

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

538.945

**АНИОННАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ  
В СИЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ**

*А.П. Протогенов*

(Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород)

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	1
2. Сильные спиновые корреляции . . . . .	3
3. Статистика возбуждений в двумерных системах . . . . .	7
4. Длинноволновое описание . . . . .	11
5. Качественная картина . . . . .	17
6. Структура энергетического спектра . . . . .	20
7. Волновая функция . . . . .	30
8. Анионы на решетке . . . . .	33
9. Фермионный подход . . . . .	42
10. Классификация фазовых состояний . . . . .	45
11. Иерархия фазовых переходов . . . . .	48
12. Анионы с $(3+1)D$ - и $(1+1)D$ -точек зрения . . . . .	54
13. Термодинамика и электродинамика анионных систем . . . . .	61
14. Экспериментальные следствия кирального состояния . . . . .	68
15. Заключение . . . . .	72
Примечания . . . . .	74
Список литературы . . . . .	75

**1. Введение**

За сравнительно короткое время, прошедшее после открытия высокотемпературной сверхпроводимости [1, 2], был достигнут значительный прогресс в понимании свойств планарных систем. В результате обширных экспериментальных и теоретических исследований возникло убеждение, что сверхпроводящее состояние и многие необычные явления в так называемом нормальном состоянии — это существенно пространственно двумерные явления, разыг-

рывающиеся в базисных  $\text{CuO}_2$ -слоях. Трехмерная архитектура новых соединений, кроме системы базисных плоскостей, содержит также дополнительные элементы, играющие роль резервуара допантов.

Другая существенная черта состоит в том, что все «родительские» соединения, т.е. соединения в отсутствие допинга ( $\text{La}_2\text{CuO}_4$ ,  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$  и др.), являются в отношении своих транспортных свойств хорошими диэлектриками. Внедрение стронция или обогащение кислородом превращает их в плохие металлы. Это означает, что существуют две значительно отличающиеся по масштабу энергии — ширина зоны и гораздо большее расстояние между зонами. В условиях резко различающихся энергетических масштабов в допированных соединениях существует возможность для адиабатически медленного движения носителей, происходящего на фоне быстрых спиновых флуктуаций. В первую очередь нас будет интересовать устройство основного состояния и распределение квантовых чисел у низколежащих по энергии возбуждений. Существование двух резко различающихся энергетических масштабов обеспечивает, как мы увидим ниже, саму возможность распределения спиновых и зарядовых степеней свободы у низкоэнергетических возбуждений между различными типами квазичастиц. В стандартной ферми-жидкости металла спин и заряд совмещены у электрон-дырочных возбуждений фермиевого основного состояния.

Третья особенность заключается в том, что исходные соединения обнаруживают антиферромагнитное упорядочение спина, равного  $1/2$ . Удаление заряда и малого спина  $1/2$  из узла базисной плоскости в резервуар допантов (для соединения  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$  — в плоскости с цепочками) ведет к сильным квантовым спиновым флуктуациям. Из-за устранения заряда и спина из одного из узлов элементарной ячейки базисной решетки, что сопровождается образованием заряженного спинового дефекта, возникают сильные корреляции в ориентации оставшихся спинов на соседних узлах. Кроме того, вследствие нарушения антиферромагнитного порядка внутри элементарной ячейки появляются корреляции между соседями, расположенными по диагонали, т.е. корреляции со следующими за ближайшими соседями. Квантовые фрустрации в ориентации спина на соседних узлах приводят, с одной стороны, к разрушению антиферромагнитного порядка спинов, лежащих в плоскостях<sup>(1\*)</sup>, и с другой — к установлению порядка, проявляющегося в возникновении среднего магнитного момента в направлении, перпендикулярном плоскости, из-за обрзовавшейся неколлинеарности спина частиц на трех соседних узлах ячейки.

Объединение замечательных свойств новых соединений, а именно двумерного характера явлений, существования большого энергетического масштаба в исходных диэлектриках и предельно малого спина находит свое отражение в систематике энергетических уровней и в структуре низколежащих возбуждений. Осознание существенной роли сильных квантовых флуктуаций привело к тому, что в большом количестве работ, опубликованных в последнее время, использовался опыт, накопленный в квантовой теории поля в связи с проблемами сильной связи и в физике конденсированного состояния при изучении дробного квантового эффекта Холла [3]. Такое развитие теории увеличивает разрыв между новыми подходами и традиционными для физики конденсированного состояния способами изучения сверхпроводимости. Одна из целей настоящего обзора работ по теории сильно коррелированных двумерных систем состоит в том, чтобы сблизить позиции и используемый язык большого числа людей из этих различных областей.

В связи с тем, что в обсуждаемой проблеме сильных квантовых флуктуаций отсутствует малый параметр, любое обсуждение носит вынужденно качественный характер. Выйти за эти пределы можно лишь с помощью численного эксперимента или точного решения. По этой причине мы всюду будем ограничиваться качественной стороной дела, надеясь найти средства для постановки задачи о точном решении. Рассматриваемая проблема несет в себе дополнительные трудности, связанные с высокой концентрацией различных подходов, а также используемых средств и образов. Поэтому по мере продвижения, начав с простых методов и грубых моделей, мы в последующем будем обращаться к более изощренным и менее известным средствам.

Состояние с развитыми спиновыми флуктуациями называют квантовой спиновой жидкостью, имея в виду, кроме отсутствия малого параметра, еще одно обстоятельство. Характерный размер области с нарушенным антиферромагнитным расположением спинов порядка расстояния между такими областями. Он определяется концентрацией  $n$  созданных благодаря допированию дефектов спиновой текстуры и составляет величину порядка  $n^{-1/3} \sim 10^{-7}$  см. Это всего лишь в несколько раз превышает постоянную решетки в базисной плоскости. Поэтому адекватная теория с необходимостью является теорией на решетке. При переходе к длинноволновому описанию при помощи сглаженных на масштабе решетки полей существенно сохранить основную информацию, полученную на малых расстояниях. Такое наследие от малых расстояний в условиях сильного взаимодействия содержит, в частности, информацию топологического характера<sup>(2\*)</sup>, что будет показано в следующих разделах. В дальнейшем будут обсуждаться свойства двумерных систем как при помощи полей, определенных на решетке, так и с точки зрения больших расстояний.

## 2. Сильные спиновые корреляции

Переход из диэлектрического состояния в металлическое описывается моделью Хаббарда [4] с гамильтонианом

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (c_{i\sigma}^+ c_{j\sigma} + c_{j\sigma}^+ c_{i\sigma}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (2.1)$$

$$n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^+ c_{i\sigma}. \quad (2.2)$$

Оператор  $c_{i\sigma}$  уничтожает электрон со спином  $\sigma$  на узле  $i$ ,  $n_{i\sigma}$  — оператор числа частиц,  $t$  — амплитуда туннелирования между соседними узлами  $i$  и  $j$  двумерной квадратной решетки (это обозначено при суммировании скобками  $\langle i, j \rangle$ ),  $U$  — энергия отталкивания фермионов со спином  $1/2$  на одном узле<sup>(3\*)</sup>. Без допирования среднее число электронов на узле

$$\bar{n}_i = \langle \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^+ c_{i\sigma} \rangle = 1$$

и соответствует наполовину заполненной зоне.

В диэлектрике состояния  $|0\rangle$ ,  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  нижней зоны, имеющей ширину порядка  $t$ , отделены от состояний  $c_{i\uparrow}^+ c_{i\downarrow}^+ |0\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$  верхней зоны, отвечающих двукратному заполнению, большим энергетическим интервалом  $U \gg t$ , а химический потенциал лежит в центре запрещенной зоны и равен  $U/2$ . По су-

существующим оценкам  $t \sim 0,1$  эВ и  $U \sim 1$  эВ. Ограничиваясь пространством низколежащих по энергии однократно занятых состояний  $|0\rangle, |\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ , с помощью проекционного оператора Гуцвиллера [6]

$$P = \prod_i (1 - n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}) \quad (2.3)$$

во втором порядке теории возмущений получаем [7, 8] гамильтониан  $t - J$ -модели

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (a_{i\sigma}^+ a_{j\sigma} + a_{j\sigma}^+ a_{i\sigma}) + J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i s_j - \frac{1}{4} n_i n_j), \quad (2.4)$$

$$a_{i\sigma} = c_{i\sigma} (1 - n_{i,-\sigma}), \quad s_i = c_{i\alpha}^+ \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{i\beta} / 2, \quad (2.5)$$

где  $J = 4t^2/U$ ,  $\vec{\sigma}$  — матрицы Паули,  $\sigma$  и  $\alpha = (\uparrow, \downarrow)$  — спинные индексы.

При  $t/U \ll 1$  в условиях близости к половинному заполнению  $1 - \bar{n} \ll 1$  возможен случай, когда  $t(1 - \bar{n}) \ll t^2/U$  и, следовательно, первое слагаемое в (2.4) пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Этот предел означает, что малое количество почти неподвижных дырок<sup>(4\*)</sup> помещено в состояние, сформированное вторым слагаемым в (2.4). Эта ситуация по сравнению с канонической физикой металлов, где кинетическая и потенциальная энергии одного порядка, исключительна, так как кинетическая энергия дырок сейчас мала и основным является гамильтониан Гейзенберга

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^+ \vec{\sigma}_i) (c_j^+ \vec{\sigma}_j), \quad (2.6)$$

или, что эквивалентно, четырехфермионный гамильтониан

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[ (c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha}) (c_{j\beta}^+ c_{i\beta}) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.7)$$

Малость квадратичных по операторам  $c_{i\alpha}$  слагаемых и, вследствие этого, отсутствие возможности классифицировать состояния, начиная с состояний не взаимодействующих частиц, ведет к сильным спинным корреляциям.

Различные по форме записи гамильтонианы (2.6) и (2.7) заставляют нас, оперируя привычными терминами теории среднего поля, предполагать различный вид параметра порядка. Например, для гамильтониана (2.6) можно было бы думать о различных возможностях в распределении по решетке среднего спина  $\langle s_i \rangle = \langle c_{i\alpha}^+ \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{i\beta} \rangle$ . В частности, в антиферромагнитном состоянии  $\langle s_i \rangle = (-1)^i \mathbf{m}$ , при альтернативном упорядочении моментов вдоль оси  $x$   $\langle s_i \rangle = (-1)^i \mathbf{m}$  и т.д.

Чтобы описать новые возможности [9 — 12] классификации состояний для гамильтониана в форме (2.7), введем [12] оператор перескока

$$\hat{\chi}_{ij} = \frac{J}{2} \sum_{\alpha} c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha}. \quad (2.8)$$

Его среднее значение, имеющее смысл амплитуды вероятности [8, 13] перескока с узла  $j$  на узел  $i$  с параметризацией в виде

$$\chi_{ij} = \frac{J}{2} \sum_{\alpha} \langle c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha} \rangle = -|\chi_{ij}| \exp(-2\pi i \int_i^j \mathbf{a} d\mathbf{l}), \quad (2.9)$$

можно использовать для обсуждения свойств фаз с различным геометрически правильным или хаотическим распределением по решетке комплексных переменных  $\chi_{ij}$ . Некоторые примеры приведены в работах [10,12,15] и показаны на рис. 1.

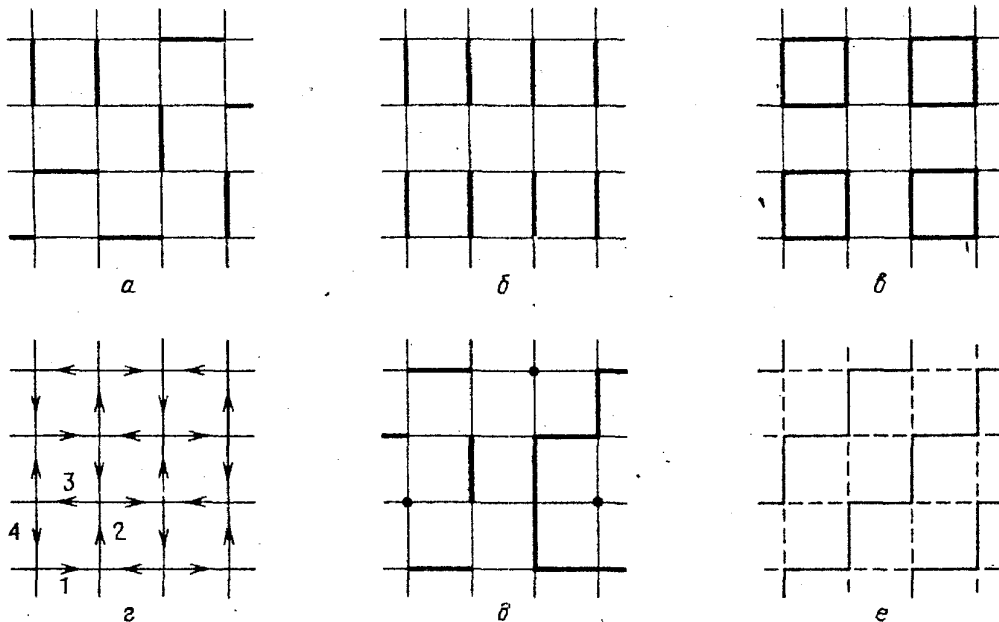


Рис. 1. Распределение амплитуд вероятности перескока на решетке. *a* — Однородное случайное распределение. *б* — Димерная фаза. *в* — Распределение в виде ячеек. *г* — Фаза с потоком; цифры на ребрах указывают распределение индексов переменных  $\chi_i$ . *д* — Распределение при наличии допинга. *е* — Зигзагообразное распределение амплитуд

Состояния с различными конфигурациями величин  $\chi_{ij}$  или  $\langle s_i \rangle$  как-то распределены по энергетической шкале. Поэтому заранее не ясно, чем один способ выбора переменных теории среднего поля предпочтительнее, чем другой. Теория среднего поля, вообще говоря, может и не иметь области применимости. Фактически это вопрос о локальной устойчивости состояний с различными конфигурациями величин  $\chi_{ij}$  или  $\langle s_i \rangle$  и о структуре состояния с абсолютным минимумом энергии. Некоторым основанием для предпочтения описания в терминах (2.9) на этой начальной стадии обсуждения могло бы быть следующее соображение.

