

531+548:537.621+538.955-405 + 530.145

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

*К.Н. Алексеев, Г.П. Берман, В.И. Цифринович, А.М. Фришман*

(Институт физики им. Л.В. Киренского РАН, Красноярск)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	81
2. Общие представления о переходе к хаосу в динамических системах . . . . .	82
2.1. Хаос в гамильтоновых системах. Параметр стохастичности. Критерий Чирикова перекрытия нелинейных резонансов. 2.2. Хаос в диссипативных системах. Странный аттрактор. Фрактальная размерность. 2.3. Переход к хаосу через бифуркации удвоения периода и перемежаемость.	
3. Хаос при параметрическом возбуждении спиновых волн . . . . .	90
3.1. Суловские неустойчивости. 3.2. Теоретические модели. 3.3. Обсуждение экспериментов.	
4. Хаос в ЯМР-мазерах . . . . .	102
5. Гамильтонов хаос в спиновых системах . . . . .	105
5.1. Консервативные системы. 5.2. Неавтономные системы. Хаос в нелинейном ЯМР.	
6. Квантовый хаос в спиновых системах . . . . .	108
6.1. Динамика наблюдаемых. 6.2. Энергетический спектр и волновые функции. 6.3. Обсуждение.	
Примечания . . . . .	115
Список литературы . . . . .	116

"Хаос — это партитура действительности".  
(Генри Миллер "Тропик Рака")

## 1. Введение

В последние годы идеи, понятия и методы теории нелинейных процессов существенно обогатили многие области физики от физики элементарных частиц до биофизики [1,2]. Самостоятельным направлением в нелинейной физике в настоящее время является изучение хаоса в различных динамических системах [3 — 9]. Хаос в данном случае не связан с наличием каких-либо случайных параметров и сил, а обусловлен неустойчивым характером поведения траекторий в фазовом пространстве<sup>(1\*)</sup>.

Целью данного обзора является введение в быстро развивающиеся исследования феномена хаоса в магнитных (спиновых) системах. Разнообразие механизмов формирования нелинейности, простые способы управления различными параметрами и, не в последнюю очередь, значительный опыт, накопленный при изучении нелинейных явлений, — все это делает физику магнитных явлений естественной областью изучения такого общего феномена, как динамический хаос. Теперь для описания динамики магнитных систем потребовались новые характеристики — такие как фрактальная размерность,

показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова, нелинейные резонансы и их перекрытие и др. Использование методов теории хаоса позволило найти новый подход к целому ряду старых задач физики магнитных явлений. Так, например, оказалось, что хорошо известные суловские неустойчивости являются элементарными бифуркациями на пути к маломодовому хаосу спиновых волн с образованием странного аттрактора.

Общей современной тенденцией в исследовании нелинейной динамики в физических системах является выделение изучения хаоса в каждой отдельной области физики в самостоятельное направление (например, оптический хаос [11]). По-видимому, то же самое происходит в физике магнитных явлений, где изучение «магнитного хаоса» (МХ) или «магнитной турбулентности» оформляется, по существу, в самостоятельное направление магнетизма.

Хаос в магнитных системах может наблюдаться как в стационарном режиме (диссипативный хаос, странный аттрактор (СА)), так и в переходном (бездиссипативный или гамильтонов хаос). Подобное деление МХ на гамильтоновый и диссипативный является, с одной стороны, достаточно естественным и общепринятым при изучении других физических систем, а с другой — необходимым, так как хаос в гамильтоновых и диссипативных системах имеет ряд существенно различных черт. В этом обзоре будут рассмотрены примеры как диссипативного, так и гамильтонова хаоса в магнитных системах. Мы сконцентрировали внимание на системах, где МХ исследован наиболее полно: нелинейные взаимодействия спиновых волн при параметрической накачке, спиновые цепочки и спин во внешнем переменном магнитном поле, ЯМР-мазеры, ЯМР с динамическим сдвигом частоты прецессии намагниченности. Также рассмотрен феномен квантового хаоса в спиновых системах. Порядок расположения материала в обзоре отражает степень изученности рассмотренных систем.

Перед тем, как перейти к изложению характерных особенностей перехода от регулярного поведения к хаосу в магнитных системах, кратко остановимся на основных признаках хаоса и критериях его возникновения в простейших гамильтоновых и диссипативных динамических системах.

## 2. Общие представления о переходе к хаосу в динамических системах

В настоящее время достаточно хорошо известны основные условия перехода к хаосу в простых гамильтоновых и диссипативных системах [1, 4—9]. Важным обстоятельством является то, что для возникновения хаоса не требуется большого числа степеней свободы — достаточно одной степени свободы, взаимодействующей с внешним периодическим полем (1,5 степеней свободы). Наоборот, существует широкий класс так называемых полностью интегрируемых систем [12, 13], в том числе и с бесконечным числом степеней свободы, в которых переход к хаосу не реализуется ни при каких условиях.

В качестве основных характеристик динамического хаоса приведем следующие: локальная неустойчивость траекторий в фазовом пространстве<sup>(2\*)</sup>; быстрое (особенно на начальном этапе) затухание фазовых корреляционных функций, следствием чего является диффузия броуновского типа по медленным переменным; непрерывный частотный спектр динамических переменных.

Рассмотрим теперь несколько простейших динамических систем с хаотической динамикой: отображение Чирикова (или стандартное отображение) [3, 4], возникающее при изучении бездиссипативного движения плоского ротора, взаимодействующего с периодической последовательностью коротких

толчков<sup>(3\*)</sup>; отображение Заславского [5], учитывающее эффекты диссипации в предыдущей задаче; логистическое отображение — один из простейших примеров динамической системы с хаосом, переход к которому во многом аналогичен переходу к хаосу в магнитных системах с небольшим числом степеней свободы.

**2.1. Хаос в гамильтоновых системах.** Параметр стохастичности. Критерий Чирикова перекрытия нелинейных резонансов. В теории динамического хаоса в гамильтоновых классических системах полезными понятиями, характеризующими переход к хаосу, является параметр стохастичности и параметр Чирикова перекрытия нелинейных резонансов [3, 4]. Введем здесь эти понятия, используя простейший пример нелинейной системы — плоский ротатор, взаимодействующий с внешним полем в виде бесконечной периодической последовательности  **$\delta$ -образных импульсов**. Гамильтониан системы имеет вид

$$H(J, \theta, t) = \frac{G}{2} J^2 + \varepsilon T \cos \theta \cdot \delta_T(t), \quad (2.1)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\nu t) \quad (\nu = 2\pi/T),$$

где  $G$  — обратный момент инерции ротатора,  $\varepsilon$  — амплитуда внешнего поля,  $J, \theta$  — действие и фаза ротатора,  $T$  — период следования импульсов. Уравнения движения для  $J, \theta$  имеют вид

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \varepsilon T \sin \theta \cdot \delta_T(t) = \frac{\varepsilon}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\theta - n\nu t), \quad (2.2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = GJ \equiv \omega(J).$$

Интегрирование уравнений движения (2.2) на **временном интервале**  $t_{n-1} - 0 \div t_n - 0$  ( $t_n \equiv nT$ ) приводит к отображению Чирикова (стандартному отображению) [3, 4]

$$I_n = I_{n-1} + K \sin \theta_{n-1}, \quad (2.3)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + I_n \pmod{2\pi},$$

где  $I_n = I(t_n - 0) = GTJ_n$ ,  $\theta_n \equiv \theta(t_n - 0)$ ,  $K \equiv \varepsilon GT$ . Дискретное отображение (2.3) сохраняет площадь в фазовом пространстве:  $|\partial(I_n, \theta_n)/\partial(I_{n-1}, \theta_{n-1})| = 1$ . Каждой начальной точке  $(I_0, \theta_0)$  согласно (2.3) соответствует некоторая фазовая траектория, зависящая от единственного параметра  $K$ , называемого параметром стохастичности. Вид фазового пространства для различных значений параметра стохастичности  $K$  приведен на рис. 1. Сразу следует отметить весьма важное обстоятельство — даже в простейшем случае системы (2.1) с 1,5 степенями свободы фазовое пространство, как видно из рис. 1, является достаточно сложным (точки на рис. 1,б соответствуют единственной хаотической траектории!) и его детальный анализ возможен лишь с привлечением ЭВМ. Таким образом, в настоящее время теоретический анализ динамического хаоса даже в системах с небольшим числом степеней

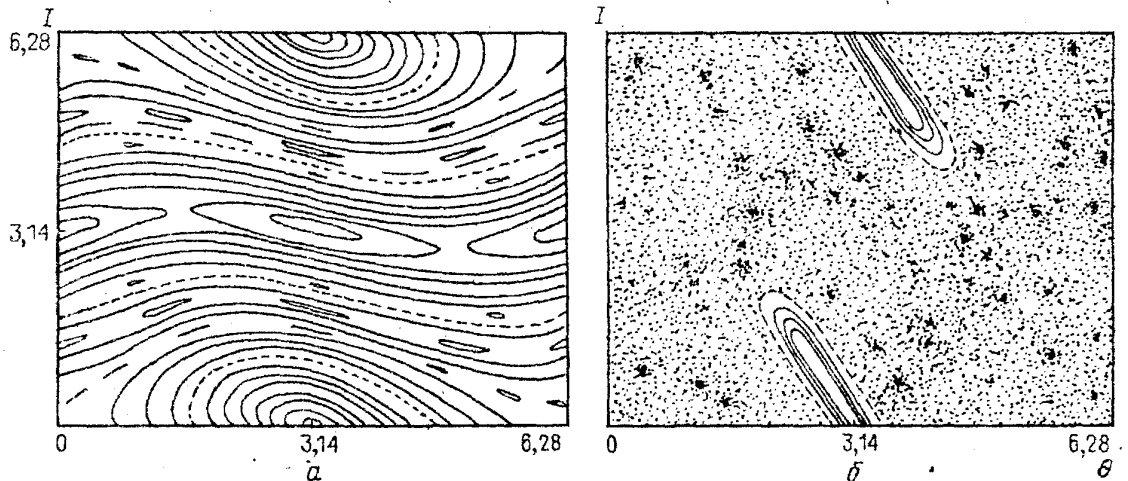


Рис. 1. Фазовая плоскость стандартного отображения.  $a$  —  $K = 0,6$ .  $b$  —  $K = 4,2$

свободы может быть проведен только в рамках полукачественных методов с последующим привлечением численного эксперимента. Ниже мы рассмотрим более подробно один из таких методов, основанный на понятии взаимодействующих нелинейных резонансов.

Как видно из рис. 1,  $a$ , при достаточно малых  $K$  фазовое пространство  $(1, \theta)$  в основном содержит два типа траекторий: 1) захваченные, соответствующие колебательным движениям в окрестностях резонансов; 2) пролетные, отвечающие вращательным движениям. Захваченные и пролетные траектории разделяются сепаратрисными слоями, содержащими стохастические траектории. Однако при  $K \ll 1$  размеры таких слоев экспоненциально малы по действию [4]. Анализ отображения (2.3) показывает, что при  $K < K_c \approx 1$  глобальный хаос в системе (2.1) отсутствует, т.е. хаотические фазовые траектории лежат в ограниченных по действию областях фазового пространства.

Определим размеры областей под действием  $\delta I_n$  первичных резонансов, центры которых  $J_n^0$  находятся из уравнения:  $\dot{\theta} = \omega(J^0) = n\nu$ . Отсюда получаем для  $J_n^0 = GTJ_n^0$ :

$$J_n^0 = 2\pi n, \quad n - \text{целое.} \quad (2.4)$$

Пусть система при  $t = 0$  находилась в окрестности резонанса с номером  $n$ . Тогда при  $K \ll 1$  для оценки изменения действия  $I(t)$  можно пренебречь влиянием остальных резонансов (оставить в сумме (2.2) только член с номером  $n$ ). Такое приближение соответствует резонансному гамильтониану:

$$H_p = \frac{G}{2}(J - J_n^0)^2 + \frac{\varepsilon}{T} \cos \psi_n, \quad \psi_n = \theta - n\nu t. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует оценка ширины резонанса по действию:

$$\delta I_n = 2|I_{\max} - J_n^0| = 4(\varepsilon GT)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Отметим, что в данном случае  $\delta I_n$  не зависит от  $n$ , поскольку все гармоники внешней силы в (2.2) не зависят от действия, что обычно выполняется лишь приближенно.

Приближенный критерий перехода к глобальному хаосу может быть

получен из условия взаимодействия (перекрывтия) первичных резонансов. Для системы (2.1) расстояние по действию между ближайшими первичными резонансами есть

$$\Delta I_n \equiv |I_{n+1}^0 - I_n^0| = 2\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (2.7)$$

Введем параметр Чирикова перекрывтия нелинейных резонансов [3, 4], который в данном случае может быть представлен в виде

$$\bar{K} = \frac{\delta I}{\Delta I} = \frac{2}{\pi}(\epsilon GT)^{1/2} = \frac{2}{\pi}K^{1/2}. \quad (2.8)$$

При  $\bar{K} \ll 1$  ( $K \ll 1$ ) движение локально регулярное, а при  $K \gtrsim 1$  происходит переход к глобальному хаосу. Как видно из (2.8), имеет место соотношение  $\bar{K}^2 \approx K$ , которое, как правило, сохраняется и в более общем случае [3, 5]. Основные свойства системы (2.1) в области сильно развитого хаоса ( $K \gg 1$ ) могут быть представлены в следующем виде [5]:

1) Локальная неустойчивость траекторий<sup>(4\*)</sup>:

$$|\delta\theta_n/\delta\theta_0| \sim K^n = \exp(nh_0). \quad (2.9)$$

Инкремент  $h_0 = \ln K$  пропорционален максимальному ляпуновскому показателю, а средняя величина  $h_0$  по фазовому пространству носит название энтропии Колмогорова [7, гл. 5.2].

2) Затухание фазовых корреляций типа

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\theta_n) d\theta_0 \sim \exp(-h_0/2). \quad (2.10)$$

3) Диффузионный рост средней энергии системы:

$$\bar{I}_n^2 \approx \bar{I}_{n-1}^2 + \frac{K^2}{2} = I_0^2 + \frac{K^2}{2}n, \quad (2.11)$$

где черта означает усреднение по ансамблю траекторий. Все свойства 1 — 3 могут проявляться в магнитных системах (см. раздел 5).

**2.2. Хаос в диссипативных системах.** Странный аттрактор. Фрактальная размерность. В диссипативных системах фазовый объем сжимается. Этим диссипативные системы отличаются от гамильтоновых, в которых согласно теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется. Вследствие такого сжатия фазовая траектория стягивается к некоторому множеству точек, называемому аттрактором. Для стационарного состояния аттрактором является точка (узел или фокус), имеющая размерность ноль. При периодическом движении аттрактор — предельный цикл — имеет размерность один. В случае квазипериодического движения с двумя несоизмеримыми частотами траектория представляет собой незамкнутую спираль и стягивается к двумерному тору. Если несоизмеримых частот  $l$ , то аттрактор имеет вид  $n$ -мерного тора. Аттрактор, соответствующий стационарному хаотическому движению, называют странным или стохастическим. Рассмотрим, как возникает СА, на примере диссипативного стандартного отображения [5, дополнение 3].

Уравнения (2.2), обобщенные на случай конечной диссипации, имеют

вид

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\gamma(J - J_0) + \varepsilon T \cos \theta \cdot \delta_T(t), \\ \dot{\theta} &= \omega(J), \quad \omega(J) = \omega_0 \left( 1 + \alpha \frac{J - J_0}{J_0} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.12)  $J_0$  — действие, соответствующее устойчивому циклу при  $\varepsilon = 0$ . Условие  $J_0 = 0$  означает, что при  $\varepsilon = 0$  в исходной физической системе, кроме диссипации, существует также механизм подкачки энергии. Соответствующее (2.12) дискретное отображение имеет вид

$$y_{n+1} = \exp(-\Gamma)(y_n + \varepsilon \cos 2\pi x_n), \quad (2.13)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\omega_0 T}{2\pi}(1 + \alpha \mu y_n) + \frac{K_0 \mu}{2\pi} \cos 2\pi x_n \pmod{1},$$

где  $y_n = (J_n - J_0)/J_0$ ,  $x_n = \theta_n/2\pi$ ,  $\Gamma = \gamma T$ ,  $\mu = [1 - \exp(-\Gamma)]/\Gamma$ ,  $K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T$ . При  $\Gamma \rightarrow 0$  отображение (2.13) переходит в стандартное отображение (2,3). Из (2.13) следует, что  $|\delta x_{n+1}/\delta x_n - 1| \sim K_0 \mu |\sin 2\pi x_n|$ , поэтому условие существования локальной неустойчивости может быть представлено в виде

$$K = K_0 \mu = (K_0/\Gamma)[1 - \exp(-\Gamma)] \gg 1. \quad (2.14)$$

Отображение (2.13) в этом случае приводит к СА, вид которого приведен на рис. 2. При  $\Gamma = 0$  условие (2.14) сводится к условию сильного хаоса в бездиссипативном случае  $K_0 \gg 1$ . Необходимо отметить, что для отображения (2.13), как и для стандартного (2,3), имеет место: 1) локальная неустойчивость движения; 2) затухание фазовых корреляционных функций; 3) непрерывный частотный спектр движения. Геометрическая структура СА обладает масштабной инвариантностью, повторяясь на все более мелких масштабах. Такие

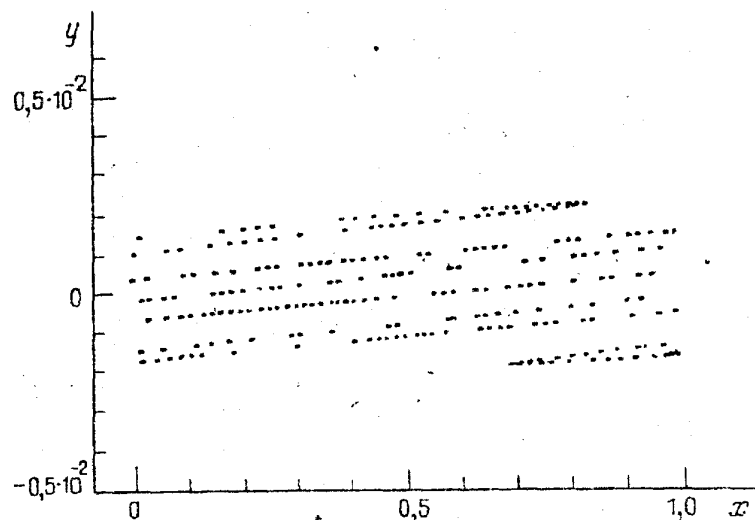


Рис. 2. Странный аттрактор Заславского ( $K = 9,03$ ,  $\Gamma = 5$ ) [5]

структуры — фракталы имеют дробную размерность, называемую фрактальной [14, 15]. Математически корректным определением, допускающим распространение понятия размерности от целых чисел (соответствующих точке, линии, поверхности и т.д.) на дробные, является определение размерности множества по Хаусдорфу:

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (2.15)$$

**В (2.15)**  $\varepsilon$  — безразмерная длина элемента покрытия множества (например, куба),  $N(\varepsilon)$  — число элементов, необходимых для покрытия рассматриваемого множества.

