, нерегулярное в пространстве распределение каких-либо элементов (или структур) — достаточно традиционный объект исследования и анализируется, в частности, методами статистической физики достаточно давно. Здесь уместно сослаться на монографии [1 — 4], среди которых наиболее яркой и интересной с нашей точки зрения

является книга Займана "Модели беспорядка", где с позиций теоретической физики рассмотрены не только модели неупорядоченных кристаллических и почти кристаллических структур, но также и переход твердое тело—жидкость, жидкость—газ и многое другое.

То, что мы хотим обсудить в этой статье, есть в определенной степени новая ветвь теории беспорядка. Она связана с попытками описания неупорядоченных пространственных распределений полей, будь то распределение электронной плотности в кристаллах или распределение плотности вещества в галактике, с помощью методов нелинейной динамики. Мы пытаемся понять, возможно ли вообще существование пространственно неупорядоченных распределений физически осмысленных полей, которые имели бы динамическую природу и их можно было бы описывать с помощью динамических моделей, например дифференциальных уравнений в частных производных или несколько более своеобразных уравнений для динамических систем с несколькими "временами" (здесь роль "времен" играют пространственные координаты).

Уже простейшая **пространственно-временная** аналогия убеждает нас в том, что "конечномерный беспорядок", как мы его будем называть, т.е. нерегулярное пространственное распределение поля, описываемое динамической системой с конечным числом степеней свободы, должен существовать в природе (причем должен быть столь же типичен, как и конечномерный временной хаос). Примеров можно привести много, в частности стационарные хаотические волны, которые наблюдаются в разных ситуациях [5, 6]. Естественно возникает желание перенести результаты теории динамического (временного) хаоса на пространственный динамический беспорядок. Если пространственная координата одна и речь идет о статическом (или стационарном) режиме, то это в некотором смысле тривиально. Однако даже для одномерного беспорядка мы сталкиваемся с очень трудными вопросами. Плавный из них: является ли такой конечномерный беспорядок эволюционным, т.е. развивается ли беспорядок (во времени) из порядка, оставаясь детерминированным. Когда же мы задумываемся о двумерном, тем более трехмерном, пространственном беспорядке динамической природы, возникают качественно новые проблемы.

Наглядным примером многократного возрастания трудностей в неоднмерной геометрии может служить переход к хаосу (или беспорядку) через квазипериодичность. В рамках одномерных дифференциальных уравнений хорошо известен переход "соизмеримость—несоизмеримость (квазипериодичность)—хаос". Возможна ли подобная последовательность при изменении управляющего параметра для двух- или трехмерного поля? Какой должна быть динамическая система, в рамках которой такой беспорядок может быть описан? Четкого ответа на эти вопросы пока нет. Однако сам факт подобного перехода весьма вероятен. Тем более что его первый этап — переход "кристалл—квазикристалл" — сейчас подробно обсуждается.

Как известно, главное требование к динамике, приводящей к стохастичности, — это неустойчивость индивидуальных движений. При описании пространственного беспорядка мы должны опираться на аналогичное свойство. Для формализации этого свойства, как минимум, необходимо ввести по отношению к пространственной наблюдаемой такие понятия, как динамическая система, фазовое пространство, траектории, расстояния между ними. Тогда для неупорядоченных пространственных картин, или, как мы часто будем говорить, мгновенных снимков, уже можно будет пользоваться понятиями стохастического множества, корреляционной размерности, колмогоровской

энтропии, эргодичности и т.д. И, возможно, на этом пути удастся понять разницу между полным беспорядком, который обычно обсуждают в термодинамике, и конечномерным беспорядком. Термин "конечномерный беспорядок" мы уточним чуть ниже.

Добавим, что с физической точки зрения образование конечномерного беспорядка можно интерпретировать как возникновение нерегулярных структур. Так же, как и в случае упорядоченных структур, это результат нарушения симметрии исходного состояния. Такое нарушение возможно и в сильно неравновесных средах (гидродинамические течения, автокаталитические химические реакции и т.п.), и в системах, находящихся в термодинамическом равновесии (беспорядок дефектов кристаллической решетки, магнитных доменов в ферромагнетиках, молекулярных осей в жидких кристаллах и т.д.). Когда речь идет об установившемся (при  $t \rightarrow \infty$ ) беспорядке, и равновесные, и неравновесные среды должны описываться общими моделями. В этом смысле виды беспорядка можно классифицировать, как это делает Займан (рис. 1).

Большинство проблем, связанных с динамическим беспорядком, еще даже не поставлены математически строго. Поэтому представляемый вниманию читателей материал преследует своей целью скорее формулировку и очерчивание круга исключительно привлекательных и перспективных, с нашей точки зрения, вопросов и сведение вместе разного рода примеров, вселяющих определенный оптимизм.

Несколько слов по поводу структуры статьи. Проблема конечномерного беспорядка состоит из трех фундаментальных вопросов. Первый — почему такого типа беспорядок все-таки реализуется в природе? Второй вопрос — это методы описания конечномерного беспорядка. И третий — проблема "узнавания" динамического беспорядка. Поясним последнее. Пусть имеется заданная пространственная картина: мгновенный снимок поля или распределение плотности молекул в полимерной пленке. Как узнать, является ли эта картина порожденной динамической системой и какими уравнениями ее можно описать? Для ответа на последний вопрос весьма перспективным оказы-

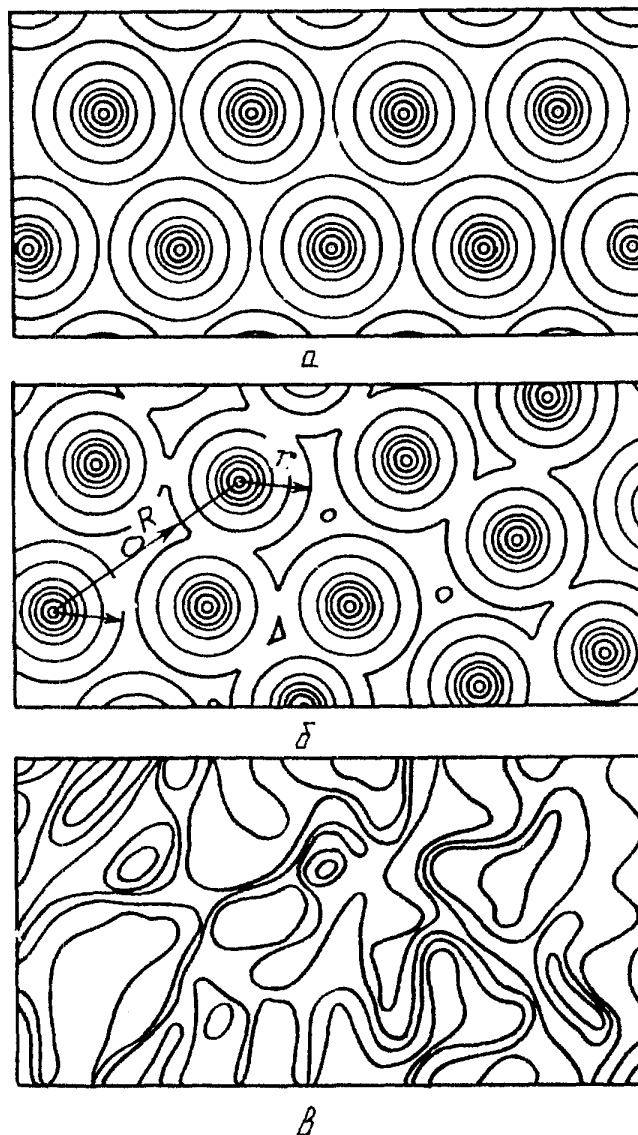


Рис. 1. *a* — Решеточный порядок. *б* — Беспорядок структур (топологический беспорядок). *в* — Континуальный беспорядок

вается обобщение идеологии Такенса и др. для обработки соответствующих наблюдаемых, в данном случае — пространственных, с позиций нелинейной динамики. Это требует, в частности, введения понятий корреляционной размерности пространственных наблюдаемых, пространства вложения, ляпуновских показателей и т.д.

Пока еще трудно реализовать намеченную схему полностью, но мы пытаемся ответить на поставленные вопросы с той степенью внятности, которой в состоянии на сегодняшний день достичь.

## 2. Квазикристаллы

Мы привыкли к крайностям: если уж порядок — то кристалл, полная периодичность, а если уж беспорядок, то это такая хаотическая картина, что возможно только статистическое ее описание. Поэтому столь неожиданным и ярким было открытие в середине 80-х годов квазикристаллов [7 — 8]. Эти среды характеризуются наличием в спектре брэгговского рассеяния нескольких несоизмеримых гармоник, что свидетельствует о квазипериодической пространственной структуре. Аналогичные пространственные картины реализуются и для некоторых волновых систем [9]. Строго говоря, это, конечно, упорядоченные среды, но порядок здесь довольно необычный. В частности, пространственная длина, на которой картина повторяет себя, может быть столь велика, что внешне эта среда мало отличается от беспорядочной<sup>(2\*)</sup>.

Здесь возникают естественные ассоциации с моделью турбулентности Ландау—Хопфа, представлявшей турбулентность (по крайней мере вблизи порога возникновения) как квазипериодическое движение с большим числом степеней свободы, т.е. как квазипериодическую "намотку" на многомерном торе [10, 11].

Если говорить об одной пространственной координате, то при буквальном переносе этой идеи на нашу проблему никаких существенных трудностей не наблюдается. Мы берем композицию, например, двух периодических структур и представляем поле в виде набора гармоник с несоизмеримыми пространственными периодами. Нетривиальность возникает, как только мы переходим к двумерной задаче. Здесь появляется новая проблема: как должны выглядеть ячейки той пространственной структуры, которая имеет такой дискретный спектр, т.е. как можно замостить плоскость, не оставляя "дыр", сохранив спектр в виде набора небольшого числа несоизмеримых векторов? С точки зрения топологии это совсем нетривиальный вопрос.

На рис. 2 изображена двумерная квазикристаллическая структура — паркет Пенроуза [8]. Она обладает определенными свойствами упорядоченности. Здесь, в частности, есть сколь угодно большие фрагменты с симметрией пятого порядка. Очевидно также, что эта структура квазипериодична: на достаточно больших расстояниях в любом направлении повторяются сколь угодно большие ее участки. Отметим, наконец, что этот узор обладает симметрией подобия — изменив масштаб в  $\chi = (\sqrt{5} + 1)/2$  раз (золотое сечение) в окрестности каждой структуры, мы можем найти структуру такой же формы, но с масштабом, увеличенным в  $\chi$  раз (ср. выделенные жирными линиями звезды на рис. 2). Перечисленные свойства симметрии можно обнаружить для сколь угодно больших пространственных масштабов.

Факт существования квазикристалла — уже предвестник динамического (конечномерного) пространственного беспорядка. Действительно, незамкнутые "намотки на торе" в фазовом пространстве динамической системы обычно

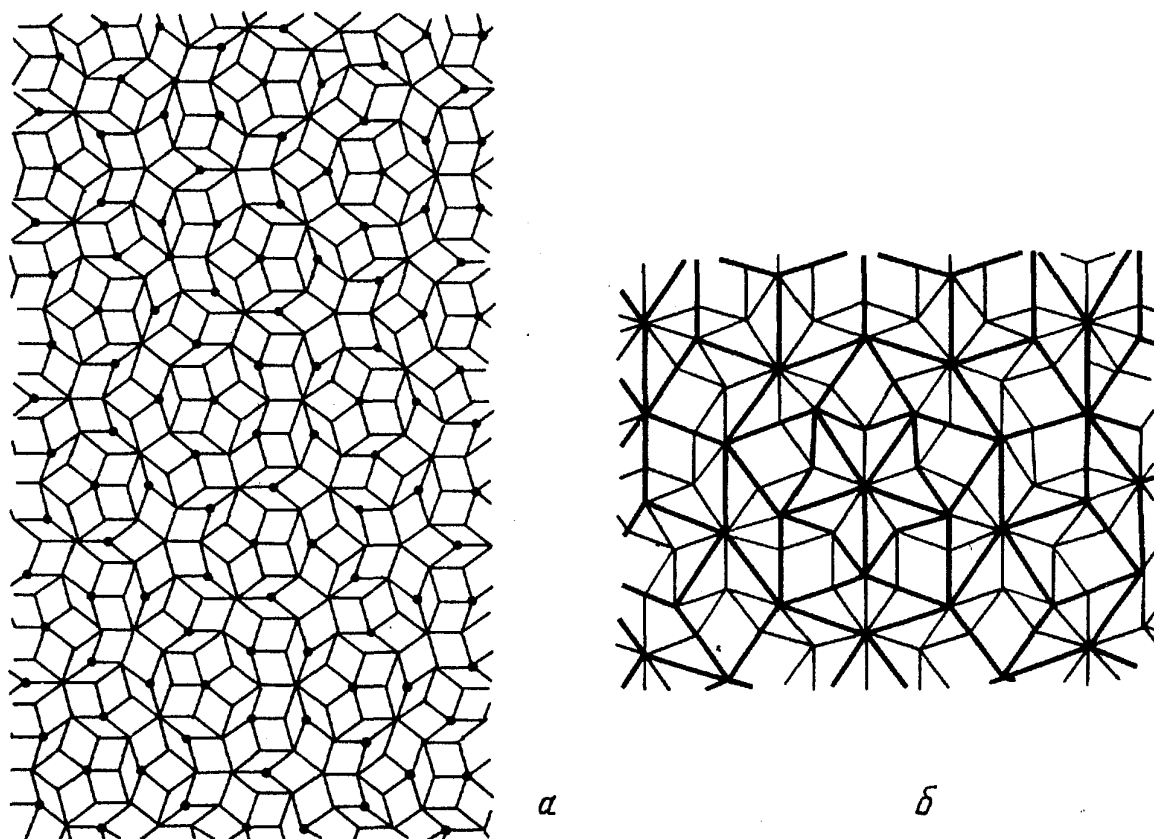


Рис. 2. Паркет Пенроуза. *a* — Расположение атомов в двумерном квазикристалле. *б* — Пример самоподобных структур

структурно неустойчивы, и при сколь угодно малом изменении параметров топология траекторий качественно меняется: образуется либо периодическая (замкнутая) траектория, либо — стохастическое множество. На основании пространственно-временной аналогии можно сказать, что первая возможность соответствует "кристаллу", а вторая — пространственному беспорядку.

Естественно предположить, что между полным порядком и абсолютным беспорядком имеется множество состояний среды или поля с разной степенью упорядоченности. И конечномерный беспорядок должен встречаться достаточно часто. Представим себе, что у нас есть управляющий параметр, например, амплитуда внешнего периодического в пространстве поля. Если этот параметр увеличивается, то, поскольку в некотором фазовом пространстве незамкнутая намотка на торе может разрушиться, кажется весьма правдоподобным, что при этом (как и в одномерном случае) произойдет переход от квазипериодичности к конечномерному пространственному беспорядку.

Такая двумерная задача не только никем не решалась, но даже и не ставилась. Эту задачу о рождении пространственного беспорядка при увеличении управляющего параметра в ближайшее время, несомненно, удастся решить, хотя она требует введения довольно тонких математических понятий, связанных именно с двумерностью или трехмерностью пространства. Например, необходимо ввести такое понятие, как незамкнутая намотка на торе в некотором матричном пространстве.

Как нам сейчас кажется, эту задачу можно поставить несколько более

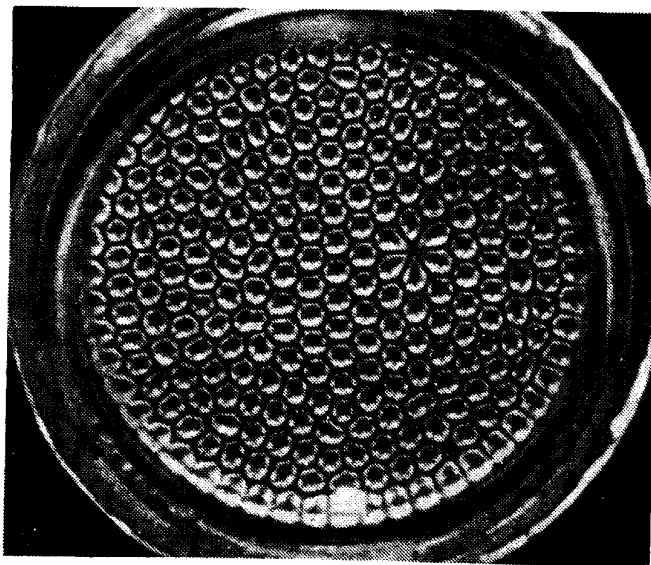


Рис. 3. Дефект в виде "розетки" на фоне шестигранных конвективных ячеек

просто. Как известно, во многих экспериментах, например, с жидкими кристаллами или в конвекции Бенара, наблюдаются весьма интригующие картины неупорядоченного расположения дефектов. Часто сами дефекты могут быть принципиально неоднородными, например, типа "розеточек" (рис. 3), но могут быть и дефекты попроще — волнового типа, как изображенные на рис. 4. Подобные дефекты можно рассматривать в рамках почти одномерной задачи, если по одной из координат взять небольшое число мод (например, рассматривая маг-

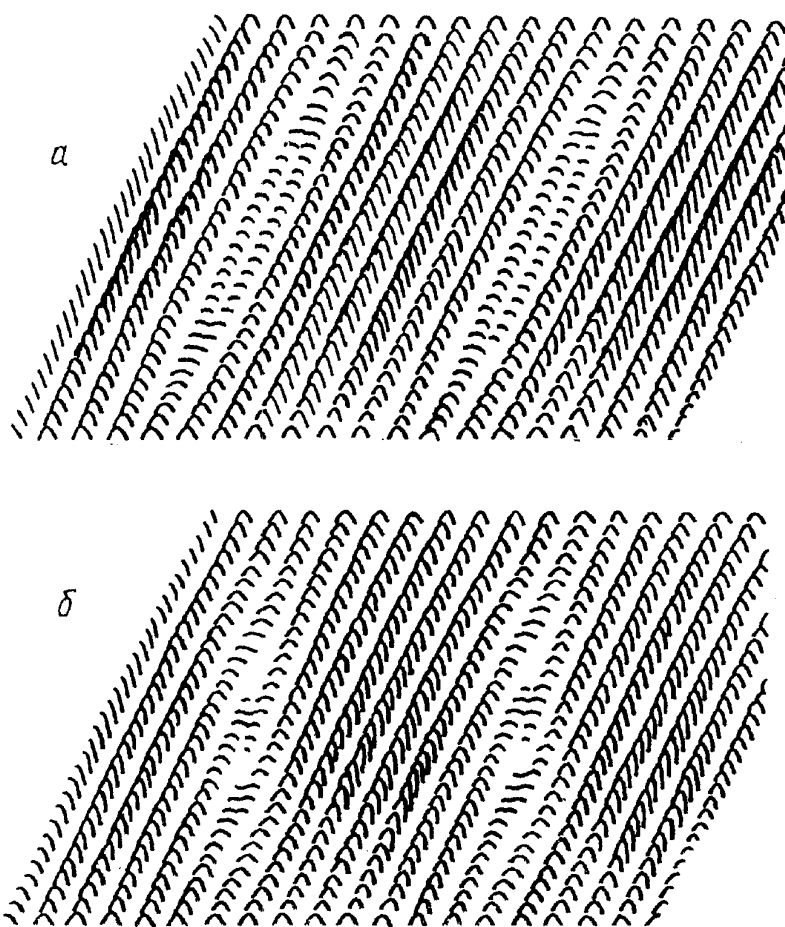


Рис. 4. "Волновые" дефекты [12], формируемые функциями вида (отмечены положительные значения функций):  $a - \cos x + 1,3 \cos y \cdot \cos(1,26x)^{1/2}$ ,  $b - \cos x + \cos y \cdot \cos(1,123x + 1,134y)$ , для  $y \in [-\delta/2, \delta/2]$

нитогидродинамическую конвекцию в узкой "полосе" жидкого кристалла), а вторую координату считать безграничной. Тогда мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по этому безграничному направлению. Так можно сконструировать периодическую дорожку дефектов<sup>(3\*)</sup> из небольшого числа мод. Это сделано Экманом и Прокачча [12]. Но здесь еще нет динамического беспорядка. Если же приложить контролируемое внешнее периодическое поле (в данном случае мы имеем дело с незамкнутой намоткой на торе в обычном — векторном — фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений), то можно получить и пространственный беспорядок подобных дефектов. Получаемая таким образом картина выглядит двумерной и очень похожа на картинку, наблюдаемую в экспериментах с жидкими кристаллами (рис. 5).