Обратим внимание на инвариантность амплитуд перескока относительно локальных фазовых вращений  $c_j \rightarrow c_j \exp(i\varphi_j)$ . Другими словами, величины  $\chi_{ij}$  инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla\varphi \quad (2.10)$$

калибровочного поля  $\mathbf{a}$ , которое определено на звене  $ij$  и параметризует фазу в (2.9):

$$\theta_{ij} = 2\pi \int_i^j \mathbf{a} d\mathbf{l}. \quad (2.11)$$

«Наблюдаемыми» могут быть только калибровочно-инвариантные величины. Например, для ячейки с вершинами в точках  $i, j, k, l$  калибровочно-инвариантна величина

$$\langle \chi_{ij} \chi_{jk} \chi_{kl} \chi_{li} \rangle \sim \exp(2\pi i \phi). \quad (2.12)$$

Она зависит от потока

$$\phi = \frac{1}{2\pi} (\theta_{ij} + \theta_{jk} + \theta_{kl} + \theta_{li}) \quad (2.13)$$

статистического магнитного поля через элементарную ячейку. Здесь и в дальнейшем принимается, если противоположное не отмечено особо, что квант потока  $\phi_0 = c\hbar/e = 1$  в нормировке, когда  $\hbar, c$  и  $e$  равны единице.

Если значения потока  $\phi = p/q$  через элементарную ячейку пронумеровать с помощью взаимно простых чисел  $p$  и  $q$ , то мы при разных  $p$  и  $q$  будем иметь дело с серией состояний, получившей в литературе [16] название обобщенной фазы с потоком. В настоящем обзоре мы ограничимся обсуждением свойств этого широкого класса состояний<sup>(5\*)</sup>.

Сделаем несколько упрощающих преобразований. Интегрируя по переменным Хаббарда—Стратоновича  $\chi_{ij}$  гамильтониана

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} [(\chi_{ij} c_{ia}^+ c_{ja} + \text{э.с.}) + \frac{2}{J} |\chi_{ij}|^2], \quad (2.14)$$

который описывает движение заряженных частиц, находящихся в магнитном поле с векторным потенциалом  $\mathbf{a}$ , мы возвращаемся к (2.7). Такая теория среднего поля хорошо работает для группы  $SU(N)$  при больших  $N$ .

Динамические фазы  $\exp(-i\theta_{ij})$  являются переменными эффективной решеточной калибровочной теории. В дальнейшем нам понадобятся основные сведения, касающиеся этой задачи. Поэтому в п. 6 будут рассматриваться результаты недавних работ, относящихся к проблеме (2.14).

Поступим в иллюстративных целях еще более грубым образом. Оставим в (2.7) вместо произведения  $c_{ia}^+ c_{ja}$  модуль  $|\chi_{ij}| = |\chi| \delta_{ij}$  амплитуды вероятности перескока, а вместо второй пары операторов — выражение (2.9) с векторным потенциалом из (2.10) и запишем (2.7) как гамильтониан

$$H = K \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j - \theta_{ij}) \quad (2.15)$$

спиновой сети случайных связей с фрустрациями. Он возник в первоначальном [17, 18] феноменологическом описании высокотемпературных сверхпроводников. Аккуратный вывод гамильтониана (2.14) и (2.15) содержится в работах [12, 19, 20]. Гамильтонианы (2.14) и (2.15) дополняют друг друга и дают, как будет видно из дальнейшего, полную картину распределения квантовых чисел.

В заключение этого раздела обсудим способ включения внешнего электромагнитного поля, характеризуемого векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , в гамильтониан (2.14). Калибровочно-инвариантный относительно преобразований по-

тенциала  $\mathbf{A}$  оператор электронного перескока вместо (2.8) имеет вид

$$\sum_{\alpha} c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha} \exp(2\pi i \int_i^j \mathbf{A} d\mathbf{l}). \quad (2.16)$$

Усредняя, как и в (2.9), запишем, что

$$\chi_{ij} = \sum_{\alpha} \langle c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha} \rangle \exp(2\pi i \int_i^j \mathbf{A} d\mathbf{l}) = -|\chi_{ij}| \exp(-2\pi i \int_i^j \mathbf{a} d\mathbf{l}). \quad (2.17)$$

Другими словами, в присутствии внешнего поля [21]

$$\sum_{\alpha} \langle c_{i\alpha}^+ c_{j\alpha} \rangle = -|\chi_{ij}| \exp[-2\pi i \int_i^j (\mathbf{a} + \mathbf{A}) d\mathbf{l}]. \quad (2.18)$$

Следовательно, динамически генерируемый за счет перескоков калибровочный потенциал  $\mathbf{a}$  на равных правах с потенциалом внешнего поля образуют сумму

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{A}, \quad (2.19)$$

что определяет специфические свойства электромагнитного отклика рассматриваемой системы.

### 3. Статистика возбуждений в двумерных системах

Близость к диэлектрическому состоянию обуславливает, как мы видели в предыдущем разделе, сильные спиновые корреляции. Какие новые квантовые возможности вносит пространственная размерность системы? Ответ на этот вопрос известен давно [22 — 26]. Хорошо известно, что в системах с пространственно-временной размерностью  $2 + 1$  возбуждения имеют дробную или промежуточную статистику [22 — 26]. Понятие дробной статистики в  $(2 + 1)D$ -случае естественно возникает при рассмотрении системы частиц с лагранжианом [26]

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 + \hbar \frac{\vartheta}{\pi} \sum_{i \neq j}^N \frac{d}{dt} \varphi_{ij} \quad (3.1)$$

Положение каждой частицы фиксируется двумерным радиус-вектором  $\mathbf{r}_i$ , а угловое расстояние между частицами  $i$  и  $j$  — азимутальным углом  $\varphi_{ij}$ .

Последнее слагаемое в (3.1) — полная производная по времени, и поэтому не дает вклада в классические уравнения движения. В квантовой механике, благодаря второму слагаемому в (3.1), у волновой функции при перестановке частиц индуцируется фаза. Действительно, если частица  $i$  проходит половину пути вокруг частицы  $j$  ( $\varphi_{ij} = \pi$ ), что отвечает после трансляции перестановке частиц, у волновой функции появляется множитель  $\exp(i\vartheta)$ . При  $\vartheta = 0 \bmod 2\pi$  частица — бозон, при  $\vartheta = \pi \bmod 2\pi$  частица является фермионом, а при произвольном  $\vartheta$  мы имеем анион<sup>(6\*)</sup> [25]. Для  $\vartheta = \pi/2$ , что отвечает точной середине между фермионом и бозоном, частица получила название семиона (полуфермиона) [27]. Семион для явления высокотемпературной сверхпро-

водимости представляет наибольший интерес. При действующем в двумерной системе механизме Костерлица—Таулесса объединения возбуждений в **пары** (см. раздел 11) пара из полуфермионов ведет себя при перестановке как бозон:  $[\exp(i\pi/2)]^4 = 1$  [28].

Существование промежуточной статистики в пространственно двумерных системах целиком обусловлено многосвязностью конфигурационного пространства системы тождественных частиц — пространства определения вектора состояния. Конфигурационное пространство  $N$  тождественных частиц получается из координатного пространства идентификацией точек, полученных при любой перестановке координат частиц, и после исключения сингулярных точек, где две или более координат совпадают. В трехмерном случае конфигурационное пространство  $M$  двусвязно и фундаментальная гомотопическая группа  $\pi_1(M)$  совпадает с группой перестановок  $S_N$  с ее четным для бозонов и нечетным для фермионов представлениями. В двумерных системах анионные возбуждения реализуют представления группы кос (рис. 2) [29]<sup>(7\*)</sup>.

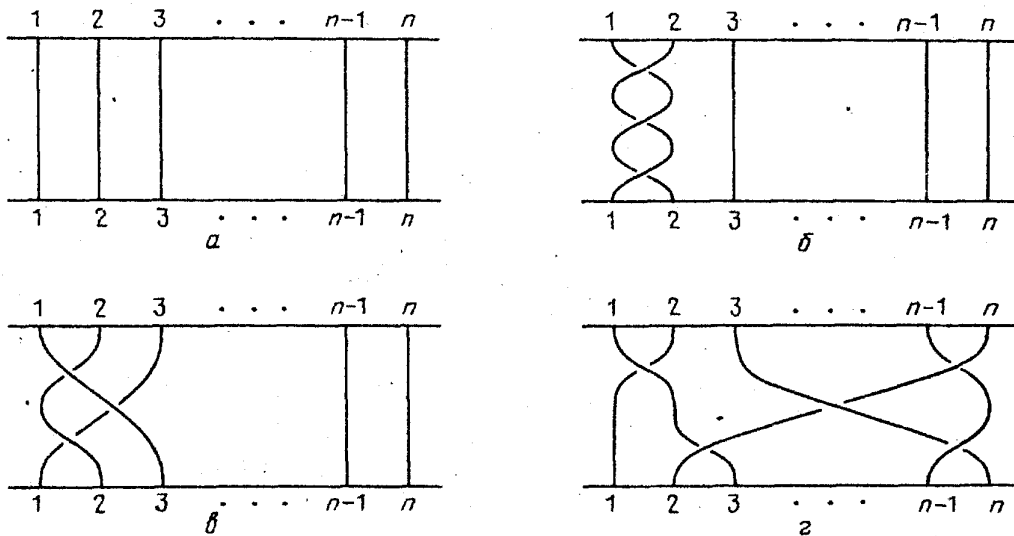


Рис. 2. Квантовые косы. *a* — Тривиальные косы. *б* — Результат  $g_1^{-3}$  действия операторов  $g_i$  группы кос. *в* — Графическое представление более длинного "слова"  $g_1 g_2 g_1$ , составленного из операторов  $g_i$ . *г* — Общий вид переплетения

В многосвязности двумерного конфигурационного пространства проще всего убедиться, рассматривая канонический импульс, который для (3.1) имеет вид

$$p_i = m \frac{dr_i}{dt} - \hbar a_i(r_i), \quad (3.2)$$

$$a_i = \frac{\vartheta}{\pi} \sum_{k \neq i} \frac{[e_z(r_i - r_k)]}{|r_i - r_k|^2}. \quad (3.3)$$

Векторный потенциал (3.3) представляет собой сумму потенциалов Бома—Ааронова с потоком  $\phi = \vartheta/\pi$  в единицах потока  $\phi_0$ .

Таким образом, двумерное конфигурационное пространство содержит си-



стему особенностей и тем самым многосвязно, а между частицами, переносящими единичный статистический заряд и поток  $\phi = \vartheta/\pi$ , существует дальнедействующее фазовое взаимодействие Дирака—Бома—Ааронова. Гамильтониан системы таких частиц равен

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i + \hbar \mathbf{a}_i)^2. \quad (3.4)$$

Сейчас известно [31 — 33], что возможны три эквивалентные формулировки. В первом случае  $N$ -частичная волновая функция частиц, находящихся в поле векторного потенциала  $\mathbf{a}(\vartheta)$ , может быть симметричной:

$$\psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots). \quad (3.5)$$

Очевидно, что, заменив  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ , мы имели бы частицы, находящиеся в поле с потенциалом  $\mathbf{a}(\pi - \vartheta)$  и с многочастичной волновой функцией, удовлетворяющей при перестановке частиц фермионному условию

$$\psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = -\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots). \quad (3.6)$$

Для потенциала Бома—Ааронова (3.3) напряженность поля  $f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha = 0$  вне источников, т.е. потенциал является чисто калибровочным и может быть устранен с помощью сингулярного<sup>(8\*)</sup> калибровочного преобразования:

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \nabla f_i = 0, \quad (3.7)$$

$$f_i = \frac{\vartheta}{\pi} \text{Im} \sum_{k \neq i}^N \ln(z_i - z_k), \quad z_k = x_k + iy_k. \quad (3.8)$$

Волновая функция в этом третьем случае становится многозначной, благодаря приобретаемой при перестановке  $(z_k - z_j) \rightarrow e^{i\pi}(z_k - z_j)$  частиц калибровочной фазе:

$$\psi(\{\mathbf{r}\}) \rightarrow \psi(\{\mathbf{r}\}) \prod_{k < j} \left( \frac{z_k - z_j}{|z_k - z_j|} \right)^{\vartheta/\pi}, \quad (3.9)$$

**а гамильтониан**

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad (3.10)$$

описывает свободные ани-частицы, волновая функция системы  $N$  частиц в такой калибровке приобретает при перестановке двух частиц множитель  $\exp(i\vartheta)$ <sup>(9\*)</sup>. Свойство дробной статистики трактуется в этом представлении как граничные условия на волновую функцию. Поясним это на следующем примере. Исключение из конфигурационного пространства тождественных частиц областей [23] эквивалентно граничному условию  $j_n(0) \sim \sim \psi d\psi^*/dx - \text{к.с.} = 0$  на границе тождественности  $x = x_1 - x_2 = 0$ . Общее решение уравнения  $j_n = 0$  имеет вид

$$d\psi/dx = \eta\psi. \quad (3.11)$$

Случай  $\eta = 0$  ( $d\psi/dx = 0$ ,  $\psi$  — симметричная функция) отвечает бозонам,  $\eta = \infty$  ( $\psi = 0$ ,  $\psi$  — антисимметричная функция) — фермионам. Промежуточное  $\eta$  соответствует промежуточной статистике и при  $\eta < 0$  и  $x \rightarrow +0$  — крайевым состояниям  $\psi = \exp(\eta x)$ .

Трудность проблемы особенно ясно проявляется в сингулярной калибровке (3.7) и связана с многозначным поведением [33] волновой функции (3.9). Действительно, если  $\mathbf{r}_{10}$  и  $\mathbf{r}_{20}$  — векторы, обозначающие начальное положение в системе из двух частиц, а  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — конечное, то волновая функция  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  будет отличаться от  $\psi(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20})$  фазовым множителем  $\exp[i(\vartheta/\pi)\varphi]$ , где  $\varphi$  есть угол, описывающий число вращений одной частицы вокруг другой до совпадения отмеченных координат. В  $N$ -частичной системе фаза  $\varphi$  зависит от положения всех других частиц. Поэтому внешне простой по виду гамильтониан (3.4) существенно нелокален, так как векторный потенциал а одной из частиц зависит от положения всех частиц в системе. На другом языке можно говорить об образовании узлов и зацеплений мировых линий частиц, несущих поток Бома—Ааронова (рис. 3). Понятие зацеплений хорошо определено, так как конфигурационное пространство тождественных частиц не содержит точек, где координаты двух или более частиц совпадают (так называемое условие твердого тела)<sup>(10\*)</sup>. В отсутствие этого условия конфигурационное пространство в любой размерности было бы односвязным, косы распутывались бы и были бы возможны только бозоны [35]<sup>(11\*)</sup>.