Примеры вычисления размерностей различных фрактальных множеств согласно определению (2.15) представлены, например, в [7, гл. 3; 6, гл. 7]. При малом затухании  $\Gamma \ll 1$  и развитием хаоса  $K \gg 1$  размерность СА у отображения Заславского близка к двум:  $d_H \approx 2 - \Gamma/\ln K$  [5].

Необходимо отметить, что определение размерности по Хаусдорфу (2.15) трудно использовать при обработке экспериментальных данных, так как оно требует слишком больших компьютерных вычислений. Поэтому на практике часто применяют другие методы, которые позволяют оценить фрактальную размерность СА. Чаще всего используется метод корреляционного интеграла [7, гл. 5], при помощи которого можно достаточно быстро определить нижнюю границу размерности Хаусдорфа (эта методика использовалась, например, в работах [37, 38] для определения размерности СА в экспериментах по параметрическому возбуждению спиновых волн в магнетиках).

В общем случае динамическая система может иметь не один, а несколько аттракторов различных типов. Характер движения, который установится при этом в системе, будет зависеть от того, к какому аттрактору при данных начальных условиях будет притягиваться траектория. Когда область притяжения (так называемый бассейн аттрактора) простого аттрактора перекрывается частью СА, он становится метастабильным [15]. В этом случае в течение некоторого (как правило, достаточно длительного) времени траектория находится на СА и движение является хаотическим, а затем траектория переходит в область простого аттрактора и устанавливается стационарное регулярное движение. Подобный эффект получил название кризиса СА [15].

Все введенные в этом пункте понятия возникают при рассмотрении диссипативного хаоса в магнитных системах.

**2.3. Переход к хаосу через бифуркации удвоения периода и перемежаемость.** В настоящее время известно уже достаточно много различных сценариев перехода к хаосу, которые реализуются в различных физических системах [6, 7, 15]. Здесь мы подробнее рассмотрим два таких сценария, которые наиболее часто встречаются в магнитных системах.

**2.3.1. Бифуркации удвоения периода.** Пусть имеется единственная динамическая переменная  $x(t)$ , которая рассматривается в дискретные моменты времени  $n$ . Допустим, что уравнения движения можно свести к отображению:

$$x_{n+1} = f_r(x_n), \quad (2.16)$$

где  $f_r$  — некоторая функция,  $r$  — параметр. Для определенности выберем  $f_r$  в виде  $f_r(x) = rx(1-x)$ . Отображение (2,16) с таким видом  $f$  называется ло-

гистическим, его подробный анализ приведен в [7, гл. 3]. При  $r < 1$  это отображение имеет лишь одну устойчивую неподвижную точку<sup>(5\*)</sup>  $x_1^* = 0$ , к которой притягивается траектория. При  $1 < r < 3$  точка  $x_1^*$  становится неустойчивой и появляется новая неподвижная устойчивая точка  $x_2^* = 1 - (1/r)$ . При  $r = r_1 = 3$  эта точка также становится неустойчивой и возникает устойчивое движение с периодом 2, которому соответствуют две неподвижные точки  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  отображения  $f_r^2(x) \equiv f_r[f_r(x)]$ . Подобную бифуркацию называют бифуркацией удвоения периода (рис. 3). При этом любая последовательность ите-

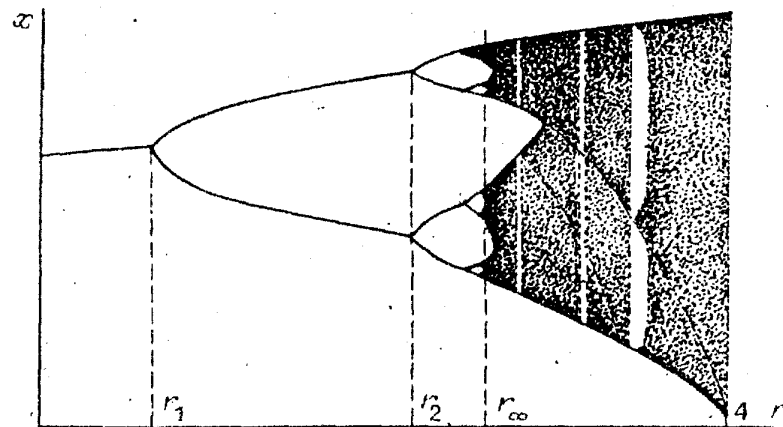


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для логистического отображения [7]

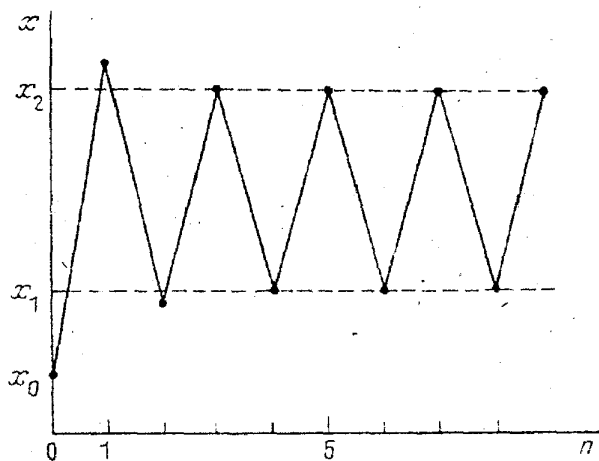


Рис. 4. Вид итераций начальной точки, когда отображение имеет аттрактор периода 2 [7]

или

$$\Delta r_{m+1} = \delta^{-1} \Delta r_m \quad (m \rightarrow \infty), \quad \Delta r_m \equiv r_m - r_{m-1}.$$

Выражение (2.17) означает, что «бифуркационные интервалы» экспоненциально сокращаются с ростом  $m$ . При  $r > r_\infty \approx 3,5699...$  возникает хаос. Однако

раций отображения притягивается при  $n \rightarrow \infty$  к точкам  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  (рис. 4). При  $r = r_2 > r_1$  наблюдается следующее удвоение периода. Фейгенбаумом [16] было обнаружено, что значения  $r_m$ , при которых происходят бифуркации удвоения  $m$ -го порядка, удовлетворяют соотношению

$$\frac{r_m - r_{m-1}}{r_{m+1} - r_m} \rightarrow \delta \equiv 4,6692..., \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$



и в этой области при некоторых  $r$  движение является регулярным — это так называемые окна регулярности (см. рис. 3). Для логистического отображения наблюдались окна регулярности, для которых движение является периодическим с периодами  $p = 3, 5$  и 6. Переход от окна регулярности к хаосу может также осуществляться через бифуркации удвоения периода с универсальными закономерностями типа (2.17). Соотношение (2.17) универсально в том смысле, что оно имеет место для целого класса отображений вида (2.16), у которых функция  $f$  имеет квадратичный максимум.

Рассмотренные бифуркации удвоения часто наблюдаются в магнитных системах. Аналогом параметра  $r$  в этом случае является, например, мощность накачки в ферромагнитном резонансе (см. раздел 3). Обычно в реальных экспериментах не удается проследить большое количество бифуркаций удвоения из-за свойства экспоненциального уменьшения величины  $\Delta r_m$ . Поэтому уже после нескольких таких бифуркаций система переходит к хаосу.

**2.3.2. Переход к хаосу через перемежаемость.** Перемежаемость означает существование достаточно длинных временных интервалов движения с регулярным поведением, прерываемых случайными биениями. Пример такого поведения для логистического отображения показан на рис. 5. При  $r = r_c \equiv 1 + 8^{1/2}$  наблюдается окно регулярности с периодом 3 (рис. 5,а). При  $r$  немного меньших  $r_c$  возни-

кает перемежаемость (рис. 5,б). Причина такого поведения заключается в том, что система вблизи  $r_c$  сохраняет память об исчезнувшей устойчивой неподвижной точке, движение возле которой сильно замедляется, так что система долгое время выходит из ламинарной фазы движения [7, гл. 4]. Средняя продолжительность регулярного движения, как функция расстояния от критической точки, имеет вид [17]

$$\bar{t}_{\text{reg}} \propto |r - r_c|^{-1/2}. \quad (2.18)$$

Описанные выше особенности перехода к хаосу в гамильтоновых и диссипативных системах проиллюстрированы на примере простейших отображений. Естественно, основные свойства хаоса в отображениях переносятся и на непрерывные системы. Однако дискретные отображения не только

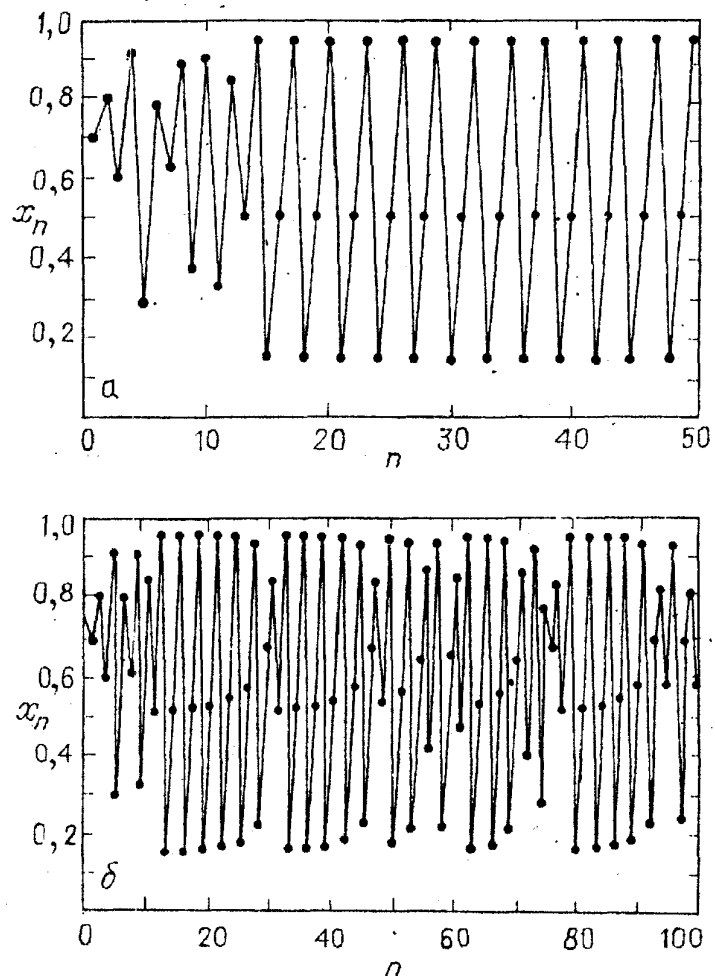


Рис. 5. Вид итераций логистического отображения при  $r_c - r = -0,02$  (устойчивый цикл периода 3) (а) и  $r_c - r = 0,02$  (перемежаемость) (б) [7]

гораздо проще исследовать аналитически и численно, отображения часто естественным образом возникают в экспериментальных ситуациях. Такое возможно, когда на систему действует периодическая последовательность коротких импульсов, а также когда рассматриваются последовательные пересечения фазовой траекторией некоторой гиперповерхности в фазовом пространстве (сечение Пуанкаре). В эксперименте чаще всего рассматривается зависимость интенсивности  $n + 1$  пика реального сигнала  $V_{n+1}$  от интенсивности  $n$ -го  $V_n$  (возвратное отображение). Такое построение задает отображение на сечении Пуанкаре, определяемом условием максимальности данной координаты в фазовом пространстве.

### 3. Хаос при параметрическом возбуждении спиновых волн

В настоящее время наибольшее число работ по МХ посвящено теоретическому и экспериментальному изучению хаоса при параметрическом возбуждении спиновых волн в магнитоупорядоченных материалах. Как видно из предыдущего рассмотрения, переход к хаосу даже в простейших случаях осуществляется через последовательность различного рода предварительных неустойчивостей (бифуркаций). Типичными неустойчивостями такого рода в магнитных системах являются суловские неустойчивости [18], которые проявляются в рождении волновых движений намагниченности при увеличении накачки энергии в систему. При дальнейшем увеличении мощности накачки такие уже возникшие регулярные движения оказываются, как правило, неустойчивыми относительно зарождения новых низкочастотных движений и хаоса. Такой сценарий перехода к хаосу в магнитных системах в значительной степени отличается от картины слабой турбулентности спиновых волн [19, 20]. В последнем случае возбуждается большое число слабо нелинейных волн, взаимодействие между которыми приводит к хаотизации их фаз и к возможности использования кинетического подхода при описании магнитной турбулентности. Такая картина возбуждения и взаимодействия волн не всегда, однако, реализуется. Вопросам устойчивости слаботурбулентных спектров и возникающим здесь сопутствующим явлениям посвящены работы [21]. Здесь нет необходимости останавливаться на деталях различных подходов к изучению динамических свойств магнитных систем. Подробный обзор имеющихся в этой области результатов содержится в [19, 20]. Приведем только некоторые характерные свойства суловских неустойчивостей, которые в целом ряде экспериментов являются типичными предварительными неустойчивостями на пути к хаосу.

**3.1. Суловские неустойчивости.** Обычно теория параметрического возбуждения магнитоупорядоченных веществ строится на основе представлений об элементарных возбуждениях — магнонах или спиновых волнах (СВ). Гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_0 + H_p + H_{\text{int}}; \quad (3.1)$$

$H_0 = \sum \omega_k a_k^* a_k$  описывает свободные СВ ( $a_k, a_k^*$  — комплексные амплитуды волн);  $H_p$  — параметрическое взаимодействие магнонов с внешним полем;  $H_{\text{int}}$  описывает нелинейное взаимодействие магнонов. Учет линейного затухания волн производится путем введения в уравнения движения членов с  $\gamma_k a_k$  ( $\gamma_k$  — декремент):

$$i\dot{a}_k = \frac{\partial H}{\partial a_k^*} - i\gamma_k a_k. \quad (3.2)$$

Гамильтониан  $H_p$  имеет различный вид в случаях, когда переменное поле  $h(t) = h_0 \exp(-i\omega_p t)$  перпендикулярно или параллельно постоянному полю  $H_0$  (поперечная и параллельная накачка СВ).

**3.1.1. Поперечная накачка СВ. Суловские неустойчивости первого и второго рода.** При поперечной накачке взаимодействие магнонов с полем описывается гамильтонианом [18]:

$$H_p = V h_0 [a_0 \exp(i\omega_p t) + \text{к.с.}], \quad (3.3)$$

где  $V = g(SN/2)^{1/2}$ ,  $g$  — гиромагнитное отношение,  $N$  — полное число спинов  $S$  в системе. При малых уровнях возбуждения под действием накачки (3.3) возникает однородный резонанс. Как впервые показал Сул, с ростом амплитуды  $h_0$  взаимодействие однородной моды  $a_0$  с неоднородной  $a_k$  приводит к появлению неоднородных СВ. Если во взаимодействии основную роль играют трехволновые процессы с  $H_{\text{int}} \sim \Sigma(U_{0,k,-k} a_0^* a_k a_{-k} + \text{к.с.})$ , то однородная прецессия распадается на два магнона с импульсами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  и энергиями  $\hbar\omega_k = \hbar\omega_p/2$ . Такой процесс называется суловской неустойчивостью первого рода. Порог этого процесса определяется выражением [20, п. 14]:

$$|U_{0,k,-k}| a_{\text{th}}(k, h_0) = \gamma_k. \quad (3.4)$$

Максимальную связь с накачкой (минимальный порог возбуждения  $a_{\text{th}}$ ) имеют группы СВ с определенным направлением  $\mathbf{k}$  [20, п. 14]. Критическое значение поля  $h_{0,\text{th}}$  может быть весьма малым и составлять для кристаллов ЖИГ в зависимости от отстройки частоты накачки от частоты ФМР  $10^{-3} - 10^{-1}$  Э [20].