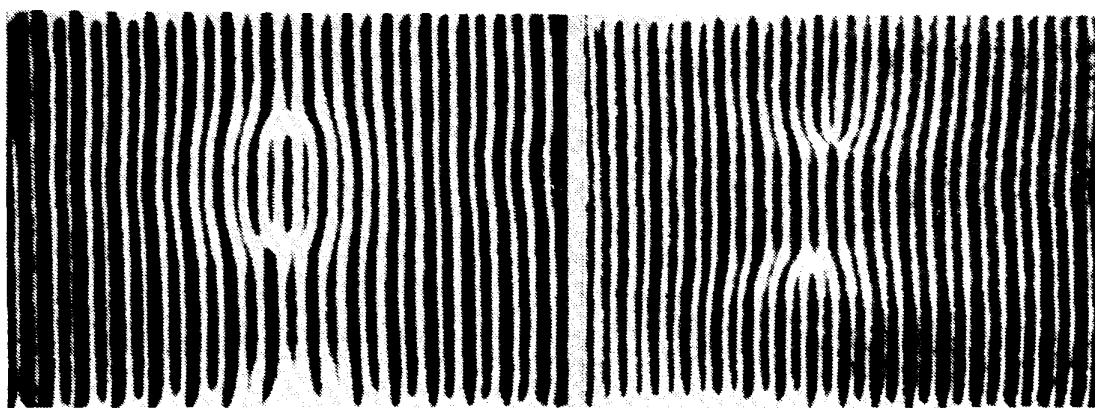


Рис. 5. Одиночные "волновые" дефекты, наблюдаемые при электродинамической конвекции в жидком кристалле [13]

Любопытный вопрос — почему же все-таки в природе при понижении температуры столь часто реализуются простые кристаллические структуры с относительно простой симметрией? Возможный ответ связан с наличием тепловых флуктуаций, существенных в процессе охлаждения и "выбивающих" систему из многочисленных метастабильных состояний с конечной, но узкой областью устойчивости. Если эта гипотеза верна, то при достаточно быстром охлаждении самые разные вещества могут оказываться в нетривиальных — квазикристаллических или "конечноупорядоченных" состояниях.

### 3. Конечномерный беспорядок. Примеры и определения

Когда мы говорим о беспорядке, есть очень много определений: "топологический", "континуальный", "термодинамический" и т.п. Но эти прилагательные мало что объясняют по существу, даже с точки зрения "качества" беспорядка — является ли он "настоящим" или нет.

Здесь, может быть, уместно напомнить историю развития представления о временной случайности. Когда были открыты динамические системы, способные генерировать временные последовательности, как часто подчеркивалось, ничем внешне не отличимые от "настоящей" случайности, то было очень много скептических публикаций типа "Динамический хаос — реальность или фикция?" или "Может ли существовать случайность, продуцируемая простой динамической системой?". Утверждалось, что динамический хаос — ненастоящий. Многие считали, что настоящая случайность — это когда есть только

полностью непредсказуемые флуктуации, т.е. нет простых уравнений, нет "законов поведения". А здесь мы имеем весьма простые правила, и закономерности, так что "настоящей случайности не может быть".

Тем не менее анализ продуцируемых с помощью определенного закона или правила временных рядов, которые называли динамическим хаосом, показывал, что внешне процесс выглядел совершенно случайным: корреляционная функция была спадающей, **временной** спектр Фурье был сплошным, и непонятно было, чем же он отличается от того, что мы привыкли называть истинно случайным, т.е. от того, что дает, например, дробовой шум или пульсации температуры в атмосфере. Но потом появились новые характеристики случайных рядов, и основная среди них та, к которой мы апеллируем, — это размерность (ляпуновская, хаусдорфова или фрактальная) [14].



Рис. 6. Пример рукотворного беспорядка (с полотна художника Mary Bovermeister 1964, The Whitney Museum of American Art, New York)

Стало ясно, что любой случайный сигнал, который продуцируется по заданным правилам, т.е. генерируется динамической системой, имеет конечную размерность. Именно такие сигналы Синай назвал конечномерной случайностью. Те же сигналы, которые порождаются флуктуациями, т.е. "истинно случайны", отличаются очень высокой или даже бесконечной размерностью. В этом смысле размерность белого шума бесконечна.

Сегодня легко ответить на былые сомнения скептиков по поводу природы динамической случайности. Уже в начале 80-х годов появились экспериментальные результаты для гидродинамических течений [15], по обработке электрокардиограмм [16] и электроэнцефалограмм [14] и др., которые показали, что те случайные временные ряды, или реализации, которые наблюдаются в экспериментах, часто имеют конечную размерность и, следовательно, могут быть продуцированы динамической системой.

Для того чтобы лучше понять специфические особенности рассматриваемых нами неупорядоченных систем, сравним две фотографии (см. рис. 6 и 7).

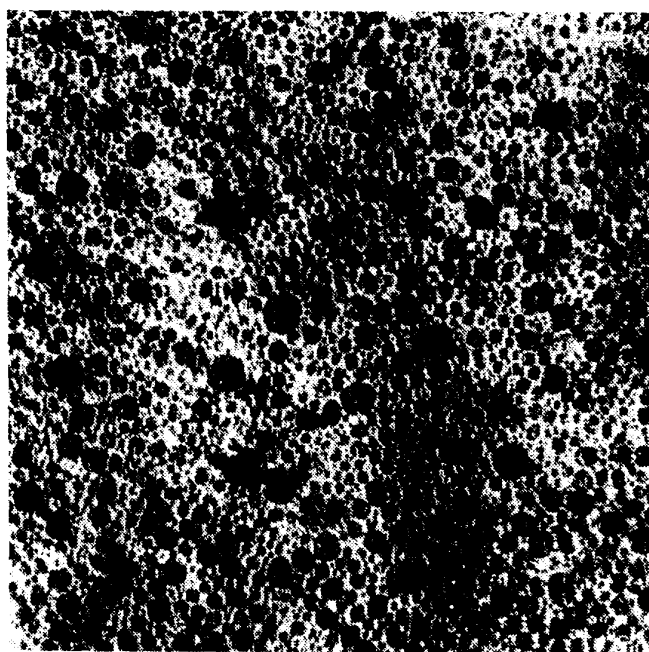


Рис. 7. Расположение пузырьков в мыльной пене

На одной из них мы видим неупорядоченную структуру, которую создал художник-авангардист, на другой — изображена мыльная пена, точнее, то, что получается в ванной, если пользоваться шампунем. Можно, впрочем, привести и другие подобные примеры, в частности, картину неупорядоченных доменов в магнитной пленке [17]. Это огромное количество ячеек разного калибра, которые, на первый взгляд, распределены абсолютно случайно. Чем отличаются беспорядок на одной картинке от беспорядка на другой? Если проводить количественное исследование обычными методами, которые использует статистическая физика для описания случайных полей, то для обоих типов фотографий все классические характеристики могут оказаться одинаковыми. И в том, и в другом случае мы будем иметь сплошной пространственный спектр Фурье, а корреляционная функция будет убывать с расстоянием. И тем не менее, поскольку, в принципе, круги на полотне можно расположить совер-

шенно произвольно, то кажется, что первая картинка должна быть близка к тому, что обычно называется спекл-шумом [18]. Это будет "настоящий" беспорядок — абсолютно беспорядочный.

Совсем другая ситуация реализуется в наблюдаемый нами картинке из пузырьков. Она рождается сама, по определенным законам, и кажется весьма вероятным, что пространственный беспорядок, наблюдаемый здесь, будет качественно иным (то же и с хаотическими магнитными доменами). По-видимому, этот беспорядок будет не совсем беспорядочным. Это будет пример того, что мы ниже определим, наконец, более строго, как конечномерный беспорядок. Для того чтобы это определение было более ясным, мы начнем с **пространственно-временной** аналогии, предполагая для начала, что поле одномерно, т.е. зависит от одной пространственной координаты.

Здесь имеет смысл напомнить некоторые особенности методики восстановления динамической системы, характеризующей данную стохастическую реализацию [14, 19]. Если говорить более точно, то речь идет о восстановлении не истинной динамической системы, благодаря которой эта реализация появилась на свет, а о некоторой модельной динамической системе, которая способна генерировать наблюдаемый сигнал.

Процедура восстановления выглядит следующим образом. Имеющуюся непрерывную реализацию — наблюдаемую  $u(x)$  мы дискретизируем, выбирая ее значения в точках  $x_i$ :  $u_i = u(x_i)$ , а затем образуем из близких точек некоторый кластер

$$U = \{u(x_i), u(x_i + k), u(x_i + 2k), \dots, u(x_i + k(m - 1))\},$$

который определяет компоненты  $m$ -мерного вектора в некотором пространстве. Для удобства мы это пространство будем называть фазовым. Тогда сдвиг кластера вдоль  $x$  (т.е. изменение индекса  $i$ ) соответствует тому, что вектор в этом пространстве рисует некоторое множество точек или траекторию. Поскольку мы предполагаем, что движение установившееся по времени, то у нас никакого избранного направления нет. Мы можем двигаться в сторону как увеличения, так и уменьшения координаты  $x$ . То же самое можно сказать и о движении вдоль траектории в нашем фазовом пространстве.

Сама процедура восстановления траектории, которая есть образ нашей наблюдаемой в  $m$ -мерном пространстве, может быть различной, отличаясь некоторыми деталями. Но следует еще раз подчеркнуть, что мы восстанавливаем не исходную, а модельную систему, которая правильно описывает только одну траекторию, отвечающую нашей наблюдаемой. Это обстоятельство нам будет очень важно, когда мы перейдем к описанию двумерных и трехмерных пространственных наблюдаемых. Обычно об этом забывают.

Если мы, например, сконструировали систему дифференциальных уравнений, которая воспроизводит аттрактор такого же типа и с такими же свойствами, как и наша наблюдаемая, из этого совсем не следует, что эта система правильно описывает переходные процессы. Эти переходные процессы в исходной динамической системе могут быть совершенно другими, более того, они могут иметь совсем другую размерность и даже быть бесконечномерными. Типичный пример здесь — это гидродинамические течения, которые в установившемся режиме имеют малую размерность. В частности, в экспериментах по исследованию турбулентного течения Куэтта—Тэйлора или конвекции [14, 15] сразу за точкой возникновения турбулентности было найдено, что с ростом характерного параметра (числа Тэйлора или числа Рэлея) размерность растет,

оставаясь небольшой,  $\sim 4 - 5$ . Именно такое маломерное движение и описывает модельная динамическая система, которая, в принципе, может быть восстановлена по наблюдаемой. Такая система описывает только то течение воды, которому отвечает движение на некотором инерциальном многообразии. Об этом следует сказать подробнее. В работах [20, 21] показано, что в бесконечномерном (функциональном) фазовом пространстве исходной динамической системы (уравнений типа Навье—Стокса или уравнения Гинзбурга—Ландау) содержится инерциальное многообразие, движение на котором описывается конечномерной динамической системой. Это многообразие может содержать в себе странный аттрактор и другие траектории. Если наблюдаемая траектория принадлежит странному аттрактору, то можно восстановить динамическую систему, в фазовом пространстве которой существует этот аттрактор. Такая система генерирует наблюдаемую, но не дает никакой информации о других траекториях исходной бесконечномерной системы.

Как мы уже говорили, для одномерных случайных пространственных распределений полей работает **пространственно-временная** аналогия. Она несомненно верна с точки зрения формального описания на основе теории динамических систем. Но с физической точки зрения здесь возникают совершенно новые проблемы. Действительно, пусть у нас есть "случайная" функция координаты  $x$ , статистические свойства которой не меняются при замене  $x \rightarrow -x$ . Как показали наши эксперименты, обрабатывая такую наблюдаемую, мы получаем стохастическое множество, размерность которого обычно получается дробной! Как это может быть? Ведь обращение знака координаты  $x$  не меняет свойств нашей наблюдаемой и, следовательно, не должно менять свойств той динамической системы, которая генерирует эту наблюдаемую. Эта динамическая система, должна быть обратима по координате, подобно консервативной системе. Таким образом, размерность инвариантного стохастического множества нашей системы может быть меньше размерности фазового пространства на число интегралов, но в любом случае должна быть целой. В чем же дело?

Мы приходим здесь к весьма интересному вопросу. Допустим, у нас есть много мгновенных снимков пространственного поля, зависящего только от одной координаты, взятых в разные моменты времени, подобно кадрам кинофильма. Возникает естественный вопрос: отличаются ли вообще чем-либо эволюционно зрелые, т.е. установившиеся статические пространственные картинки, от эволюционно незрелых, т.е. от каких-то переходных (по времени) картинок — в буквальном смысле "мгновенных" снимков? Вообще говоря, полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Но для некоторых систем, например, градиентного типа, уже сейчас можно утверждать, что если это пространственное распределение "эволюционно зрелое", т.е. оно отвечает установившемуся при  $t \rightarrow \infty$  аттрактору, то размерность соответствующей статической картинки должна быть целой, потому что соответствующая динамическая система (полученная из исходных уравнений при  $\partial/\partial t = 0$ ) автономна, сохраняет фазовый объем и обратима по пространственной координате. А если картинка — лишь "мгновение" в эволюции и в следующий момент времени будет иной, то размерность картинки может быть и дробной! Действительно, структура нестационарного решения определяется не только взаимодействием полей в различных точках пространства, но и предысторией процесса. Слагаемые с производными по времени в нестационарном уравнении играют как бы ту же роль, что и внешняя сила для обычной неавтономной системы. Размерность же неавтономной системы может быть и дробной.

Вернемся к двумерным картинкам, о которых мы гофрили в начале этого раздела: мыльные пленки или специально организованный беспорядок. Как узнать, является ли та или иная картина "спекл-шумом", т.е. аналогом "настоящего" шума во **временной** реализации, или такая картина есть конечномерный беспорядок?

С помощью неограниченного в пространстве снимка определим динамическую систему, которая, в принципе, может его генерировать. Этот бесконечный в пространстве мгновенный снимок будем называть одной реализацией такой динамической системы. Поскольку здесь пространственных координат не одна, а, как минимум, две, то очевидно, что фазовое пространство, в котором действует эта динамическая система, должно быть каким-то другим. Раньше фазовое пространство было векторным, в том смысле, что каждому положению изображающей точки соответствовала определенная позиция радиуса-вектора и изображающая точка в фазовом пространстве задавалась последовательностью чисел — это были значения наших переменных. Пойдем по тому же пути. Только теперь каждая точка будет соответствовать не вектору, а некоторой матрице. Мы получим матричное пространство — объект математически вполне допустимый, хотя для физика он несколько непривычен и интуиция в обращении с ним пока не развита.

Ниже мы введем понятие фазового пространства для двумерной наблюдаемой  $u(x_i, y_j)$  (для  $d$ -мерной — аналогично). Так же как и для одномерных реализаций, для двумерной наблюдаемой  $u(x, y)$  мы дискретизируем мгновенный снимок, т.е. представляем его в виде решетки с узлами  $(x_i, y_j)$  и рассматриваем значения наблюдаемой в каждом из них:  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ . Каждый узел имеет два индекса, у него есть соседи — слева и справа, сверху и снизу. Мы вводим дискретный конечный кластер  $A_{K,L}^{(m)} = \{(u_{i,j}), i = K, \dots, K + m - 1; j = L, \dots, L + m - 1\}$ , который определяется  $m \times m$  точками. Сдвигая этот кластер (теперь это не ряд чисел, как в одномерном случае, а квадратная матрица) вдоль наблюдаемой, мы получаем траекторию в некотором матричном пространстве, которое также можно назвать фазовым. Действительно, для определения понятия фазового пространства главное — это определить понятие "близости" между состояниями в некотором пространстве, для чего следует ввести расстояние между отображающими разные состояния точками.

С помощью подобного подхода, как и для одномерных систем, мы можем определить корреляционную размерность и все те характеристики, которые раньше использовались для описания стохастических множеств в обычном фазовом пространстве: энтропию, ляпуновские показатели и т.д. Если размерность определяемого таким образом стохастического множества окажется конечной, то исследуемый мгновенный снимок можно назвать конечномерным беспорядком.

— Реализуем теперь эту программу для  $d$ -мерной наблюдаемой на формально математическом языке [22]. Рассмотрим множество непрерывных

(вектор)-функций  $u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  ( $u \in \mathbb{R}^p$ ) с заданными на нем обычными операциями сложения и умножения на скаляр. Введем каким-либо образом расстояние в этом множестве и полученное метрическое пространство  $B$  будем называть фазовым пространством системы. Каждому  $d$ -мерному вектору  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$  поставим в соответствие отображение трансляции  $T^\alpha$ :  $B \rightarrow B$ , определяемое по формуле  $T^\alpha u(x) = u(x + \alpha)$ . Тем самым на  $B$  опре-

делено действие группы  $\mathbf{R}^d$ , или, иначе говоря, мы имеем динамическую систему с  $d$  временами, которую мы будем называть трансляционной динамической системой.