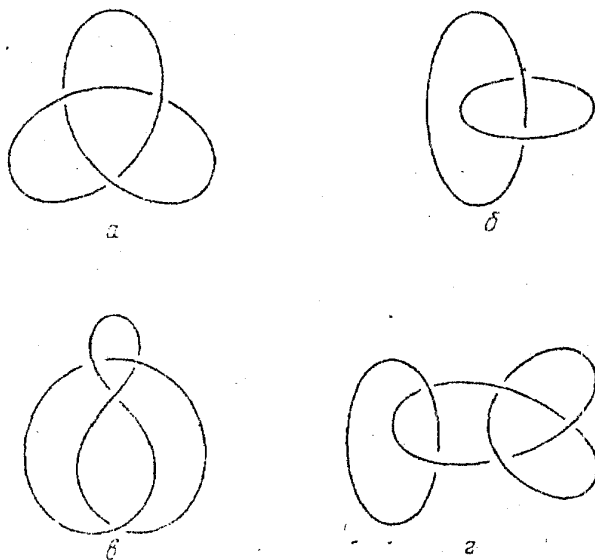


Рис. 3. Узлы (а, в, г) и зацепления (б и г). отождествление противоположных точек с одинаковыми индексами на рис. 2, б и в дает замкнутые косы, т.е. узел и зацепление соответственно на рис. 3, а и б

Для пояснения эффектов трансмутации статистики бозонов в поле бом-аароновского вихря рассмотрим систему из двух заряженных частиц с моментом инерции  $I$  [35, 36]. Гамильтониан, собственные функции и собственные значения равны

$$H = \frac{\hbar^2}{2I} \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \quad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad (3.12)$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}. \quad (3.13)$$

Так как при перестановке бозонов  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ , то значения  $m$  четны, а энергия в основном состоянии равна нулю.

Гамильтониан бозонов в присутствии вихря (3.3)

$$H = \frac{\hbar^2}{2I} \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\vartheta}{\pi} \right)^2 \quad (3.14)$$

имеет собственные значения

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2I} \left( m + \frac{\vartheta}{\pi} \right)^2. \quad (3.15)$$

Если  $\vartheta = \pi$ , то числа  $m + 1$  нечетны. В этом случае (3.15) совпадает со спектром свободных фермионов. Тожественность бозонов во внешнем чисто калибровочном поле свободным фермионам при  $\vartheta = \pi$  обсуждалась в литературе неоднократно [37 — 39]. Здесь мы обратим внимание на существование углового момента в основном состоянии.

Альтернатива — свободные анионы с многозначной волновой функцией или взаимодействующие друг с другом бозе- или ферми-частицы — сопровождается появлением энергии взаимодействия [40]

$$V = \sum_{i < j} \frac{V_0(\vartheta)}{(x_i - x_j)^2}. \quad (3.16)$$

Мотив потенциала  $x^{-2}$  существует также в одномерных спиновых системах с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j}{(x_i - x_j)^2} \quad (3.17)$$

и точным решением [41, 42]. Он находит поддержку и в двумерном случае. Волновая функция [43 — 45], претендующая на роль основного состояния, оказывается [46] точной собственной функцией гамильтониана

$$H = \sum_{\alpha} (D_{\alpha}^{\dagger} D_{\alpha} + \text{э.с.}), \quad D_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{-1} \vec{\sigma}_{\alpha} \vec{\sigma}_{\beta}; \quad (3.18)$$

здесь  $z = x + iy$  — комплексная координата частицы в плоскости  $x, y$ . Потенциал  $|z_i - z_j|^{-2}$  исключает туннелирование и реализует при операции сплетения [35] условие твердого кора. Другими словами, нет «утечки» [40] волновой функции (отсутствует интерференция) между различными секторами конфигурационного пространства системы частиц.

#### 4. Длинноволновое описание

Сейчас удобно вернуться к спиновому гамильтониану (2.6), чтобы пояснить особенности механизма возникновения [47] в двумерных спиновых системах возбуждений с промежуточной статистикой. Для этой цели, устремив постоянную решетки к нулю, рассмотрим длинноволновый предел [47 — 49] двухподрешеточного антиферромагнетика (2.6), который описывается эффективным лагранжианом

$$L = (2/g^2)(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \quad (4.1)$$

0(3) -симметричной нелинейной  **$\sigma$ -модели**. Единичный вектор имеет смысл антиферромагнитного параметра порядка. Система единиц выбрана так, что скорость спиновых волн равна единице,  $\mu = 0, 1, 2$ ;  $g^2 \sim J^{-1}$  — константа связи. До формулы (4.17) мы будем рассматривать только динамику спиновых степеней свободы.

Запишем вектор

$$\mathbf{n} = z^+ \vec{\sigma} z \quad (4.2)$$

в терминах комплексного дублета

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

со связью

$$z^+ z = 1, \quad (4.4)$$

так как  $\mathbf{n}^2 = 1$ . В переменных  $z$  лагранжиан (4.1) имеет вид

$$L = \frac{2}{g^2} (\partial_\mu z^+ \partial^\mu z + z^+ \partial_\mu z \cdot z^+ \partial^\mu z). \quad (4.5)$$

Динамика квантовой системы определяется фейнмановским интегралом по всем путям от  $\exp(iS)$ , где действие  $S = \int d^3x L$ . Экспонента  $\exp(iS)$  не фиксирует действие полностью. Она не меняется, в частности, при добавлении<sup>(12\*)</sup> к лагранжиану слагаемого Хопфа

$$\mathcal{H} = (1/4\pi^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda} (z^+ \partial_\mu z) (\partial_\nu z^+ \partial_\lambda z), \quad (4.6)$$

записанного здесь в локальной форме [50 — 53]. Этот член характеризует степень отображения компактифицированного пространства-времени<sup>(13\*)</sup>  $S^3$  в пространство значений поля  $z S^2$ . Хопфов инвариант  $\int d^3x$  есть целое число (гомотопический класс), и поэтому добавление слагаемого Хопфа с угловым множителем  $\vartheta$ , кратным  $2\pi k$ , к лагранжиану не меняет амплитуды перехода.

Обратим внимание на то, что лагранжиан (4.5) инвариантен относительно локальных  $U(1)$  калибровочных преобразований  $z(x) \rightarrow \exp(i\alpha(x))z(x)$ . Поэтому в непрерывном пределе, так же как и на решетке, существует  $U(1)$ -симметричный калибровочный потенциал  $a_\mu$ , который дает возможность записать [47, 48] лагранжиан (4.5) с учетом (4.6) в следующем виде:

$$L = \frac{2}{g^2} |(\partial_\mu + ia_\mu)z|^2 - \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda. \quad (4.7)$$

В эквивалентности (4.7) и (4.5) в сумме с (4.6), которая справедлива лишь в длинноволновом пределе, можно убедиться с помощью уравнения движения  $a_\mu = iz^+ \partial_\mu z$  после подстановки его в (4.7). (В лагранжиане (4.7) оставлены [53] только младшие по производным, основные в длинноволновом пределе слагаемые).

Последнее слагаемое в выражении (4.7) называется членом Черна—Саймонса. Этот член первоначально был предложен в работах [54 — 65], чтобы

обеспечить топологический механизм генерации массы у калибровочных полей. В связи с теорией высокотемпературной сверхпроводимости он был впервые использован в работах [47, 48]. Описание сверхпроводящего и нормального состояния в сильно коррелированных спиновых системах, а также дробного квантового эффекта Холла, включающее в рассмотрение черн-саймоновское слагаемое, содержится в большом числе опубликованных в последнее время работ.

В литературе существует [53] несколько различных по форме записи (но сводимых друг к другу в длинноволновом пределе) способов учета топологических слагаемых в действии. Например, в виде

$$L = a_\mu j^\mu - (k/4\pi) \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda, \quad (4.8)$$

где  $k$  — целое число, а сохраняющийся топологический ток

$$j^\mu = (1/8\pi) \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c \quad (4.9)$$

действует как источник вспомогательной переменной — векторного потенциала  $a_\mu$ , не имеющего независимой динамики. Нулевая компонента плотности тока, совпадающая с плотностью топологического заряда скирмионов [65], определяет, благодаря уравнениям движения

$$(k/4\pi) \epsilon^{\mu\nu\lambda} f_{\nu\lambda} = j^\mu, \quad (4.10)$$

поток  $\int d^2x f_{12}$  калибровочного поля  $f_{\nu\lambda} = \partial_\nu a_\lambda - \partial_\lambda a_\nu$  [37]. Калибровочный потенциал  $a_\mu$  при таком подходе играет роль множителя Лагранжа, а (4.10) — уравнения связи. Сравнение различных способов учета топологических слагаемых содержится в работе [53]. Здесь мы лишь отметим связь  $k = 1/8\pi\beta$  коэффициента в (4.7) и дуальность статистических фаз:  $\vartheta_\beta/\pi = -\pi/\vartheta_\alpha$ ,  $\vartheta_\beta = -1/8\beta$ ,  $\vartheta_\alpha = \pi/k$  [53].

Возможность того, что в основном состоянии  $k \neq 0$ , представляет большой интерес. В этом случае решениями классических уравнений движения являются [56] потенциалы Боме—Ааронова (3.3) с  $\vartheta = \pi/k$  [66 — 69]. Это значит, что черн-саймонсовский член индуцирует дробную статистику с фазой  $\exp(i\pi/k)$ . При  $k = 2$  возникающие полуфермионы несут квантовые числа спинов Лафлина—Калмейера [43, 70 — 72]. Квазиклассические конфигурации поля  $z$  [72 — 74] при этом указывают на то, что существуют области нарушенного антиферромагнитного, упорядочения с характерным размером  $n^{-1/2}$ , где  $n$  — двумерная концентрация допантов. Их существование, равно как и стабильность, определяются нулевой компонентой плотности топологического тока (4.9). Действительно, при переходе на решетку среднее значение степени неколлинеарности [45, 76, 77]

$$E_{123} = \langle s_1 [s_2 s_3] \rangle \quad (4.11)$$

трех соседних спинов элементарной ячейки совпадает [74] с плотностью топологического заряда (4.9) и дает плотность потока калибровочного поля  $\epsilon^{\mu\nu} \langle s [\partial_\nu s \partial_\mu s] \rangle$  (рис. 4). Псевдоскалярный параметр порядка (4.11) был впервые введен как характеристика возникающего кирального состояния в работах [45, 76, 77].

Среднее (4.11) в решеточном варианте описания и лагранжианы (4.7) и

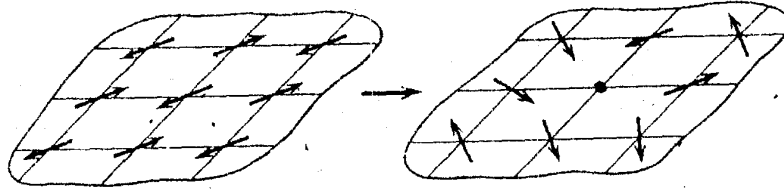


Рис. 4. Возникновение спиновой вакансии и неколлинеарности соседних спинов при разрушении антиферромагнитного порядка

(4.8) — в непрерывном неинвариантны относительно операции двумерной четности  $P(x, y \rightarrow -x, y)$  и относительно инверсии времени  $T$ . Спонтанное нарушение  $T$ - и  $P$ -симметрий возможно на расстояниях порядка корреляционного радиуса  $n^{-1/2}$  и отсутствует в базовых плоскостях и в перпендикулярном направлении по отношению к ним на больших расстояниях благодаря эффектам «экранирования». Эти явления мы рассмотрим в следующих разделах. Здесь же отметим, что нарушение симметрии относительно  $T$ - и  $P$ -инверсий — важная, но не единственная характеристика основного кирального состояния модели (4.7).

Другой фундаментальной характеристикой состояния является целое число  $k$  в лагранжиане (4.8). Поскольку этот момент очень важен, поясним его подробнее. Известно [11, 77, 78], что рассматриваемая система (2.6) обладает не только локальной  $U(1)$ -симметрией, но при  $\bar{n} = 1$  симметрична также [79 — 81] относительно локальных  $SU(2)$ -преобразований. В этом случае черн-саймонсовский член

$$L = \frac{\vartheta \epsilon^{\mu\nu\lambda}}{8\pi^2} \text{Tr}(a_\mu \partial_\nu a_\lambda + \frac{2}{3} a_\mu a_\nu a_\lambda) \quad (4.12)$$

содержит третью степень калибровочного потенциала  $a_\mu$ , и это слагаемое, вообще говоря, неинвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований. Инвариантность относительно них существует только [59] при условии  $\vartheta = 2\pi k$ .

В случае  $U(1)$ -симметричного<sup>(14\*)</sup> члена Черна—Саймонса кубичных по  $a_\mu$  слагаемых нет. Поэтому, казалось бы, множитель при черн-саймонсовском члене может быть произвольным. Однако это не совсем так. Ответ зависит от компактификации пространства-времени, т.е. от граничных условий на поля  $\mathbf{n}$  или  $z$ . В случае компактификации на сферу  $S^3$  множитель строго равен нулю [82]. И только при компактификации на тор  $S_2 \times S_1$  или  $S_1 \times S_1 \times S_1$  он отличен от нуля и равен целому четному числу [69, 83]

$$k = 2\bar{k}, \quad \bar{k} = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

Эта проблема тесно связана с проблемой [84] удвоения фермионов на решетке. Дело в том, что член Черна—Саймонса есть  $(2+1)$ -мерная квантовая аномалия четности в системе невзаимодействующих массивных фермионов, помещенных в калибровочное поле. Интегрирование по фермионным полям в фейнмановском интеграле дает мнимую часть логарифма фермионного детерминанта, вычисляя которую мы получаем черн-саймонсовский член [60]. Результат этого вычисления согласован [85] с эффектом дублирования фермионов на решетке только при четных значениях числа  $k$  (см. [83, 86, 87]).