При увеличении  $H_0$  или уменьшении  $\omega_p$  можно добиться того, что трехволновые процессы распада будут запрещены. Однако если разрешены четырехволновые процессы, то легко реализуется суловская неустойчивость второго рода:  $2\omega_p = \omega(\mathbf{k}) + \omega(-\mathbf{k})$ . Этот процесс может осуществляться следующим образом: внешнее поле возбуждает при резонансе  $\omega_p \approx \omega_0$  однородную прецессию, а затем происходит четырехмагнонный параметрический процесс  $2\omega_p = \omega(\mathbf{k}) + \omega(-\mathbf{k})$ . Порог этого процесса минимален в точках на резонансной поверхности  $\theta_k = 0, \pi$  ( $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$ ).

**3.1.2. Неустойчивости при параллельной накачке СВ.** Гамильтониан взаимодействия системы магнонов с переменным полем  $h(t)$ , параллельным постоянному, имеет вид [19, 20]

$$H_p = \frac{1}{2} \sum_k [h_0 V_k a_k a_{-k} \exp(i\omega_p t) + \text{к.с.}], \quad (3.5)$$

где  $V_k = g\mu M \sin^2 \theta_k / \omega_k$ ,  $M$  — намагниченность насыщения,  $\theta_k$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}$ . Порог параметрической неустойчивости в этом случае определяется выражением

$$h_{0,th} V_k = \gamma_k. \quad (3.6)$$

Порог минимален для магнонов с частотой  $\omega_k = \omega_p/2$  и с  $\theta_k = \pi/2$ . С ростом  $h_0$  могут возбуждаться магноны с  $\theta_k \neq \pi/2$ . Величина порогового поля  $h_{0,th}$  при параллельной накачке по порядку величины совпадает с пороговым полем поперечной накачки вдали от ФМР.

Перейдем теперь к изучению хаотической динамики при параметрическом возбуждении СВ.

### 3.2. Теоретические модели.

**3.2.1. Параллельная накачка.** Впервые возможность существования режима СА при параметрическом возбуждении СВ была продемонстрирована в работе Асташкиной и Михайлова<sup>(6\*)</sup> [22]. Рассматривалась следующая модель: параллельная накачка параметрически возбуждает в антиферромагнетике (АФМ) пару первичных СВ с волновыми векторами  $\pm \mathbf{k}_0$ , каждая из которых в свою очередь распадается на две вторичные с волновыми векторами  $\pm \mathbf{k}_1, \pm \mathbf{k}_2$ . Гамильтониан системы авторы [22] выбрали в виде

$$\begin{aligned} H = & \omega_{k_0} (|A_{k_0}|^2 + |A_{-k_0}|^2) + [h_0 V \exp(-i\omega_p t) A_{k_0}^* A_{-k_0}^* + \text{к.с.}] + \\ & + \frac{1}{2} T (|A_{k_0}|^4 + |A_{-k_0}|^4) + 2S |A_{k_0}|^2 |A_{-k_0}|^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\Phi A_{\pm k_0} a_{\pm k_1}^* a_{\pm k_2}^* + \text{к.с.}) + \omega_{k_1} |a_{\pm k_1}|^2 + \omega_{k_2} |a_{\pm k_2}|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Этот гамильтониан описывает, кроме параметрического возбуждения внешним полем  $h(t) = h_0 \exp(-i\omega_p t)$  первичных волн (с амплитудами  $A$ ) и их распада на вторичные (с амплитудами  $a$ ), также процессы нелинейного взаимодействия между первичными волнами ( $T, S$  — амплитуды взаимодействия). При этом выполняются условия резонанса:  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$ . Затухание волн учитывалось в уравнениях движения (см. (3.2)); считалось, что  $\gamma_{k_{12}} = \gamma_{k_0} \equiv \gamma$ . При некоторых упрощающих предположениях, которые подтвердились при численном эксперименте, в [22] была получена система четырех действительных дифференциальных уравнений и проведен анализ ее устойчивости. При изменении параметра

$$x_0 = [(h_0/\gamma |V|)^2 - 1]^{1/2}, \quad (3.8)$$

который характеризует превышение над порогом параметрической неустойчивости ( $x_0 = 0$ ) для первичных волн  $A_{\pm k_0}$ , наблюдается следующая последовательность бифуркаций. При  $0 < x_0 < x_1 \equiv 2|S|\gamma/|\Phi|^2$  в фазовом пространстве существует устойчивая стационарная точка  $P$  (устойчивый фокус), в которую стягиваются фазовые траектории. Этот режим соответствует возбуждению первичных СВ с  $A_{\pm k_0} \neq 0$  и отсутствию вторичных волн ( $a_{\pm k_{12}} = 0$ ), по отношению к которым первичные волны являются источником накачки. Значение  $x_0 = x_1$  определяет порог рождения вторичных волн. При  $x_0 = x_1$  точка  $P$  теряет устойчивость и появляется стационарная устойчивая точка  $\bar{P}$ . В этом

режиме амплитуда первичных волн заморожена на уровне  $|A_{\pm k_0}^{(0)}| = (\gamma/|\Phi|)^2$  и стационарное значение амплитуд вторичных волн  $a_{k_{12}} \neq 0$  поддерживается за счет потока энергии от первичных волн. При даль-

нейшем увеличении  $x_0$  до некоторого уровня точка  $\bar{P}$  становится неустойчивой, и рождается предельный цикл. Возникновение этой неустойчивости связано с тем, что первичные волны, через которые передается энергия от внешней накачки к вторичным волнам, не способны пропускать очень большой поток энергии, сохраняя при этом свои амплитуды замороженными на уровне  $|A_{\pm k_0}^{(0)}|$ . При дальнейшем увеличении  $x_0$ , как показал численный расчет, происходит разрушение предельного цикла. При этом система переходит к хаосу (рис. 6). В [22] был проведен расчет величины максимального ляпуновского показателя  $\lambda$  как функции параметров системы. Величина  $\lambda$  достигала максимума при  $x_0 \approx 4x_1$ . При  $x_0 > 6x_1$  наблюдалось чередование устойчивых предельных циклов и областей хаотического поведения. Авторы [22] высказали предположение, что обнаруженный ими динамический хаос в простой модельной системе (3.7) может иметь место в различных ФМ и АФМ при разных способах возбуждения и привлечет внимание к изучению хаотических колебаний при параметрическом возбуждении СВ в магнитоупорядоченных кристаллах. Этот прогноз полностью подтвердился [23 — 42].

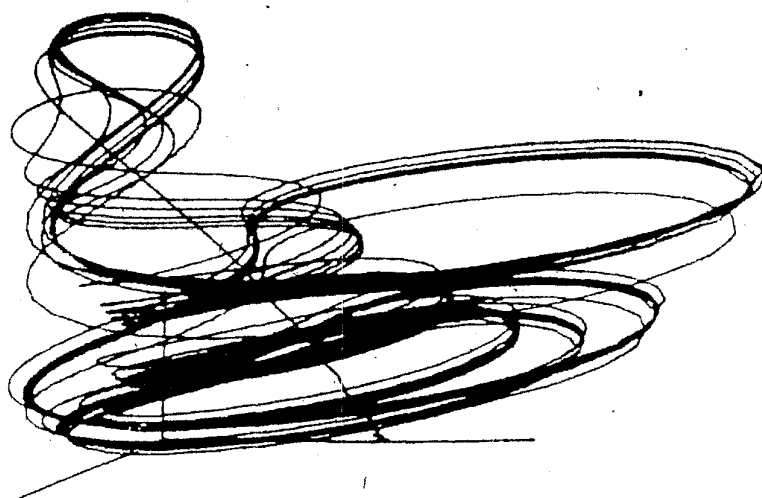


Рис. 6. Вид фазовой траектории при хаотическом движении ( $x_0 = 4x_1$ ) в модели Асташкиной—Михайлова [22]

Необходимо отметить, что описанный в [22] переход к хаосу возможен, когда законами сохранения разрешен распад параметрически возбужденных СВ на две СВ, на пару из СВ и фонона либо, на два фонона. Однако в магнитоупорядоченных материалах часто встречается ситуация, когда подобные процессы запрещены и вносят вклад лишь в затухание СВ. Если разрешены четырехволновые процессы, то в этом случае гамильтониан имеет вид (3.1), (3.5) и [9, 20]

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} (S_{kk'} a_k^* a_{-k}^* a_k a_{-k'} + 2T_{kk'} a_k^* a_k^* a_k a_{k'}). \quad (3.9)$$

В работах [23] было численно показано, что в этой ситуации также возможен хаос. В [23] была предложена простейшая модель, в которой учитываются лишь две моды с волновыми векторами, направленными перпендикулярно полю. Предполагалось также, что все коэффициенты связи поля с волнами  $V_{k_1}$ ,  $V_{k_2}$ , нелинейного взаимодействия СВ  $T_{k_1 k_2}$  и  $S_{k_1 k_2}$ , затухания  $\gamma_k$  одинаковы для обеих волн, отстройки частот волн от частоты накачки  $\omega_p$  совпадают:  $\Delta\omega_1 \equiv (\omega_{k_1} - \omega_p/2) = \Delta\omega_2 \equiv (\omega_{k_2} - \omega_p/2) \equiv \Delta\omega$ . Подобная симметричная модель является простейшей, в которой возможен хаос при параллельной накачке.

Намагниченность и поглощение выражаются через парные корреляторы вида  $n_j = \langle a_{k_j}^* a_{k_j} \rangle$  и  $\sigma_j = \langle a_{k_j} a_{-k_j} \rangle \exp(i\omega_p t)$  ( $j = 1, 2$ ). Задача теории фактически сводится к написанию кинетических уравнений для этих величин. В [23] показано, что решения этих уравнений описывают стационарные состояния, периодические движения, удвоения периода и хаос. Существуют три типа стационарных точек: 1)  $n_1 = n_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ; 2)  $n_i = \sigma_i = 0$ ,  $n_j \neq 0$ ,  $\arg \sigma_j \neq 0$  ( $i \neq j$ ); 3)  $n_1 = n_2 \neq 0$ ,  $\arg \sigma_1 = \arg \sigma_2 \neq 0$ . Выше порога суловской неустойчивости (3.6) тривиальная стационарная точка типа 1 становится неустойчивой. При  $1 \leq h_0 V/\gamma < 4$  траектории притягивались к стационарным точкам типа 2 и 3. Если  $h_0 V/\gamma \geq 4$ , то возникают предельные циклы. При этом возможно явление гистерезиса, когда при фиксированном  $h_0$ , в зависимости от начальных условий, траектории притягиваются либо к предельному циклу, либо к устойчивому состоянию. При дальнейшем увеличении  $h_0$  наблюдалась последовательность удвоений периода колебаний, приводящая при  $h_0 V/\gamma \approx 5,53$  к хаосу (СА). Определенный численно параметр подобия  $\delta \approx 4,675$  оказался очень близким к универсальному параметру Фейгенбаума для одномерных отображений (2.17).

«Асимметричное» обобщение двухмодовой модели рассмотрено в [24]. Наличие различных параметров для каждой из волн может, в частности, приводить к появлению других «субгармонических» сценариев перехода к хаосу, отличных от удвоения периода. Экспериментально подобные сценарии, так же как и сценарий Фейгенбаума, наблюдались в кристаллах железоиттриевого граната (ЖИГ).

**3.2.2. Поперечная накачка.** Теоретическое исследование перехода к хаосу при поперечной накачке было впервые выполнено в работах [25 — 27]. Гамильтониан системы имеет вид (3.1), (3.3) и (3.9). В [25 — 27] была предложена и проанализирована простейшая модель, в которой однородная мода с  $k = 0$  связана лишь с парой мод с волновыми векторами  $k$  и  $-k$ . Численный анализ подобной системы показал, что при возбуждении выше порога суловской неустойчивости второго рода возникает СА. Эти теоретические работы выполнены в связи с попыткой объяснить пионерские эксперименты Гибсона и Джефриса [34], из этих соображений выбирались значения параметров. Полученные результаты согласуются качественно с экспериментальными (о возможности количественного сравнения см. следующий раздел). При численном моделировании в [26, 27] наблюдался переход к хаосу через удвоения периода (рис. 7,а-г) с параметром подобия  $\delta \approx 4,53$ . С ростом поля наблюдались окна с периодом  $3T \times 2^n$  (рис. 7,д-з). Возвратное отображение [27] оказалось подобным найденному в эксперименте.

В условиях эксперимента по наблюдению спин-волнового хаоса магнит-

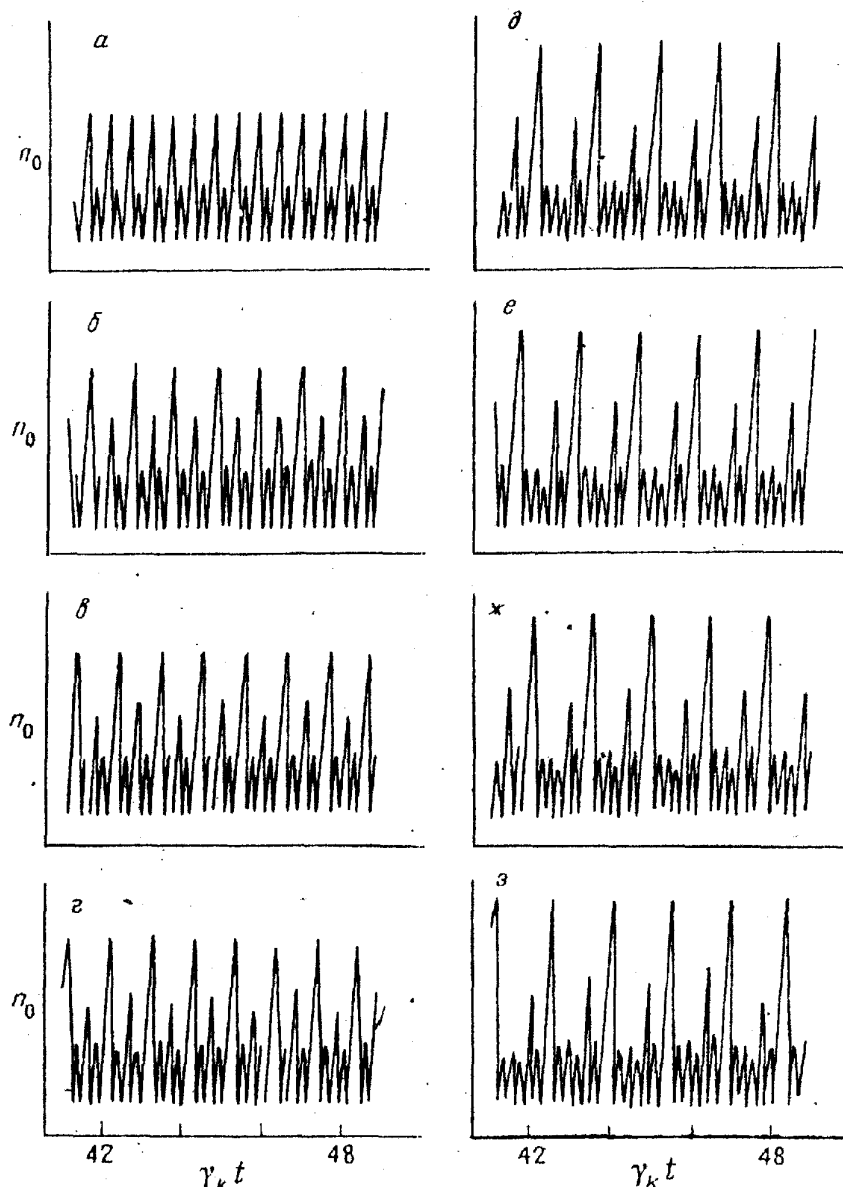


Рис. 7. Бифуркации колебаний плотности магновов однородной моды  $n_0$  при возрастании мощности накачки  $r = h_0/h_{0,к}$ . а — Период 1 ( $r = 7,36$ ). б — Период 2 ( $r = 7,64$ ). в — Период 4 ( $r = 7,72$ ). г — Начало хаоса ( $r = 7,77$ ). д — Период 3 ( $r = 8,197$ ). е — Период 6 ( $r = 8,21$ ). ж — Период 12 ( $r = 8,22$ ). з — Хаос ( $r = 8,24$ ) [27]

ный образец помещают в резонатор. Естественно, наличие резонатора может существенно сказаться на нелинейной динамике. Учету влияния электромагнитных мод на спиновые были посвящены работы [28,29]<sup>(7\*)</sup>. Наличие электромагнитных мод привело к появлению нового перехода к хаосу посредством «колебаний с иррегулярными периодами» [28].

Случай произвольной «косой накачки» СВ<sup>(8\*)</sup> рассмотрен в [30] (здесь также учитывались электромагнитные моды резонатора). В этой работе также предпринята попытка продвинуться дальше приближения двух мод. Показано, что учет третьей моды приводит, в частности, к появлению квазипериодического сценария перехода к хаосу [30]. Недавно при достаточно общих условиях доказана теорема [31], утверждающая, что решения диссипативного уравнения Ландау—Лифшица имеют аттрактор конечной размерности. Из этой теоремы следует, что после некоторого «переходного времени», для описания

СВ-турбулентности достаточно конечного числа мод. Однако эта теорема не позволяет надежно предсказать число необходимых мод, и поэтому этот вопрос остается, по существу, открытым (см. также обсуждение в [32, 33]).