Если исследуемый процесс обладает еще и тем свойством, что по начальному состоянию (начальному распределению поля) однозначно определяются состояния, последующие в любой момент времени, то на  $B$  действует также и полугруппа операторов эволюции  $\{S^t\}_{t \geq 0}$ , т.е. определена и эволюционная динамическая система. Поведение траекторий этих двух динамических систем (трансляционной и эволюционной) в общем фазовом пространстве  $B$  дает полное математическое описание **пространственно-временных** свойств рассматриваемого нами поля. Ввиду предположения о трансляционной инвариантности, характеристики мгновенного снимка  $u(x)$ , очевидно, не должны зависеть от системы координат в  $\mathbf{R}^d$ . Другими словами, эти характеристики должны описывать инвариантное множество точек вдоль траектории трансляционной динамической системы:  $\{T^\alpha u(x)\}_{\alpha \in \mathbf{R}^d} \equiv A_{u(x)}$ .

В соответствии с этим будем называть предельной емкостью (фрактальной размерностью) мгновенного снимка  $u(x)$  число  $C(A_{u(x)})$  (где  $C(M)$  — предельная емкость множества  $M$ ). Аналогично определяются хаусдорфова размерность мгновенного снимка и другие характеристики, не зависящие от меры. Если же на  $A_{u(x)}$  каким-либо образом определена инвариантная (относительно  $T^\alpha$ ) мера  $\mu$ , то характеристики, зависящие от  $\mu$  (например, поточечная или корреляционная размерности), также будем считать характеристиками мгновенного снимка.

Отметим, что если, например, двумерный мгновенный снимок периодичен по  $x_1$  и  $x_2$ , то множество  $A_{u(x)}$  — это просто двумерный тор; если этот снимок имеет квазипериодически повторяющуюся структуру, то  $A_{u(x)}$  — также тор, но более высокой размерности; для хаотически же распределенных по плоскости паттернов  $A_{u(x)}$  будет фрактальным множеством. Эволюции во времени мгновенных снимков (наблюдаемой) отвечает движение в пространстве  $B$  множества  $A_u$ :  $A_u \xrightarrow{S^t} A_{S^t u(x)}$ .

Имея в виду аналогию с обычными динамическими системами и для упрощения дальнейшего описания ниже будем считать пространство и время дискретными, т.е. вместо  $\mathbf{R}^d$  будем использовать  $\mathbf{Z}^d$ , а вместо  $\mathbf{R}_+$  —  $\mathbf{Z}_+$ . Теперь мы уже можем дать строгое определение конечномерного беспорядка.

Мгновенный снимок  $u = \{u(j), j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbf{Z}^d\}$  будем называть конечно-порожденным, если: 1) существует динамическая система с  $d$ -мерным временем и конечномерным фазовым пространством  $M$ ; 2) существует липшиц-непрерывное взаимно однозначное отображение  $h: A_u \rightarrow M$  такое, что обратное отображение  $h^{-1}$  также липшиц-непрерывно.

Снабдим пространство наблюдаемых  $B = \{u\}$  следующей нормой:

$$\|u\| = \sum_j |u(j)| / 2^{|j|}, \quad u = \{u(j), j \in \mathbf{Z}^d, u(j) \in \mathbf{R}^p\}, \quad (1)$$

где  $|j| = |j_1| + \dots + |j_d|$ ,  $|u(j)| = (|u_1(j)|^2 + \dots + |u_p(j)|^2)^{1/2}$ .

Легко убедиться, что  $B$  — полное (т.е. банахово) линейное пространство. Пусть для фиксированного мгновенного снимка и фрактальная размерность множества  $A_u$  конечна:  $C(A_u) < \infty$ , и множество  $A_u$  компактно. Пусть  $m > 0$  — целое число, такое, что  $m^d \geq 2C(A_u) + 1$ . Обозначим через  $C_m^d$  целочисленный  $d$ -мерный куб с длиной стороны  $m$ , т.е.  $C_m^d = \{j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq j_i \leq m\}$ . Пусть  $\Pi_m: B \rightarrow M_m$  — естественная проекция. Согласно теореме Манье [23] среди всех проекций  $B \rightarrow M_m$  типичными являются взаимно однозначные (и взаимно непрерывные) на множестве  $A_u$ .

Предположим, что естественная проекция  $\Pi_m$  типична. Тогда на подмножестве  $E = \Pi_m(A_u)$  множества  $M$  определена динамическая система с  $d$ -мерным временем, порождаемая отображением  $\tilde{T}^\alpha = \Pi_m T^\alpha \Pi_m^{-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . При этом если  $\Pi_m(A_u)$  является липшиц-непрерывным отображением, то мгновенный снимок и будет конечно-порожденным.

Теперь обобщая алгоритм, приведенный в работе [24], мы можем предложить алгоритм вычисления поточечной и корреляционной размерностей мгновенных снимков. Пусть имеется двумерный мгновенный снимок и, заданный в виде массива  $\{(u_{i,j}), i, j \in \mathbb{Z}_+\}$ . На практике размеры массива, естественно, ограничены:  $i \leq N_1, j \leq N_2$ , но числа  $N_1$  и  $N_2$  предполагаются достаточно большими. Для каждого целого  $m \geq 1$  мы можем построить матрицы порядка  $(m \times m)$  на основе массива  $\{u_{i,j}\}$ :  $A_{K,K}^{(m)} = \{(u_{k,j}), k = K, \dots, K + m - 1; l = L, \dots, L + m - 1\}$ . Определим корреляционный интеграл как функцию:

$$C^{(m)}(\epsilon) = \frac{R^{(m)}(\epsilon)}{[(N_1 - m)(N_2 - m)]^2}, \quad (2)$$

$$R^{(m)}(\epsilon) = \#\{((K, L), (K', L')): \text{dist}(A_{K,L}^{(m)}, A_{K',L'}^{(m)}) \leq \epsilon\}, \quad (3)$$

где  $\#(E)$  — число элементов множества  $E$ .

Тогда можно показать, что отношение  $\log C^{(m)}(\epsilon)/\log \epsilon$  при достаточно малых  $\epsilon$  будет приблизительно равно корреляционной размерности  $D_s$  двумерного мгновенного снимка в  $m$ -мерном пространстве вложения.

Следуя работе [25], можно оценить минимальный размер массива  $(u_{i,j})_{N_1 \times N_2}$ , который необходим, чтобы правильно вычислить размерность в интервале  $[\epsilon_1, \epsilon_2]$  величин параметра  $\epsilon$ . Поскольку

$$D_s \approx \frac{\log_2 C^{(m)}(\epsilon'') - \log_2 C^{(m)}(\epsilon')}{\log_2 \epsilon'' - \log_2 \epsilon'}, \quad (4)$$

где

$$C^{(m)}(\epsilon') \geq \frac{1}{N_1^2 N_2^2} C^{(m)}(\epsilon'') \leq 1,$$

то, предполагая  $\varepsilon'' = 2^k \varepsilon'$ , мы получим оценку

$$D_s \leq \frac{2}{K} \log_2(N_1 N_2). \quad (5)$$

Заметим, что для  $d$ -мерного мгновенного снимка такая оценка имеет вид:

$$D_s \leq \frac{2}{K} \sum_{l=1}^d \log_2 N_l. \quad (6)$$

Таким образом, определяя корреляционную размерность многомерного мгновенного снимка, надо иметь в виду, что число точек дискретизации вдоль каждой **временной** координаты может быть намного меньше, чем в случае одномерного времени.

Поскольку построение корреляционных интегралов требует проведения очень большого числа вычислений расстояний между матрицами, то для ускорения вычислений удобно ввести расстояние в виде:

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_{K,L}^{(m)}, A_{K',L'}^{(m)}) &= \max\{|u_{k,l}| - |u_{k',l'}|\}, k = K, \dots, K + m - 1, \\ k' &= K', \dots, K' + m - 1, \\ l &= L, \dots, L + m - 1; l' = L', \dots, L' + m - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Такой способ определения расстояний позволяет исключить операции типа умножения, заменяя их операциями сравнения содержимого соответствующих ячеек ЭВМ.

Количество необходимых вычислений значительно снижается, если все матрицы  $A_{K,L}^{(m)}$  сравниваются с подмножеством опорных матриц:

$$\{A_{K_p, L_j}^{(m)}, i \leq i_{\text{ref}}, j \leq j_{\text{ref}}\}, \quad (8)$$

где  $i_{\text{ref}}, j_{\text{ref}}$  — сравнительно небольшие числа. В этом случае точность вычисления корреляционной размерности двумерного мгновенного снимка определяется оценкой, подобной (5):

$$D_s \leq \frac{1}{K} \log_2(N_1 N_2 i_{\text{ref}} j_{\text{ref}}). \quad (9)$$

Проведенное в работе [22] тестирование предлагаемого алгоритма показало, что поведение корреляционных интегралов практически не меняется при повороте мгновенного снимка на произвольный угол, что говорит об устойчивости алгоритма. На рис. 8 изображена зависимость величины  $\log_2 C^{(m)}$  от  $\log_2 r$  (где  $r = 2^{10} \varepsilon / \varepsilon_{\text{max}}$ ) для двумерного мгновенного снимка  $U(x, y) = \sin x \cdot \sin(\sqrt{3}/2 y)$ , представляющего собой двумерный тор в соответствующем фазовом пространстве. Корреляционная размерность оценивается с хорошей точностью ( $D_s \in [1,96, 2,03]$ ) уже при  $N_1, N_2 = 256$ ,  $i_{\text{ref}}, j_{\text{ref}} = 4$ .

Итак, мы имеем следующее определение: конечномерный беспорядок — это беспорядок, которому отвечает траектория некоторой динамической системы. В одномерном случае это — обычная динамическая система, например, система дифференциальных уравнений, а в двумерном случае мы имеем динамическую систему с двумя временами. Хотя последний тип систем в физике

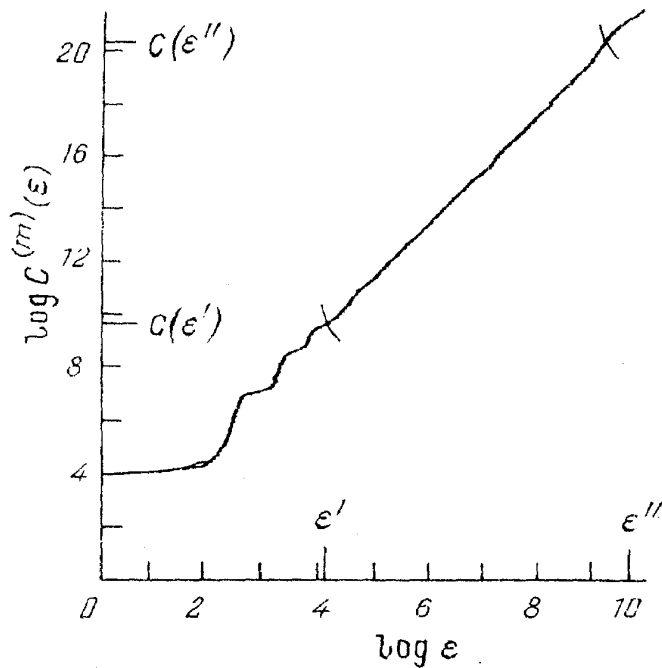


Рис. 8. Зависимость  $\log C(\varepsilon)$  относительно  $\log \varepsilon$  для двумерного поля  $U(x, y) = \sin x \cdot \sin(\sqrt{3}/2y)$

блюдаемой, вычисленную по обобщенному методу Такенса, с фрактальной размерностью двумерного рисунка, который создает, например, хаотическая траектория частицы в переменном поле (см. [28]). В первом случае мы имеем в виду размерность стохастического множества в фазовом пространстве трансляционной динамической системы, а во втором — размерность самого мгновенного снимка, "нарисованного", например, одной линией, достаточно плотно заполняющей некоторые области на плоскости. В общем случае эти две характеристики никак не связаны друг с другом. Действительно, фрактальная размерность, например, "квазикристаллического паркета" — это размерность сетки линий (границ ячеек), т.е. равна единице. В то же время в фазовом пространстве трансляционной динамической системы такому рисунку соответствует незамкнутая намотка на  $n$ -мерном торе, и размерность этого множества равна  $n$ . Размерность же фрактальной картинке на плоскости в любом случае не может быть больше двух.

Мы хотим еще раз также подчеркнуть, что если наше неупорядоченное поле описывается уравнениями в частных производных, то динамические системы с несколькими временами не могут описать весь класс решений исходных уравнений в частных производных, а соответствуют только некоторому частному классу решений.

#### 4. Модельные уравнения

"Как следует обращаться с уравнениями математической физики? Должны ли мы просто выводить из них следствия и рассматривать уравнения, как неощущаемую реальность? Нет, не так! Главным образом уравнения нас должны учить тому, что можно и что следует в них изменить".

*Анри Пуанкаре*

То, что мы наблюдаем в теории динамического хаоса и складывающейся сейчас теории конечномерного беспорядка, очень похоже на хорошо известную

практически не обсуждался, надо отметить, что широким классом таких систем с  $d$ -временами являются, например, абелевы группы Ли, которые в физике использовались очень широко, и на эту тему есть хорошие книги [26, 27]. Обычно группы Ли используют для того, чтобы описывать разного рода симметрии и получать решения, которые следуют из имеющегося с помощью различных групповых трансформаций. Здесь же мы преследуем в некотором смысле обратную цель, т.е. пытаемся найти неупорядоченные решения.

Во избежание путаницы в определениях сделаем здесь еще одно замечание. Не следует смешивать фрактальную размерность пространственной на-

ситуацию в теории критических явлений и других разработанных областях нелинейной физики. А именно: очень многие феномены исследуются с помощью уравнений или моделей, которые внешне не имеют отношения к описываемому эксперименту. Например, в теории критических явлений основной объект, которым оперирует теория, — это модельный гамильтониан. Формально он может быть не связан с какой-либо конкретной физической ситуацией. Но такая модель обладает определенными свойствами универсальности, в том смысле, что описываемые ею эффекты типичны для широкого класса критических явлений. Поскольку подобные модельные уравнения доступнее для исследования, то, имея в виду свойства универсальности, разумно для построения качественной теории использовать именно их.

Здесь следует пояснить слова "качественная теория". Когда речь идет о таких сложных объектах, как нелинейные поля, да еще и меняющиеся во времени, нахождение точных решений — это, в сущности, не успех и даже не удача, а просто — случайность. И не следует надеяться, что мы будем сталкиваться с ней достаточно часто. Поэтому для сколько-нибудь целостного понимания явлений в подобной ситуации необходима именно качественная теория. Термин "качественная" подразумевает здесь не отсутствие строгости, а тот же смысл, который вкладывается в него, например, в качественной теории дифференциальных уравнений.

Такая качественная теория предполагает сочетание следующих компонент. Во-первых, это — выбор или конструирование некоторых базовых нелинейных моделей, которые имеют отношение к явлениям самой различной физической или какой-либо другой природы, и, кроме того, — постановка ключевых экспериментов с целью экспериментального доказательства априорных гипотез о том, что эти модели являются универсальными. Другого способа показать, что эти модели хороши, по-видимому, просто нет. Ниже мы пойдем именно по этому пути и проиллюстрируем его на примере известной модели Свифта—Хоэнберга [30].

Вторая компонента, которая необходима для построения качественной теории, — это развитие некоторых приближенных методов, и прежде всего асимптотических, основанных на использовании разного рода малых параметров. Здесь стоит подчеркнуть, что малый параметр может входить не прямо в исходные уравнения, а может определяться свойствами решения. Например, он может быть связан с достаточно быстрым спадением полей на периферии каких-либо структур, так что взаимодействие разных структур, определяющееся величиной их потенциала в поле максимума других структур, можно считать малым параметром.

И, наконец, третья компонента, без которой зачастую вообще невозможно разобраться в достаточно трудной задаче исследования конечномерного беспорядка, — это, конечно, компьютерные эксперименты. Но это должно быть не просто нахождение частных решений, а именно исследование феномена в целом. Мы здесь не зря выделяем слово "феномен", а не "система" и не "модель". Нас интересует не сама модель, а те эффекты, для изучения которых она удобна. Мы исследуем, например, эффект стохастического рассеяния частиц, или структуру поля солитонов, или формирование конечномерного беспорядка в процессе временной эволюции. Какую мы для этого выбираем модель — точно соответствующую какой-либо конкретной физической системе или чуть отличающуюся от нее? Для исследования характерных черт рассматриваемого явления часто это не так уж и важно, если мы убеждены в типичности этого явления. Более того, по-видимому, при огромном разнообразии моделей число качественно различных феноменов совсем не велико.

Именно это нам позволяет иногда пренебречь строгими уравнениями и пользоваться какими-то "усеченными" моделями. Но зато если с их помощью мы, может быть, сможем продвинуться достаточно далеко в понимании качественного смысла происходящих в рамках этой модели процессов, в дальнейшем мы сможем также достроить эту модель и добиться более точного количественного описания. По существу, здесь проявляется отличие физического подхода от формально-математического. Качественный физический подход позволяет сделать определенные выводы даже для тех проблем, достаточно строгое решение которых пока невозможно. Именно такие проблемы чаще всего и возникают перед физиками.

Добавим, что стремление к построению качественной теории характерно именно для фундаментальных разделов физики. В частности, Р. Фейнман [29] (может быть, несколько высокопарно) подчеркивал: "Грядущая великая эра пробуждения человеческого разума принесет с собой метод понимания качественного содержания уравнений. Сегодня мы еще не способны на это. Сегодня мы не можем увидеть в уравнениях течения воды такие вещи, как спиральное строение турбулентности... Мы не можем сказать, требуется ли что-нибудь сверх уравнений".

Как пример, иллюстрирующий возможность построения качественной теории пространственного беспорядка (статического при  $t \rightarrow \infty$ ), мы приведем здесь обобщенное уравнение Свифта—Хоэнберга (мы приведем его пока в одном варианте)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u + \beta u^2 - u^3 + \left( k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u, \quad (10)$$

описывающее при  $\varepsilon > 0$  обычную суперкритическую, а при  $\varepsilon < 0$  — субкритическую бифуркацию. Параметр  $\beta$  определяет порог неустойчивости при  $\varepsilon < 0$ ; нарастают лишь возмущения с конечной амплитудой

$$u \geq u_0 = \frac{\beta}{2} + \left( \frac{\beta^2}{4} - (\varepsilon - k_0^4) \right)^{1/2},$$

где  $1/k_0$  — характерный пространственный масштаб поля. Это уравнение столь же естественно и универсально, как, например, знаменитое уравнение Ван-дер-Поля в теории автоколебаний. Оно популярно по следующим причинам.

Прежде всего при некоторых приближениях его можно получить вблизи порога линейной неустойчивости в задаче о конвекции Рэлея—Бенара из уравнений Обербека—Буссинеска. Вывод этого уравнения можно найти в статьях [31, 31], а также в обзоре [32]. Правда, если быть абсолютно аккуратным и ничем не пренебрегать, при выводе появляются некоторые дополнительные слагаемые, в частности, квадраты градиентов или производные от них и т.д., которые мы опустили. Математического оправдания здесь, конечно, нет. Но само уравнение Свифта—Хоэнберга описывает столь интересные и тонкие детали реальных экспериментов, что желание пользоваться им для качественного описания явлений в достаточно широкой области параметров представляется совершенно естественным.