При больших константах связи  $g^2$  пренебрежем вкладом от (4.1) в полный

лагранжиан. Тогда он будет содержать только слагаемое Черна—Саймонса и давать действие<sup>(15\*)</sup>

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad (4.14)$$

топологической теории [88], описывающей низкоэнергетические глобальные возбуждения. Э. Виттенем недавно было установлено [89], что размерность гильбертова пространства для (4.14) конечна в тороидальной компактификации  $M$  и равна  $k$ . Так как в (4.14) присутствует только первая производная по времени, гамильтониан равен нулю и состояния имеют нулевую энергию. Это значит, что постоянная  $k$  связана с размерностью [90 — 92] пространства вырождения основного состояния для динамической системы (4.1), включающей черн-саймонсровский член.

В 1975 г. Ф.А. Березиным обсуждались общие правила квантования систем, фазовым пространством которых служит комплексное кэлерово многообразие<sup>(16\*)</sup>. В частном случае тора было показано [94], что постоянная Планка может принимать лишь дискретное множество значений

$$n = 4\pi/k \quad (4.15)$$

с размерностью гильбертова пространства, равной  $k$ , и допустимым множеством в фазовом пространстве, являющемся решеткой на торе:  $(p, q) = (m, n)\hbar/2$ . В рассматриваемом контексте квантовые числа  $m$  и  $n$  нумеруют соответственно магнитный заряд, понимаемый как источник вихрей, и электрический заряд, имеющий смысл источника спин-волновых возбуждений.

Возникшая неколлинеарность оставшихся спинов при допировании, как уже было отмечено, означает появление корреляций между следующими за ближайшими соседями на решетке, т.е. диагональных корреляций внутри элементарной ячейки. Величина корреляций определяется плотностью топологического заряда (4.9), (4.11), создающего, в свою очередь, вследствие (4.10) поток фиктивного магнитного поля. Причем дефицит числа частиц этим уравнением жестко связан с числом топологических дефектов спиновой текстуры. После интегрирования нулевой компоненты из (4.10) следует, что соотношение между топологическим зарядом  $Q$  и потоком  $\Phi$  статистического магнитного поля имеет вид

$$Q = (k/2\pi)\Phi. \quad (4.16)$$

Какова динамика положительно заряженных вакантных мест?

Условие заполнения узла

$$\bar{n}_i = \langle \sum_\alpha c_{i\alpha}^+ c_{i\alpha} \rangle < 1 \quad (4.17)$$

со степенью  $x$

$$\frac{1}{N} \sum_i \bar{n}_i = 1 - x, \quad (4.18)$$

где  $N$  — общее число узлов, разрешимо, если представить ферми-переменную

$$c_{i\alpha} = \chi_i^+ z_{i\alpha} \quad (4.19)$$

в виде произведения нейтрального спинора  $z$  (4.3) и заряженного (комплексного) бесспинового поля

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

«дырок» со связью  $n_i = 1 - \chi_i^+ \chi_i$ . Две компоненты поля  $\chi$  отвечают различной киральности!

Статистика определена приобретаемыми при перестановке частиц фазами

$$c_{i\alpha} \rightarrow e^{-i\pi} c_{i\alpha}, \quad (4.20)$$

$$z_{i\alpha} \rightarrow e^{-i\pi/k} z_{i\alpha}. \quad (4.21)$$

Следовательно,

$$\chi_i \rightarrow e^{i\pi(1-k^{-1})} \chi_i. \quad (4.22)$$

Если пользоваться терминологией RVB-теории, спин и заряд электрона или дырки в сильно коррелированных системах распределены между спинором (поле  $z$ ) и холонем (**поле  $\chi$** ), а электрон или дырку можно представлять как связанное состояние этих элементарных возбуждений. В случае сильных корреляций с  $k = 2$  холон и спиной — оба полуфермионы. При больших  $k$  статистика  $z$ -квантов спиновых степеней свободы близка к бозонной, в то время как статистика заряженных  **$\chi$ -частиц** в этом пределе близка к статистике фермионов.

Подставляя (4.19) в (2.14), в длинноволновом пределе можно получить [95] лагранжиан

$$\begin{aligned} L = & i \chi_\sigma^+ D_0 \chi_\sigma + \frac{1}{2m} |D_k \chi|^2 + i z^+ (\partial_\mu + i e a_0) z + \\ & + \frac{1}{2m^*} |(\partial_k + i e a_k) z|^2 - \frac{k e^2}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda, \end{aligned} \quad (4.23)$$

описывающий динамику заряженных возбуждений, здесь  $D_\mu = \partial_\mu - i e (a_\mu + A_\mu)$  ковариантная производная,  $A_\mu$  — потенциал внешнего электромагнитного поля. Статистический потенциал перенормирован так, что заряд  $e$  выделен в ковариантной производной  $D_\mu$  в виде общего множителя; в ковариантной производной  $\partial_\mu + i e a_\mu$  из-за электронейтральности поля  $z$  стоит только статистический потенциал  $a_\mu$ ;  $m, m^*$  — эффективные массы. Обратим еще раз внимание на то, что калибровочный потенциал  $a_\mu$  ((4.23) играет роль множителя Лагранжа [72], учитывающего локальные ограничения в распределении зарядовых и спиновых степеней свободы.

Таким образом, мы имеем два подхода (3.5), (4.21) и (3.6), (4.22). При первом бозонном способе рассуждений [33] ( $\vartheta = \pi/k$ ) возбуждения представляют собой включающие вихрь Бома—Ааронова анионы, а  $N$ -частичная волновая функция (3.5) симметрична.

Во втором случае [31] ( $\vartheta = \pi(1 - k^{-1})$ )  $N$ -частичная волновая функция (3.6) антисимметрична, а составные квазичастицы также содержат вихрь Бо-



ма—Ааронова [96]. Параметр  $l/k$  в фазе  $\vartheta = \pi(1 - k^{-1})$  при таком подходе дает возможность при  $k \gg 1$  контролируемым образом проводить вычисления [97], начиная с фермионов. Некоторые детали действий, начинающихся с фермионного подхода, будут рассматриваться в разделе 9. В следующем разделе мы обсудим общие черты в обоих способах рассуждений, а также особенности бозонной картины.

## 5. Качественная картина

Будем считать, что дефектов в спиновом упорядочении так много, что поток статистического магнитного поля равномерно распределен по всей плоскости. Это значит, что вследствие (4.16) частицы находятся в среднем фиктивном магнитном поле с напряженностью

$$b = (2\pi/k)n, \quad (5.1)$$

зависящей от концентрации допантов  $n^{(17*)}$ . Каждый из потенциалов Бома—Ааронова чисто калибровочный и, конечно, дает нулевое значение магнитного поля. Однако нарушение Р-четности сказывается в амплитуде рассеяния [98] таким образом, что частица при рассеянии на другой выделяет одну из сторон. Это можно представлять себе как вращение частиц в магнитном поле  $b$  (5.1).

Конечный ответ (5.1), разумеется, целиком обусловлен топологической нетривиальностью вихрей Бома—Ааронова. Действительно, при движении частицы по замкнутому контуру  $C$ , окружающему  $nS$  частиц, волновая функция частицы приобретает фазу  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (2\pi n/k)S$ , совпадающую с потоком магнитного поля (5.1) через площадь  $S$  внутри контура  $C$ .

Типичная траектория частицы, вращающейся в магнитном поле  $b = (2\pi/k)n$  со скоростью  $v = (4\pi n)^{1/2}/m$  и циклотронным радиусом  $R = mv/b$ , содержит в среднем  $k^2$  частиц:

$$n\pi R^2 = k^2. \quad (5.2)$$

При  $k = 2$  в этом движении участвуют все частицы элементарной ячейки. Энергетический спектр частиц есть уровни Ландау

$$\varepsilon_l = (l + 1/2)\omega_c \quad (5.3)$$

с циклотронной частотой  $\omega_c = b/m$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$  и вырождением с кратностью

$$N = \frac{1}{2\pi l_b^2} = \frac{b}{2\pi} = \frac{n}{k} \quad (5.4)$$

в расчете на единицу площади, здесь  $l_b = b^{-1/2}$  — магнитная длина. Фактор заполнения

$$\nu = n/N = k \quad (5.5)$$

показывает, что  $k$  уровней Ландау полностью заполнены.

Соотношение между циклотронным радиусом  $R$ , магнитной длиной  $l_b$  и средним расстоянием между частицами  $n^{-1/2}$  имеет вид

$$R = (2k)^{1/2} l_b = \frac{k}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Отсюда видно, что приближение среднего поля, когда  $l_b \gg n^{-1/2}$ , справедливо только при больших  $k$ . При  $k = 2$   $R \sim l_b \sim n^{-1/2}$ , т.е. орбиты частиц пересекаются. Поэтому мы имеем однородное распределение поля в соответствии с высказанным предположением и однородную плотность анионов. Однородное состояние устойчиво, так как перенос частиц из одной орбиты в другую сопровождается увеличением магнитного поля и, соответственно, величины  $\omega_c$ .

Является ли это распределение распределением пар или одиночных возбуждений? Качественный анализ [33] свидетельствует в пользу первого. Действительно, движение двух полуфермионов в общей системе из  $N$  квазичастиц — это  $(N - 2) + 2$ -задача о движении двух возбуждений в поле  $b = \pi n$  оставшихся  $N - 2$  квазичастиц. Для одиночных возбуждений мы имеем  $(N - 1) + 1$ -задачу.

Двухчастичная задача разделяется на задачи об относительном движении и о движении центра масс частиц. Энергия относительного движения  $\omega_c/2 = b/2m$  двух одинаковых частиц, конечно, равна наименьшей энергии  $\omega_c/2$  в одночастичной задаче (5.3). Однако центр масс двух задач не чувствует магнитное поле  $b$ , так как фаза  $\exp[2i(N_1 2\pi)/k]$ , приобретаемая при обходе  $N_1$  частиц центром масс по замкнутому контуру, при  $k = 2$  равна единице. Поэтому энергия пары, складывающаяся из энергии относительного движения и энергии центра масс, остается равной  $\omega_c/2$ , что меньше, чем энергия  $\omega_c/2 + \omega_c/2$  двух одиночных возбуждений в  $(N - 1) + 1$ -задаче. Таким образом, мы видим, что полуфермионам энергетически выгоднее объединяться в пары и сформировать бозон. С фермионной точки зрения механизм спаривания будет обсуждаться в п. 9. Он проливает дополнительный свет на пространственную мелкомасштабную структуру пар.

Промежуточная статистика дает, как мы видели в разделе 3 и убеждаемся сейчас, ненулевую угловую скорость частиц и кинетическую энергию даже в основном состоянии. Кинетическая энергия заряженных частиц при  $k = 2$  совпадает с энергией  $\omega_c/2 = 2\pi n/k^2 m$  первого уровня Ландау и определяется плотностью  $n$  топологических дефектов.

Полуфермионный характер сильно скоррелированных при  $k = 2$  возбуждений проявляется двояко. Это — отчасти бозе-коллектив в том отношении, что из-за отсутствия энергии Ферми нет возбуждений типа электрон-дырочных пар, возникающих при пересечении поверхности Ферми. С другой стороны, если где-либо увеличилась плотность, частицы будут переходить из области повышенной плотности в область более низкой, стремясь реализовать однородное распределение. Такое перетекание возникает вследствие «половинки» от обменного фермионного давления и означает существование коллективных возбуждений с линейным законом дисперсии. Покажем это, следуя работе [33].

Энергия системы из  $N$  частиц

$$N \frac{\omega_c}{2} = \frac{\pi N n}{2m} = \frac{\pi}{2m} \int d^2 x n^2 \quad (5.7)$$

вместе с кинетической энергией и условием фиксации общего числа частиц имеет вид [33]

$$F(n) = \int d^2x \left( \frac{mnv^2}{2} + V(n) \right), \quad (5.8)$$

$$V(n) = \mu n + \gamma n^2, \quad (5.9)$$

где  $\gamma = \pi/2m$  и  $\mu$  — химический потенциал. С помощью гидродинамического уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{mn} \nabla p = - \frac{2\gamma}{m} \nabla n \quad (5.10)$$

и уравнения непрерывности

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div}(n \mathbf{v}) = 0 \quad (5.11)$$

после линеаризации около среднего значения плотности  $n_0 = |\mu|/2\gamma$  получается звуковой спектр

$$\omega = v_0 q, \quad v_0^2 = \pi n_0 / m^2 \quad (5.12)$$

длинноволновых коллективных движений плотности  $n$  и статистического магнитного поля  $b$ .

Причина перехода от закона дисперсии  $\omega \sim q^2$  к  $\omega \sim q$  заключена, конечно, в условии твердого тела для бозонов или, на фермионном языке, в конечном обменном давлении. Для сверхтекучести условия  $\omega \sim q$  недостаточны. Необходимо, как мы знаем [99], существование конечного предела:  $\min \lim(\omega(q)/q)$ , т.е. наличие ротонного участка в спектре  $\omega(q)$  при конечных  $q$ . Другими словами, сжимаемая в длинноволновом пределе квантовая жидкость должна содержать мелкомасштабную структуру, обеспечивающую существование щели на малых длинах волн. Эту роль выполняют вихревые распределения разыгрываемых степеней свободы. В разделе 8 будет обсуждаться механизм возникновения щели  $\omega(0)$  в спектре коллективных возбуждений в несверхтекучем состоянии даже при  $q \rightarrow 0$ , что означает переход к абсолютно несжимаемой квантовой жидкости. Если мы начинаем с этого состояния, то явление сжимаемости, проявляющееся в нулификации щели ( $\omega(0) \rightarrow 0$ ) и возникновении коллективных возбуждений — голстоунов с линейным законом дисперсии (5.12), свидетельствует о переходе в сверхтекучее состояние коррелированных пар из полуфермионов.

Если рассматривать энергию (5.8) как функционал Гинзбурга—Ландау, то с помощью классических формул мы получаем выражение для квадрата корреляционного радиуса

$$\xi^2 = \frac{1}{m|\mu|} = \frac{k}{2\pi n_0}, \quad (5.13)$$

совпадающее с квадратом магнитной длины  $l_b^2$ .