**3.3. Обсуждение экспериментов.** Начиная с пионерской работы Гибсона и Джефриса [34], в которой впервые наблюдался переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, к настоящему времени выполнено уже довольно много экспериментов на различных магнитных материалах, в которых продемонстрировано разнообразие переходов к хаосу при параметрическом возбуждении СВ (см. таблицу).

**3.3.1. Хаос при суловской неустойчивости второго рода в легированном галлием ЖИГ.** ЖИГ благодаря рекордно низкому затуханию СВ, высокой температуре Кюри и отличному качеству кристаллов всегда являлся самым популярным объектом в исследованиях параметрического резонанса. Использование в работе [34] легированного галлием ЖИГ, имеющего более низкую, чем чистый ЖИГ, намагниченность, позволило понизить резонансное поле и резонансные частоты. При параллельной накачке хаос не был обнаружен, по-видимому, из-за недостаточно высокой мощности использовавшегося переменного поля. По этой причине основные измерения проводились в условиях суловской неустойчивости второго рода.

Наблюдалась богатая картина сложных колебательных режимов и переходов между ними: стационарные состояния, колебания с периодом 250 кГц и затем 16 кГц, последовательность удвоений периода, хаос, окна с периодами 3 и 5 и удвоение этих периодов. Некоторые результаты представлены на рис. 8 и 9. Анализ продемонстрировал разнообразную структуру СА. В частности, возвратное отображение, построенное по данным рис. 8,д, имеет вид квадратичной параболы и хорошо моделируется одномерным логистическим отображением (см. раздел 2.3).

При надкритичности, превышающей пороговую примерно в 30 раз ( $h_0/h_{0,th} \approx 30$ ), возникали автоколебания с частотой  $f_1 \approx 250$  кГц, с ростом  $h_0$  амплитуда этих колебаний уменьшалась, а при  $h_0/h_{0,th} \approx 31$  появлялись новые колебания с частотой  $f_2 \approx 16$  кГц (рис. 8,а,б). Природа этих колебаний вызвала дискуссию в литературе, поэтому о них следует сказать подробнее.

Начнем с концепции авторов эксперимента. Вследствие конечности ширины линии однородного резонанса уширенная однородная мода может возбуждать волновой пакет с шириной  $\Delta\omega_k$ , движущийся как целое со скоростью  $d\omega_k/dk$ . В сфере радиуса  $R$  минимальный импульс стоячей волны  $\Delta k = \pi/R$ , а соответствующая частота автоколебаний  $\Omega = (\pi/R)d\omega_k/dk$ . В рассматриваемом случае закон дисперсии имеет вид

$$\omega_k^2 = (\omega_0 - \omega_m/3 + gDk^2)(\omega_0 - \omega_m/3 + gDk^2 + \omega_m \sin^2 \theta_k), \quad (3.10)$$

где  $\omega_m = g \cdot 4\pi M = 5,27 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $g = 17,58 \cdot 10^6 \text{ (Э} \cdot \text{с)}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 8,16 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $D = 5,4 \cdot 10^{-9} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ . При суловской неустойчивости второго рода порог минимален для волн с  $\theta_k = 0$  и соответствующая частота автоколебаний определяется формулой

$$f = \Omega/2\pi = (1/2R)d\omega_k/dk = (1/R)(gD\omega_m/3)^{1/2}. \quad (3.11)$$

При  $R = 0,46$  мм частота  $f_1$  приблизительно равна 275 кГц, что близко к



Вещество	Тип возбуждения, тип неустойчивости	Частота накачки, ГГц	$H$ , кЭ	$T$ , К	Размеры, мм	Характерная частота нелиней- ных колебаний	Год	Литера- тура
Ga-ЖИГ и ЖИГ	$h(t) \perp H$ , неустой- чивость 2 рода	1,3	0,46	300	Шар, $R = 0,47$	$f = 250$ кГц, $f = 16$ кГц	1984	[34]
ЖИГ	$\perp$ , 1 рода	9,2	$\leq 4$	300	Шар, $R = 0,33$	16 кГц, $10^4 - 10^6$ Гц	1988	[30]
ЖИГ	$\perp$ , 1 рода	2,5	0,76	300	Шар, $R = 10$	5 — 400 кГц	1987	[39]
ЖИГ		9,4	1,54	300	Сферы и диски, $R = 1$	50 — 300 кГц	1986	[24]
ЖИГ	$\parallel$	8,86	1,935	4,2	Диск, $R = 0,64$ , $H = 0,4$	—	1986	[35]
CsMnF <sub>3</sub>	$\parallel$	18	1,5 — 2,5	1,4 — 1,6	Цилиндр, $R = 1$ , $H = 1$	$\sim 100$ кГц	1986 1988	[41] [42]
CuCl <sub>2</sub> ·2H <sub>2</sub> O	$\parallel$	8,91	6,3	1,4	$1,1 \times 1,5 \times 3,9$	35 МГц	1984	[36]
(CH <sub>3</sub> NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> CuCl <sub>4</sub>	$\parallel$	9,4	1,05 + 1,15	1,65	Диск, $R = 4,5$ , $H = 0,15$	8 кГц	1986 1987	[37] [38]
[NH <sub>3</sub> (CH <sub>2</sub> NH <sub>2</sub> )CuCl <sub>4</sub>	$\parallel$	9,36	8,9	1,7	—	$\sim 1$ МГц	1986	[29]
(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> MnCl	$\perp$	70	7 — 9	< 2,2	—	2 — 5 кГц	1989	[40]

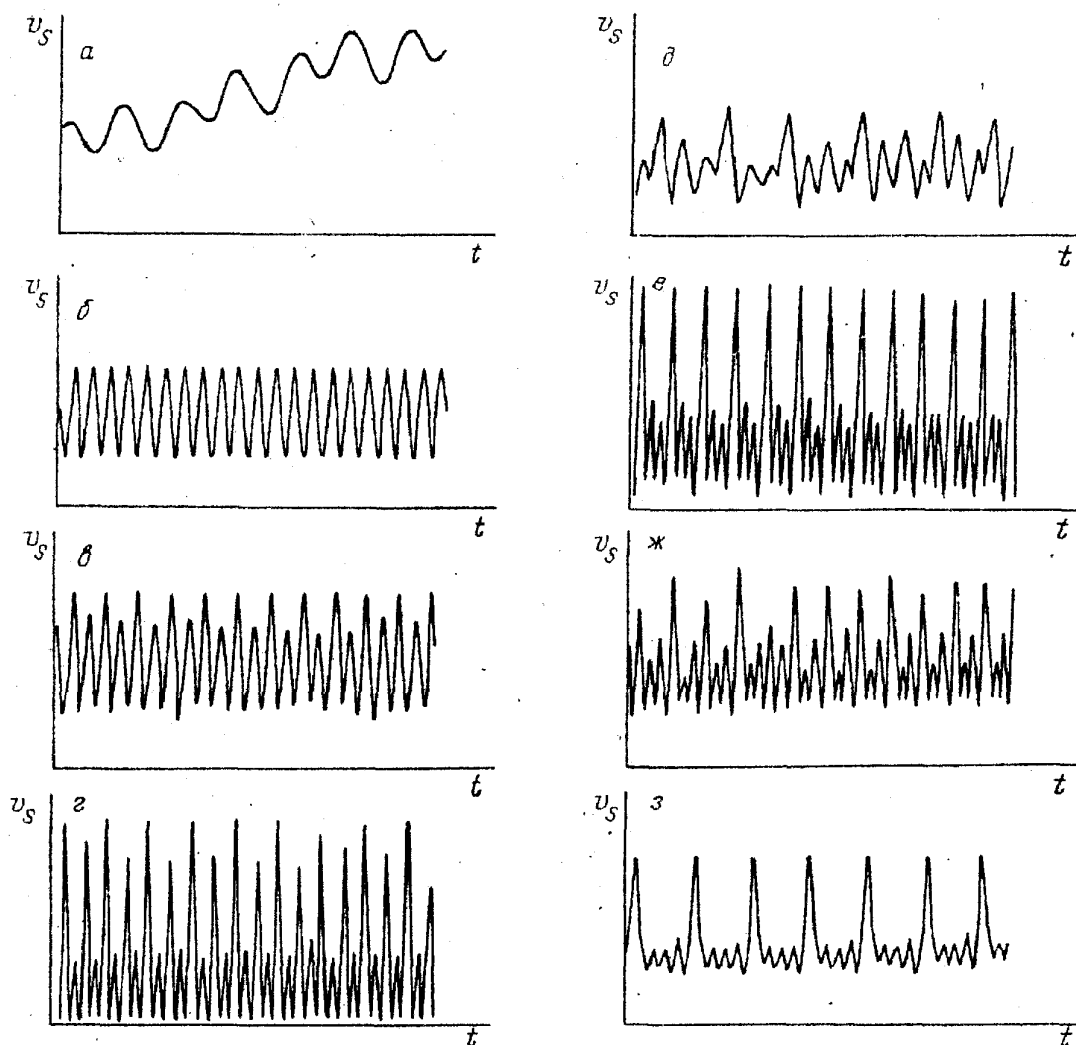


Рис. 8. Типы колебаний в эксперименте Гибсона—Джеффриса [34]. *a* — Автоколебания с частотой  $f_1 \approx 250$  кГц. *б* —  $f_2 \approx 16$  кГц. *в* — Бифуркация  $f_2/2$ . *г* — Бифуркация  $f_2/4$ . *д* — Хаос. *е* — Период 3. *ж* — Бифуркация к периоду 6. *з* — Период 4, отличный от  $r$

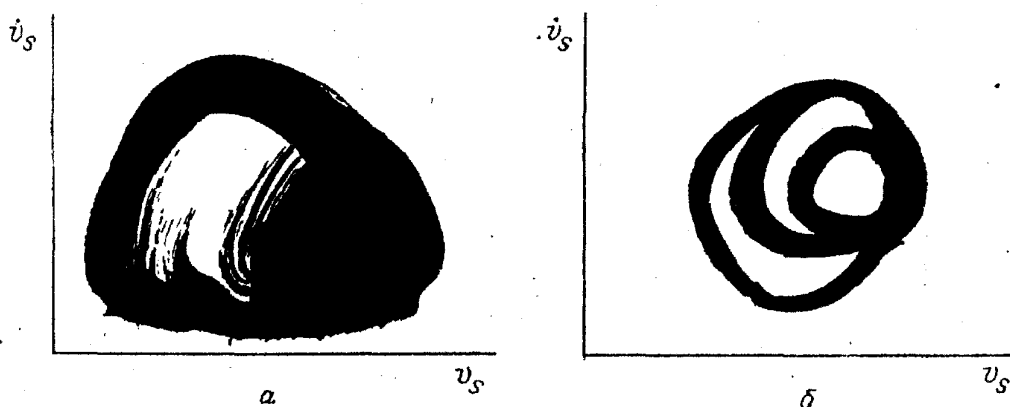


Рис. 9. Фазовый портрет в координатах сигнал ( $V_s$ ) — производная ( $\dot{V}_s$ ). *a* — Автоколебания с периодом 3. *б* — Хаос [34]

экспериментальному значению 250 кГц. Измерения, проведенные на образцах с  $R = 0,33$  мм, показали, что частота  $f_1$  изменилась пропорционально  $R^{-1}$ .

В случае сфер из чистого ЖИГ с  $R = 0,33$  мм измеренная частота  $f_1 \approx 900$  кГц, что близко к значению 920 кГц, полученному из (3.11). Аналогично была предпринята попытка объяснить частоту  $f_2 = 16$  кГц. Однако в этом случае приходится считать, что возбуждены волны с  $\theta_k = 60^\circ$ , поскольку именно для этого значения формула  $f = (1/2R)d\omega_k/dk$  дает  $f = 16$  кГц. С другой стороны, из условия  $\omega_{k=0} = \omega_p$  следует, что  $\theta_k = 60,4^\circ$ . Поэтому было высказано предположение, что волновой вектор соответствующих волн близок к нулю. К сожалению, нет сведений о поведении частоты  $f_2$  при изменении параметров системы, например  $R$ .

Другая точка зрения на природу автоколебаний изложена в [24, 25]. Предполагалось, что одна из двух наблюдавшихся частот возникает как бифуркация рождения цикла в результате нелинейного взаимодействия между однородной и неоднородной модами (см. раздел 3.2). Однако численные оценки получились на два порядка больше действительных значений:  $5,5 \cdot 10^6$  Гц [24] и  $0,9 \cdot 10^6$  Гц [25].

**3.3.2. Хаос при суловской неустойчивости первого рода в ЖИГ.** Зависимость наблюдаемых переходов к хаосу от двух параметров постоянного поля

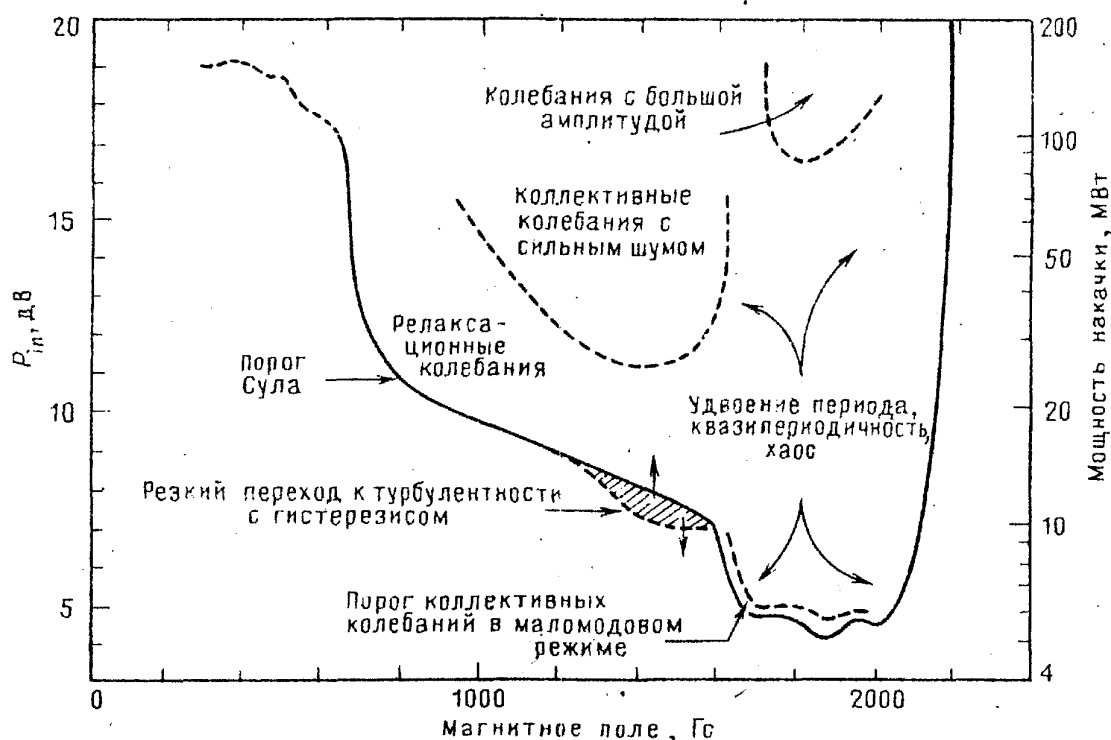


Рис. 10. Фазовая диаграмма [30]

$H_0$  и мощности накачки  $P_{in}$  показана на диаграмме (рис. 10) [30]. На этой диаграмме можно видеть: порог суловской неустойчивости с генерацией одной СВ-моды с шириной  $< 0,5$  Гс; автоколебания с характерной частотой  $10^4 - 10^5$  Гц; переходы к хаосу через удвоения периода и квазипериодичность; быстрый переход к турбулентности с гистерезисом; иррегулярные релаксационные колебания и аperiodические пульсации. Большинство подобных коле-

баний наблюдались в конечномоновомых моделях (см. предыдущий раздел).

Как уже отмечалось в разделе 2.2, возможен кризис СА. В эксперименте [39], выше порога суловской неустойчивости 1-го рода, наблюдался СА (с размерностью  $\approx 2,7$ ), часть которого пересекалась с бассейном простого (нехаотического) аттрактора с размерностью 4 или 5, в зависимости от мощности накачки. Часть времени система проводила на СА, а затем переходила в область притяжения периодического аттрактора. В результате наблюдаемый сигнал (рис. 11) имел вид хаотических колебаний в течение времени  $t_{tr}$ , а затем экспоненциально быстро устанавливались периодические колебания. При этом  $t_{tr}$ , которое может быть весьма большим, степенным образом зависит от обратной мощности накачки [39].