Другое, не менее важное обстоятельство — уравнение Свифта—Хоэнберга обладает целым рядом замечательных свойств и очень удобно для анализа. Для нас сейчас важно, что это — градиентное уравнение с функционалом свободной энергии (функционалом Ляпунова):

$$F = \int_{\Omega} \left[ -\frac{\varepsilon}{2} u^2 - \frac{\beta}{3} u^3 + \frac{u^4}{4} + \frac{1}{2} \left( \left( K^0{}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \right)^2 \right] dx. \quad (11)$$

Оно может быть представлено в градиентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta u}. \quad (12)$$

Поскольку функционал  $F$  может лишь убывать вдоль траектории:

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0, \quad (13)$$

то в результате эволюции (при  $t \rightarrow \infty$ ) градиентная система может демонстрировать только два типа поведения. Если функционал свободной энергии не имеет минимумов, то в достаточно протяженной системе будет наблюдаться распространение фронтов, как, например, в уравнениях, описывающих реакции горения. В этом случае функционал свободной энергии будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока фронт не подойдет к границе среды, если она ограничена. Другая возможность реализуется, когда функционал свободной энергии имеет минимумы. Таких минимумов может быть множество. Каждый минимум соответствует состоянию равновесия по времени (мультистабильность). Итак, для градиентных систем предельное поведение — это всегда либо статический аттрактор, либо распространяющиеся фронты. Нас будет интересовать ситуация, когда функционал свободной энергии имеет минимумы. Пространственные распределения полей, отвечающие разным минимумам, могут качественно отличаться: среди них могут быть периодические, квазипериодические распределения и, как мы покажем в следующем разделе, среди них может быть также множество состояний типа устойчивого конечномерного беспорядка.

Чтобы проиллюстрировать возможности уравнения Свифта—Хоэнберга в описании реальной ситуации, например, в экспериментах с конвекцией Рэлея—Бенара, мы приведем только один пример. Если исследовать уравнение Свифта—Хоэнберга при разных начальных условиях на компьютере, то в двумерной геометрии при  $\varepsilon \geq 0$  и  $\beta > \beta_{cr}$  получаются шестигранные структуры, как показано на рис. 9 [33]. Здесь обнаружено следующее интересное явление. Если взять в качестве начального условия одну шестигранную ячейку, то она очень быстро "обрастает" соседями и затем постепенно достраивается вся "кристаллическая решетка". Замечательно, что точно такой же рост структуры кристаллической шестигранной решетки наблюдался в экспериментах

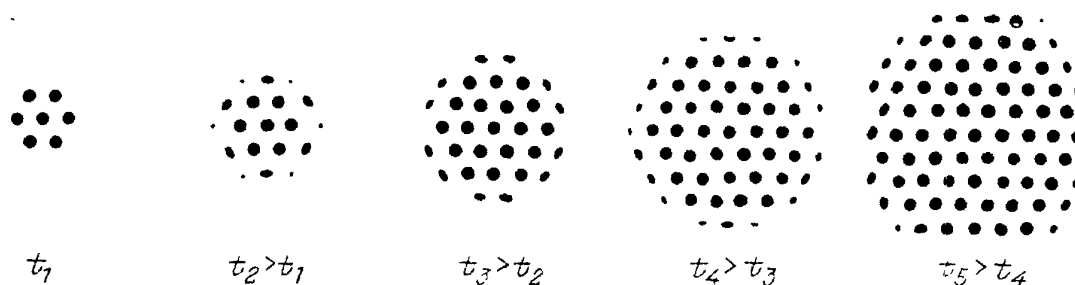


Рис. 9. Рост шестигранной кристаллической структуры, описываемый двумерным уравнением Свифта—Хоэнберга [33] ( $\varepsilon \geq 0$ )

[34] в реальной конвекции. Картинки, полученные на дисплее компьютера, и такие же картинки, наблюдаемые в лабораторном эксперименте (рис. 10, *а, б*), совпадают полностью! Более того, такое же совпадение возникает, если среда близка к порогу возникновения конвекции, но находится ниже этого порога (это соответствует случаю субкритической бифуркации). Для того чтобы перейти порог возбуждения, нужно конечное начальное возмущение. Как показывает компьютерный эксперимент, это возмущение вырастает и трансформируется в некоторую универсальную структуру и существует как локализованное состояние. Это тоже наблюдалось в упомянутых экспериментах Олсера [34] (рис. 10, *г*).

Нам кажется, что этих бегло изложенных примеров достаточно, чтобы убедить читателя, что уравнение Свифта—Хозэнберга не просто удобная и популярная модель, но действительно описывает реальные физические процессы, по крайней мере для конвекции Рэлея—Бенара вблизи порога линейной неустойчивости.

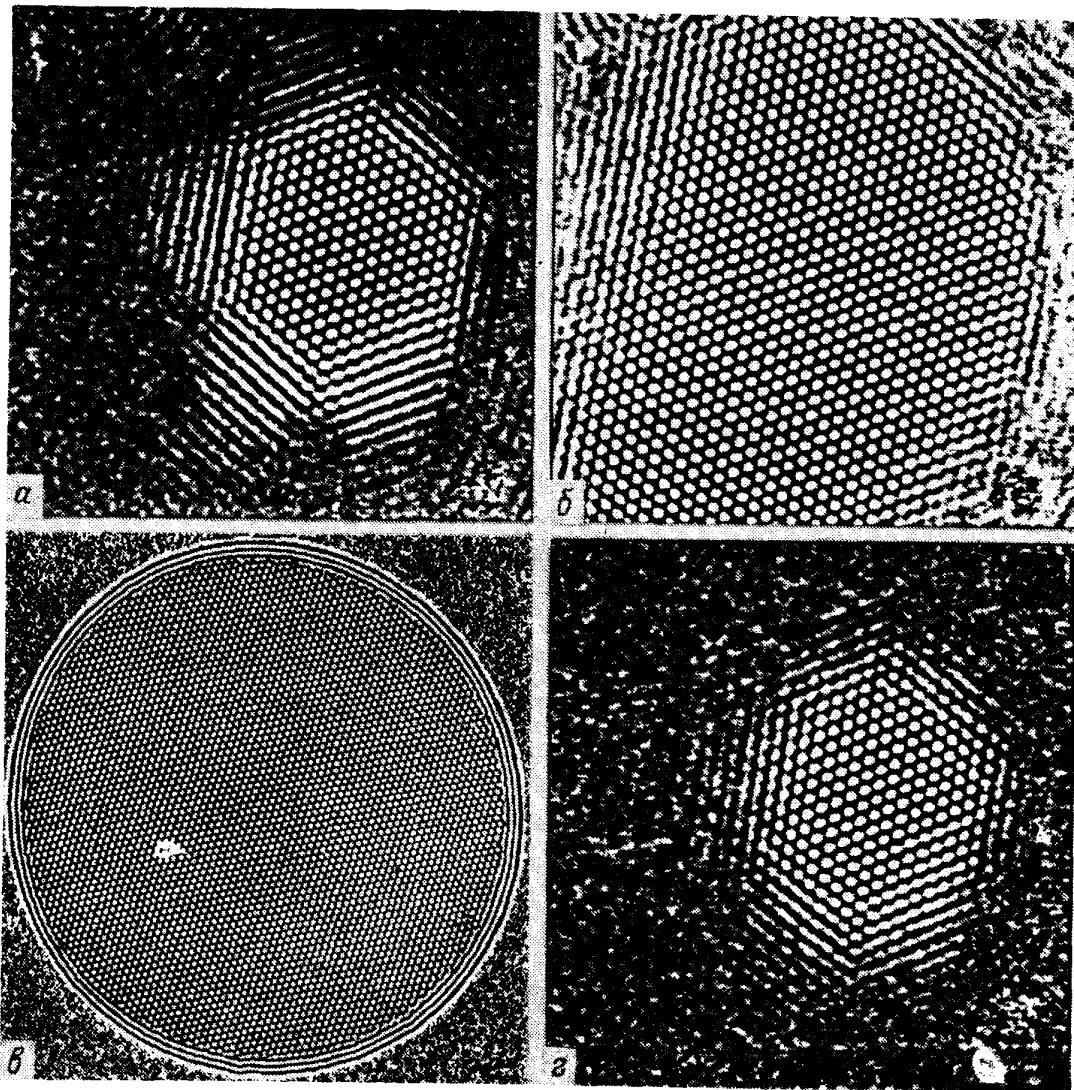


Рис. 10. Термоконвекция в тонком слое газообразного  $\text{CO}_2$  [34]. *а, б* — Рост шестигранной кристаллической решетки при  $\varepsilon \geq 0$  (рисунок *б* соответствует более позднему времени). *г* — Полностью регулярная решетка. *д* — Устойчивое локализованное состояние при  $\varepsilon \leq 0$  ( $\varepsilon = -1,92 \cdot 10^{-3}$ )

Мы будем использовать, конечно, не только уравнение Свифта—Хоэнберга, которое мы обсудили здесь просто для иллюстрации эффективности модельного подхода. Столь же важным, а в действительности, возможно, и более универсальным (так как оно описывает нестационарные процессы при  $t \rightarrow \infty$ ), является комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау:

$$\partial a / \partial t = Ra - (1 + i\beta)a|a|^2 + (1 + i\alpha)\Delta a, \quad (14)$$

а также различные его обобщения (см., например, [32]). Ему уделяется очень много внимания в литературе, возможно, потому, что это уравнение может быть получено с помощью регулярной процедуры как асимптотическое приближение исходных уравнений в самых разных областях физики, да и не только физики.

В отличие от уравнения Свифта—Хоэнберга, которое описывает само поле, уравнение CGLE относится к разряду так называемых амплитудных уравнений. В частности, из того же уравнения Свифта—Хоэнберга с помощью подстановки  $u = a \exp(i\mathbf{kr})$  можно получить уравнение Ньюэлла—Уайтхеда—Сегеля [35]:

$$\partial a / \partial t = a + [(\partial / \partial x - (i/2k_0)\partial^2 / \partial y^2)^2 a - a|a|^2], \quad (15)$$

которое является некоторым обобщением уравнения Гинзбурга—Ландау с действительными коэффициентами. Уравнение Гинзбурга—Ландау является градиентным в том случае, если у него действительные коэффициенты:  $\alpha = \beta = 0$ , и является вполне интегрируемой системой в обратном предельном случае  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ , когда оно переходит в известное нелинейное уравнение Шрёдингера.

## 5. Эволюционность одномерного беспорядка

Когда мы говорим "эволюционность", то сразу задумываемся о том, что происходит с объектом нашего интереса во времени. Типичный пример — разрывы в газодинамике. Разрывов может существовать множество, но не все они эволюционны, в том смысле, что не все разрывы возникают в результате трансформации простой волны. Подобного же типа вопрос возникает и по отношению к пространственному беспорядку. У нас есть "хорошие", т.е. достаточно простые регулярные начальные распределения поля. Возможно ли, чтобы из регулярных начальных условий типа, например, периодических по двум направлениям, возник беспорядок? Вопрос этот очень трудный и непривычный. Обычно обсуждается вопрос о рождении порядка из беспорядка. Он кажется совершенно независимым от поставленного выше. В действительности, эти два вопроса тесно связаны.

Пусть мы имеем совершенно случайное начальное распределение — бесконечномерный беспорядок. Что будет с ним? Неужели этот бесконечномерный беспорядок тоже превратится в конечномерный? Предельный случай этого вопроса всегда интересовал исследователей: как из начального беспорядка возникает хорошо организованный порядок: кристаллический порядок, структуры и т.п. Это — проблема самоорганизации. Здесь же мы ведем речь о гораздо более сложных — стохастических объектах, самоорганизующихся из совершенно случайных начальных условий. Возникает ли беспорядок, но не совсем беспорядочный, т.е. имеющий динамическую природу? Попытаемся (в меру сил) ответить на эти вопросы.

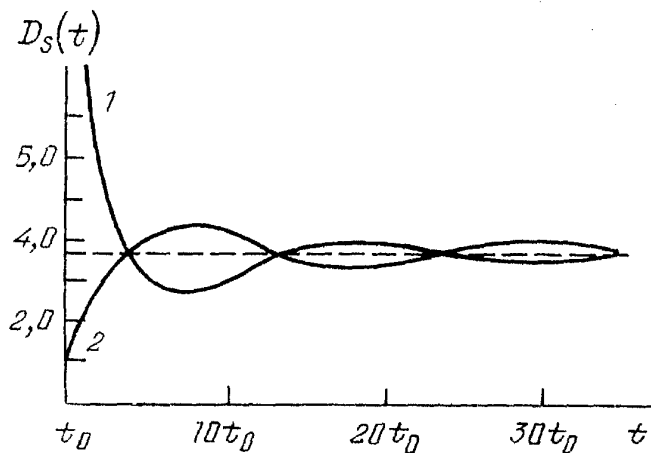


Рис. 11. Зависимость корреляционной размерности  $D_s$  пространственной наблюдаемой от времени для CGLE при хаотических (1) и периодических (2) начальных условиях [36]

Интересный результат получен в компьютерном эксперименте с комплексным уравнением Гинзбурга—Ландау в очень длинной одномерной системе [36]. С помощью генератора случайных чисел задавался начальный беспорядок, и затем измерялась пространственная размерность  $D_s$  как функция времени. Эта величина вначале быстро убывала, а затем выходила на некоторую константу (рис. 11). Если же начальные условия задавались близкими к синусоиде, что соответствует размерности  $D_s \approx 1$ , то величина размерности после переходного процесса выходит на ту же самую кон-

станту! При самых различных начальных условиях здесь устанавливается режим пространственно-временного хаоса, мгновенные снимки которого — это конечномерный беспорядок с вполне определенной величиной размерности  $D_s$ .

Результат этот, в сущности, удивительный. Конечно, когда возникает устойчивая периодическая структура — "кристалл", то мы к этому привыкли и ничего удивительного здесь не видим. Но теперь в безграничном пространстве, где мы вначале создали полный беспорядок, если даже что-то и устанавливается, то почему это "что-то" должно быть конечномерным? Ведь число степеней свободы в безграничной системе бесконечно, и отдельные удаленные области не должны, казалось бы, влиять друг на друга. На первый взгляд более естественным кажется, что беспорядок будет "бесконечномерным" и его свойства определяются просто величиной температуры, как в термодинамике, причем должна полностью отсутствовать какая-либо взаимосвязь фрагментов, находящихся на больших расстояниях. И тем не менее у нас есть поразительный факт: этот беспорядок, устанавливающийся в безграничной системе, можно описать конечномерной динамической системой, например, конечным числом дифференциальных уравнений.

Вернемся, однако, к конвекции. Возьмем достаточно протяженную систему и рассмотрим ситуацию, когда надкритичность немного превышает порог образования чисто периодической ("кристаллической") конвективной структуры. Хаотизируем ее вначале, т.е. создадим совершенно произвольные начальные условия, например, обычным механическим перемешиванием. В результате возникает картинка, подобная изображенной на рис. 12, т.е. полный беспорядок. Что будет с таким беспорядком в процессе эволюции системы? Ответ совершенно неочевиден. В простейшей ситуации может установиться регулярная шестигранная решетка, как в экспериментах Олерса (рис. 10, в). Но если надкритичность достаточно велика, то ясно, что такая решетка будет неустойчива и будут наблюдаться более сложные нестационарные режимы, в том числе турбулентная конвекция. При этом также реализуется беспорядок.

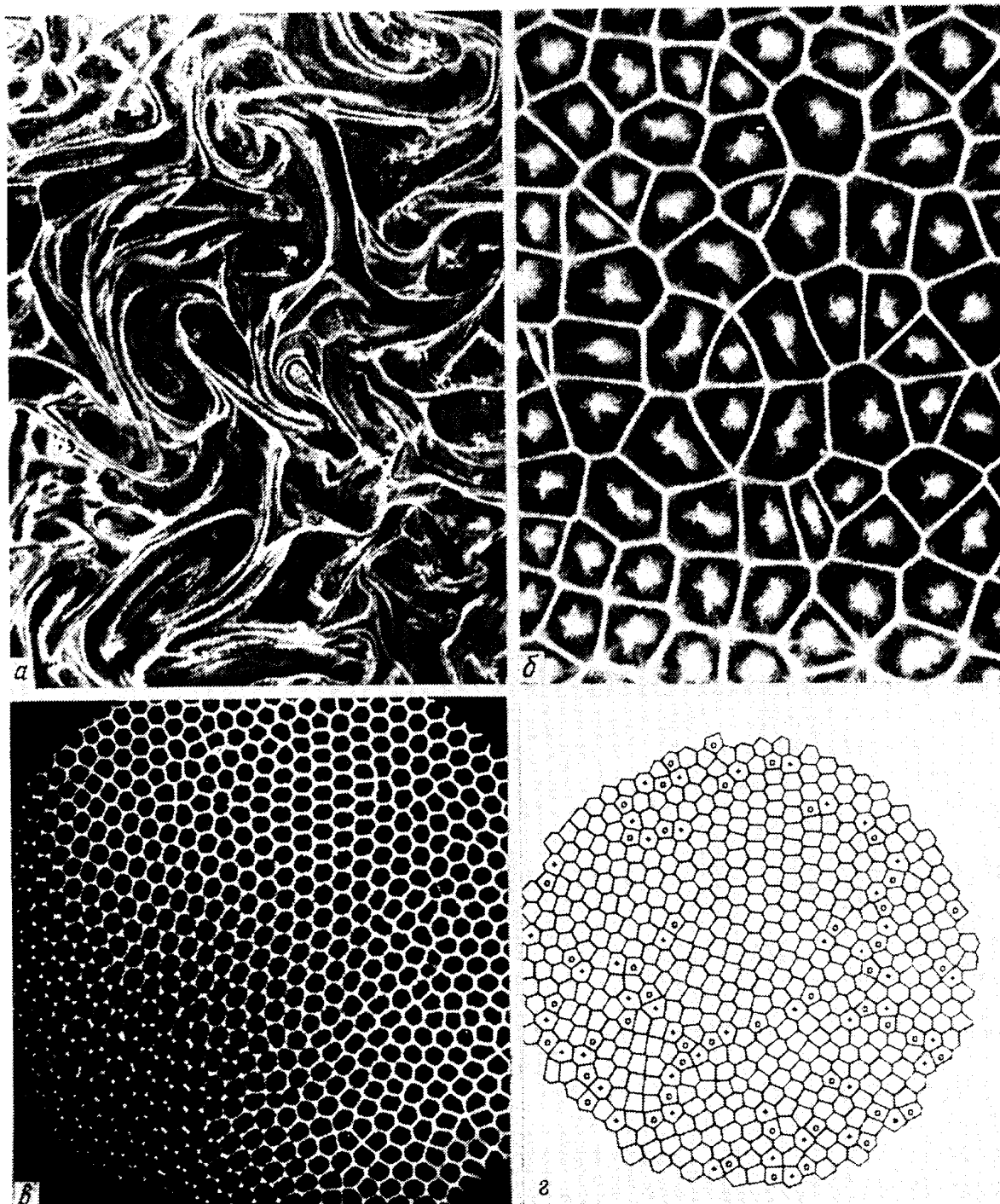


Рис. 12. Перемешанное начальное состояние жидкости в конвективном слое (а), "полуупорядоченная" решетка, наблюдаемая в процессе установления кристаллической конвективной структуры (б), "доменный" беспорядок в конвекции Марангони (в) и его реконструкция [37] (г)

Но пока совершенно неясно, какой это будет беспорядок — конечномерный или нет.