Плотность заряда  $n = (k/4\pi)\epsilon^{ik}f_{ik}$  и плотность тока  $j_i = nv_i = (k/2\pi)\epsilon^{ik}f_{0k}$  анионов определяют напряженность калибровочного поля  $f_{\nu\lambda}$  соотношениями (4.10)<sup>(18\*)</sup>. Поэтому выражение для энергии (5.8) можно переписать в длинноволновом пределе с использованием этой локальной связи в виде лагранжиана максвелловского поля  $f_{\nu\lambda}$ . Действительно, так как потенциальная и кинетическая энергия равны

$$\gamma \int n^2 d^2x = \frac{k^2}{4\pi m} \int f_{ij}^2 d^2x, \quad (5.14)$$

$$\int \frac{m n v^2}{2} d^2x = \frac{m k^2}{8\pi^2 n_0} \int f_{0k}^2 d^2x, \quad (5.15)$$

то в системе единиц, где скорость звука (5.12) равна единице, мы имеем плотность лагранжиана [33, 100]

$$L = (1/16\pi g^2) f_{\mu\nu}^2 \quad (5.16)$$

с константой связи  $g^2 = m/2k^2$ .

Первое наблюдение в связи с этим опытом состоит в том, что в (5.16) нет слагаемого Черна—Саймона. Это означает, что нарушение Р- и Т-инверсий, существующее на малых расстояниях и высоких частотах, на больших расстояниях отсутствует [101, 102]. Это утверждение очень грубое и в дальнейшем мы его уточним. Во-вторых, полуфермионы электрически заряжены **и поэтому**  $(e/d)j_\mu$  есть трехмерная плотность электрического тока, где  $d$  — расстояние между плоскостями. Вычисляя корреляционную функцию токов, в случае (5.16) можно показать [33], что между током и потенциалом имеет место соотношение Лондона, а квадрат глубины проникновения равен

$$\lambda^2 = mc^2 d / 4\pi e^2 n_0. \quad (5.17)$$

Впрочем, это выражение вследствие галилеевой инвариантности [103] справедливо для различных вариантов [104] связи тока с потенциалом или полем, дающих эффект Мейсснера. Из формул (5.13) и (5.17) для корреляционной и лондоновской длины легко понять [71], почему параметр Гинзбурга—Ландау

$$\kappa^2 = \frac{\lambda^2}{\xi^2} = \frac{mc^2 d}{2ke^2} \quad (5.18)$$

является таким большим. При  $k = 2$  и  $d/4 \sim \hbar^2/me^2$  параметр Гинзбурга—Ландау  $\kappa \sim \alpha^{-1} \sim 10^2$ , где  $\alpha = e^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры.

В связи с тем, что в нашем распоряжении находится всего лишь один **параметр**  $\omega_c$  с размерностью энергии, то как щель в спектре одночастичных возбуждений, так и температура сверхпроводящего перехода

$$T_c \propto n/mk^2 \quad (5.19)$$

будут определяться [71, 105] плотностью топологических дефектов.

## 6. Структура энергетического спектра

Основное свойство кирального состояния заключено в появлении динамически генерируемого статистического магнитного поля, которое в свою очередь влияет на динамику самих частиц, модифицируя спектр частиц и их волновые функции. Возобновившийся интерес [106] к этой задаче [107 — 110] связан с тем, что энергия полностью заполненного основного состояния в магнитном поле и в поле периодического потенциала в приближении сильной связи оказалась [106, 111] меньше, чем в нулевом магнитном поле.

Вернемся к гамильтониану (2.14)

$$H = -\tilde{t} \sum_{\langle i,j \rangle} e^{-i\theta_{ij}} c_i^+ c_j + \text{э.с.}, \quad (6.1)$$

который описывает систему бесспиновых заряженных частиц, находящихся в однородном магнитном поле, характеризующемся потоком  $\phi = p/q$  (2.13) через элементарную ячейку.

Гамильтониан (6.1) можно обобщить как за счет учета при суммировании следующих соседей в ячейке вслед за ближайшими [112, 113], так и за счет учета различных амплитуд перескока вдоль оси  $x$  ( $\tilde{t}_a$ ) и оси  $y$  ( $\tilde{t}_b$ ) [114, 115] и распространить на пространственно трехмерный случай [116, 117].

В простейшем варианте (6.1) с разными амплитудами  $\tilde{t}_{a,b} \equiv t_{a,b}$  уравнение Шрёдингера  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  в  $k$ -представлении есть уравнение Харпера [118]

$$-2t_a \cos(k_x + 2\pi\phi j) \psi_j - t_b (e^{-ik_y} \psi_{j-1} + e^{ik_y} \psi_{j+1}) = \varepsilon(k_x, k_y) \psi_j, \quad (6.2)$$

а волновая функция имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^q \psi_j c^+(k_x + 2\pi\phi j, k_y) |0\rangle; \quad (6.3)$$

здесь постоянная решетки равна единице,  $|0\rangle$  — вакуумное состояние. В (6.2) используется условие  $\psi_{j+q} = \psi_j$  и выбрана следующая калибровка: на ребрах решетки вдоль оси  $x$   $\theta_{ij} = 0$ , а для ребра между узлами решетки  $i = (n, m)$  и  $j = (n, m + 1)$  вдоль оси  $y$   $\theta_{ij} = 2\pi\phi n$ . Индекс положения  $i$  на решетке имеет декартовы координаты  $(n, m)$  с целыми числами  $n$  и  $m$ <sup>(19\*)</sup>. Уравнение (6.2) представляет модель сильно связанных частиц с диагональной модуляцией за счет первого слагаемого.

При  $\phi = p/q$  уравнение (6.2) для каждой пары  $k_x$  и  $k_y$  имеет  $q$  собственных значений. Другими словами, энергетический спектр в отсутствие поля

$$\varepsilon(k_x, k_y) = -2t_a \cos k_x - 2t_b \cos k_y \quad (6.4)$$

в магнитном поле расщепляется на  $q$  энергетических зон с волновыми векторами, принадлежащими  $q$  магнитным зонам Бриллюэна

$$-\pi/q \leq k_x \leq \pi/q, \quad -\pi \leq k_y \leq \pi, \quad (6.5)$$

и имеет чрезвычайно богатую структуру [107, 108]. На границе (6.5) магнитная блоховская функция  $\psi_j$  удовлетворяет условиям [85]

$$\psi_j(k_x, k_y) = \psi_j(k_x + 2\pi/q, k_y) = \psi_j(k_x, k_y + 2\pi) \exp[-i(jk_x + qk_y)]. \quad (6.6)$$

Прежде чем перейти к описанию спектра, обратим внимание на выбор калибровки. Выражение (6.2) можно воспринимать как уравнение, описывающее динамику частицы, которая перескакивает между распределенными по кругу  $q$  точками. Амплитуда перескока по часовой стрелке равна  $\exp(-ik_y)$  и против часовой равна  $\exp(ik_y)$ , причем энергия в каждой точке  $j$  равна  $2t_a \cos(k_x + 2\pi\phi j)$ . Дуальное преобразование [119]

$$\psi_j = \sum_{l=1}^q e^{i2\pi\phi l} f_l, \quad (6.7)$$

имеющее смысл калибровочного преобразования  $\mathbf{a} = (-by, 0, 0) \rightarrow \mathbf{a} = (0, bx, 0)$ , заменяет  $t_a \rightarrow t_b$  и  $k_x \rightarrow k_y$ , а энергию в каждой точке на круге превращает в матрицу перескоков:

$$-t_a(e^{-ik_x} f_{l-1} + e^{ik_x} f_{l+1}) - 2t_b \cos(k_y + 2\pi\phi l) f_l = \varepsilon(k_x, k_y) f_l; \quad (6.8)$$

здесь  $\theta_{ij} = 0$  на ребрах вдоль оси  $y$  и  $\theta_{ij} = 2\pi\phi m$  на ребре между узлами  $(n, m)$  и  $(n+1, m)$  вдоль оси  $x$ , причем

$$-\pi \leq k_x \leq \pi, \quad -\pi/q \leq k_y \leq \pi/q. \quad (6.9)$$

Это преобразование восстанавливает равноправие компонент импульса  $k_x$  и  $k_y$  и ограничивает нас рассмотрением квадратной области  $-\pi/q \leq k_x \leq \pi/q$ ,  $-\pi/q \leq k_y \leq \pi/q$ .

В очень любопытной калибровке работы [120] уравнение на собственные значения имеет околодиагональную модуляцию. Если выбрать  $\theta_{ij} = -\pi\phi(n+m)$  для ребра между узлами  $i = (n, m)$  и  $j = (n+1, m)$  вдоль оси  $x$  и  $\theta_{ij} = \pi\phi(n+m)$  для ребра между  $i = (n, m)$  и  $j = (n, m+1)$  вдоль оси  $y$ , то мы имеем одномерную дискретную систему с уравнением

$$-t_{j-1} \psi_{j-1} - t_j \psi_{j+1} = \varepsilon \psi_j, \quad (6.10)$$

$$t_j = 2t \cos(K + 2\pi\phi j), \quad (6.11)$$

$$K + \pi\phi j = \frac{k_x + k_y}{2} + \frac{\pi\phi}{2}, \quad 0 \leq K \leq \pi/q, \quad (6.12)$$

$$k = \frac{k_x - k_y}{2} - \frac{\pi\phi}{2}, \quad 0 \leq k \leq 2\pi.$$

При этом оказываются связанными состояния с волновыми векторами  $K$  и  $K \pm \pi\phi$  и отсутствует связь между различными  $k$ .

Энергетический спектр задачи (6.1) может быть получен из решения секулярного уравнения, которое после замены  $\psi_j = \psi_j \exp(ik_y j)$  в (6.2) имеет вид

$$\partial \begin{vmatrix} M_1 - \varepsilon & -t_b & & & -t_b e^{-iqk_y} \\ -t_b & M_2 - \varepsilon & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & M_{q-1} - \varepsilon & -t_b & \\ -t_b e^{iqk_y} & & -t_b & M_q - \varepsilon & \end{vmatrix} = 0, \quad (6.13)$$

где  $M_j = -2t_a \cos(k_x + 2\pi\phi j)$ . Из этого уравнения и соотношения дуальности (6.7) нетрудно увидеть, что секулярное уравнение можно записать [114] как

$$P_{p/q}(\epsilon) = 2t_a^q \cos(qk_x) + 2t_y^q \cos(qk_y), \quad (6.14)$$

где  $P_{p/q}(\epsilon)$  — многочлен  $q$ -го порядка, который имеет вследствие эрмитовости гамильтониана  $q$  действительных корней. В четвертом параграфе было отмечено, что для нас важны четные значения  $q$ . Поэтому мы ограничимся этими значениями. Полином  $P_{p/q}(\epsilon)$  в случае четных  $q$  есть симметричная функция относительно центра  $\epsilon = 0$  зоны. Он равен в этой точке  $2t_a^q + 2t_y^q$ . Последнее легко проверить, воспользовавшись дуальностью и частным случаем  $t_a = 0$  в (6.13). Симметричность спектра есть следствие скрытой суперсимметрии задачи (6.1) [121]. Таким образом, спектр расщепляется на  $q/2$  подзон с положительной энергией и  $q/2$  подзон с отрицательной энергией. Каждая подзона при этом характеризуется [114] целым значением холловской проводимости, что имеет топологическую причину, так как  $\sigma_{xy}$  является первым классом Черна векторного расслоения с базой в зоне Бриллюэна.

В точке  $\epsilon = 0$  при

$$k_x^{(0)} = \bar{n}\pi/q, \quad k_y^{(0)} = \bar{m}\pi/q, \quad (6.15)$$

где  $\bar{n}$  и  $\bar{m}$  — целые числа, две центральные подзоны соприкасаются и спектр вблизи точек (6.15) имеет линейную дисперсию. Каждая точка  $f = (\bar{n}, \bar{m})$  в импульсном пространстве характеризуется топологическим инвариантом, так называемой киральностью  $\gamma_f = \pm 1$  [121]. Линейная дисперсия  $\epsilon(\mathbf{k}) = \pm \text{const} |\mathbf{k} - \mathbf{k}^{(0)}|$  вблизи точек вырождения (6.15) означает, что мы имеем систему низкоэнергетических возбуждений, которые представляют собой  $q$ -цветовые безмассовые частицы Дирака, с лагранжианом [87]

$$L = \sum_{f=1}^q \bar{\psi}_f (i\partial + a) \psi_f \quad (6.16)$$

Обобщение (6.16) на массивный случай содержится в работе [85], где проведен более полный анализ проблемы, основанный на использовании группы магнитных трансляций (см. ниже). В модель этой работы

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} c_i^\dagger \exp[-2\pi i \int_i^j (a + A) dl] c_j + \mu (c_i^\dagger c_i - c_j^\dagger c_j) \quad (6.17)$$

для учета флуктуаций чисел частиц на двух подрешетках квадратной решетки (рис. 5) включен химический потенциал  $\mu$ , а также полный потенциал  $a + A$  (см. конец п. 2). Для модели (6.17) вблизи точек вырождения, где пересекаются подзоны с положительной и отрицательной энергиями, мы имеем [85] лагранжиан  $(2 + 1)$ -мерной теории, которая описывает массивные возбуждения, находящиеся во внешнем поле  $a_\mu = \bar{a}_\mu + \delta a_\mu$ :

$$L = \sum_{f=1}^q \bar{\psi}_f (i\partial + a + m_f) \psi_f, \quad (6.18)$$

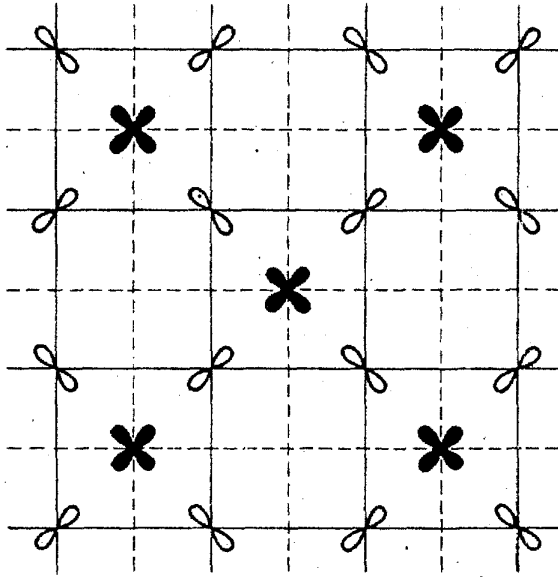


Рис. 5. Распределение d-состояний (p-состояний) по узлам дуальной (основной) решетки в базисных плоскостях

**водимость**  $\sigma_{xy} = \bar{k} = q/2$  — целое  $\vartheta/2\pi = \sum_f \gamma_f = \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+$  [75, 85], где знаки  $(\pm)$  обозначают две соприкасающиеся центральные зоны, а топологический инвариант — первый класс Черна  $\sigma_{xy}^\pm$ , может быть представлен [122] через интеграл по импульсному пространству зоны Бриллюэна:

$$\sigma_{xy}^\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi/q} dk_x \int_0^{2\pi} dk_y (\nabla_k \times \langle \psi_\pm(\mathbf{k}) | \nabla_k | \psi_\pm(\mathbf{k}) \rangle)_z = -\sigma_{xy}^\pm. \quad (6.20)$$

Если в теории на решетке четность  $P$  ( $k_x \rightarrow k_x, k_y \rightarrow k_y$ ) сохраняется, то киральности  $\gamma_f$  точек  $k_f$  и  $\bar{k}_f$  противоположны:  $\gamma_f = -\bar{\gamma}_f$  и  $\vartheta = 0$ . В присутствии «внешнего» потока  $\phi$  все фермионы решетки имеют одну и ту же киральность  $\gamma_f = \text{sign } \phi$  и знак массы в (6.1) [61, 62, 85, 123].