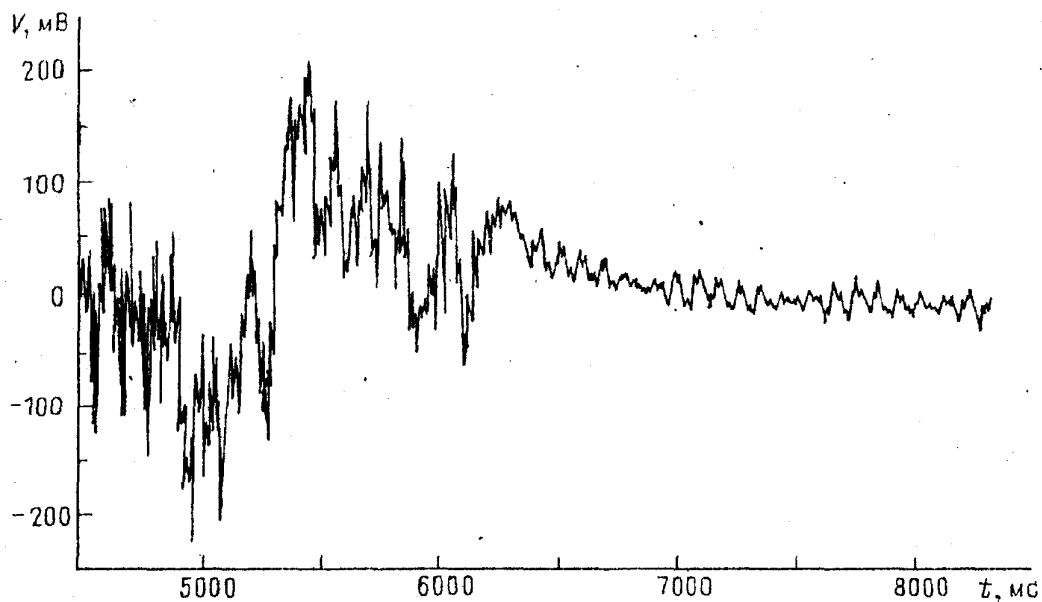


Рис. 11. Наблюдаемый сигнал как функция времени [39]

**3.3.3. Хаос в ЖИГ при параллельной накачке.** Хаос в ЖИГ при параллельной накачке исследовался двумя группами [24, 26, 35]. В [24, 26] сферы ЖИГ при комнатной температуре помещались в резонатор с частотой  $f = 9,4$  ГГц. Переменное поле было параллельно постоянному и параллельно оси [111]. Постоянное поле  $H_0 = 1,54$  кЭ было близко к кривой  $h_{0,th}(H_0)$ , где возбуждаются волны с  $k \approx 0$  и  $\theta_k = 0$ . Автоколебания возникали при  $r = h_0/h_{0,th} = 1,5$ , их частота  $\approx 100$  кГц линейно росла с ростом  $r$ , удвоение периода происходило при  $r = 1,62$ , а затем без дальнейших удвоений возникал хаос. Далее колебания с новой частотой  $f = 160$  кГц возникали при  $r = 1,84$ , периоды  $2T, 4T$  — при  $r = 1,04$  и  $2,24$ , а затем сразу периоды  $3T, 6T$  и т.д., и, наконец, опять хаос при  $r = 3,43$ . Кроме того, при определенных значениях направления и величины поля наблюдался сценарий типа Фейгенбаума. Авторы связывают подобное достаточно сложное поведение системы с тем, что она является реально многомерной и не всегда может быть описана одномерным отображением.

В работе [35] эксперименты с дисками проводились при гелиевой температуре. Наблюдались бифуркации  $T \rightarrow 2T \rightarrow$  хаос и обратные: **хаос**  $\rightarrow 4T \rightarrow 2T \rightarrow T$ . В этой работе из экспериментальных данных определено значение показателя Ляпунова  $\lambda \approx 0,34 > 0$ .

**3.3.4. Параллельная накачка в АФМ  $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  [36].** Первые наблюдения бифуркации удвоения периода при параметрическом возбуждении, наряду с экспериментом на ЖИГ [34], были проведены на АФМ  $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  [36]. Этот кристалл исследован не так широко, как ЖИГ, но полученные результаты имеют ряд интересных особенностей.

Образцы находились при гелиевой температуре, параллельная накачка осуществлялась в импульсном режиме с параметрами: 20 нс — время нарастания импульса, 10 мс — его длительность, 100 Гц — частота повторения импульсов. Осцилляции мнимой части восприимчивости наблюдались в достаточно узком интервале полей подмагничивания в окрестности значения 6,3 кЭ, при накачке  $P/P_{\text{th}} \approx 12$  дБ. Зависимость фурье-спектров от уровня накачки показала появление четкого пика на половинной частоте (переход  $T \rightarrow 2T$ ) при надкритичности  $P/P_{\text{th}} \approx 14,4$  дБ. Для сравнения теория [23] дает  $P/P_{\text{th}} = 14,66$  дБ ( $T \rightarrow 2T$ ), 14,87 дБ ( $2T \rightarrow 4T$ ), 14,908 дБ ( $4T \rightarrow 8T$ ). К сожалению, из-за того, что период осцилляции  $\approx 0,25$  мс оказался сравнимым с длительностью импульса 10 мс, наблюдались только затухающие колебания. Поэтому удалось отметить только намеки на учетверение периода, а предполагаемая дальнейшая последовательность бифуркаций удвоения и хаос не наблюдались.

**3.3.5. Слоистые магнетики.** Слоистые магнетики  $(\text{CH}_3\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$ ,  $(\text{NH}_3)_2(\text{CH}_2)\text{CuCl}_4$  и  $(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3)_2\text{MnCl}_4$  характеризуются необыкновенно слабой релаксацией и соответственно низким уровнем пороговой мощности. Поэтому эти соединения можно исследовать в далекой запороговой области, не опасаясь перегрева образцов.

Наиболее тщательно изучался ФМ  $(\text{CH}_3\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$  [37, 38]. Параллельная накачка с частотой 9,39 ГГц осуществлялась при  $T = 1,65$  К. Колебания различного типа наблюдались в области полей подмагничивания 1050 — 1150 Э. В частности, наблюдался переход к хаосу за счет возникновения нерегулярных пиков. В данном случае нерегулярными являются и амплитуда, и

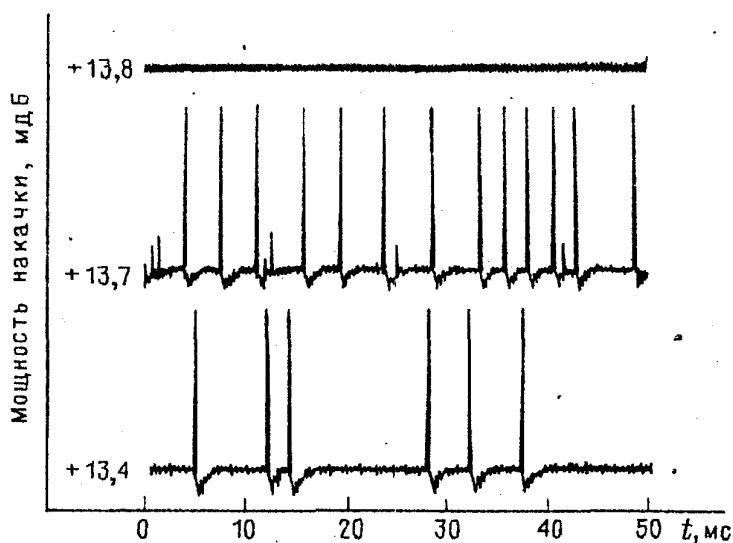


Рис. 12. Колебания при параллельной накачке в  $(\text{NH}_3)_2(\text{CH}_2)\text{CuCl}_4$  [24]

расстояние между пиками. Колебания с нерегулярным периодом, но практически с фиксированной амплитудой, наблюдались в АФМ  $(\text{NH}_3)_2(\text{CH}_2)\text{CuCl}_4$  (рис. 12) [29]. Такие же колебания были получены в моделях, учитывающих электромагнитные моды в резонаторе [28].

По экспериментальным данным, полученным на кристаллах  $(\text{CH}_3\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$  [38], была выяснена фрактальная размерность, которая нарастает с ростом уровня накачки от  $1,6 \pm 0,4$  до  $3,4 \pm 0,3$ . Вероятной причиной большой ошибки, в определении фрактальной размерности при уровнях накачки вблизи порога образования СА авторы [38] считают влияние шума и флуктуаций в экспериментальной установке. В этой работе также рассчитаны показатели Ляпунова и энтропия Колмогорова. Все эти данные указывают на то, что в рассматриваемом случае действительно наблюдался динамический хаос.

**3.3.6. Антиферромагнетик  $\text{CsMnF}_3$ .** Переход к хаосу при параллельной накачке в  $\text{CsMnF}_3$  при  $T = 1,4$  К исследовался в [41, 42]. В [41] изучались

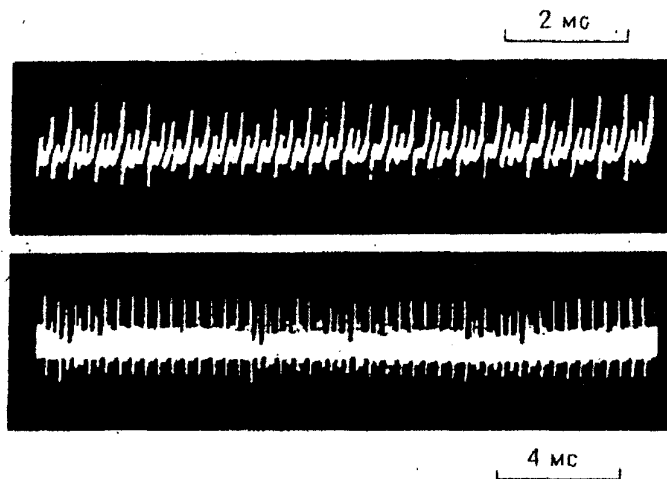


Рис. 13. Перемежаемость циклов периода 3 [41]

сценарии перехода к хаосу при изменении постоянного магнитного поля  $H_0$  и мощности накачки  $P_{\text{in}}$ . В магнитных полях  $H_0 < 2,3$  кЭ при повышении  $P_{\text{in}}$  наблюдался переход к хаосу через удвоение периода. Такой переход близок к сценарию Фейгенбаума. При этом внутри области хаоса наблюдались окна периодичности с периодами 3, 4, 5 и 7. При поддержании мощности накачки постоянной на уровне, недостаточном для удвоения основного периода, переход

к хаосу происходил при  $H_0 > 2,3$  кЭ путем уширения основной линии. Более детальный анализ позволил сделать вывод, что переход к хаосу в этом случае осуществляется через перемежаемость (рис. 13, ср. с рис. 5). Топология возникающих СА изучалась в [42]. Показано, что в области параметров  $P_{\text{in}}$  и  $H_0$ , к которой хаотические режимы развиваются через каскад удвоения периода, усложнение режима (т.е. увеличение амплитуды хаотической компоненты пульсаций плотности магнонов) происходит при постоянном числе вовлеченных в движение степеней свободы и сопровождается усложнением топологической структуры СА. При другом сценарии перехода к хаосу СА вкладывается в пространство с размерностью, изменяющейся в зависимости от параметров системы от 3 до 5.

#### 4. Хаос в ЯМР-мазерах

Другим примером спиновой системы, в которой наблюдался переход к диссипативному хаосу, является ЯМР-мазер или разер (raser — Radio-wave

Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Разер представляет собой ядерную спиновую систему с отрицательной поляризацией, взаимодействующую с колебательным контуром. Переход к хаосу связан с модуляцией одного из параметров системы: добротности контура, возбуждающего поля, ядерной намагниченности или ширины линии ЯМР. Здесь мы рассмотрим, следуя [43], последний случай, который оказался весьма эффективным с точки зрения перехода к хаосу (другие результаты см., например, в [44] и цит. там литературе).

В экспериментах [43] высококачественный монокристалл рубина  $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$  помещался в резонатор. Наблюдения проводились при  $T = 1,6$  К в постоянном поле  $H_0 = 1,1 \cdot 10^4$  Э (частота ЯМР в  $^{27}\text{Al}$   $\omega_0/2\pi = 12$  МГц). На образец была намотана катушка, являющаяся частью колебательного  $LC$ -контура с частотой  $\omega_{LC} \equiv (LC)^{-1/2} \approx \omega_0$ . Микроволновый генератор настраивался на частоту  $\omega'$ , близкую к частоте ЭПР  $\omega_e \approx 30$  ГГц. При  $\omega' < \omega_e$  динамическая ядерная поляризация имеет отрицательный знак, т.е. реализуется разер. Измерялось напряжение в контуре, которое пропорционально полному магнитному полю в катушке с образцом.

Динамика ядерной намагниченности описывается уравнениями Блоха, которые во вращающейся с частотой  $\omega = \omega_0$  системе координат имеют вид

$$\dot{\mu}_+ = -\Gamma_2 \mu_+ + i\gamma H_+ \mu_z, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mu}_z = -\Gamma_1(\mu_z - \mu_e) + \frac{i}{2}\gamma(\mu_+ H_- - \text{к.с.}),$$

где  $\mu_e$  — ядерная намагниченность, обусловленная динамической поляризацией ядерных спинов,  $H_+ = H_x + iH_y$ ,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение для ядер,  $\Gamma_{1,2} = T_{1,2}^{-1}$  ( $T_{1,2}$  — времена продольной и поперечной ядерной релаксации).

Для нахождения переменного магнитного поля в катушке можно использовать обычные уравнения  $LC$ -контура. Считая, что переходные процессы в контуре затухают за время, малое по сравнению с характерными временами в ядерной системе (приближение низкодобротного контура), получаем:  $H_x = -4\pi\xi Q\mu_y$ , где  $\xi$  — коэффициент заполнения катушки, а  $Q$  — добротность.

Подставляя это выражение в (4.1) и пренебрегая нерезонансными членами, получаем уравнения, описывающие динамику спина с учетом резонатора:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_x &= -\Gamma_2 \mu_x - G\mu_x \mu_z, \\ \dot{\mu}_y &= -\Gamma_2 \mu_y - G\mu_y \mu_z, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\dot{\mu}_z = -\Gamma_1(\mu_z - \mu_e) + G(\mu_x^2 + \mu_y^2),$$

где  $G = 2\pi\gamma\xi Q$ . Эта система имеет следующие стационарные точки (считалось, что  $\mu_x \equiv 0$  и  $\mu_e < 0$ ):

$$1) \mu_y = 0, \mu_z = \mu_e, \quad (4.3)$$

$$2) \mu_y = [-\Gamma_1(\Gamma_2 + G\mu_e)]^{1/2}/G, \mu_z = -\Gamma_2/G.$$

Первое решение соответствует отсутствию излучения, а второе описывает стационарный режим генерации, который реализуется при  $G|\mu_e| > \Gamma_2$ .

Для возбуждения хаоса в разере на образец накладывалось слабое неоднородное магнитное поле, которое увеличивает ширину линии ЯМР. Это поле изменялось со временем по синусоидальному закону с частотой  $f$ , близкой к частоте линейных колебаний около стационарной точки (4.3) ( $f \sim 50 - 100$  Гц). Влияние этого поля можно учесть в уравнениях движения (4.2), произведя замену  $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2(1 + \Lambda \sin 2\pi ft)$ . Тепловые шумы в разере моделировались сторонним полем, которое вводилось в уравнения (4.2) как подгоночный параметр ( $\sim 10^{-6}$  Э). При этом наблюдалось качественное соответствие между результатами численного расчета с описанной моделью и натуральным экспериментом. Оказалось, что хаос возникает уже при весьма малой амплитуде модуляции  $\Lambda \sim 10^{-3}$ . При этом наблюдался переход к хаосу через бифуркации удвоения периода  $T \rightarrow 2T$ . При варьировании частоты  $f$  и амплитуды  $\Lambda$  также наблюдался переход к хаосу через перемежаемость, сосуществование разных аттракторов и гистерезис.

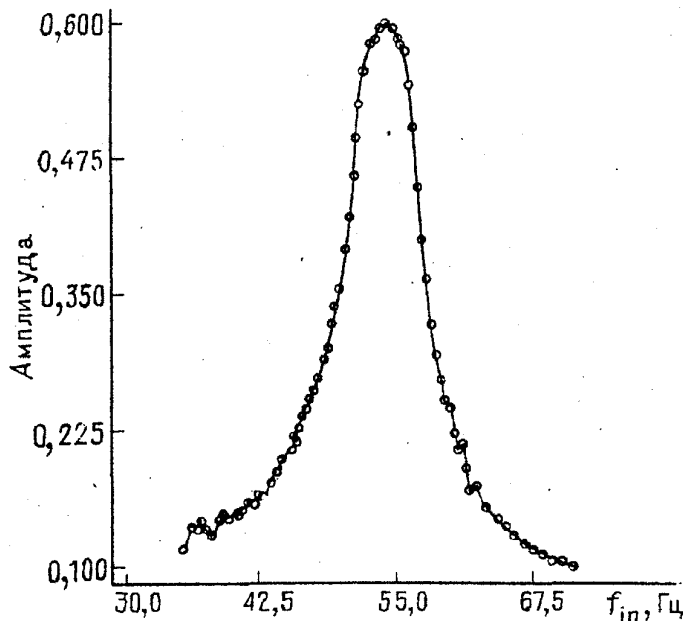


Рис. 14. Наблюдаемый отклик ЯМР-мазера при параметрической накачке с  $f = 110$  Гц как функция частоты слабого сигнала  $f_{in}$  [46]

ну линии ЯМР. Эта модуляция играла роль слабого сигнала. При  $\delta \rightarrow 0$  амплитуда биений на выходе разера резко возрастала (рис. 14). Как видно из этого рисунка, зависимость отклика от  $\delta$  носит ярко выраженный резонансный характер. Аналогичные результаты наблюдались вблизи точки бифуркации  $2T \rightarrow 4T$ . Используя модель разера типа (4.2), в [46] численно было показано, что чувствительность подобного детектора возрастает при приближении значения управляющего параметра  $r$  к точке бифуркации удвоения  $r_c$ , как  $|r - r_c|^{-1,5}$ . Авторы [46] считают, что подобные детекторы слабых сигналов на нестабильных мазерных системах могут работать в диапазоне  $1 - 10^6$  Гц.