Рассмотрим более простой вопрос. Предположим, что у нас надкритичность невелика и с ростом времени мы можем наблюдать неупорядоченную картину, подобную той, которая изображена на рис. 12, в, г [37]. Здесь мы видим "кристаллические" домены, разделенные границами — "трещинами". Нет сомнения, что этот беспорядок, в который трансформировалась начальная дезорганизованная картина, является конечномерным. Представленные компьютерные и лабораторные эксперименты наводят на мысль, что конечномерный беспорядок в какой-то степени является более изощренным порядком,

и он, так же как и порядок, может возникнуть при  $t \rightarrow \infty$  из начального хаоса. Здесь мы имеем пример самоорганизации стохастических структур.

Другой предельный случай, когда мы берем регулярные начальные условия. Конечно, если они абсолютно регулярны и в системе нет никаких возмущений, то ничего нового и не возникнет. Но это — не физическая постановка задачи. В реальности всегда надо рассматривать не точку в фазовом пространстве, а некоторый малый объем. Это означает, что мы должны рассматривать ансамбль близких начальных условий, например, типа  $\sin kx + \mu\psi(x)$ , где  $\mu \ll 1$ . Если провести такой эксперимент, в частности, с моделью (10), то обнаруживается замечательный результат. Установившаяся в результате эволюции таких начальных условий картина будет представлять собой конечномерный беспорядок [38].

Обсудим в связи с этим обнаруженный в [38] и, по-видимому, весьма типичный механизм рождения пространственного беспорядка через возникновение локализованных статических состояний поля. Этот механизм реализуется не только в модели Свифта—Хоэнберга и заключается в том, что близкое к гармоническому начальное распределение поля со временем превращается в цепочку "частиц" — солитонов, которые из-за неустойчивости "разъезжаются" на случайное расстояние друг от друга, образуя при  $t \rightarrow \infty$  статическую неупорядоченную последовательность.

Факт существования конечномерного беспорядка в рамках уравнения Свифта—Хоэнберга почти очевиден. Действительно, поскольку это — градиентная система, то в ее фазовом пространстве существуют только статические аттракторы. Число их, в принципе, может быть сколь угодно велико. В этом легко убедиться. Все установившиеся при  $t \rightarrow \infty$  статические решения удовлетворяют уравнению в обыкновенных производных четвертого порядка по координате  $x$ , которое можно получить из (10):

$$u_{xxxx} + 2k_0^2 u_{xx} + f(u) = 0, \quad (16)$$

где  $f(u) = (k_0^4 + \varepsilon)u - \beta u^2 + u^3$ .

В фазовом пространстве этой динамической системы в широкой области параметров существует гомоклиническая структура (см., например, [39]), а также периодические и квазипериодические траектории. Сами по себе гомоклинические траектории обязательно стремятся к состояниям равновесия при  $x \rightarrow \pm \infty$ , и в этом смысле не являются примером конечномерного беспорядка. Однако гомоклиническая структура содержит также континуальное множество незамкнутых финитных траекторий, близких к гомоклиническим. Эти последние и отвечают хаотическому пространственному распределению поля.

Естественно, не все эти траектории являются аттракторами для эволюционной системы (12), (11). Те же, которые аттракторами являются, имеют, по-видимому, весьма сложно перемежающиеся области притяжения в пространстве начальных условий. Именно поэтому предсказать конечное состояние поля, описываемого (10), даже при тривиальных начальных условиях затруднительно. Если начальное регулярное состояние поля представить точкой в фазовом пространстве исследуемой градиентной системы, то рассматриваемая проблема формулируется в виде простого вопроса: содержится ли эта точка в области притяжения аттрактора, отвечающего неупорядоченному распределению поля при  $t \rightarrow \infty$ ? Однако, как мы только что говорили, речь следует вести не об одном конкретном, а о множестве близких начальных распределений поля. Такому множеству в фазовом пространстве отвечает не точка, а некоторый начальный фазовый объем с характерным размером  $\mu$ . И вопрос будет звучать уже совершенно иначе: установится ли при  $t \rightarrow \infty$  неупорядоченное состояние поля, статистические характеристики которого не зависят от  $\mu$  (в том числе и при  $\mu \rightarrow 0$ ). Положительный ответ на этот вопрос и был получен в численном эксперименте.

Здесь нам хотелось бы подчеркнуть следующее. Наличие множества гомоклинических и близких к ним сложно устроенных траекторий в фазовом пространстве системы, описывающей статические решения, еще не означает их устойчивости (точнее, их аттракторности). Ответить на этот вопрос можно, рассматривая эволюцию разных (!) начальных распределений. Суть предлагаемого в работе [38] подхода к ее решению заключается в следующем.

Как показывают компьютерные эксперименты, процесс эволюции плавного начального возмущения разбивается на два этапа (рис. 13,а). Первый — быстрый — завершается формированием цепочки локализованных состояний (число которых на единицу длины определяется периодом начального возмущения). Для дальнейшего важно, что эти солитоны имеют спадающие осциллирующие "хвосты" (рис. 13,б). Второй этап — медленный — завершается

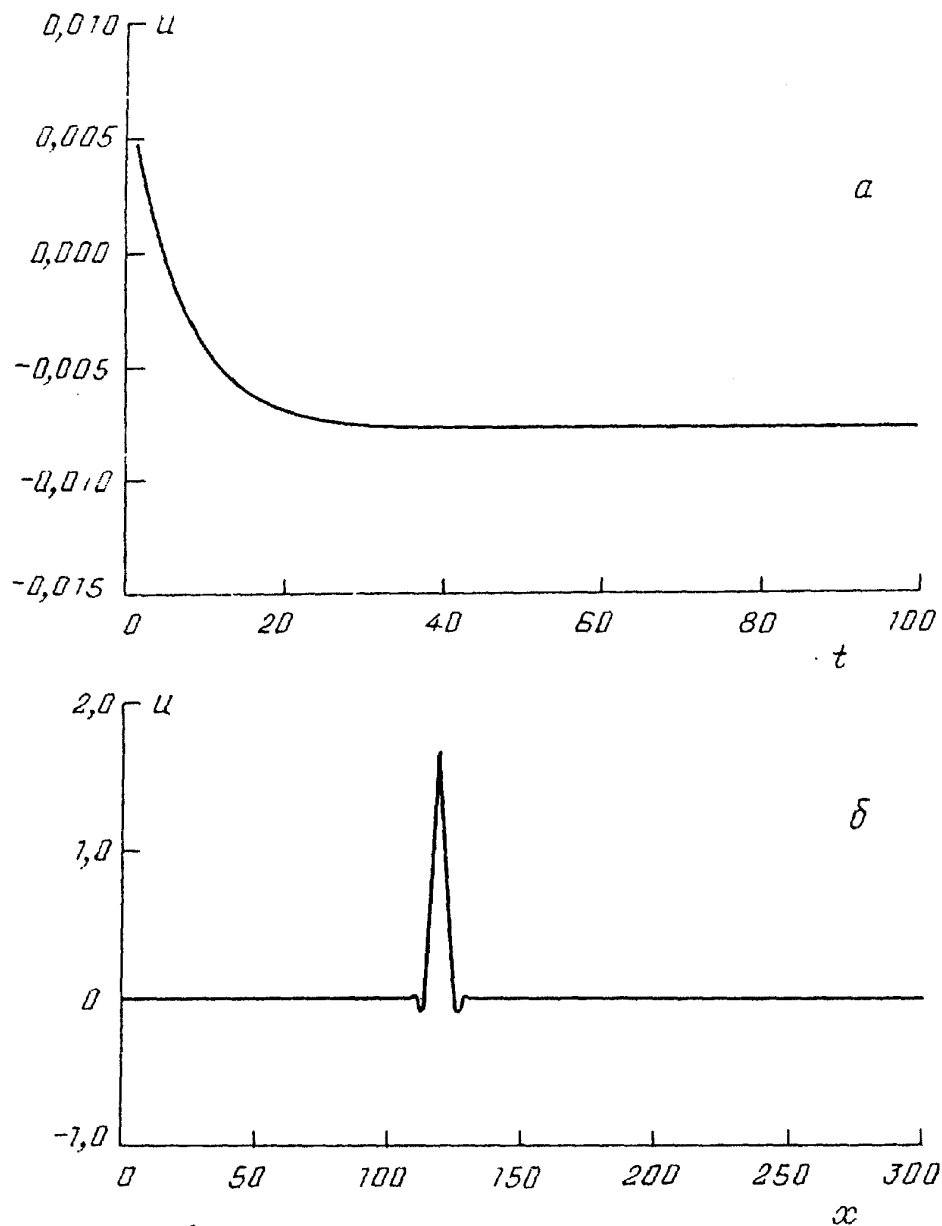


Рис. 13. а — Эволюция свободной энергии в модели (10) при начальных условиях вида  $\sin kx + \mu\psi(x)$  в зависимости от времени,  $\beta = 2,3$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $k_0 = 0,5$ . б — Распределение пол» локализованного состояния при тех же параметрах

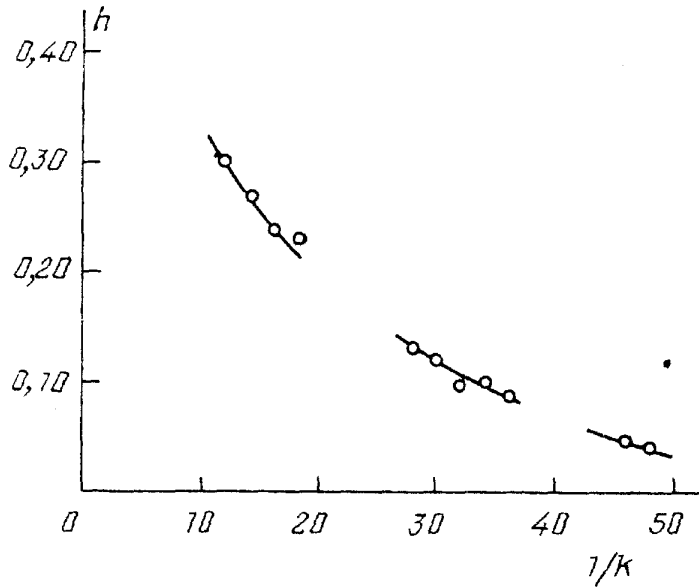


Рис. 14. Зависимость энтропии Колмогорова—Синяя  $h$  для пространственной наблюдаемой (описываемой (10) при  $t \rightarrow \infty$ ) от периода начального распределения  $l = 2\pi/k$

ным, что степень беспорядка с ростом периода начального периодического распределения может только уменьшаться! Эта догадка замечательно подтвердилась прямым компьютерным экспериментом (рис. 14) — колмогоровская энтропия падает и стремится к нулю с ростом  $l \sim 1/k$ .

Описать эти явления можно следующим образом. Если расстояния между соседними солитонами не слишком малы (порядка их характерного размера или больше), асимптотический метод [40] позволяет рассматривать движение солитонов как динамику цепочки частиц со специфическим потенциалом взаимодействия, определяемым структурой "хвостов" локализованных состояний<sup>(4\*)</sup>:

$$M \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i; \quad (17)$$

здесь  $x_i$  — координата центра  $i$ -го солитона,  $M = \int (u_x^{(0)})^2 dx$  — подвижность солитона со структурой  $u(x)$  (см. рис. 13,б),  $u_i$  — потенциал, создаваемый всеми солитонами, кроме  $i$ -го, в точке  $x_i$ :

$$u_i = \sum_{j \neq i} e^{-\vartheta |x_j - x_i|} \cos(\kappa |x_j - x_i| + \varphi_0), \quad (18)$$

где  $\vartheta = \text{Re}(i - k_0^2)^{1/4}$ ,  $\kappa = \text{Im}(i - k_0^2)^{1/4}$ ,  $\varphi_0$  — некоторая численная константа. Эквилибрийное расположение частиц вдоль оси  $x$  с произвольным периодом  $l$  ( $x = il$ ) отвечает состоянию равновесия системы (12).

В работе [38] найдены условия неустойчивости такой периодической цепочки частиц:

$$2\pi n < \kappa l + \varphi_0 < (2n + 1)\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

установлением статической цепочки структур (периодической или непериодической). Характер эволюции на втором (медленном) этапе определяется фактом устойчивости цепочки солитонов, возникшей на первом этапе.

Естественно, что начальным распределениям с разными периодами должны отвечать разные установившиеся распределения — эффект мультистабильности. Из-за неустойчивости соседние солитоны могут или увеличить расстояние друг от друга на "один минимум", либо это расстояние уменьшить на такую же "единицу длины" их хвостов. Тогда кажется очевид-

Что будет, если период  $l$  начального распределения выбран в интервале (19) и, следовательно, формирующаяся из него периодическая структура неустойчива? Под действием сколь угодно малого возмущения при  $t \rightarrow \infty$  здесь могут реализоваться две возможности: 1) либо регулярные распределения частиц; 2) либо хаотические последовательности частиц. Обе эти возможности реализуются в эксперименте (фрагменты картинок приведены на рис. 15).

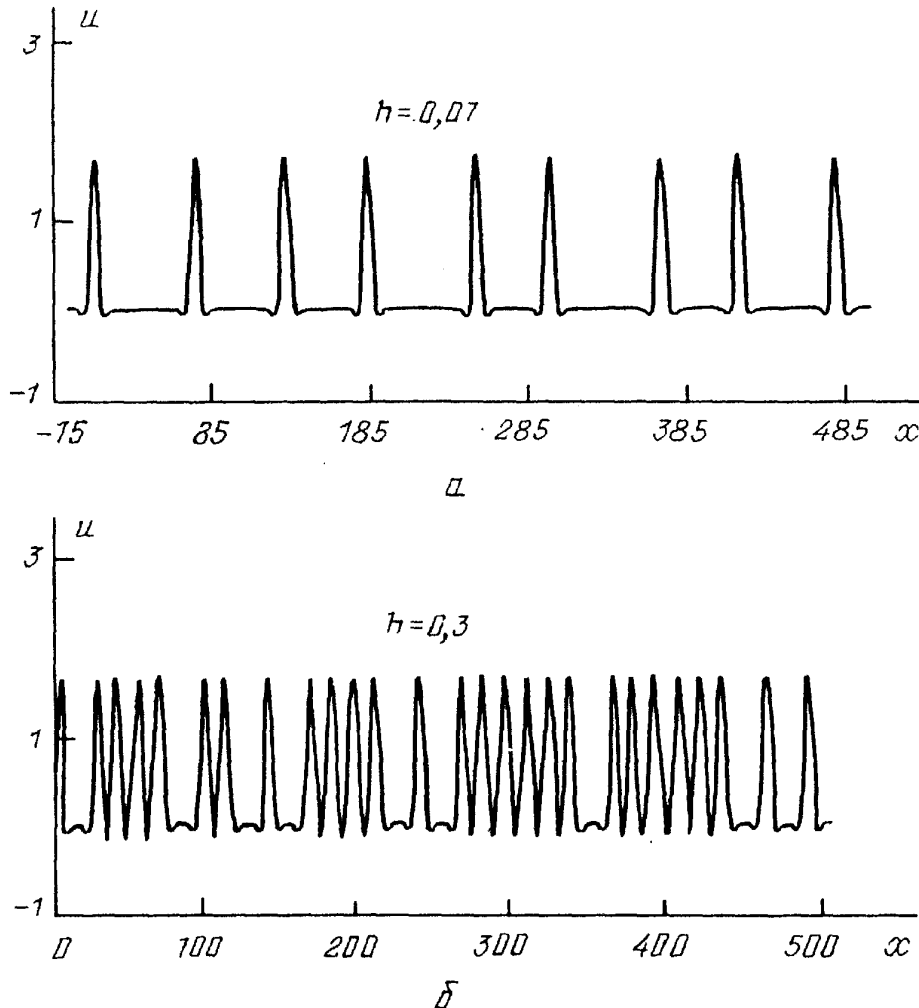


Рис. 15. Примеры почти периодического (а) и хаотического (б) пространственных распределений, устанавливающихся в модели (10) при  $\beta = 2,3$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $k_0 = 0,5$  и различных  $k$  (см. рис. 13)

Рассмотренный сценарий рождения пространственного беспорядка через формирование периодической решетки "частиц" локализованных состояний поля с их последующим разупорядочением, по-видимому, является весьма общим. Этот же сценарий должен обнаруживаться и в двумерном аналоге (10):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 + (k_0^2 + \nabla^2)^2 u. \quad (20)$$

Действительно, как показано в [41], в рамках (20) также существуют устойчивые локализованные структуры с экспоненциально спадающими осциллирующими хвостами. Полученная с помощью асимптотического метода [40] система уравнений, описывающая взаимодействие структур друг с другом, имеет вид

$$M \frac{dR_j}{dt} = \sum_{i \neq j} F(R_i - R_j); \quad (21)$$

здесь  $R_j$  — координата  $j$ -и структуры на плоскости  $x, y$ . Эта система имеет множество состояний равновесия, которым отвечает устойчивое расположение "частиц" в виде случайной решетки. Судя по предварительным экспериментам (см. также [42]), формирование такого статического пространственного беспорядка может осуществляться подобно тому, как это описано выше.

Следует также подчеркнуть, что найденные стационарные неупорядоченные решения градиентной модели (12) одновременно являются и стационарными решениями ее консервативного (гамильтонова) аналога

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\delta F}{\delta u}. \quad (22)$$

Однако если устойчивость неупорядоченной цепочки в рамках (12) вытекает из того, что функционал  $F$  на обсуждаемом решении имеет локальный минимум, то задача об устойчивости такой цепочки в рамках (22) представляется во много раз более сложной и интригующей. Она напоминает задачу о спектре возбуждения в одномерной модели жидкости Кронига—Пенни (см., например, [1]). Эта аналогия (включая и феномен локализации собственных функций) может оказаться весьма конструктивной, если отсутствуют резонансы между коллективными возбуждениями цепочки и собственными модами локализованных структур. Когда же такие резонансы существенны, развитие неустойчивости может привести к переходу системы в совершенно иное состояние, возможно, без локализованных структур.