Вернемся к обсуждению спектра. Из уравнения (6.14) видно, что спектр инвариантен относительно сдвигов  $k_x \rightarrow k_x + 2\pi/q, k_y \rightarrow k_y + 2\pi/q$ . Это свойство содержится, конечно, и в явных выражениях для энергии при  $q = 2$  и  $q = 4$  ( $t_a = t_b = 1$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm(k_x, k_y) &= \pm 2(\cos^2 k_x + \cos^2 k_y)^{1/2}, \\ \varepsilon(k_x, k_y) &= \pm \left\{ 4 \pm 2 \left[ 3 + \frac{1}{2}(\cos 4k_x + \cos 4k_y) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Знаки ветвей спектра (6.21) между собой не связаны. Вырождение, связанное с симметрией спектра относительно сдвигов  $k_{x(y)} \rightarrow k_{x(y)} + 2\pi/q$ , эквивалентно

$$m_f = |\mu| \gamma_f, \quad \partial' = \gamma^\mu \partial_\mu,$$

$$\gamma^\mu = (\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1).$$

Сделаем небольшое отступление от основной темы в связи с моделью (6.17). В постоянном однородном магнитном поле с потоком  $\phi = p/q$  и потенциалом А ток заряженных частиц — холловский:

$$j_i = \sigma_{xy} \varepsilon_{ij} a_j \quad (6.19)$$

(здесь стоит потенциал  $a$  из-за равноправия его с  $A$  в сумме  $a + A$  в (6.17)). Так как  $j_i = -\langle \delta S / \delta a_i \rangle$ , это означает, что в длинноволновом пределе действие  $S$  содержит черн-саймонсовский член (4.12) с  $\vartheta = 2\pi \sigma_{xy}$ . Поскольку  $\vartheta = \pi k = 2\pi \bar{k}$ , то холловская проводимость — целое число. Общий вклад в



существованию коммутирующих с гамильтонианом и некоммутирующих друг с другом операторов. Действительно, если ввести [121] матрицы  $A$  и  $B$  соотношениями

$$(Af)_j = e^{-2\pi ip/q} f_j, \quad (Bf)_j = f_{j+1}, \quad (6.22)$$

тогда

$$AH(k_x, k_y)A^{-1} = H(k_x + 2\pi p/q, k_y), \quad (6.23)$$

$$BH(k_x, k_y)B^{-1} = H(k_x, k_y + 2\pi p/q), \quad (6.24)$$

причем

$$AB = BAe^{2\pi ip/q}. \quad (6.25)$$

Гамильтониан для (6.7) ( $t_a = t_b = 1$ )

$$H_{jl}(k_x, k_y) = 2\delta_{jl}^{(q)} \cos(k_y + 2\pi j\phi) + \delta_{j+1}^{(q)} e^{-ik_x} + \delta_{j-1}^{(q)} e^{ik_x} \quad (6.26)$$

представим в виде [121]

$$H = e^{-ik_y} A + e^{ik_x} B + \text{э.с.} \quad (6.27)$$

Так как  $p$  и  $q$  несоизмеримы, то существует такое несоизмеримое с  $p$  число  $n$ , что

$$n \frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \text{целое число.} \quad (6.28)$$

Используем его в новых операторах  $\tilde{A} = A^n$  и  $\tilde{B} = B^n$ , которые обеспечивают необходимую симметрию

$$\tilde{A}H(k_x, k_y)\tilde{A}^{-1} = H(k_x + 2\pi/q, k_y), \quad (6.29)$$

$$\tilde{B}H(k_x, k_y)\tilde{B}^{-1} = H(k_x, k_y + 2\pi/q) \quad (6.30)$$

и коммутационные соотношения

$$\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}e^{2\pi ipn^2/q}. \quad (6.31)$$

Алгебра операторов (6.31) отвечает группе магнитных трансляций [124], представления<sup>(20\*)</sup> которой есть собственные состояния гамильтониана (6.1). Операторы магнитных трансляций  $T(\mathbf{a}_j)$  на расстояние, равное базисным векторам  $\mathbf{a}_j$  квадратной решетки, удовлетворяют соотношениям

$$T^n(\mathbf{a}_1)T^m(\mathbf{a}_2) = (-1)^{nm}T(n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2), \quad (6.32)$$

$$[T(\mathbf{a}_j), H] = 0, \quad (6.33)$$

$$T(\mathbf{a}_1)T(\mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_2)T(\mathbf{a}_1)e^{2\pi ip/q}. \quad (6.34)$$

Например, для потока  $\phi = 1/2$  ( $q = 2$ ), оператор  $T(\mathbf{a}_1)$  будет коммутировать с  $T(2\mathbf{a}_2)$  и т.д. Таким образом, чтобы пронумеровать энергетические подзоны,

необходимо использовать систему ортогональных состояний  $\psi$ ,  $T(a_2)\psi$ ,  $T^2(a_2)\psi$ , ...,  $T^{(q-1)}(a_2)\psi$ , генерируемых магнитными трансляциями из подгруппы  $T^q$ .

При известных дисперсионных зависимостях  $\varepsilon_{p/q}(k_x, k_y)$  и положении химического потенциала  $\mu$ , которое определяется числом частиц в расчете на один узел

$$\nu = \int_{\varepsilon_{\min}(\phi)}^{\mu} N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (6.35)$$

полная энергия может быть найдена следующим образом<sup>(21\*)</sup>:

$$E = \int_{\varepsilon_{\min}(\phi)}^{\mu} \varepsilon N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (6.36)$$

Для плотности состояний  $N(\varepsilon)$  существует [110] аналитическое выражение

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2 q} \left| \frac{dF}{d\varepsilon} \right| K' \left( \frac{F}{4} \right), \quad (6.37)$$

где  $F(\varepsilon)$  — детерминант (6.13), в верхнем и нижнем углу которого стоит +1, взятый при  $t_a = t_b = 1$  и  $k_x = k_y = 0$ ,  $K'(k) = K((1 - k^2)^{1/2})$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

При энергиях, соответствующих половинному заполнению каждой подзоны, плотность состояний  $N(\varepsilon)$  имеет логарифмические особенности Ван-Хова с пагодообразным поведением вблизи них.

Зависимость плотности состояний от энергии на интервале  $-4 \leq \varepsilon \leq 0$  для потоков  $\phi = 0, 1/2, 3/8, 1/4, 1/8$  показана на рис. 6. Она указывает на резкие изменения в положении, ширине и общем числе магнитных подзон при изменении потока  $\phi = p/q$ . Численные вычисления полной энергии при фиксированных факторах заполнения  $\nu$  в зависимости от потока проводились в работах [111, 115, 117] (рис. 7). Они подтвердили вывод работы [109] о том, что существует множество локальных минимумов энергии при следующей связи фактора заполнения  $\nu$  с

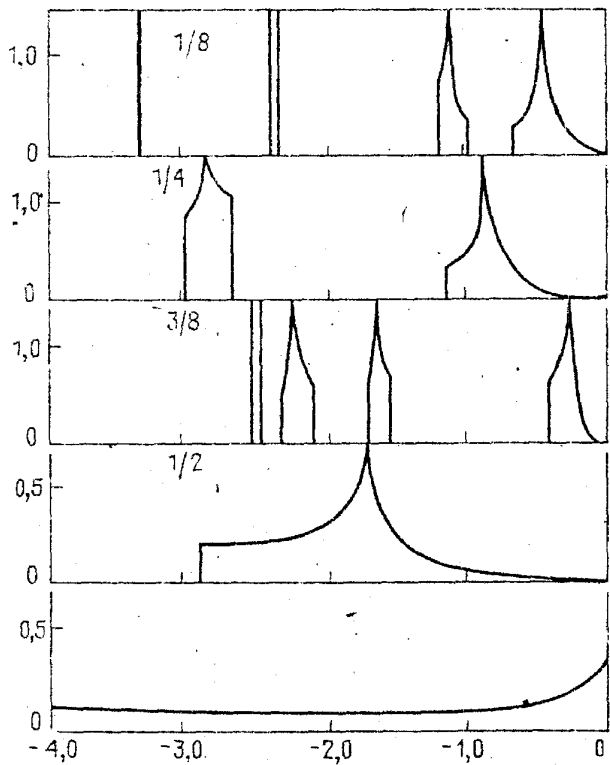
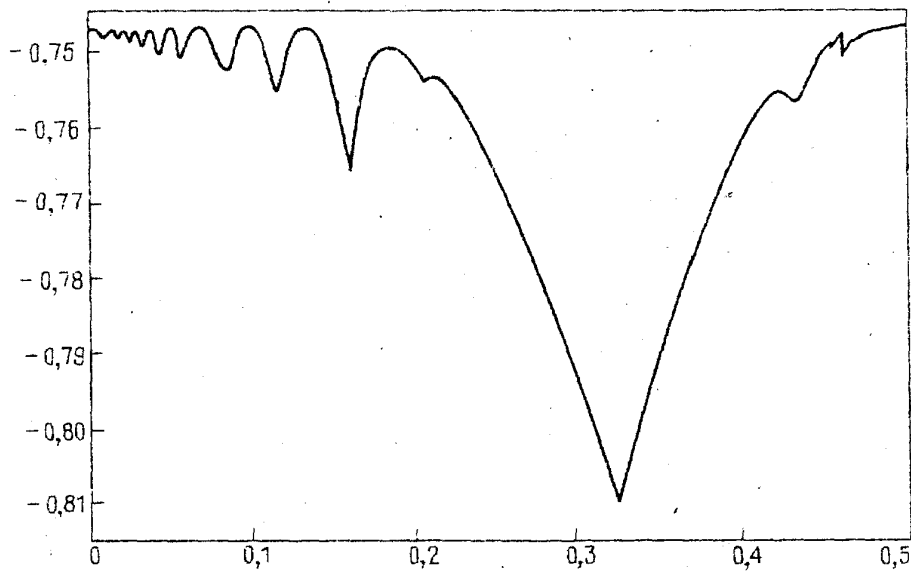


Рис. 6. Плотность состояний как функция энергии для потоков  $\phi = 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 0$  [106]. Показана резкая зависимость числа и положения подзон от степени заполнения узла при  $\nu = \phi$

Рис. 7. Зависимость полной энергии от потока при  $\nu = 1/3$  [111]

потоком  $\phi$ :

$$\nu = M + N\phi \quad (6.38)$$

с целыми числами  $M$  и  $N$ . Наименьшая щель в энергетической структуре, или, другими словами, наибольшие по модулю скачкообразные изменения в спектре (по сравнению со случаем нулевого магнитного поля) существуют при  $M = 0$ ,  $N = 1$ , т.е. при

$$\nu = \phi, \quad (6.39)$$

и соответствуют целочисленному эффекту Холла с  $\bar{k} = 1$  ( $g = 2$ )<sup>(22\*)</sup>. Положение абсолютного минимума изрезанной провалами функции  $E(\phi)$  при заданном ограничении (6.39) в зависимости от фактора заполнения  $\nu$  показано на рис. 8 [111, 117].

Из этой зависимости следует энергетическая выгодность состояния бесспиновых фермионов на решетке в магнитном поле. Понижение общей энергии возникает из-за открытия щелей и, в целом, благодаря развитию неустойчивости, типа пайерлсовской, при распределении по решетке потоков магнитного полз и эффекта соизмеримости. Вычисления показывают [120], что в результате появляются модуляция амплитуд перескока  $t$  (см. (6.11)) и искажение решетки. Другими словами, «помещение» в статистическое магнитное поле эквивалентно введению решеточной димеризации [120].