Известно, что около точки бифуркации удвоения нелинейная система очень чувствительна к внешним воздействиям. Это, в принципе, позволяет использовать ее как детектор или усилитель [45]. В [46] разер, находящийся около точки бифуркации удвоения, использован в качестве детектора слабого сигнала. Подробно исследована ситуация, когда бифуркации удвоения периода вызываются модуляцией добротности разера. Кроме того, на образец накладывалось слабое неоднородное магнитное поле с частотой  $(f/2) + \delta$ , которое изменяло шири-



## 5. Гамильтонов хаос в спиновых системах

Изучение гамильтонова хаоса в спиновых системах начато с середины 80-х годов и к настоящему времени получены результаты по динамике классических консервативных [47 — 53] и неавтономных [54 — 59] систем<sup>(9\*)</sup>. Необходимо сразу отметить, что все эти работы являются теоретическими и в настоящее время нам не известны какие-либо эксперименты по наблюдению гамильтонова хаоса в спиновых (магнитных) системах.

**5.1. Консервативные системы.** Одной из простейших физических моделей, допускающих гамильтонов хаос, является система двух классических спинов с гамильтонианом [48]

$$H = \sum_{\alpha=x,y,z} \{ -J_{\alpha} S_1^{\alpha} S_2^{\alpha} + \frac{1}{2} A_{\alpha} [(S_1^{\alpha})^2 + (S_2^{\alpha})^2] \}, \quad (5.1)$$

который учитывает обменное взаимодействие и одноионную анизотропию. В [48] аналитически доказано, что у этой системы существует второй (не зависящий от  $H$ ), квадратичный по спиновым переменным интеграл движения, только если выполняется условие

$$(A_x - A_y)(A_y - A_z)(A_z - A_x) + \sum_{\alpha\beta\gamma=\text{cycl}(x,y,z)} J_{\alpha}^2 (A_{\beta} - A_{\gamma}) = 0. \quad (5.2)$$

Численно показано [43, 50], что нарушение условия (5.2) приводит к отсутствию не только квадратичного, но и любого другого независимого от  $H$  интеграла. Движение спинов при этом додается хаотическим при большинстве начальных условий (глобальный хаос). Примером системы (5.1) с нарушением условия (5.2) является гамильтониан  $XY$ -модели с одноузельной анизотропией:

$$H_{\alpha} = -(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y) - [(S_1^x)^2 + (S_2^x)^2 - (S_1^y)^2 - (S_2^y)^2] / 2. \quad (5.3)$$

Эта модель является полностью интегрируемой только при  $\alpha = 0, \pm 1$ . Динамические свойства моделей (5.1), (5.3) (поведение автокорреляционных функций и аналитические свойства временных средних) исследовались в [49]. Хаос в трехспиновых цепочках рассмотрен в [51, 52], некоторые обобщения на большее число спинов содержатся в [50].

В работе [53] показано, что переход к хаосу возможен уже в простейшем случае свободных однородных колебаний намагниченности в АФМ. Рассмотрен легкоосный, двухподрешеточный АФМ, находящийся в постоянном магнитном поле, наклонном по отношению к оси анизотропии. Для описания динамики намагниченности каждой подрешетки использовались бездиссипативные уравнения Ландау—Лифшица. При этом система сводится к гамильтоновой с двумя степенями свободы, которая является неинтегрируемой и допускает хаотическую динамику. Интересно отметить, что аналогичные однородные колебания намагниченности в ФМ являются регулярными, так как эта система имеет только одну степень свободы и является полностью интегрируемой.

**5.2. Неавтономные системы.** Хаос в нелинейном ЯМР. Этот пункт посвящен изучению хаотической динамики спина, на который действует переменное магнитное поле [54 — 59]. Здесь мы более подробно рассмотрим задачу о переходе к хаосу в нелинейном ЯМР с динамическим

сдвигом частоты (ДСЧ) прецессии [56 — 59]. В настоящее время ЯМР с ДСЧ является, по-видимому, наиболее вероятной системой, в которой возможно экспериментальное наблюдение магнитного гамильтонова хаоса<sup>(10\*)</sup>.

ДСЧ, пропорциональный продольной составляющей ядерной намагниченности, является одним из простейших и сравнительно хорошо изученных типов нелинейности ЯМР [60 — 62]. Возникновение ДСЧ ЯМР связано с электронно-ядерным сверхтонким взаимодействием и наблюдается в магнитоупорядоченных материалах (ФМ и АФМ) при гелиевых или более низких температурах.

Впервые возможность возникновения хаоса в ЯМР с ДСЧ была продемонстрирована в работах [56, 57]. Здесь мы изложим эту задачу, следуя [58].

Выберем систему координат следующим образом: ось  $z$  направим вдоль магнитного поля  $\mathbf{H}$ , действующего на ядерные спины (поле  $\mathbf{H}$  представляет собой сумму внешнего постоянного поля  $\mathbf{H}_0$  и внутреннего сверхтонкого  $\mathbf{H}_n$ , создаваемого магнитными моментами электронов на ядрах), ось  $x$  вращающейся системы координат направим антипараллельно внешнему переменному полю  $\mathbf{H}_+ = H_1(t)\exp(-i\omega t)$ . Тогда уравнения движения во вращающейся системе координат имеют вид [60 — 62]

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(\Delta - \omega_p m), \\ \dot{v} &= -u(\Delta - \omega_p m) + \omega_1(t)m, \\ \dot{m} &= -\omega_1(t)v, \\ u^2 + v^2 + m^2 &= 1,\end{aligned}\tag{5.4}$$

где  $\Delta = \omega_n - \omega$ ,  $\omega_n = \gamma(H_n - H_0)$  — частота ЯМР без учета ДСЧ ( $\gamma$  — гиромагнитное отношение для ядра),  $\omega_p$  — параметр нелинейности ( $\omega_p \ll \omega$ ), представляющий собой максимальный ДСЧ при равновесном значении намагниченности,  $\omega_1(t) = \gamma A \chi H_1(t)$ ,  $A$  — безразмерная константа сверхтонкого взаимодействия,  $\chi$  — поперечная статическая восприимчивость электронной магнитной подсистемы. Переменные  $u, v, m$  являются компонентами вектора ядерной намагниченности (нормированными на равновесное значение намагниченности) во вращающейся системе координат. Уравнения (5.4) справедливы при пренебрежении эффектами необратимой релаксации и неоднородного уширения линии ЯМР. Пусть огибающая переменного магнитного поля, действующего на ядерные спины, задана в виде периодической последовательности коротких импульсов с площадью  $\alpha$  и периодом следования  $T$ . Подобная постановка задачи возникает при исследовании различных переходных явлений в ЯМР: затухание свободной индукции, спиновое эхо и т.д. [61, 62]. Это позволяет, кроме того, свести систему уравнений (5.4) к отображению, связывающему значения компонент ядерной намагниченности перед  $n$ -м и  $n + 1$ -м импульсами. Такое сохраняющее площадь отображение представляет собой комбинацию двух поворотов: в плоскости  $v-m$  на угол  $\alpha$  (равный площади импульса) и в плоскости  $u-v$  на угол  $\varphi_n$ , зависящий от значений  $m_n$  и  $v_n$ :  $\varphi_n = \Delta T - \omega_p T(m_n \cos \alpha - v_n \sin \alpha)$ . Отметим, что при  $\alpha \ll 1$  и при начальном условии  $m_0 \approx 0$ , это отображение сводится к стандартному (см. раздел 2). Используя критерий перекрытия нелинейных резонансов или критерий рас-

тяжения фаз, можно получить следующее условие сильного хаоса:

$$K = \omega_p T \sin^2 \alpha \gg 1. \quad (5.5)$$

Важно отметить, что (5.5) может быть выполнено при естественных начальных условиях  $m_0 = 1, u_0 = v_0 = 0$  (основное состояние). Интересной особенностью данной системы является наличие окон регулярности. Например, при  $\alpha = \pi/2$  центры окон определяются уравнениями  $\omega_p T = l\pi$  ( $l$  — целое,  $m_0 = 1$ ), а их ширина  $\sim 1/K$ . Окна регулярности весьма типичны для диссипативных систем, а для гамильтоновых известно лишь несколько примеров [63]. Таким образом, в ЯМР с ДСЧ возможно несколько переходов типа порядок—хаос—порядок при изменении площади возбуждающих импульсов  $\alpha$  или безразмерной нелинейности  $\omega_p T$ .

В большинстве экспериментальных ситуаций существенное влияние на ЯМР с ДСЧ оказывает неоднородное уширение [62,64]. Основной физической причиной неоднородного уширения является, как известно, неоднородность восприимчивости  $\chi$ , приводящая к разбросу значений параметра ДСЧ  $\omega_p$  [64].

Проявления хаотического движения намагниченности при учете влияния неоднородного уширения различны при  $\alpha \ll 1$  и  $\alpha \sim \pi/2$ .

1) *Малая площадь импульсов  $\alpha \ll 1$* . При хаосе происходит отклонение среднего значения продольной составляющей намагниченности  $\langle m \rangle$  от равновесного значения  $m_0 = 1$  — стохастическое возбуждение [56, 58] (рис. 15). Знак  $\langle \dots \rangle$  означает здесь усреднение, учитывающее неоднородное уширение, которое в данном случае играет роль усреднения по ансамблю (см. раздел 2). Подобное сильное отклонение поперечной составляющей намагниченности невозможно при нелинейном — регулярном движении.

2) *Пусть  $\alpha \sim \pi/2$  и  $T/T_2^* \ll 1$*  ( $T_2^*$  — характерное время неоднородной релаксации). В этом случае затухание средних значений поперечной  $\langle m_{\perp} \rangle$  и продольной  $\langle m \rangle$  компонент намагниченности происходит значительно быстрее при хаотической динамике, чем при регулярной. Этот эффект показан на рис. 16, где близкие значения нелинейности  $\omega_p T$  соответствуют окну регулярности (штриховая кривая) и хаосу (сплошная кривая). Причиной подобного поведения является быстрое (см. (2.10)) расцепление корреляций движения отдельных изохромат при хаосе, приводящее к самоусреднению величин  $\langle m_{\perp} \rangle$  и  $\langle m \rangle$ .

Подходящим объектом для наблюдения хаоса в ЯМР является, по-види-

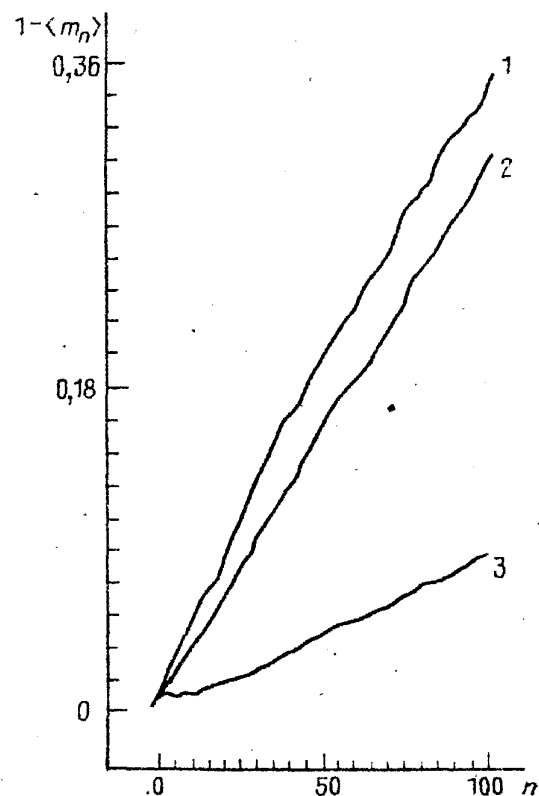


Рис. 15. Стохастическое возбуждение ядерной намагниченности.  $m(0) = 1$ ;  $\alpha = 0,1$ ;  $\omega_p T = 628$  (1), 314 (2) и 90 (3) [58]

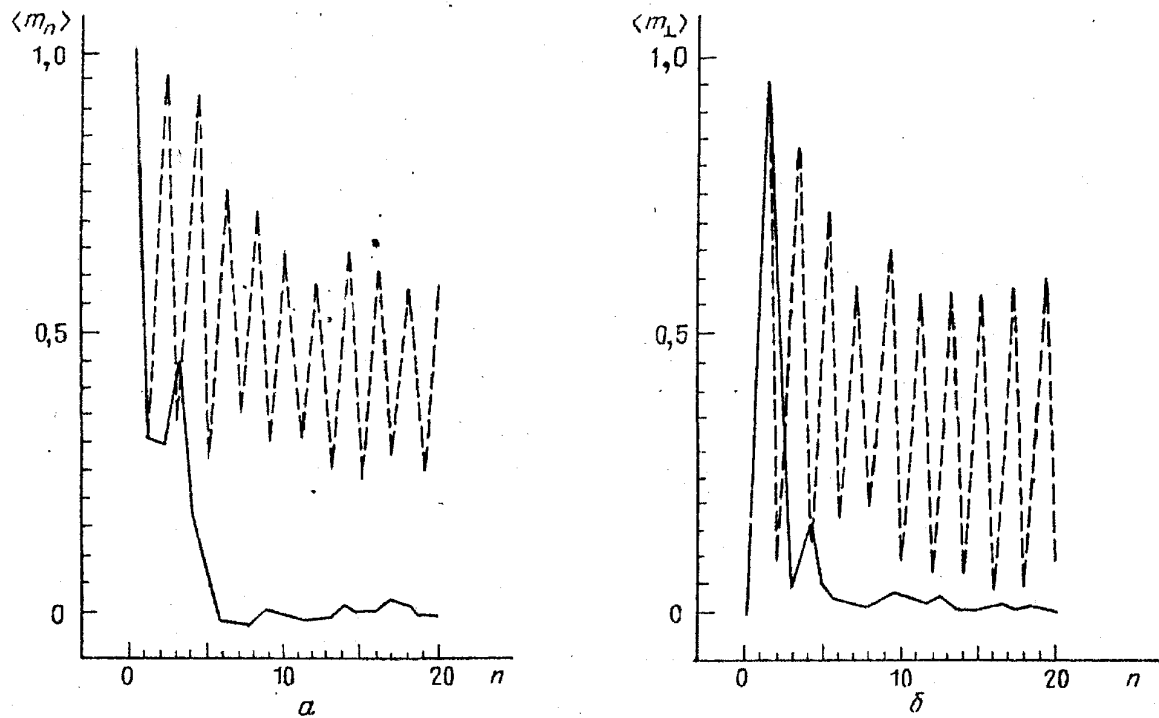


Рис. 16. Нелинейная динамика средних значений продольной (а) и поперечной (б) компонент ядерной намагниченности при значениях параметров, соответствующих хаосу (сплошная кривая) и окну регулярности (штриховая) [58]

тому, АФМ при гелиевых температурах с временами релаксации  $T_2 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$  с и  $T_1 \sim 10^{-3} - 10^{-1}$  с и с достаточно сильным ДСЧ  $\omega_p \sim 10^5 - 10^7$  Гц. Для наблюдения стохастического возбуждения можно предложить следующую схему эксперимента: после  $N$  коротких импульсов ( $N \sim 5 - 10$ ) через время  $\tau$  ( $T_2 < \tau < T_1$ ) подается еще один импульс и наблюдается сигнал свободной индукции. Амплитуда этого сигнала зависит от величины продольной составляющей намагниченности, а она, в свою очередь, различна при регулярной и хаотической динамике под действием  $N$  импульсов.

В работе [59] изучалась возможность хаотизации движения намагниченности в ЯМР с ДСЧ при наложении двух переменных внешних полей: продольного резонансного с постоянной амплитудой ( $H_1 = \text{const}$  в (5.4)) и слабого поперечного с частотой  $\nu < \omega_p$ . Как было показано ранее [60], при  $\omega_1 = \text{const}$  в системе (5.4) существует апериодическая траектория с периодом движения  $\rightarrow \infty$ , соответствующая сепаратрисе на фазовом портрете. При наложении слабого продольного поля в окрестности сепаратрисы возникает стохастический слой, ширина которой зависит от амплитуды и частоты этого поля. Такой стохастический слой может охватывать основное состояние намагниченности, если  $\Delta = 0$  и  $\omega_1 = \omega_p$ . При этом движение намагниченности является случайным.

## 6. Квантовый хаос в спиновых системах

В предыдущих разделах обзора при описании хаотической динамики в спиновых системах везде использовался классический или полуклассический подход. Подобный подход, как правило, является адекватным, но, тем не менее, спин — чисто квантовый объект, и поэтому последовательное описание

нелинейной спиновой динамики требует полностью квантового рассмотрения. Таким образом, мы приходим к постановке проблемы квантового хаоса (КХ) в спиновых системах: каковы особенности динамики и свойства стационарных состояний квантовых спиновых систем, обладающих хаотической динамикой в классическом пределе ( $S \rightarrow \infty$ )<sup>(11\*)</sup>?

Мы не имеем здесь возможности сколько-нибудь детально описать результаты исследований по КХ в различных физических системах, а отсылаем читателя к обзорным работам по этой проблеме [5, 7, 8, 66 — 68].