## 6. Беспорядок дефектов. Пример

Часто встречающийся вид пространственного беспорядка — это беспорядок дефектов, случайно разбросанных на фоне периодической решетки (будь то кристаллическая решетка атомов или решетка конвективных ячеек). Один из возможных примеров представлен на рис. 16. Это эксперимент группы Крамера [43] по магнитогидродинамической конвекции в жидком кристалле. На фоне роликовой конвекции здесь хорошо видны протяженные поперечные дефекты. Одиночный дефект такого типа можно представлять себе как две тождественные решетки из роликов, заполняющие верхнее и нижнее полупространство и сдвинутые друг относительно друга на половину периода. Аналогичные дефекты обнаруживаются и в компьютерных экспериментах, например, со связанными уравнениями Гинзбурга—Ландау (рис. 17). Эти поперечные дефекты обычно повторяются вдоль оси  $y$ , причем, как правило, нерегулярно.

Беспорядок поперечных дефектов очень напоминает беспорядок локализованных структур, который мы обсуждали раньше. Сходство будет еще полнее, если отфильтровать исходную периодическую решетку. Сделать это можно, представив исходное поле в виде  $u(x, y, t) = A(y, t)e^{ix} + \text{к.с.}$  (период решетки предполагается равным  $2\pi$ ). После подстановки такого решения в исходные уравнения (пусть это по-прежнему будет уравнение Свифта—Хоэнберга) для комплексной амплитуды получается модифицированное уравнение Ньюэлла—Уайтхеда—Сегеля с четвертой производной по  $y$  (ср. (15))

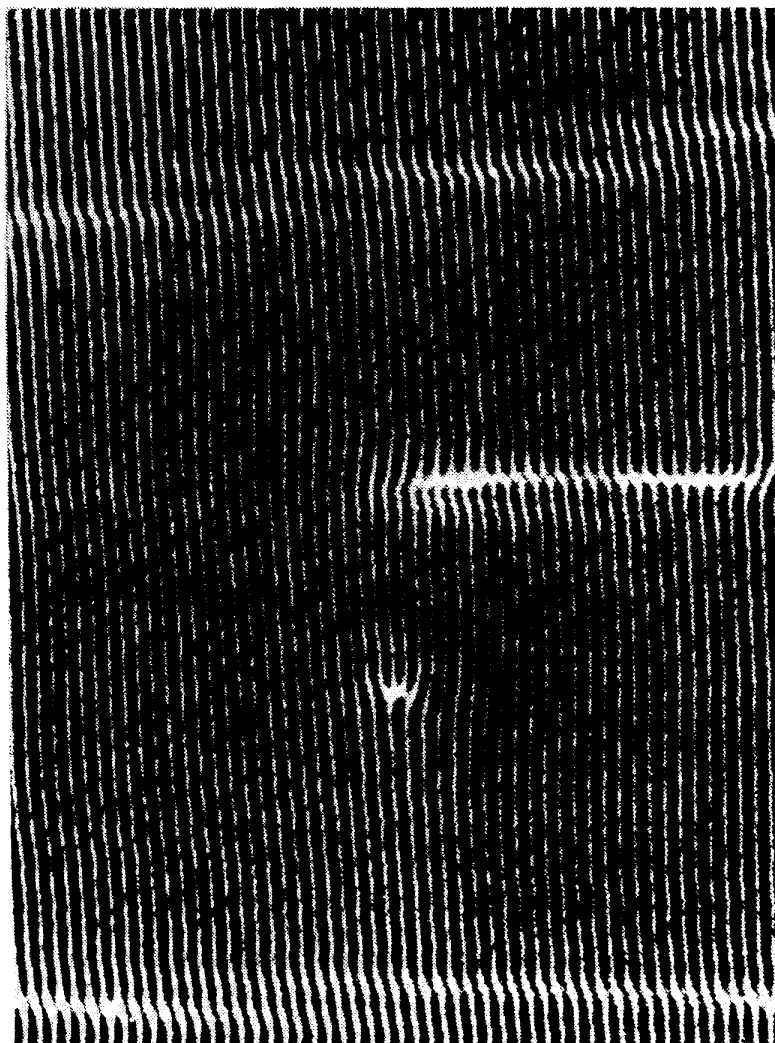


Рис. 16. Поперечные дефекты на фоне роликовой структуры, наблюдаемые при магнитогидродинамической конвекции в жидком кристалле [46]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + \gamma A^* - \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} - A|A|^2. \quad (23)$$

При  $\gamma \neq 0$  это уравнение учитывает периодическую по координате  $x$  (с периодом  $\pi$ ) неоднородность среды. Для конвекции — это, например, периодически неоднородное распределение температуры на нижней границе слоя.

Дефектам отвечают те решения (23), которые описывают стационарные перепады фазы  $A(y)$  на величину  $\pi$ . При этом модуль  $A(y)$  должен стремиться к постоянной  $A_0$  при  $y \rightarrow \pm \infty$ . Уравнение (23) также является градиентным<sup>(5\*)</sup>. Поэтому мы можем быть уверены, что все установившиеся при  $t \rightarrow \infty$  режимы в нашей системе (в том числе и с дефектами — перепадами) должны описываться уравнением в обыкновенных производных

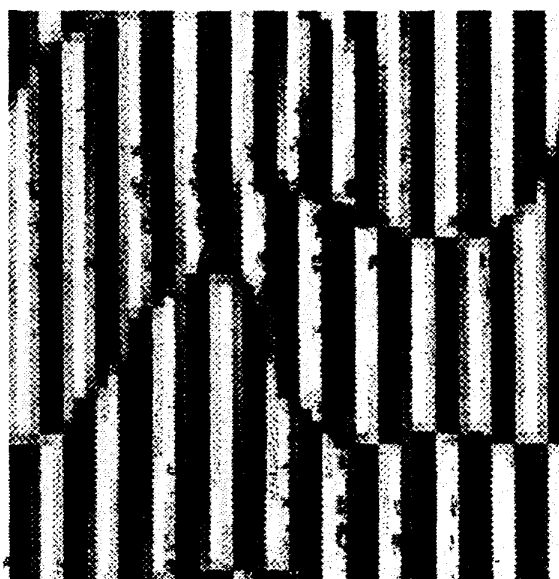


Рис. 17. Поперечные дефекты в компьютерном эксперименте со связанными уравнениями Гинзбурга—Ландау [46]

$$A_{yyyy} - A(1 - |A|^2) + \gamma A^* = 0. \quad (24)$$

Можно показать, опираясь, как и выше, на теорему Деванье [39], что в фазовом пространстве этой динамической системы существует счетное множество гомоклинических траекторий. Эти траектории и отвечают локализованным структурам фазы и амплитуды.

Наша модель описывает поперечные дефекты двух видов. В дефектах одного типа на линии скачка фазы модуль амплитуды обращается в нуль (рис. 18), для другого — происходит просто поворот фазы (как на рис. 19) и величина  $|A|$  остается конечной. По аналогии со стенками между ферромагнитными доменами такие дефекты названы в [44, 45] стенкой Изинга и стенкой Блоха. Они устойчивы соответственно при  $\gamma > \gamma_{cr}$  и  $\gamma < \gamma_{cr}$  [44].

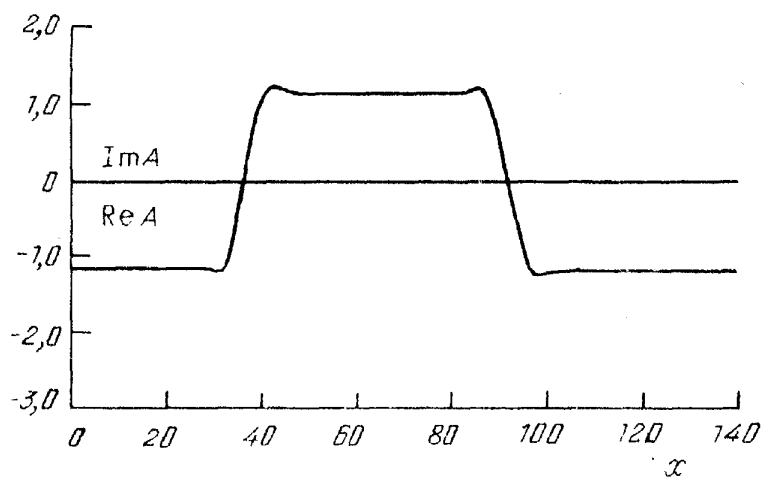


Рис. 18. Стенка Изинга

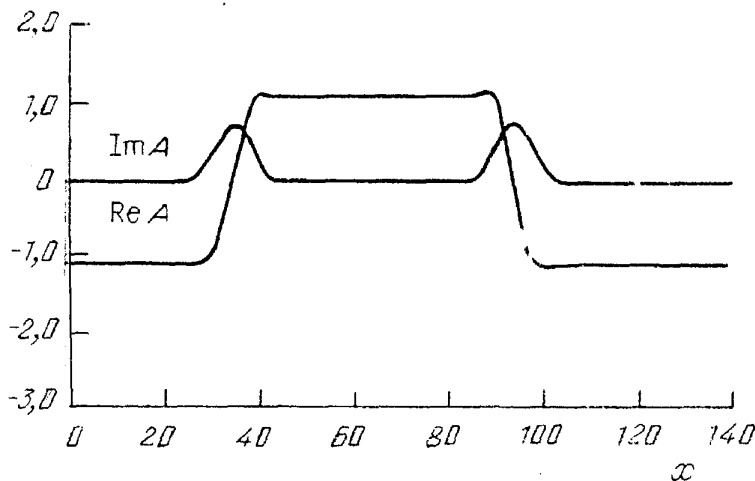


Рис. 19. Стенка Блоха

Одиночным дефектам соответствует лишь простейшая гомоклиническая траектория в фазовом пространстве (24)<sup>(6\*)</sup>. Как мы видели на примере аналогичного уравнения (10), помимо таких простейших локализованных состояний, это уравнение должно описывать и более сложные комбинации "солитонов", в том числе и их хаотические последовательности, подобные тем, которые представлены на рис. 15

Подчеркнем, что подобные хаотические распределения поперечных де-

фектов существуют и в отсутствие периодической неоднородности вдоль  $x$ , т.е. при  $\gamma = 0$ . Качественно они вполне отвечают экспериментально наблюдаемой картине, подобной рис. 16.

Конечно, рассмотренная одномерная модель очень уязвима для критики — и поперечные дефекты не бесконечно протяженные по  $x$ , и встречаются они обычно в комбинации с другими типами дефектов (например, точечными), и далеко не всегда они покоятся, и т.д. и т.п. Однако подчеркнем еще раз, что эта модель помогла нам понять и качественно описать новый феномен — существование конечномерного беспорядка дефектов на фоне регулярной решетки.

### 7. Конечномерный беспорядок в $x - y$ - и в $x - t$ -пространствах

Что же все-таки более удивительно — существование в природе конечномерного пространственного беспорядка или истинная неупорядоченность, каковой на нашем языке отвечает очень высокая (формально-бесконечная) корреляционная размерность? Вообще удивительно и то, и другое.

После приведенных примеров рождения конечномерного беспорядка в рамках одномерных градиентных моделей реальность такого беспорядка может показаться уже очевидной. Действительно, что еще может быть, если распределение поля вдоль  $x$  при  $t \rightarrow \infty$  описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (например, (24)). Однако, как только мы учтем еще одно пространственное измерение, даже в случае градиентной модели, распределение поля при  $t \rightarrow \infty$  описывается уже нелинейным уравнением в частных производных. В принципе, поля  $u(x, y)$ , являющиеся решениями таких



Рис. 20. Турбулентная капиллярная рябь [46, 47]

уравнений, могут иметь и бесконечную размерность. Однако, когда речь идет о реальных средах, это, как кажется, очень маловероятно. Обратимся к эксперименту.

Какой может быть размерность  $D_s$  нерегулярного распределения поля, показанного на рис. 20? Здесь представлен мгновенный снимок турбулентной капиллярной ряби (ряби Фарадея) в очень большой кювете [46, 47]. Напомним, что речь идет о параметрическом возбуждении капиллярных волн на поверхности горизонтального слоя жидкости, помещенного в осциллирующее гравитационное поле (технически это означает, что слой жидкости располагается на плоской поверхности, которая осциллирует с частотой накачки  $\omega_p$  и амплитудой  $A_p$ ). Когда величина  $A_p > A_{cr}$ , регулярная решетка капиллярных ячеек разрушается — рождается турбулентность. Результаты обработки серии мгновенных снимков турбулентной капиллярной ряби, проводи-

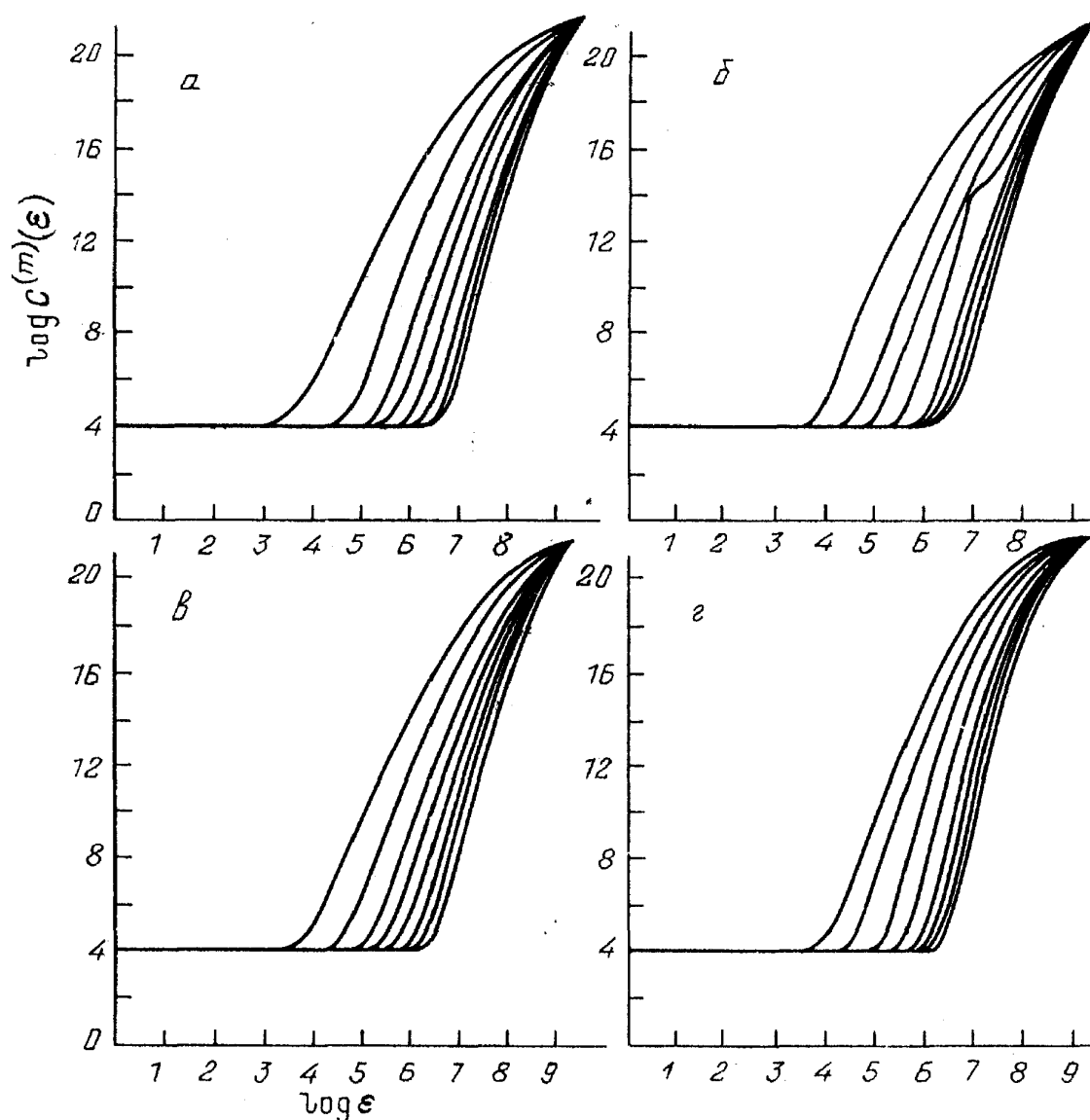


Рис. 21. Определение размерности  $D_s$  для мгновенных снимков капиллярной ряби при увеличении надкритичности.  $D_s = 6,2$  (а),  $6,3$  (б),  $7,2$  (в) и  $7,8$  (г)

мой по методике, которую мы обсуждали в разделе 3, представлены на рис. 21. Размерность  $D_s$  такого двумерного пространственного беспорядка оказалась конечной и сравнительно небольшой.

Существенно, что с ростом надкритичности  $A_p/A_{cr}$  размерность  $D_s$  растет. Однако, судя по предварительным экспериментам, этот рост довольно быстро насыщается, что, по-видимому, связано с ячеистостью "капиллярной среды".

Это, конечно, — полезный пример. Но, может быть, он уникален? Может быть, большинство реальных двумерных неупорядоченных распределений поля имеют очень высокую (бесконечную) размерность? Например, какова размерность неупорядоченного распределения магнитных полей во Вселенной (там характерный пространственный масштаб неоднородности  $\sim 3 \cdot 10^4$  км [48])? Тот же вопрос можно задать по отношению к двумерной картинке микротрещин, возникающих в материале перед разрушением, и т.д. Пока у нас нет достаточной информации, чтобы ответить на эти вопросы. Однако кажется, что для большинства полей, описываемых уравнениями в частных производных, даже "чисто хаотические" начальные распределения поля в процессе эволюции превращаются в конечномерный беспорядок. Другими словами, различные возбуждения среды перестают быть независимыми, что и позволяет описывать мгновенный снимок конечномерной динамической системой (соответственно с тремя или двумя временами).