Как уже отмечалось, каждая подзона несет целое значение холловской проводимости в единицах  $e^2/h$ . Сопоставим выражение (6.38) с целочисленным квантованием  $\sigma_{xy}$  (6.19) [114]. Пусть химический потенциал лежит в  $r$ -й щели, если считать снизу. Тогда холловская проводимость есть сумма вкладов от подзон, которые находятся ниже  $\mu$ , и равна  $t_r$  [125 — 127]; здесь  $t_r$  — решение уравнения Диофанта

$$r = qs_r + pt_r, \quad (6.40)$$

где  $s_r$  и  $t_r$  — целые числа и  $|t_r| \leq q'/2$ , а  $1 \leq r \leq q$ . Распределение чисел  $t_r$

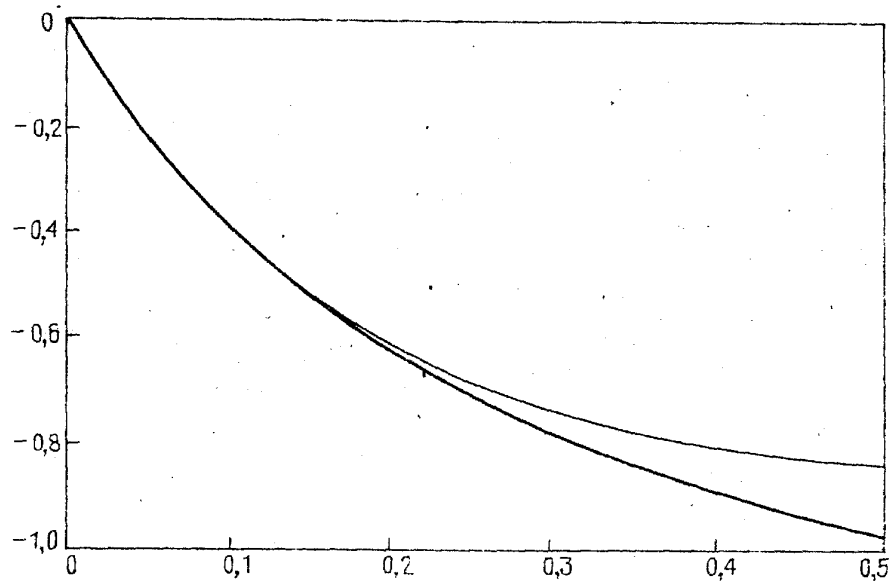


Рис. 8. Изменение абсолютного минимума полной энергии (при  $\phi = \nu$ ) в зависимости от фактора заполнения зоны  $\nu$  [111]. Верхняя тонкая линия показывает зависимость полной энергии от  $\nu$  при  $\phi = 0$

показано на рис. 9 [112]. При химическом потенциале, лежащем внутри любой из щелей, и медленном изменении  $\phi$  числа  $r$ ,  $q$  и  $p$  изменяются очень резко, а  $t_r$  и  $s_r$  остаются теми же самыми. Это означает, что глобальная зависимость  $E(\phi)$  определяет числа  $t_r$  и  $s_r$ , т.е. холловская проводимость определяется топологической структурой зависимости  $E(\phi)$ . В точках вырождения (6.15), т.е. при  $\varepsilon = 0$ ,  $r = q/2$ , уравнение Диофанта (6.40) имеет два решения  $t_r, s_r = (\pm q/2, (1 \mp p)/2)$ , проводимость Холла не может быть однозначно определена из уравнения Диофанта, и требуется физическая регуляризация (см. ниже).

Разделив в (6.40) на  $q$ , после отождествления  $s_r = M$  и  $t_r = N$  мы получаем (6.38):

$$\nu = \frac{r}{q} = s_r + \frac{p}{q} t_r. \quad (6.41)$$

Обратим внимание вот на что: будет ли холловская проводимость "дырочной" ( $t_r > 0$ ), или будет иметь место "электронный" знак ( $t_r < 0$ ), зависит от положения химпотенциала в иерархической структуре подзон нижней зоны. Последнее зависит от концентрации и температуры. Зависимость  $\mu$  от фактора заполнения  $\nu$  при  $\phi = 1/4$  показана на рис. 10. При уменьшении температуры возможен переход от одного набора чисел  $(r, q, p, s_r)$  с  $r_r > 0$  к другому, для которого  $t_r < 0$ , что означает изменение знака холловской проводимости [128]. Знак носителей определяется, конечно, волновой природой частиц (что отражено уравнением (6.41) [125]), т.е. определяется дифракцией их на решетке.

Допирование ведет к возникновению диагональных корреляций в элементарной ячейке. Что же происходит при учете в (6.1) взаимодействия со следующими вслед за ближайшими соседями? Неопределенность при половинном заполнении исчезает [112, 113], и холловская проводимость в этом

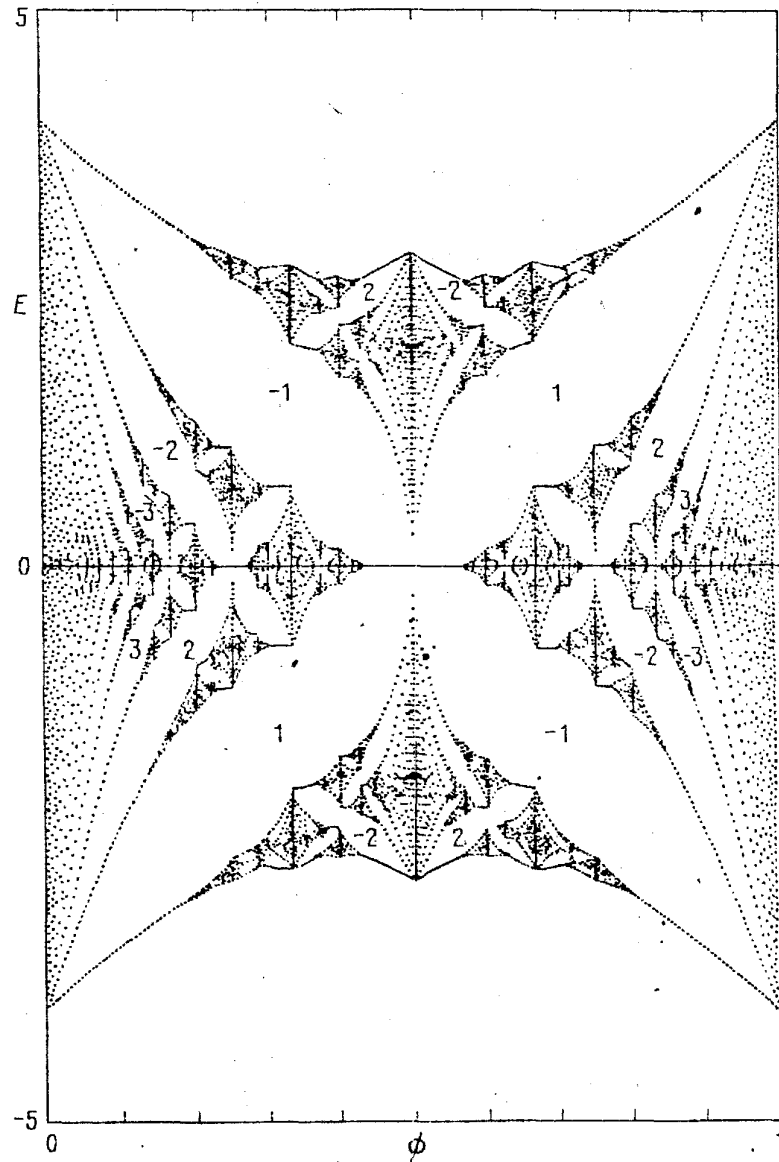


Рис. 9. Энергетический спектр в задаче Ховштадтера. Показаны значения целых чисел  $t_r$  в энергетических щелях

случае равна  $+q/2$  с  $r = q/2$ ,  $\phi = 1/q$  при положительной амплитуде  $t_c$  перескока по диагонали. Общая картина состоит в сужении одних и расширении других подзон, в открытии новых и закрытии старых щелей. Для частного случая  $\phi = 1/4$  зависимость структуры подзон от величины  $t_c$  показана на рис. 11 [112].

При схлопывании щелей глобальная структура зависимости  $E(\phi)$  радикально изменяется вблизи точек вырождения так, что возникают скачки  $\Delta s_r = s'_r - s_r$ ,  $\Delta t_r = t'_r - t_r$  чисел  $(s_r, t_r)$  с сохранением

$$r = qs_r + pt_r = qs'_r + pt'_r, \quad (6.42)$$

что приводит к скачкам холловской проводимости  $\sigma_{xy} = t_r = \bar{k}$  и изменению статистики анионов. Механизм явления заключается в столкновении [113, 129] ветвей спектра при изменении параметра  $t_c^{(23*)}$ , которое сопровождается при касании подзон передачей от нижней сталкивающейся подзоны верхней подзоне величины  $q$ , т.е. базисного класса из когомологии двумерного тора

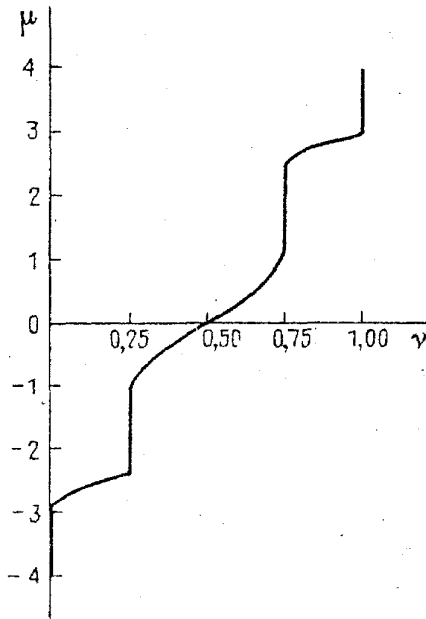


Рис. 10. Зависимость химического потенциала от заполнения при  $\phi = 1/4$

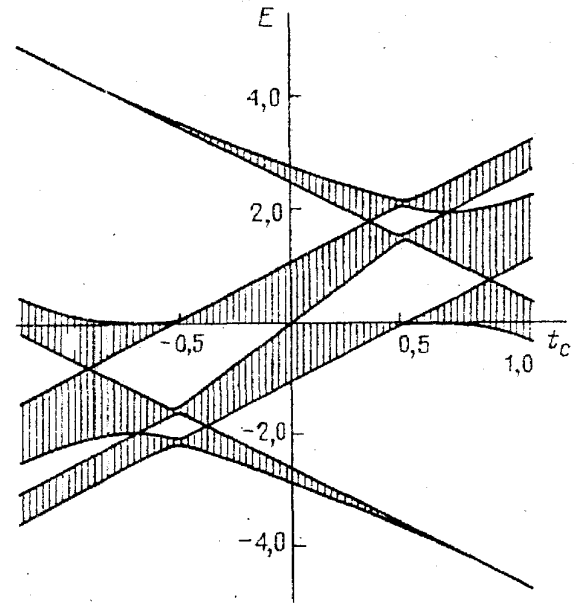


Рис. 11. Зависимость структуры зоны от амплитуды перескока по диагонали в элементарной ячейке при  $\phi = 1/4$  [112]

обратной решетки  $H^2(T_*^2, \mathbf{Z})$  [130]. Поэтому на квантовые числа  $l'_r$  нет теперь ограничения, подобно существовавшему ранее  $|r_r| < q/2$ , и в ситуации общего положения величина  $\sigma_{xy} = l'_r$  совершенно случайна [126, 129]. В этом "столкновении" подзона изменяется параметр  $k = 2|\sigma_{xy}|$  статистики анионных возбуждений.

## 7. Волновая функция

Полный набор состояний  $\{\psi_l\}$  частиц в сильном магнитном поле, созданном дефицитом спина и поддерживаемом когерентным движением самих же частиц, можно было бы рассматривать как базис для построения многочастичной волновой функции. Введение [131, 132] унитарного преобразования

$$\tilde{c}_{l\sigma}^+ = \sum_i \psi_l(r_i) c_{i\sigma}^+ \quad (7.1)$$

исходных операторов  $c_{i\sigma}$  модели Хаббарда, взвешенных с помощью собственных состояний  $\psi_l$  гамильтониана (6.1), позволяет записать волновую функцию системы из  $2M$  частиц, распределенных на решетке по  $N$  узлам, в следующем виде:

$$|\psi\rangle = P \prod_{l \in F} \tilde{c}_{l\uparrow}^+ \tilde{c}_{l\downarrow}^+ |0\rangle; \quad (7.2)$$

здесь  $P$  — проектор Гуцвиллера (2.3); обозначение  $l \in F$  означает, что индекс  $l$  принадлежит интервалу:  $1 < l < M$ ;  $|0\rangle$  — вакуумное состояние. Существенно, что преобразование (7.1) диагонально по спину и для частиц как со спином вверх, так и со спином вниз поток и калибровочный потенциал одни и те же. Поэтому повышающий оператор  $S^+ = \sum_i c_{i\uparrow}^+ c_{i\downarrow}$  равен  $\sum_l c_{l\uparrow}^+ \tilde{c}_{l\downarrow}$  и  $s_z |\psi\rangle =$

$= S^+ |\psi\rangle = 0$ , т.е. состояние (7.2) — спиновый синглет [133]. Волновая функция (7.2) из-за щелей Ховштадтера жесткая. Поэтому парамагнитная часть в токе мала и отклик в состоянии (7.2) диамагнитен [131].

Существует другая по форме, но эквивалентная (7.2) волновая функция, предложенная в работе [134]:

$$|\psi\rangle = \sum_{\{\alpha\}} \det \psi_l(r_j^\downarrow) \det \psi_l^*(\bar{r}_i^\uparrow) |\alpha\rangle, \quad (7.3)$$

$$|\alpha\rangle = S_{r_1^\downarrow}^- \dots S_{r_M^\downarrow}^- c_{s_1^\uparrow} \dots c_{s_{N-2M}^\uparrow} |F\rangle, \quad (7.4)$$

где  $S_r^\pm = c_{r\downarrow}^\pm c_{r\uparrow}$ . Это есть волновая функция системы из  $M$  частиц со спином вниз,  $M$  частиц со спином вверх и  $N - 2M$  дырок;  $l \in F, \bar{l} \in -F, |F\rangle$  — ферромагнитное состояние,  $\{\bar{r}_i^\uparrow\}$  — координаты спина вверх и совокупность  $\{c_j\} = \{\bar{r}_j^\uparrow\} - \{r_j^\downarrow\}$  дает положение дырок.

После подстановки (7.1) в (7.2) получаем

$$|\psi\rangle = \sum_{\{\alpha\}} \det \psi_l(r_i^\uparrow) \det \psi_l(r_j^\downarrow) |\alpha\rangle, \quad (7.5)$$

$$|\alpha\rangle = P \prod_i c_{r_i^\uparrow}^+ c_{r_i^\downarrow} |0\rangle. \quad (7.6)$$

Эквивалентность (7.2) и (7.3) [133] есть следствие тождественности состояний  $\prod_{l \in F} \tilde{c}_{l\uparrow}^+ |0\rangle$  и  $\prod_{l \in -F} \tilde{c}_{l\uparrow}^+ |F\rangle$ , где  $|F\rangle = \prod_i c_{i\uparrow}^+ |0\rangle$ , в результате чего  $\det \psi_l(r_j^\uparrow) \sim \det \psi_l^*(\bar{r}_j^\uparrow)$ . Волновая функция  $|\psi\rangle$  может быть записана в явно синглетном виде

$$|\psi\rangle = P \left( \sum_{ij} a(r_i, r_j) c_{i\uparrow}^+ c_{j\downarrow}^+ \right)^M |0\rangle \quad (7.7)$$

с симметричной функцией

$$a(r_i, r_j) = \sum_{l \in F} \psi_l(r_i) \psi_l(r_j), \quad (7.8)$$

что используется при численных вычислениях [135 — 137].