Большинство работ по КХ выполнено на примере нескольких моделей, наиболее популярными из которых являются: ротатор, возбужденный периодической последовательностью  $\delta$ -импульсов [5, 7, 8, 66 — 69] (квантовый аналог стандартного отображения (2.3)), и нелинейные осцилляторы [5, 7, 8, 66 — 68, 70]. Отметим также, что в почти всех современных работах по КХ рассматриваются гамильтоновы системы; исследование диссипативных квантовых систем, обладающих хаотической динамикой в классическом пределе, только начинается (см., например, [71] и цитируемую там литературу).

Исследование КХ в спиновых системах началось в 80-е годы, и имеющиеся в настоящее время работы сравнительно малочисленны (по крайней мере — по отношению к общему числу работ по КХ) [51, 52, 54, 72 — 79, 86]. Необходимо сразу отметить, что все эти работы являются теоретическими, а большинство из них представляет результаты численных экспериментов. Подобное состояние связано с новизной этого направления, так и с возникающими здесь сложностями теоретического и экспериментального исследования.

При изучении КХ в спиновых системах рассматриваются всего несколько простых моделей консервативных и неавтономных систем:

1) *Модель связанных ротаторов* [72] (классическая динамика рассмотрена в [47]):

$$H = A(L^2 + M^2) + BL^x M^x, \quad (6.1)$$

где  $A$  и  $B$  — константы, а переменные  $L$  и  $M$  имеют коммутационные соотношения для операторов углового момента. Имеется три интеграла движения:  $H, L^2, M^2$ . Хотя гамильтониан (6.1) не описывает, по-видимому, никакую реальную физическую систему<sup>(12\*)</sup>, он имеет структуру, типичную для спиновых гамильтонианов. Исследование классической системы с функцией Гамильтона (6.1) показало [47], что она является неинтегрируемой и допускает глобальный хаос при энергии, большей некоторой критической, и фиксированных  $L^2$  и  $M^2$ .

2) *Спиновая цепочка с периодическими граничными условиями, антиферромагнитным обменным взаимодействием и анизотропией* [51, 52, 73]:

$$H = J \sum_{i=1}^3 (S_i S_{i+1} + \sigma S_i^z S_{i+1}^z), \quad S_4 = S_1, \quad (6.2)$$

где  $J > 0$ ,  $-1 \leq \sigma \leq 0$ . При  $\sigma \neq 0$  имеется два интеграла движения:  $H$  и  $T^z = \sum_{i=1}^3 S_i^z$ , а при  $\sigma = 0$  система (6.1) является полностью интегрируемой (в этом случае, кроме  $H$  и  $T^z$ , имеется три дополнительных интеграла движения — компоненты  $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{S}_i$ , [50, 51, 73]. Классическое рассмотрение

( $S \rightarrow \infty$ ) модели (6.2) показывает [50, 51], что при фиксированном  $T^z$  ( $T^z = 0$ ) и  $J = 1$  увеличение параметра неинтегрируемости  $|\sigma|$  приводит к глобальному хаосу в довольно широком интервале энергий. Авторы [51, 52] считают, что гамильтониан вида (6.2) может описывать спиновые кластеры ионов  $\text{Fe}^{2+}$  в АФМ с треугольной решеткой  $\text{RbFeCl}_3$ .

3) *Неавтономные модели, описывающие спин, на который действует внешнее периодическое поле  $B(t)$ , при учете анизотропии:*

$$H = \mu H_0(\mathbf{S}) + \varepsilon F(\mathbf{S})B(t), \quad (6.3)$$

где  $\mu, \varepsilon$  — параметры, а функции  $H_0(\mathbf{S})$ ,  $F(\mathbf{S})$ ,  $B(t)$  имеют вид

$$H_0(\mathbf{S}) = (S^z)^2, \quad F(\mathbf{S}) = \mathbf{S}, \quad B(t) = B_x = \cos \omega t \quad (\text{см. [54]}), \quad (6.4)$$

$$H_0(\mathbf{S}) = (S^z)^2, \quad F(\mathbf{S}) = S^x, \quad B(t) = \delta_T(t) \quad (\text{см. [74 – 76]}), \quad (6.5)$$

$$H_0(\mathbf{S}) = S^y, \quad F(\mathbf{S}) = (S^z)^2, \quad B(t) = \delta_T(t) \quad (\text{см. [54, 77]}). \quad (6.6)$$

Рассматриваются также гамильтонианы, в которых  $H_0$  и  $F$  являются более сложными полиномами компонент спина  $\mathbf{S}$  [77 – 79].

Рассмотрим теперь основные черты КХ в спиновых системах (6.1) — (6.3).

**6.1. Динамика наблюдаемых.** Так как энергетический спектр рассматриваемых систем дискретен и, более того, конечен, то динамика наблюдаемых величин всегда является регулярной и квазипериодической. Однако, согласно принципу соответствия, в квазиклассической области ( $S \gg 1$ ) должны проявляться черты классического хаоса. Поэтому первый вопрос, представляющий интерес, следующий: в течение какого времени квантовая спиновая система при  $S \gg 1$  будет проявлять свойства классической хаотической системы? Ответ на этот вопрос, на примере моделей (6.3), (6.4) и (6.6), найден в работах [54, 55] — время применимости классического описания для квантовой хаотической системы есть

$$\tau_{cl} \sim (1/\lambda) \ln S, \quad (6.7)$$

где  $\lambda$  — величина ляпуновского показателя классической системы, а время  $\tau$  измеряется в единицах характерной частоты  $\omega$  в системе:  $\tau = \omega t$ . При  $\tau > \tau_{cl}$  динамика наблюдаемых сильно отличается от динамики соответствующих классических величин. Чтобы понять этот результат, приведем, следуя [55], простые качественные рассуждения. Минимальная неопределенность по фазе для спина  $S$  есть  $\Delta\varphi \sim S^{-1/2}$ . С течением времени эта неопределенность будет усиливаться по закону  $\Delta\varphi(\tau) \sim \Delta\varphi(0)\exp(\lambda\tau)$ , а характерное время  $\tau$ , за которое неопределенность фазы достигнет  $\Delta\varphi \sim 1$ , есть  $\tau_{cl} \sim \lambda^{-1} \ln S$ .

Можно показать [54, 55], что для спиновых систем с регулярной динамикой соответствующее время применимости классического описания есть

$$\tau_{cl} \sim S^\alpha, \quad \alpha = \text{const} \sim 1. \quad (6.8)$$

Если учесть, что  $S \propto \hbar^{-1}$ , то оценка (6.7) хорошо согласуется с полученной ранее аналогичной оценкой для нелинейного осциллятора [70]:  $\tau_{cl} \propto \ln \hbar^{-1}$ .

Время (6.7) является довольно коротким. Например, в численном эксперименте [55]  $\tau_{cl}$  составляет всего  $\approx 8$  итераций при  $S = 100$ .

Обсудим теперь, как различается динамика наблюдаемых на временах  $\tau > \tau_{cl}$  в случаях, когда в классическом пределе спиновая динамика регулярная или хаотическая. В обоих случаях динамика средних является квазипериодической, но если в регулярном режиме (рис. 17,а) это периодическая последовательность коллапсов и возрождений осцилляции с характерным квазипериодом  $S$ , то в хаотическом режиме (рис. 17,б) — сложные колебания, в которых трудно выделить характерный период. Соответственно существенно различается и число функций  $N_{min}$  оператора эволюции  $U(t) = \exp(i/\hbar H)$ , эффективно дающих вклад в динамику средних (наблюдаемых). В регулярном режиме  $N_{min} \lesssim 10$ , а в хаотическом  $N_{min} \sim 10^2$  при  $S = 100$  [55]. Таким образом, кроме квазиклассичности  $S \gg 1$ , другим условием наблюдения КХ является вовлечение в динамику большого числа уровней.

Одним из интересных проявлений квантовых эффектов при хаосе, наиболее хорошо изученным для модели квантового ротатора, является эффект квантового ограничения диффузии (КОД) [8, 69]. В ротаторе эффект КОД

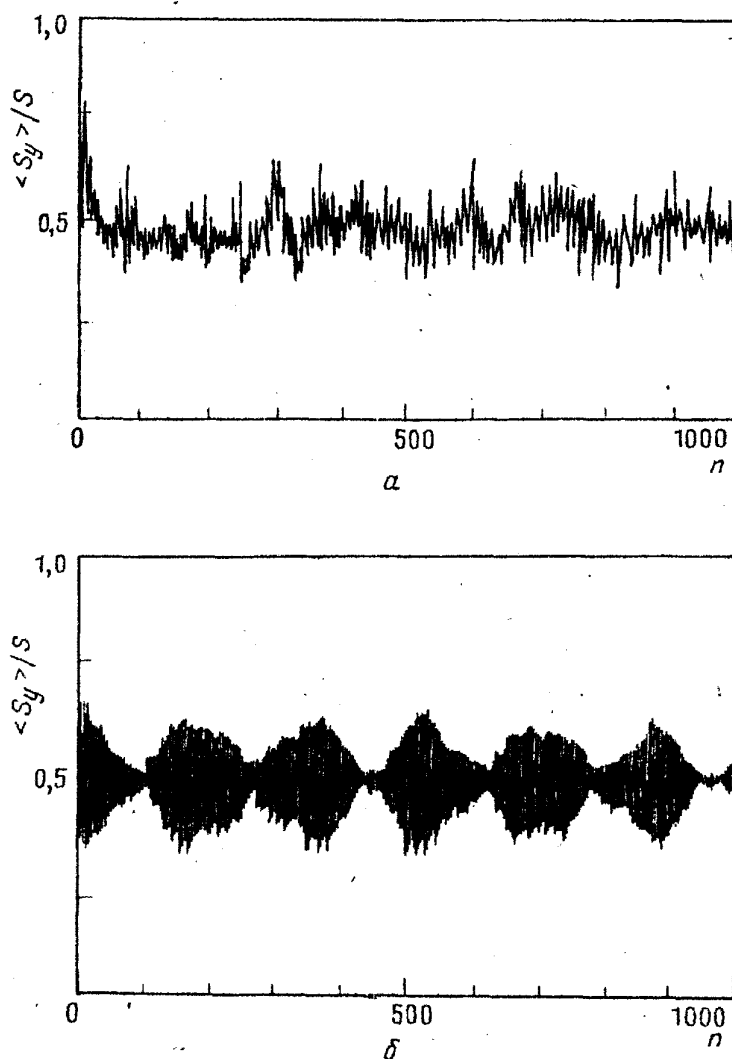


Рис. 17. Динамика квантовых средних. ( $S = 100$ ) при регулярном (а) и хаотическом (б) движении в классическом пределе [55]

заключается в насыщении на характерных временах  $t_D$  диффузионного роста величины  $\langle p^2 \rangle$  ( $p$  — импульс) или энергии системы [8, 69]. КОД имеет глубокие аналоги с известным в физике неупорядоченного состояния эффектом локализации Андерсона в случайном потенциале [80]. В настоящее время КОД — основной из предсказанных теорией КХ эффектов, который проверяется в экспериментах с атомами водорода [81]. Интересной особенностью спиновых систем с КХ является отсутствие в общем случае локализации по угловому моменту [76]. Это связано с различной топологией фазового пространства: у ротатора — цилиндр, не ограниченный по импульсу, а у спиновой системы — шар. Однако в некоторых специальных случаях КОД (локализация) возможна и для спиновых систем. Так, например, для модели (6.3), (6.5) в случае, когда начальные условия выбраны вблизи экватора  $S^z \ll S$  и  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , волчок (6.3) переходит в ротатор и по переменной  $S^z$  возможна локализация [76].

**6.2. Энергетический спектр и волновые функции.** Существенные различия в поведении регулярных и хаотических спиновых систем проявляются в их энергетическом спектре и структуре собственных функций (СФ). В случае неавтономных систем с периодическим возмущением рассматривается спектр квазиэнергий и собственных квазиэнергетических функций [82].

При хаосе спектр является неустойчивым относительно малых изменений параметров системы [83]. Так, для модели (6.2) величины

$$\chi = \langle \langle \frac{\Delta^2 E}{\Delta \sigma^2} \rangle \rangle = \langle \langle \frac{E(\sigma + \Delta \sigma) - 2E(\sigma) + E(\sigma - \Delta \sigma)}{(\Delta \sigma)^2} \rangle \rangle, \quad (6.9)$$

$$\langle \langle (\Delta \chi)^2 \rangle \rangle = \langle \langle \left[ \frac{\Delta^2 E}{\Delta \sigma^2} - \frac{\Delta^2 E}{\Delta \sigma^2} \right]^2 \rangle \rangle, \quad S \gg 1 \quad (6.10)$$

( $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ ) означает усреднение по некоторому интервалу энергий) возрастают при возрастании  $S$  при хаосе и фактически не зависят от  $S$  при регулярном движении [51, 52]. При  $\sigma = 0$  (интегрируемый предел) абсолютная величина (6.9) и (6.10) была примерно того же порядка, что и при  $\sigma \neq 0$  во всех диапазонах энергии. Поэтому авторы [51, 52] считают, что характеристиками неустойчивости спектра при хаосе должны быть не абсолютные значения «восприимчивостей»  $\chi$  (6.9) и ее дисперсии (6.10), а их зависимость от параметра квазиклассичности  $S$ . Для количественной характеристики этой зависимости в [51, 52] была введена величина

$$g(S) = \frac{[\langle \langle (\Delta \chi)^2 \rangle \rangle]^{1/2}}{|\chi|} \quad (6.11)$$

и численно показано существование скейлинга  $g(S)$ :

$$g(\Lambda S)/g(S) = \Lambda^{\beta(\sigma)}, \quad S \gg 1. \quad (6.12)$$

**Показатель  $\beta(\sigma) > 0$**  для областей по параметру  $\sigma$  и по энергии; соответствующих классическому хаосу;  **$\beta(\sigma) \leq 0$**  — при регулярном движении.

Переход к КХ характеризуется не только появлением фрактальной структуры энергетического спектра (6.12), но и возникновением фрактальной структуры СФ для консервативных и неавтономных систем [73, 74].

В [73], на примере модели (6.2), изучалась тонкая структура и масш-



табные свойства СФ в представлении Фока и в квазиклассическом пределе ( $S=16 - 32$ ). Была определена следующая процедура масштабного **огрубления** СФ  $\psi(m_1, m_2)^{(13*)}$ : для данного линейного размера  $\epsilon$  рассматривалась **ячейка**  $A(\epsilon) = \epsilon \times \epsilon$  в окрестности данного  $m_{1,2}$ , а затем вычислялась мера  $\mu(\epsilon)$  областей, удовлетворяющих условию

$$\left[ \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right]^2 \sum_{m_{1,2} \in A(\epsilon)} \psi(m_1, m_2) \geq C, \quad (6.13)$$

где  $C$  — константа, а  $\epsilon_0 \sim S^{-1}$  — наименьший возможный масштаб разрешения структуры СФ. При исследовании зависимости меры  $\mu(\epsilon)$  от  $\epsilon$ , при уменьшении  $\epsilon$  вплоть до  $\epsilon = \epsilon_0$ , получена следующая скейлинговая зависимость:

$$\mu(\epsilon) = \mu(0) + k\epsilon^\beta, \quad k = \text{const} > 0, \quad (6.14)$$

где  $\beta \geq 1$  для регулярного движения и  $\beta < 1$  при хаосе. Подобный скейлинг ( $\mu(0) \neq 0$ ) характерен для так называемых толстых фракталов (fat fractals) [84]. Зависимость (6.14) показывает различие СФ в регулярном и хаотическом режимах движения: регулярная структура СФ приводит к достаточно гладкой зависимости  $\mu$  от  $\epsilon$  при малых  $\epsilon$  ( $\beta \geq 1$ ), а иррегулярность СФ приводит к тому, что ее тонкую структуру можно различить лишь на малых масштабах  $\epsilon \sim \epsilon_0$  [73].

В работе [74] исследовалась фрактальная структура СФ для неавтономной модели (6.3), (6.5). Показано, что периметр контура  $L$  огрубленной квази-энергетической СФ допускает следующий скейлинг:

$$L \propto \epsilon^D, \quad (6.15)$$

где  $\epsilon \geq \epsilon_0$  — масштаб огрубления;  $\epsilon_0 \sim S^{-1}$ ,  $S = 128$ ; процедура огрубления, по-существу, аналогична (6.13). Показатель  $D = 1$  в интегрируемом пределе, а при хаосе  $D > 1$  и возрастает с увеличением степени хаотичности, отражая усложняющуюся структуру СФ.

Таким образом, спектр и структура СФ спиновых систем при КХ обладают фрактальными свойствами. Как известно, фрактальность является промежуточным свойством между полной случайностью и полной детерминированностью. Поэтому появление фрактальных свойств при КХ связано, по-видимому, с тем, что КХ ( $S \gg 1$ ) является промежуточным свойством между полной детерминированностью (в динамическом смысле) квантовой динамики ( $S < 1$ ) и хаосом в классическом пределе ( $S \rightarrow \infty$ ).

Иррегулярная структура собственных значений (СЗ) и СФ в спиновых системах при КХ проявляется также в поведении пропагатора (функции Грина) и структуре матричных элементов операторов, не коммутирующих с гамильтонианом [72] (исследования на примере модели (6.1)),

Так как спектр и структура СФ квантовых хаотических систем являются весьма сложными, то естественно описывать их статистически. В результате многочисленных численных экспериментов, посвященных изучению статистики систем с КХ, была установлена связь с теорией случайных матриц, изучающей статистику СЗ и СФ ансамблей матриц сл случайными элементами [85]. Статистические свойства этих ансамблей являются инвариантными от-

носителем групп преобразований, сохраняющих симметрию исходного гамильтониана. В теории случайных матриц выделяются три типа подобных преобразований: ортогональные, унитарные и симплектические. Соответственно этому различаются и статистические свойства СЗ и собственных векторов матриц.