Вернемся сейчас к одномерному пространственному беспорядку, но рассмотрим случай, когда он меняется во времени. Тогда на плоскости  $x - t$  мы также будем иметь двумерную неупорядоченную картину. Какова размерность такого беспорядка и можно ли о ней судить, зная отдельно размерность временной реализации (динамического хаоса) и размерность пространственной наблюдаемой? В общем случае, очевидно, нельзя. Однако зачастую такая связь есть. Например, она обнаружена при исследовании одномерного комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - A|A|^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\beta A|A|^2. \quad (25)$$

На рис. 22 показана зависимость  $D_s$  размерности пространственной наблюдаемой от параметра  $p = (\alpha\beta)^{1/2}$ . Эта зависимость обладает двумя замечательными особенностями: вблизи критической точки  $p''$  величина  $D_s$  скачком увеличивается почти в полтора раза и, кроме того, обнаруживается гистерезис [49]. Прежде чем прокомментировать это критическое явление, отметим, что при том же значении пара-

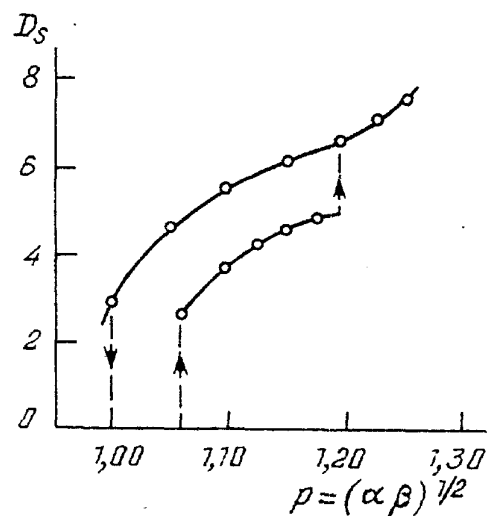


Рис. 22. Фазовый переход "хаос—хаос" и гистерезис на плоскости  $D_s - p$  в модели (25) ( $s = (\beta/\alpha)^{1/2} = 1,15$ ,  $R = 10^4$ )

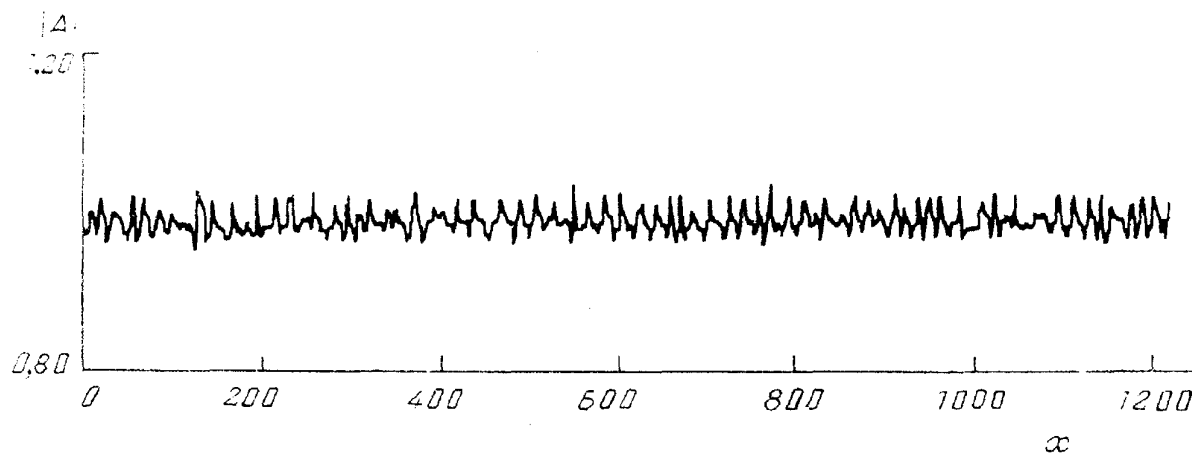


Рис. 23. Распределение амплитуды вдоль  $x$  в режиме "фазовой турбулентности" (решение уравнения (10) при значениях параметров  $R = 10^4$ ,  $\alpha = 1,0$ ,  $\beta = 1,3$ )

метра  $p = p''$  величина размерности  $D_t$  временной реализации также испытывает скачок. Таким образом, в данном случае связь между  $D_s$  и  $D_t$ , очевидно, существует. Однако, по-видимому, эта связь не жесткая и имеет вид неравенства типа  $D_s \leq D_t^{(7*)}$ .

Скачок пространственной размерности на рис. 22 объясняется следующим образом. Поле, описываемое уравнением (25), может находиться в двух качественно различных неупорядоченных состояниях. Одно из них — это состояние фазовой турбулентности, когда фаза изменяется хаотически, а амплитуда лишь слабо пульсирует вблизи среднего значения (рис. 23). Другое же — "сильная" турбулентность, когда сильно нерегулярны и амплитуда, и фаза (рис. 24). При переходе через точку  $p''$  в процессе формирования пространственного беспорядка скачком включаются новые пространственные возбуждения (пульсации амплитуды), и в этом смысле такой переход естественно рассматривать как критическое явление.

Установление того или иного хаотического режима в области параметров  $[p', p'']$  зависит от начальных условий (в фазовом пространстве динамической системы (25) при этом сосуществуют два странных аттрактора). Этим и объясняется феномен гистерезиса — при переходе через критическую точку  $p''$  справа налево мы остаемся в области притяжения многомерного аттрактора. Когда же мы начинаем с регулярных начальных условий в интервале  $[p', p'']$ , мы попадаем в режим маломерного хаоса.

Соответствующие двумерные картины беспорядка на плоскости  $x - t$  представлены на рис. 25 и 26. Такие картины содержат информацию о предистории одномерного пространственного беспорядка и о степени его однородности во времени. Заметим, что подобная временная развертка пространственного беспорядка может легко наблюдаться в лаборатории при визуализации дымом следа за длинным неоднородным цилиндром, расположенным поперек потока [52, 53]. Координата  $y$  (рис. 27), вдоль которой сносятся рождающиеся вблизи цилиндра вихри, в данном случае соответствует **временной** оси, на-

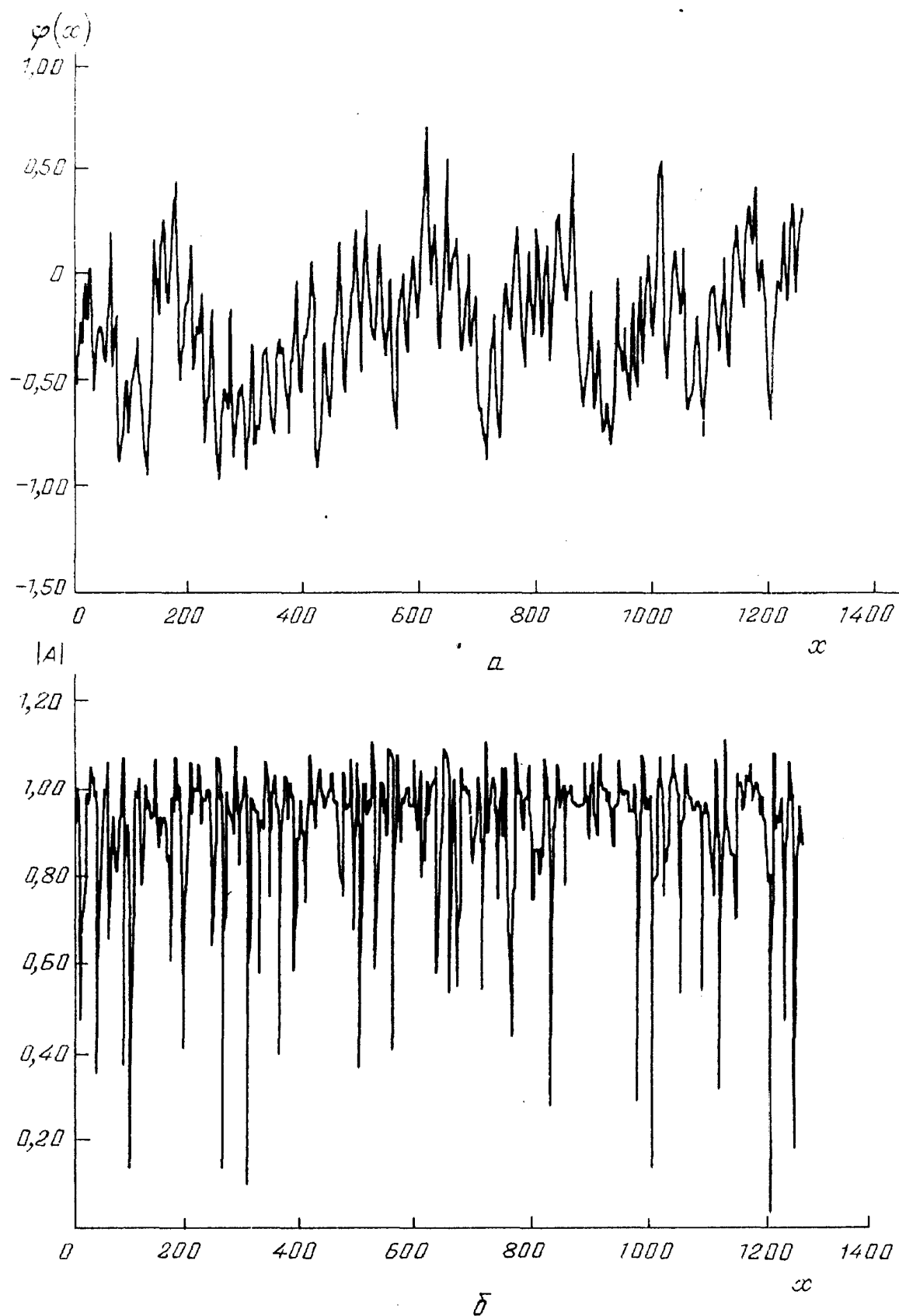


Рис. 24. Распределение фазы (а) и амплитуды (б) в режиме сильной турбулентности (модель (10),  $\alpha = 1,1$ ,  $\beta = 1,44$ ,  $R = 10^4$ )

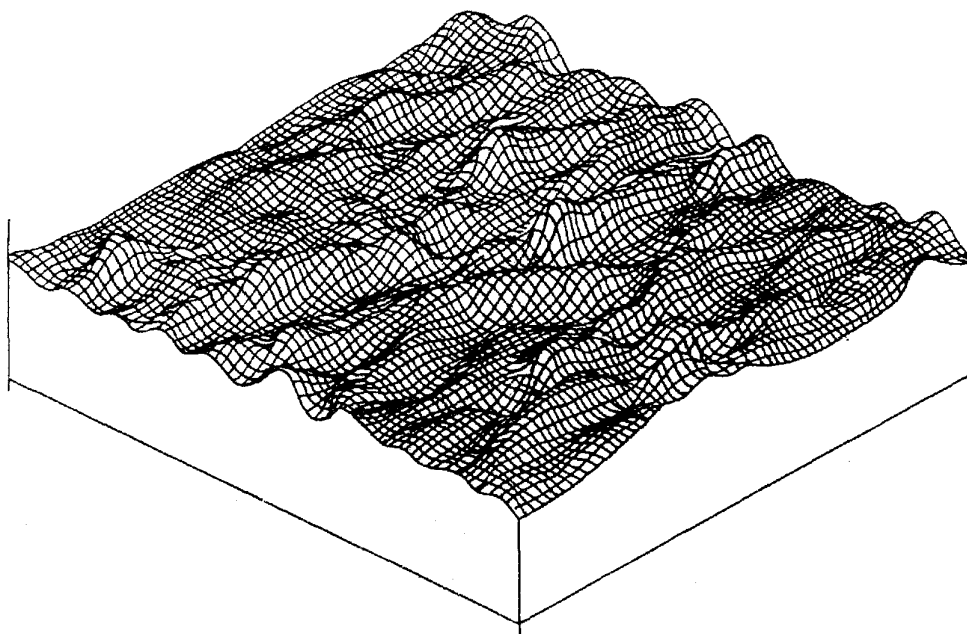


Рис. 25. Распределение амплитуды в режиме фазовой турбулентности в модели (10) на плоскости  $x, t$  (параметры как на рис. 23)

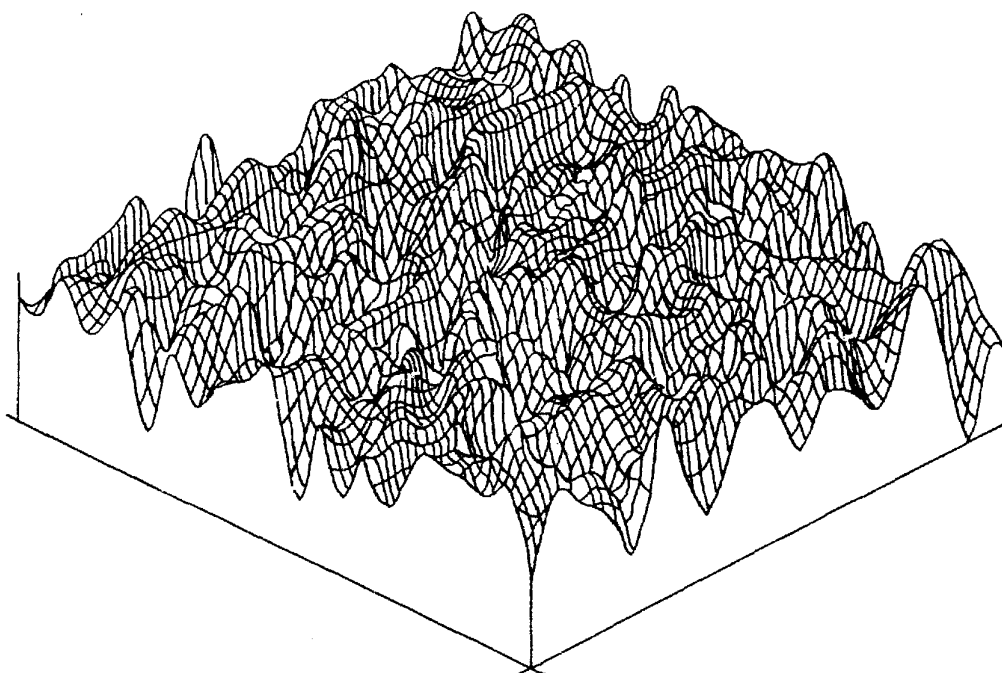


Рис. 26. Распределение амплитуды в режиме сильной турбулентности на плоскости  $x, t$  (параметры как на рис. 24)

правленной справа налево. Для описания возникающего в этом случае пространственно-временного беспорядка также может быть использована модель Гинзбурга—Ландау, только с переменными вдоль  $x$  коэффициентами [52].

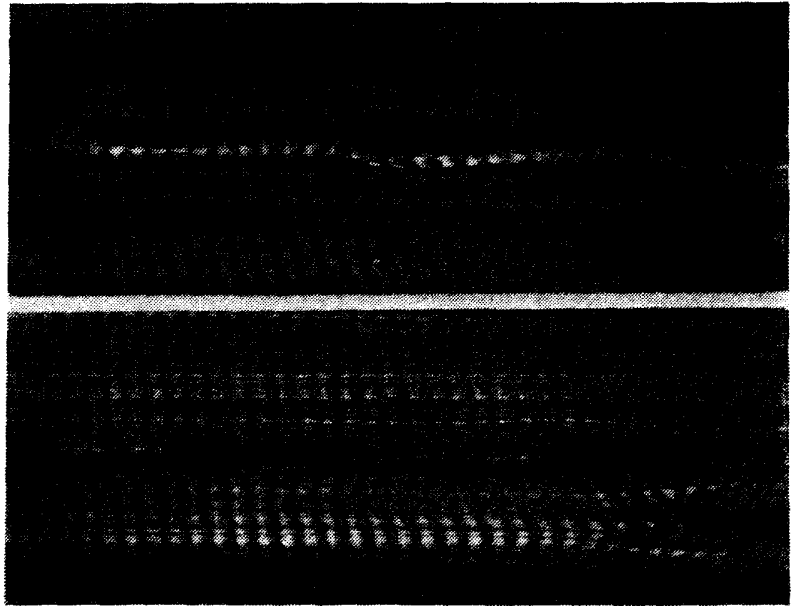


Рис. 27. Дефекты в следе за цилиндром (детали см. в работе [51])

## 8. Диагностика конечномерного беспорядка на фоне спекл-шума

До сих пор мы все время говорили о некоторой идеальной ситуации — если конечномерный пространственный беспорядок существовал, то он существовал "сам по себе", т.е. без примеси неконтролируемых неоднородностей. На реальных же "мгновенных снимках" всегда присутствуют разного рода помехи, пространственный фурье-спектр которых достаточно широкий, а природа чаще всего неизвестна. Они могут определяться техническими особенностями диагностики, прохождением сигнала через канал связи, наконец, неоднородностью фотоматериалов и т.п. Задача выделения конечномерного беспорядка на фоне пространственного шума традиционными методами статистической обработки выглядит весьма проблематичной. Однако, судя по имеющемуся у нас на сегодняшний день опыту, накопленному при работе с временными наблюдаемыми, применение здесь даже простейших форм "динамической" обработки картинок (вычисление размерности  $D_s$ , пространственной энтропии и др.) делает поставленную задачу небезнадежной.

Поясним, как она может решаться. Пространственная размерность  $D_s$  и энтропия  $H_s$  формально определяются формулами

$$D_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_s(m, \varepsilon), \quad H_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} h_s(m, \varepsilon), \quad (26)$$

где  $\varepsilon$  — диаметр покрывающих "сфер" в реконструируемом фазовом пространстве (возможно, матричном), а  $m$  — число точек в пространственной наблюдаемой, которые определяют размерность этого пространства (см. раздел 3).

При обработке реальных наблюдаемых (как временных, так и интересующих нас пространственных) к пределам ( $m \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), конечно, переходить бессмысленно. Здесь есть другой путь — построить зависимости  $C_\varepsilon^m$  от  $\varepsilon$  и  $d_s$  от  $m$  и проанализировать их особенности. Напомним, что для временных наблюдаемых динамического происхождения  $d_1(m)$  обычно достигает насыщения при некотором  $m^*$ . Величина  $m^*$  называется размерностью вложения стохастического множества (ее можно определить и с помощью другого алгоритма). При  $m \geq m^*$   $d_1 \approx D_1$ . Справедливо соотношение  $D_1 \leq m^* \leq$

$\leq 2D_1 + 1$  (теорема Манье). Причем близость  $m^*$  к левому или правому пределу этого неравенства характеризует сложность внутренней структуры стохастического множества, более точно — показывает степень избыточности числа геометрических переменных (по сравнению с размерностью множества), необходимых для неизменности его структуры при  $m \rightarrow \infty$ . Все сказанное должно остаться в силе и для динамических систем с несколькими временами, т.е. справедливо применительно и к неоднородным пространственным наблюдаемым.

При обработке пространственной наблюдаемой, отвечающей конечномерному беспорядку, на графике зависимости  $\log C^n(\log \epsilon)$  (ср. рис. 20) в общем случае может быть несколько участков линейности с разными наклонами на различных интервалах масштабов  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in (0, \epsilon_{\max})$ . На стыке разных областей обнаруживаются изломы.

Если же пространственная наблюдаемая отвечает спекл-шуму, то ситуация совершенно иная. При восстановлении фазового пространства (с учетом конечности полосы пространственного спектра, связанного с неизбежной фильтрацией) распределение точек уже не будет "структурировано" — при любой размерности вложения это распределение будет равномерным. Мы обнаружим, что  $d_s \approx m$  и слабо зависит от  $\epsilon$ !