Одной из наиболее популярных статистических характеристик спектра является функция распределения расстояний между ближайшими уровнями  $P(\Delta E)$ . Численные эксперименты со спиновыми системами в области квазиклассичности  $S \gg 1$  показали [55, 75, 77 — 79], что в случае глобальной квазипериодичности  $P(\Delta E)$  имеют вид, близкий к распределению Пуассона  $P(\Delta E) \propto \exp(-\Delta E)$  ( $P(\Delta E \rightarrow 0) \neq 0$ ), а при глобальном хаосе  $P(\Delta E)$  имеет существенно иной вид, причем  $P(\Delta E \rightarrow 0) \propto \Delta E^\alpha$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Последнее свойство связано с расталкиванием уровней в режиме квантового хаоса, степень расталкивания  $\alpha$  зависит от свойств симметрии исходного гамильтониана:

а) *Если гамильтониан инвариантен относительно операции обращения времени, то  $\alpha \approx 1$ .* В теории случайных матриц этому соответствует так называемый гауссов ансамбль вещественных симметричных матриц, инвариантный относительно ортогональных преобразований. Примерами подобной системы являются модели (6.3), (6.6) [55, 77] и (6.3), (6.5) [75].

б) *Нарушение  $T$ -инвариантности приводит к квадратичному расталкиванию уровней:  $\alpha \approx 2$*  [55, 77]. Примером является система, определяемая оператором эволюции за один толчок:

$$U = \exp(-ik'S_x^2)\exp(ik'S_z^2)\exp(-ipS_y), \quad p \neq \frac{\pi}{2}, \quad k \neq k'. \quad (6.16)$$

Отличие (6.16) от системы (6.3), (6.6) заключается в наличии дополнительного возмущения, приводящего к вращению вокруг оси  $x$ . В теории случайных матриц этому случаю соответствует так называемый гауссов унитарный ансамбль, статистические свойства которого инвариантны при унитарных преобразованиях.

в) *Существуют также спиновые системы с КХ, которые соответствуют симплектическим ансамблям случайных матриц и допускают расталкивание с  $\alpha \approx 4$ .* Примером является гамильтониан вида (6.3), в котором [77, 79]

$$H_0 = S_z^2, \quad F = S_z^2 + k_1(S_x S_z + S_z S_x) + k_2(S_x S_y + S_y S_x), \quad B(t) = \delta_T(t). \quad (6.17)$$

Статистика СФ хаотических спиновых систем хорошо согласуется со статистикой СЗ, соответствующей одному из типов ансамблей случайных матриц [77].

Необходимо отметить, что соответствие между статистикой спектра хаотических систем и статистикой спектра случайных матриц работает лишь в квазиклассическом пределе  $S \gg 1$ . Причем это соответствие даже при  $S \sim 10^2$  не является полным — исследование более тонких статистических характеристик показывает наличие количественных расхождений между предсказаниями теории случайных матриц и результатами численного исследования спиновых гамильтонианов с КХ [75]. Кроме того, необходимо отметить, что хаотические системы, у которых в классическом пределе островки устойчивости занимают значительную часть фазового пространства, демонстрируют некоторую промежуточную статистику, т.е. статистику, не являющуюся ни пуассоновской, ни статистикой, соответствующей какому-либо типу ансамблей случайных матриц.

В недавней работе [86] была исследована статистика спектра спиновых систем типа (6.3) при учете диссипации. Численно показано, что если соответствующая классическая система обладает регулярной динамикой, то расталкивание уровней является линейным  $\alpha \approx 1$ , а если хаотической, то расталкивание — кубическое  $\alpha \approx 3$ . Причем при хаосе степень расталкивания, по-видимому, не зависит от симметрии порождающего гамильтониана.

**6.3. Обсуждение.** Итак, для того чтобы в спиновой системе можно было наблюдать феномен КХ, необходимо выполнение следующих основных условий: а) квазиклассичность ( $S \gg 1$ ); б) в динамике системы должно принимать участие много уровней; в) достаточно развитый хаос в соответствующей классической системе (**при  $S \rightarrow \infty$** ).

К основным проявлениям КХ относятся: появление сложной (фрактальной) структуры СФ и спектра; изменение статистики спектра при переходе от регулярного поведения к хаотическому. Энергетический спектр систем, обладающих в классическом пределе развитым хаосом, характеризуется несколькими универсальными статистиками, зависящими от свойств симметрии гамильтониана.

Необходимо отметить, что спиновые модели обладают по сравнению с другими системами важным преимуществом, связанным с конечностью их спектра. При численном исследовании систем с неограниченным спектром всегда приходится вводить искусственную процедуру обрезания спектра, которая может изменить скрытую симметрию системы и тем самым привести к неверным физическим результатам. В этом смысле модели спиновых систем являются идеальным объектом для изучения проблемы КХ.

Как уже отмечалось, в настоящее время эксперименты по КХ в спиновых системах отсутствуют, что связано, по-видимому, во многом и с недостаточной известностью новых фундаментальных результатов, полученных при теоретическом исследовании феномена КХ в последние годы<sup>(14\*)</sup>. По нашему мнению, подобные системы являются достаточно хорошим объектом для изучения КХ, так как, во-первых, во многих типичных экспериментах спиновые системы являются квазиклассическими, а, во-вторых, уже накоплен достаточный опыт исследования хаотической динамики в магнитных системах. По-видимому, наибольший интерес представляло бы прежде всего экспериментальное обнаружение изменения статистики спектра при переходе порядок—хаос и наблюдение времени соответствия  $\tau_{cl}$  (6.7).

Прогресс в экспериментальном исследовании КХ в спиновых системах в какой-то мере тормозится и тем, что все теоретические результаты получены для малочастичных систем, а почти все реальные спиновые (магнитные) системы являются многочастичными. Однако в настоящее время теория КХ в многочастичных системах не развита.

Таким образом, изучение КХ в магнитных системах представляется довольно перспективным и в ближайшие годы здесь можно, по-видимому, ожидать новых фундаментальных результатов.

Выражаем благодарность М.И. Рабиновичу за ценные замечания.

### ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>(1)</sup> На связь между неустойчивостью движения и возникновением случайности указывалось еще в работах Пуанкаре [10].

<sup>(2)</sup> Под локальной неустойчивостью понимают экспоненциально быстрое разбегание в фазовом пространстве двух близких в начальный момент времени траекторий. Усредненный по

всей траектории показатель в этой экспоненте называют максимальным показателем Ляпунова. При хаотическом движении максимальный показатель Ляпунова положителен для непрерывной системы или больше единицы для отображения [5 — 7].

(3) К стандартному отображению в некоторых случаях сводится задача о движении классического спина в переменном магнитном поле (см. [74] и раздел 5.2).

(4) Условие растяжения фаз  $|\partial\theta_n/\partial\theta_{n-1}| > 1$  нередко применяется [5] как полукачественный критерий сильного хаоса в гамильтоновых и диссипативных (см. (2.14)) системах.

(5) Точка  $x^*$  называется неподвижной (стационарной) точкой отображения  $f(x)$ , если  $x^* = f(x^*)$ .

(6) К сожалению, в большинстве современных работ по хаосу при параметрическом возбуждении СВ ссылки на пионерскую работу [22] отсутствуют.

(7) Эта задача тесно примыкает к проблеме и учения хаоса в ЯМР-мазерах (см. раздел 4).

(8) «Косой накачкой» называют промежуточный случай между поперечной и параллельной накачками.

(9) Часть этих моделей, являющихся базовыми для изучения квантового хаоса, описана также в разделе 6 настоящего обзора.

(10) Недавно появились работы [87], в которых исследуется режим типа СА в ЯМР с ДСЧ.

(11) Отметим, что подобная постановка проблемы квантового хаоса, основанная на принципе соответствия, является в настоящее время общепринятой, но не единственной [65].

(12) По мнению авторов этой модели, (6.1) может описывать псевдоспины в ядерной физике и физике конденсированного состояния.

(13)  $m_{1,2}$  — собственные значения операторов  $S_{1,2}^z$  в (6.2). Значения  $m_3$  определяются из закона сохранения  $T^z = \sum_{j=1}^3 S_j^z$ .

(14) Мы были бы рады, если бы этот обзор в какой-то мере способствовал возникновению интереса экспериментаторов к проблеме КХ в магнитных системах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
2. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1985.
3. Заславский Г.М., Чириков Б.В.//УФН. 1973. Т. 101. С. 3.
4. Chirikov B.V.// Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263.
5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
6. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
7. Шустер Г. Детермированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.
8. Chirikov B.V., Izrailev P.M., Shepelyansky D.L.//Soviet Scientific Reviews. С. 1981. V. 2. P. 209.
9. Percival I.C.//Proc. Roy. Soc. London. A. 1987. V. 413. P. 183.
10. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики//Избр труды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1971/1972.
- [11] Milonni P.W., Shin M.-L., Ackerhalt J.R. Chaos in Laser-Matter Interactions. — Singapore a.o.: World Scientific, 1987; Phys. Rep. 1985. V. 28. P. 205.
12. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. — М.: Наука, 1980.
13. Солитоны/Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир, 1983.
14. Смирнов Б.М.//УФН. 1986. Т. Н9. С. 177.
15. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.//Science. 1987. V. 238. P. 632.
16. Feigenbaum M.J.// J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 25; 1979. V. 21. P. 669; УФН. 1983. Т. 141. С. 343.
17. Pomeau Y., Manville P.// Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189.
18. Stud H.// Phys. Rev. Lett. 1961. V. 6. P. 174.
19. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.//УФН. 1974. Т. 144. С. 607.
20. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука, 1987.
- [21] Балк А.М., Захаров В.Е.// ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 1112.
- Тур А.В., Яновский В.В.// Ibidem. С. 873.
22. Асташкина Е.В., Михайлов А.С.//ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 1636.
23. Nakamura K., Ohta S., Kawasaki K.// J Phys. C. 1982. V. 15. P. L143.
- Ohta S., Nakamura K.// Ibidem. 1983. V. 16. P. L605.
24. De Aguiar P.M., Rezende S.M.// Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1070.
25. Zang X.Y., Suhl H.//Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 2530.
26. Rezende S.M., de Aguiar P.M., de Alcantara Bonfim O.F.// J. Magn. and Magn. Mat. 1986. V. 54 — 57. P. 1127.

27. Rezende S.M., de Alcantara Bonfim O.F., de Aguiar F.M.//Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 5153.
28. Waldner F., Barberis D.R., Yamazaki H.// Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 420.
29. Broggi G., Meier P.P., Stoop A., Badii R.// Ibidem. 1987. V. 35. P. 365.
30. Waldner F., Badii R., Barberis D.R., Broggi G., Ftoeder W., Meier P.P., Stoop R., Warden M., Yamazaki H.//J. Magn. Mat 1986. V. 54 — 57. P. 1135.
31. Bryant P.H., Jeffries C.D., Nakamura K.// Phys. Rev. A. 1988. V. 38 P. 4223.
- [31] Gill T.L., Zachary W.W.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 4130.
32. Suhl H., Zang X.Y.// Phys. Rev. Lett 1986. V. 57. P. 1480.
33. Suhl H., Zang X.T.// J. Appl. Phys. 1988. V. 63. P. 4147.
34. Gibson G., Jeffries C.// Phys. Rev. A. 1984, V. 29. P. 811.
35. Mino M., Yamazaki H.// J Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. P. 4168.
36. Yamazaki H.// I b i d e m . 1984. V. 53. P. 1155.
37. Yamazaki H., Warden M.// Ibidem. 1986. V. 55. P. 4477.
38. Yamazaki H., Mino M., Nagashima H., Warden M.//Ibidem. 1987. V. 56. P. 742.
39. Сапог Т.Л., Pecora L.M., Rachfant F.J.// Pphys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2891.
40. Степанов А.А., Звягин А.И., Волоцкий С.В., Кобец М.И., Пащенко В.А.//ФНТ. 1989. Т. 15. С. 100.
- [41] Смирнов А.И.// ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 385.
42. Смирнов А.И.//ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 185.
43. Bzun E., Derighetti B., Holzner A., Ravant M.// Acta Phys. Austr. 1984. V. 56. P. 85.
44. Chyba D.E.// J. Opt. Soc. Am. B. 1988. V. 5. P. 916.
45. Wiesenfeld K., McNamara B.// Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 13.
46. Derighetti B., Ravani M., Stoop Я., Meier P.P., Brun E.//Ibidem. 1985. V. 55. P. 1746.
47. Feingold M., Peres A.// Phisica D. 1983. V. 9. P. 433.
48. Magyart E., Thomas H., Weber R., Koufman C., Muller G.// Zs Phys. B. 1987. Bd. 65. S. 363.
49. Srivastava, Kaufman C., Müller G., Magyari E., Weber R., Thomas H.// J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 4438; 1988. V. 63. P. 4154.
50. Srivastava, Kaufman C., Müller G., Weber R., Thomas H.//Zs. Phys. B. 1988. Bd. 70. S. 251.
- [51] Nakamura K., Nakamura Y., Bishop A.R.// Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 861.
52. Nakamura K., Bishop A.R.// Phys. Rev. B. 1986, V. 33. P. 1963.
53. Гончар В.Ю., Насонов Н.Н., Цуканов В.Д.// Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. С. 932.
54. Frahm Я., Mikeska H.J.// Zs. Phys. B. 1985. Bd. 60. S. 117.
55. Haake F., Kus M., Sharf R.// Ibidem. 1987. V. 65. P. 381.
56. Буишвили Л.Л., Угулава А.И.// ФТТ. 1983. Т. 25. С. 2370.
57. Кесаев В.И., Угулава А.И.// ФТГ. 1985. Т. 27. С. 1259.
58. Алексеев К.Н., Берман Г.Л., Цифринович В.И.//ЖЭТФ. 1990. Т. 97. С. 1277.
59. Угулава А.И.// Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1987. Т. 30. С. 748.
60. Туров Е.А., Куркин М.И., Николаев В.В.// ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 283.
- [61] Игнатченко В.И., Цифринович В.И.// УФН. 1981. Т. 183. С. 75.
62. Боровик-Романов А.С., Буньков Ю.И., Думеш Б.С. и др.//УФН. 1984. Т. 142. С. 537.
63. DC Filippo S., Fusco Girard M., Salerno M.//Physica D. 1988. V. 29. P. 421.
64. Туров Е.А., Куркин М.И.//Проблемы магнитного резонанса. — М.: Наука, 1978. — С. 271.
65. Muller G.// Phys. Rev. A. 198d. V. 34. P. 3345.
66. Zaslavsky G.M.// Phys. Rep. 1981. V. 80. P. 157.
67. Елютин П.В.// УФН. 1988. Т. 155. С. 398.
68. Berry M.V.// Proc. Roy. Soc. London. A. 1987. V. 413. P. 183.
69. Casati G., Chirikov B.V., Izrailev P.M., Ford J. Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati G., Ford J. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1979. — P. 334.
70. Berman G.P., Zaslavsky G.M.// Physica A. 1978. V. 91. P. 450.
- [71] Dittrich T., Graham R.// Ann. cl. Phys. 1990, V. 200. P. 363.
72. Feingold M., Moiseyev N., Peres A.// Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 509.
- Feingold M., Peres A.// Ibidem. 1985. V. 31. P. 3472.
73. Nakamura K., Okazaki Y., Bishop A.R.// Phys. Let. A. 1986. V. 117. P. 459.
74. Nakamira K., Okazaki Y., Bishop A.R.// Phys. Rev. Let. 1986. V. 57. P. 5.
75. Frahm H., Mikeska H.J.// Zs. Phys. B. 1985. Bd. 65. S. 249.
76. Haake F., Shepelyansky D.L.// Europhys. Lett. 1988. V. 5. P. 671.
77. Kus M., Motowski J., Haake F.//Preprint Univ. Essen, FRG. — 1988.
78. Kus M., Sharf R., Haake F.// Zs. Phys. B. 1987. Bd. 66. S. 129.
79. Sharf R., Dietz B., Kus M., Haake F., Berry M.V.//Europhys. Lett. 1988. V. 5. P. 383.
80. Fishman S., Grempe D.R., Prange R.E.//Phys. Rev. Let. 1982. V. 49. P. 509.
- [81] Beyfield J.E., Sokol D.// Phys. Rev. Let. 1988. V. 61. P. 2007.
- Galvz E.J., Sauer B.E. et al.//Ibidem. P. 2011.

82. Зельдович Я.Б.// УФН. 1973. Т. ПО. С. 139.
83. Percival I.C.// J. Phys. B. 1973. V. 6. P. L229.
84. Umberger D., Farmer J.D.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 661.  
Grebogi C., McDonald S.W. et al.//Phys. Let. A. 1985. V. 110. P. 1.
85. Brody T.A., Flores J., French J.B. et al.//Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 385.
86. Grobe R., Hooks F.// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2893.
87. Рухлов В.С.//Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 1060.  
Зверев В.В.// Тезисы докладов XX Всесоюзного семинара «Спиновые волны». — Л., 1990.

Статья поступила 27.09.91 г.,  
после доработки 26.02.92 г.