Что будет, если наша наблюдаемая представляет собой смесь конечномерного и "идеального" (спекл) беспорядков? Будем вычислять для такой наблюдаемой семейство корреляционных интегралов  $C^m(\epsilon)$  для последовательных значений  $m = 1, \dots, m_0$  и строить сечения этого семейства при различных  $\epsilon$  (рис. 28). Очевидно, для любого реального беспорядка, в том числе и конечномерного, поведение  $d(m, \epsilon)$  при достаточно малых  $\epsilon_N$  будет сигнализировать о наличии шумовой компоненты<sup>(8\*)</sup>. Величину  $\epsilon_N$  можно считать оценкой (хотя и не слишком точной) амплитуды шумовой компоненты беспорядка. Диапазон  $\epsilon \in (\epsilon_N, \epsilon_{\max})$  определяет область масштабов, где реализуется ко-

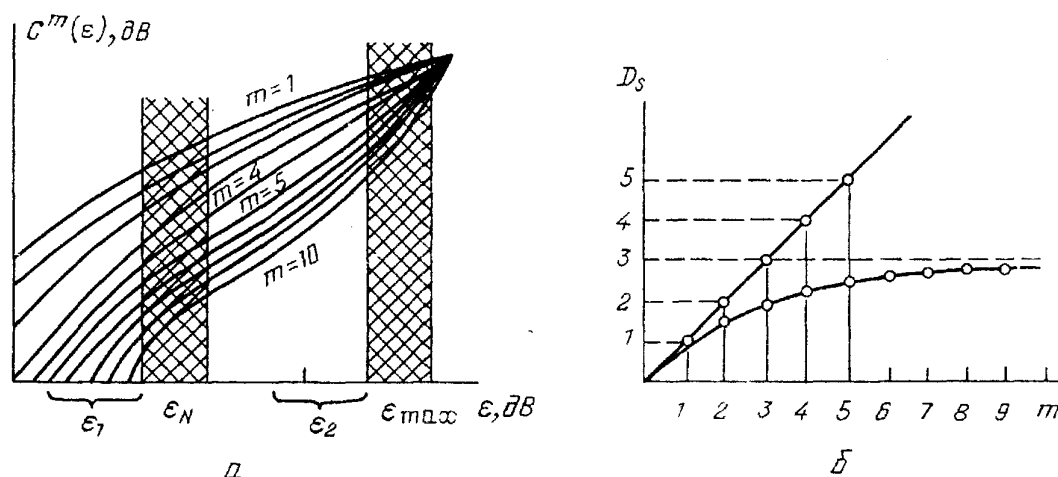


Рис. 28. Корреляционный интеграл  $C^m(\epsilon)$  ( $\epsilon_N$  — уровень спекл-шума,  $\epsilon_{\max}$  — максимальная амплитуда сигнала; заштрихованы переходные области) (а) и зависимость корреляционной размерности  $D_s$  от размерности вложения  $m$  (б)

нечномерный беспорядок. В этой области, в принципе, возможно существование иерархии неупорядоченных паттернов с различными значениями  $D_s$ .

Подобная методика очень хорошо разработана для обычных динамических систем (см., например, [19, 54]). Сейчас, кажется, есть потребность и возможность обобщить ее для динамических систем с несколькими "временами" (см., в частности, [55], где представлены результаты эксперимента по влиянию стохастичности на формирование различных видов структур в конвекции Рэлея—Бенара).

## 9. Вместо заключения

Трудно избежать искушения, чтобы, заканчивая лекцию на тему о конечномерном беспорядке, не высказаться по поводу значимости его в физике и его распространенности в Природе. Однако мы все-таки воздержимся от этого и лишь сформулируем здесь несколько проблем, которые возможно, привлекут молодых исследователей к этой удивительной и очень перспективной области знания.

1. Всякий установившийся беспорядок несет на себе отпечаток своего прошлого. Что, например, можно сказать, глядя на одномерный беспорядок, представленный на рис. 29? Добавим, что эти хаотические вдоль  $x$  паттерны по-

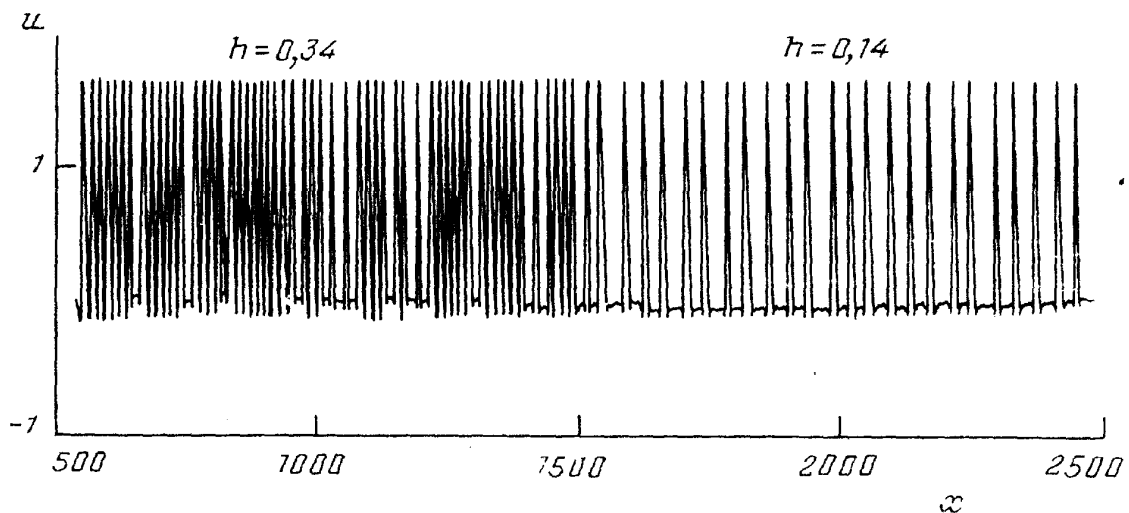


Рис. 29. Устойчивое сосуществование режимов с различным конечномерным беспорядком в рамках модели (10). Сверху указаны значения энтропии Колмогорова—Синая (ср. рис. 15; параметры — те же)

лучились в результате эволюции некоторого начального распределения поля в рамках модели Свифта—Хоэнберга (см. (10)). Анализ показывает, что колмогоровская энтропия на разных участках  $x$  (естественно, что участки достаточно длинные) оказывается различной (см. рис. 29) и скачет в отдельных точках. Мы знаем (см. раздел 5), что величина энтропии зависит от плотности локализованных состояний, которая, в свою очередь, связана с пространственным периодом начального распределения поля. Таким образом, можно утверждать, что наш беспорядок получился из "кусков" периодического распределения с разными периодами. На границах этих областей и наблюдаются скачки энтропии.

Здесь стоит удивиться. Фактически мы обнаружили совершенно новый феномен — устойчивое сосуществование областей (доменов) с различными видами конечномерного беспорядка! Резкая граница между доменами также

представляет собой дефект. В двумерном случае граница между подобными доменами может быть весьма сложной. Вопросы, которые сразу же возникают, таковы: до каких пор можно уменьшать размеры доменов, чтобы такой мозаичный беспорядок оставался устойчивым? И зависит ли запас устойчивости "мозаики" от формы доменов? Подобные же вопросы возникают и по отношению к дефектам на границе конечномерного беспорядка и кристаллического порядка (например, в магнитных пленках; рис. 30).

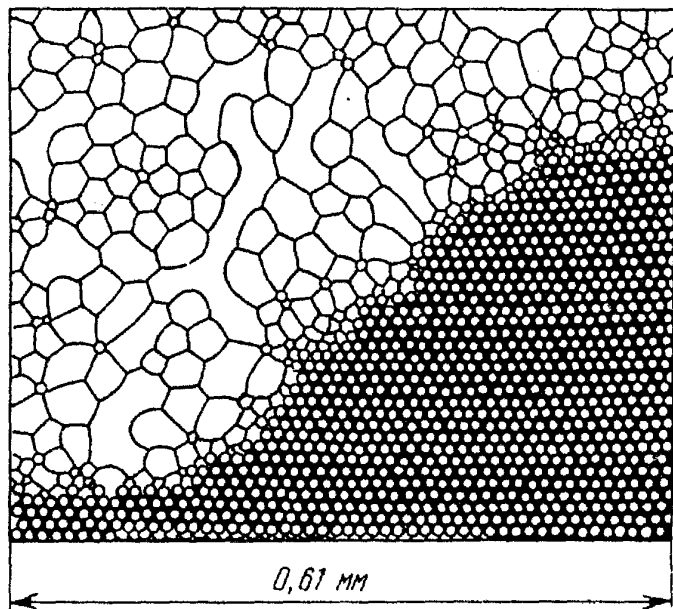


Рис. 30. Экспериментально наблюдавшийся в [17] движущийся фронт между упорядоченной и неупорядоченной фазой магнитных доменов в тонкой пленке

2. Мы практически ничего не говорили о конечномерном беспорядке в "осциллирующих средах" (упоминание об этом было лишь при обсуждении перехода "фазовая—амплитудная" турбулентность в комплексном уравнении Гинзбурга—Ландау). В то же время здесь возникают совершенно неожиданные задачи, связанные с влиянием временной динамики на пространственный беспорядок. Например, в процессе установления стационарной пространственно-временной картины разные области беспорядка могут частично или полностью синхронизовать друг друга, что приведет к изменению границы между доменами, которым будет отвечать разная величина размерности  $D_c$ . Сейчас не ясно, возможно ли установление в результате подобной стохастической синхронизации статических устойчивых границ между такими пространственными доменами с разной хаотической динамикой (см., например, [56 — 58]).

3. Как показывают компьютерные эксперименты с разными моделями, степень неупорядоченности картины поля возрастает с ростом числа локализованных состояний (частиц, дефектов и т.п.). Кажется очевидным, что если такие состояния не взаимодействуют друг с другом, то размерность  $D_s$  должна быть бесконечной, как для полного термодинамического беспорядка. Возникает вопрос: какого вида взаимодействия между частицами превращают бесконечномерный беспорядок в конечномерный? И, наконец, существует ли для конечномерного беспорядка связь между термодинамическими и динамическими характеристиками?

Многие из рассмотренных в статье вопросов обсуждались с Г. Абарбанелем, В.С. Афраймовичем, А.В. Гапоновым-Греховым, К.А. Горшковым и Я.Г. Синаем, за что авторы приносят им свою благодарность.

## ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Статья представляет собой несколько расширенный текст лекции М.И. Рабиновича (подготовленный совместно с А.Л. Фабрикантом и Л.Ш. Цимрингом) на международной школе "Teaching Modern Physics — Statphysics", Испания, 1992.

(2) Напомним здесь, что в соответствии с теоремой возврата Пуанкаре период возврата экспоненциально растет с ростом числа несоизмеримых гармоник.

(3) Одиночные дефекты подобного рода легко наблюдаются (см., например, [12]).

(4) В градиентных системах сила воздействия определяет не ускорение, а скорость движения локализованных состояний. См. также (5).

(5) Факт градиентное™ усредненных уравнений для функции  $A(y, t)$  непосредственно следует из градиентное™ исходной системы для  $u(x, y, t)$ . Функционал свободной энергии, описывающий поле  $A$ , получается из функционала свободной энергии для  $u$  в результате усреднения по  $x$  [44]. То же справедливо и для уравнений относительно центров локализованных состояний.

(6) Поскольку это уравнение четвертого порядка имеет интеграл энергии

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -|A|^2 + \frac{1}{2}|A|^4 - \gamma((\operatorname{Re} A)^2 - (\operatorname{Im} A)^2) - \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy$$

фазовое пространство этой динамической системы — трехмерно.

(7) Вообще это очень интересный и важный вопрос, и ответить на него, пожалуй, проще всего, если обратиться к дискретной модели среды, например, в виде цепочки связанных нелинейных элементов. Подход к решению этой задачи для цепочки отображений Фейгенбаума содержится в работе [50], см. также работу [51], касающуюся размерности клеточных автоматов.

(8) Хотя бы потому, что в  $\varepsilon$ -окрестность будет попадать малое число точек и асимптотика корреляционного интеграла нарушится.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ziman J.M. Models of Disorder. — Cambridge: University Press, 1979; перевод: Займан Дж. Модели беспорядка. — М.: Мир, 1982.
2. White R.M., Geballe T.H. Long range order in solid. — New York: Academic Press, 1979; перевод: Витт Р., Гебалл Т. Дальний порядок в твердых телах. — М.: Мир, 1982.
3. Бонч-Бруевич В.Д. и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. — М.: Наука, 1981.
4. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. — М.: Наука, 1982.
5. Aranson I.S., Rabinovich M.I., Suschik M.M.// Chaos and Order in Nature/Ed. H. Haken. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1986. — P. 54.
6. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., Pikovskiy A.S.//Phys. Lett. 1979. V. A74. P. 177.
7. Janssen T., Janner A.// Adv. Phys. 1987. V. 36. P. 519.
8. Ashraff J.A., Luck J.-M., Stinchcombe R.B.//Phys. Rev. 1990. V. B41. P. 4314.
9. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.F.//Phys. Lett. 1987. V. 125A. P. 101.
10. Ландау Л.Д.// ДАН СССР. 1944. V. 44. P. 339.
- [11] Hopf E.//Comm. Pure and Appl. Math. 1948. V. 1. P. 3031.
12. Eckmann J.P., Procaccia I.//Nonlinearity. 1991. V. 4. P. 542.
13. de Gennes P.G. The Physics of Uquid Crystals. — Oxford: Clarendon, 1974.
- Kai S., Chizumi N., Kohno M.//Phys. Rev. 1989. V. A40. P. 6554.
14. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems./Ed. A Mayer-Kress. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1986.
15. Brandstater A. et al.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1442.
16. Glass L., Mackey M.C. From Clocks to Chaos. The Rhythms of life — Princeton: Univ. Press, 1988.
17. Babcock K.L., Westervelt R.M.// Phys. Rev. 1989. V. A40. P. 2022; Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2168.
18. Special Issue of JOSA. 1990. V. 66. P. 2168.
19. Grassberger P., Schreiber T., Schaffrath C.//Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. N 3. P. 521.
- Casdagli M., Eubank S., Farmer J.D., Gibson J.//Physica D. 1991. V. 51. P. 52.
20. Doerring C.R., Gibbon J.D., Holm D.D., Nicolaenko B.// Nonlinearity. 1988, V. 1. P. 279.
- [21] Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temann R.// Appl. Math. Sec. Ser. (Springer) 1988. V. 70.
22. Afraimovich V.S., Ezhelsky A.B., Rabinovich M.I., Zheleznyak A.L., Sheresnevsky M.A.// Physica D. 1992. (in press).

23. *Mane R.*// Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980. — Lect. Not. Math. 1981. V. 898. P. 366.
24. *Procaccia L., Grassberger P., Heitsch H.G.E.*// Lect. Not. Phys. 1983. V. 179. P. 212.
25. *Ruelle D.*// Proc. Roy. Soc. Lond. 1990. V. A427. P. 241.
26. *Elliot J., Dober P.* The Symmetry in Physics. V. 1, 2. — 1980; перевод: Эллиот Дж., Добер Л. Симметрия в физике. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1983.
27. *Richtmyer R.D.* Principles of Advanced Mathematical Physics. V. 2. — New York a.o.: Springer-Verlag, 1981; перевод: Рихтмайер Р.// Принципы современной математической физики. Т. 2. — М.: Мир, 1984.
28. *Ottino J.M.* The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport. Cambridge: Univ. Press, Cambridge, 1989.
29. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнд М.*//Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1965.
30. *Swift J., Hohenberg P.C.*// Phys. Rev. 1977. V. A15. P. 319.  
*Гетлинг А.В.*//УФН. 1991. V. 161, № 9. P. 1.
- [31] *Pomeau Y., Manneville P.*// J. de Phys. Lett. 1979. T. 40. P. 609.
32. *Рабинович М.И., Сущик М.М.*//УФН. 1990. V. 160, № 1. P. 1.
33. *Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И.*//Нелинейные волны/Ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. — М.: Наука, 1989. — С. 61.
34. *Bodenschatz E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Cennell D.* Experiments on three systems with non-variational aspects. — Preprint. — Santa Barbara, 1991.
35. *Newell A.C., Whitehead J.A.*// J Fluid Mech. 1969. V. 38. P. 279.  
*Segel L.A.*//Ibidem. P. 203.
36. *Бейлин К., Рабинович М.И., Железняк А.Л.* Эволюционность конечномерного беспорядка в CGLE (готовится к печати).
37. *Perz-Garcia C., Cerisier P., Occelli R.*//Propagation in System Far from Equilibrium/Eds. J.E. Wesfreid, H.R. Brand, P. Manneville, G. Albinet, N. Boccara. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1988.
38. *Корзинов Л., Рабинович М.И., Цимринг Л.Ш.* Эволюционность пространственного беспорядка в градиентных моделях. — Препринт ИПФ РАН. — Н. Новгород, 1992.
39. *Devaney R.*// J Different. Equat. 1976. V. 21. P. 431.
40. *Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A.* // Physica D. 1981. V. 3. P. 428.
- [41] *Aranson I.S., Gorshkov K. A., Lomov A.S., Rabinovich M.I.*// Ibidem. 1990. V. 43. P. 435.
42. *Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Рабинович М.И.*//Письма ЖЭТФ. 1986. T. 44. С. 224.
43. *Bodenschatz E. et al.*// New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern-Forming Phenomena. (The Geometry of Nonequilibrium)/Eds. P. Boulet, Huerre. — New York: Plenum Press, 1988. — P. 111.
44. *Korsnov L., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh.*// Phys. Rev. A. (submitted).
45. *Coullet P., Lega J.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 54. P. 1353.
46. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.*//ЖЭТФ. 1986. T. 91. С. 2070.
47. *Garonov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I.*// Phys. Today. July 1990. P. 30.
48. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.*//УФН. 1987. T. 152. С. 3.
49. *Bazhenov M.V., Rabinovich M.I., Fabrikant A.L.*// Phys. Lett. A. 1992.
50. *Afraimovich V.S., Tsimring L.Sh.* Finite-D. Disrder in Chains of Maps. — Preprint UCSD, 1992 (IAP).
- [51] *Shereshevsky M.A.*// J. Nonlin. Sci. 1991. V. 1, 2. P. 206.
52. *Рабинович М.И., Сущик М.М., Зобнин А.Б.*//ФАО. 1990. V. 26. № 12.
53. *Williamson C.H.K.*// J. Fluid. Mech. 1989. V. 206. P. 579.
54. *Schreiber T., Gressberger P.*// Phys. Lett. 1991. V. A160. P. 411.
55. *Meyer C.W., Ahlers G., Callett D.S.*//Phys. Rev. 1991. V. A44. P. 2514.
56. *Quyang Q., Swinney H.L.*//Chaos. 1991. V. 1. P. 411.
57. *Auyag T., Kuramoto Y.*// Phys. Lett. A. 1991. P. 410.
58. *Осипов Г.В., Рабинович М.И., Цимринг Л.Ш.* Синхронизация и хаос в плавно-неоднородной цепочке ван-дер-полевских генераторов. — Препринт ИПФ РАН. — Н. Новгород, 1992.

Статья поступила 4.04.92 г.