Несмотря на наглядность картины, она нас не может полностью устроить. Вызывает сомнение использование составных операторов (4.19)  $c_{i\sigma}$  для электронов и дырок, не являющихся элементарными возбуждениями системы с развитыми квантовыми флуктуациями (см. п. 4). На эвристическом уровне обсуждения замена функции (7.2) известна [138]. Индуцированный калибровочным преобразованием полином (3.9), умноженный на произведение волновых функций основного состояния частиц в магнитном поле, дает волновую функцию<sup>(24\*)</sup> [44, 139]

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{\vartheta/\pi} \prod_i G(z_i) e^{-(1/4)|z_i|^2}. \quad (7.9)$$

Здесь магнитная длина равна единице,  $i = (l, m)$  — индекс узла,  $z_k = x_k + iy_k \equiv l + im$  — комплексная координата спина с ориентацией вниз,

фактор  $G(z_j) = \pm 1 = (-1)^{l+m+lm+1}$  описывает распределение калибровочного потенциала  $a$  [139, 140].

Существенное отличие (7.9) от (7.2) заключено в функции

$$\prod_{j < k} (z_j - z_k)^{\vartheta/\pi},$$

отражающей условие твердого тела анионных возбуждений. Функция вида (7.9) использовалась в работе [140] для вычисления разнообразных физических величин. При  $\vartheta/\pi \equiv \vartheta_a/\pi = k = 2$  она оказалась очень близкой к киральному спиновому состоянию [45]. Очень любопытный результат содержится в работе [46], где показано, что функция (7.9) есть основное состояние гамильтониана (3.18). В дуально сопряженном случае  $\vartheta/\pi = \vartheta_\beta/\pi = 1/k$  при  $k = 2$  функция (7.9) описывает состояние системы полуфермионов [31]. Напомним, что статистические фазы связаны соотношением  $\vartheta_a/\pi = -\pi/\vartheta_\beta$  [53] и в терминах фермионной картины (3.4), (3.6), когда каждый вихрь Бома—Ааронова несет  $1 - k^{-1}$  часть кванта потока,  $k = 2$  соответствует двум полностью заполненным уровням Ландау (фактор заполнения равен  $1/(1 - k^{-1})$ ). Энергия в приближении Хартри—Фока для состояния (7.9) с  $\vartheta/\pi = 1/2$  несколько меньше, чем энергия двумерного ферми-газа во внешнем магнитном поле [31]. Для состояния (7.9) с  $\vartheta/\pi = 1/k$  характерно существование заряженных вихревых возбуждений с циркуляцией  $(1 - k^{-1})\hbar/m$  [31] и коллективной голстоуновской моды со звуковым спектром в длинноволновом пределе, что указывает на сжимаемость среды. Жесткость анионной жидкости на малых масштабах находит свое выражение в ротонном участке спектра коллективных движений [141].

Объединение требований, использованных при построении функций (7.5) и (7.9), ведет к функции [142]

$$\Phi = \mathcal{A} \Psi[z](\alpha, \alpha, \dots, \alpha, \beta, \beta, \dots, \beta), \quad (7.10)$$

$$\Psi[z] = \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)(z_{[i]} - z_{[j]}) e^S, \quad (7.11)$$

$$e^S \equiv \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{-1/2} |z_{[i]} - z_{[j]}|^{-1/2} \prod_{k, l} |z_k - z_{[l]}|^{-1/2}, \quad (7.12)$$

которая является точным синглетным собственным состоянием (с нулевой энергией) гамильтониана

$$H = \sum_{j=1}^N (\vec{\Pi}_j^2 - b_j), \quad (7.13)$$

$$b_j \equiv [\nabla \mathcal{A}_j]_z = 2\vartheta \sum_{k \neq j} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \quad (7.14)$$

с  $\vartheta/\pi = 1/2$  для системы полуфермионов. При получении (7.10) было использовано суперсимметричное представление [142 — 144] гамильтониана (7.13):

$$H = \sum_{j=1}^N \mathcal{Q}_j^+ \mathcal{Q}_j,$$



$$Q_j = \Pi_j^x - i\Pi_j^y, \quad \vec{\Pi}_j = -i\nabla + \mathbf{a}_j, \quad (7.15)$$

В выражениях (7.10) — (7.15) использованы следующие обозначения:  $\mathcal{A}$  — антисимметризатор,  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $\bar{z}_j = x_j - iy_j$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — спиноры со спином соответственно вверх и вниз,  $j=1, 2, \dots, N$ , и  $[j] = N+1, N+2, \dots, 2N$  — пространственные индексы для этих значений проекций спина. Функция в (7.11) является решением уравнения  $\nabla_j^2 S = -b_j$  и пропорциональна кулоновской энергии ассоциированной классической плазмы:

$$S = -(\vartheta/\pi) \sum_{k < j} \ln |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|.$$

## 8. Анионы на решетке

Представление об анионах как о длинноволновых возбуждениях было сформулировано в разделе 4. В настоящее время существует также несколько подходов в теории анионов на решетке [145 — 149]. Здесь мы ограничимся лишь некоторыми сторонами этой картины, следуя результатам, полученным в работах [149]. Такой взгляд с точки зрения малых расстояний необходим в связи с тем, что корреляционный радиус, как неоднократно уже отмечалось, всего в несколько раз превышает постоянную решетки. Для ответа на вопрос, какое состояние реализуется в макроскопически больших объемах, оказываются существенными детали распределения квантовых чисел на малых расстояниях.

В анионном подходе (3.10) гамильтониан равен

$$H = -\tilde{t} \sum_{\mathbf{r}, j} \bar{c}^+(\mathbf{r}) \bar{c}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_j) + \text{э.с.} \quad (8.1)$$

Он описывает газ  $N_a$  анионов, операторы рождения и уничтожения которых удовлетворяют коммутационным соотношениям [50, 149]

$$\{\bar{c}^+(\mathbf{r}), \bar{c}(\mathbf{r}')\}_q = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \{\bar{c}(\mathbf{r}), \bar{c}(\mathbf{r}')\}_q = \{\bar{c}^+(\mathbf{r}), \bar{c}^+(\mathbf{r}')\}_q = 0, \quad (8.2)$$

$$\{a, b\}_q \equiv ab + q\dot{a}a, \quad q = e^\delta.$$

Набором чисел  $\{\mathbf{r}, j\}$  в (8.1) помечены ребра решетки,  $\mathbf{e}_j$  — единичный вектор,  $j = 1$  или  $2$ . Вместо индекса узла введен радиус-вектор  $\mathbf{r}$  левого узла элементарной ячейки. Фаза в (8.2) равна нулю для фермионов,  $\delta = \pi$  для бозонов и  $\delta = \pi/m$  для анионов. Целое число  $m$  здесь и параметр  $k$  в прежних обозначениях, например в (4.7), совпадают.

На фермионном языке гамильтониан

$$H_f = -\tilde{t} \sum_{\mathbf{r}, j} c^+(\mathbf{r}) e^{ia_j(\mathbf{r})} c(\mathbf{r} + \mathbf{e}_j) + \text{э.с.} \quad (8.3)$$

совпадает с (6.1),  $\{c^+(\mathbf{r}), c(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , а плотность  $j_0 = c^+(\mathbf{r})c(\mathbf{r})$  системы из  $N_f$  фермионов удовлетворяет локальной связи (4.10)

$$j_0(\mathbf{r}) = \vartheta B(\mathbf{x}) = \vartheta \varepsilon_{ij} \Delta_i a_j(\mathbf{r}). \quad (8.4)$$

Координата  $x$  потока  $B(\mathbf{x})$  совпадает с узлом дуальной решетки (см. рис. 5), который находится справа и выше узла с координатой  $\mathbf{r}$ . Статистическая фаза

$\vartheta$  в (8.4) равна  $m/2\pi$ , а градиент на решетке определен как

$$\Delta_i a_j(\mathbf{r}) \equiv a_j(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) - a_j(\mathbf{r}). \quad (8.5)$$

Коммутационные соотношения, которым удовлетворяют  $a_j(\mathbf{r})$ , следуют из правил канонического квантования нашей системы, имеющей лагранжиан

$$L = \sum_{\mathbf{r}} c^\dagger (i\partial_0 + a_0) c - H_f - \frac{\vartheta}{2} \sum_{\mathbf{r}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda. \quad (8.6)$$

Для (8.6) импульс, сопряженный к  $a_j(\mathbf{r}, t)$ , равен

$$\Pi_j(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\delta L}{\delta a_j(\mathbf{r}, t)} = \vartheta \varepsilon_{jk} a_k(\mathbf{r}, t). \quad (8.7)$$

Поэтому из стандартного соотношения

$$[a_j(\mathbf{r}, t), \Pi_k(\mathbf{r}', t)] = i\delta_{jk}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.8)$$

следует, что одновременный коммутатор имеет вид

$$[a_j(\mathbf{r}), a_k(\mathbf{r}')] = \frac{i}{\vartheta} \varepsilon_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.9)$$

Во времениподобной калибровке Вейля  $a_0 = 0$  классическое уравнение движения  $\delta L / \delta a_0 = 0$  есть кулоновское ограничение (8.4), которое определяет гильбертово пространство физических состояний следующим образом. Генератор не зависящих от времени калибровочных преобразований

$$Q = \frac{\delta L}{\delta a_0(\mathbf{r})} = j_0(\mathbf{r}) - \vartheta \varepsilon_{ij} \Delta_i a_j(\mathbf{r}) \quad (8.10)$$

коммутирует с гамильтонианом (8.3) и уничтожает физические состояния.

Как следует из (8.9), импульс, сопряженный к  $a_1$  равен  $\vartheta a_2$ . Их коммутатор аналогичен перестановочным соотношениям между  $x$ - и  $y$ -компонентами скорости заряженной двумерной частицы, помещенной в перпендикулярное магнитное поле. Подробное изложение топологической черн-саймоновской квантовой механики, основанное на таком сравнении, содержится в работе [150].

Рассмотрим некоторые детали перехода от (8.3) к (8.1) на решетке. Это будет полезно не только из методических соображений. Для этого найдем решения уравнения (8.4), представив векторный потенциал  $a_j(\mathbf{r})$  в виде

$$a_j(\mathbf{r}) = \varepsilon_{jk} \Delta_k \Phi(\mathbf{x}). \quad (8.11)$$

Тогда

$$j_0(\mathbf{r}) = \vartheta \Delta^2 \Phi(\mathbf{x}), \quad (8.12)$$

где  $\Delta^2$  — оператор Лапласа на решетке. Решение этого уравнения

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j_0(\mathbf{r}') \quad (8.13)$$

позволяет определить векторный потенциал

$$a_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\vartheta} \varepsilon_{jk} \Delta_k \sum_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j_0(\mathbf{r}'); \quad (8.14)$$

здесь  $(\mathbf{x}', \mathbf{r}')$  — дуальные пары,  $G$  — функция Грина на решетке.

В терминах дуальной многозначной функции Грина  $\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}')$ , которая удовлетворяет уравнению Коши—Римана

$$\Delta_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \varepsilon_{ij} \Delta_j \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}'), \quad (8.15)$$

искомый векторный потенциал

$$a_f(\mathbf{r}) = \Delta_f \phi(\mathbf{r}) \quad (8.16)$$

равен градиенту многозначной функции

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\mathbf{r}'} \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}') j_0(\mathbf{r}') \quad (8.17)$$

(дискуссию в связи с (8.17) см. в [151 — 153]).

Функция  $\theta$  удовлетворяет условию  $\Delta\theta = +1$  при обходе по замкнутому контуру на основной решетке вокруг дуального узла  $\mathbf{x}$ , что вместе с (8.15) определяет ее полностью. Многозначность функции  $\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}')$  возникает вследствие разреза-струны, тянущейся от точки  $\mathbf{x}$  до бесконечности, при пересечении которой функция приобретает постоянный скачок. Вид оператора  $\phi$  зависит от калибровки [154] и в калибровке  $a_1 = 0$  совпадает со струной Дирака. Все эти свойства, разумеется, не артефакт теории, а отражение много-связности двумерной системы.

Определим оператор  $\exp(i\phi(\mathbf{r}))$ , который рождает когерентное состояние калибровочного поля с  $1/\vartheta$  частью кванта потока, прикрепленного к каждому фермиону в точке  $\mathbf{r}$ . Тогда преобразование

$$c(\mathbf{r}) \rightarrow \bar{c}(\mathbf{r}) = e^{i\phi(\mathbf{r})} c(\mathbf{r}), \quad (8.18)$$

$$c^+(\mathbf{r}) \rightarrow \bar{c}^+(\mathbf{r}) = c^+(\mathbf{r}) e^{-i\phi(\mathbf{r})}, \quad (8.19)$$

имеющее смысл преобразования Иордана—Вигнера [155], дает операторы, которые будут удовлетворять анионным коммутационным соотношениям (8.2) с фазой  $\delta$ , равной [147 — 149]

$$\delta = \frac{1}{\vartheta} (\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}') - \theta(\mathbf{r}', \mathbf{x})) = \frac{1}{2\vartheta}. \quad (8.20)$$

Из принципа Паули для фермионов  $(c^+)^2 = c^2 = 0$  вытекает условие твердой) **кора**  $\bar{c}^2(\mathbf{r}) = (\bar{c}^+(\mathbf{r}))^2 = 0$  для анионных операторов.

При условии кратности  $\delta/\pi$  нечетному числу анионы становятся бозонами с твердым кором, а стандартное преобразование Иордана—Вигнера

$$c_r \rightarrow \bar{c}_r = Q_r c_r = a_{r\downarrow}^+ a_{r\uparrow} \equiv S_r^-, \quad (8.21)$$

$$c_r^+ \rightarrow \bar{c}_r^+ = c_r^+ Q_r = a_{r\uparrow}^+ a_{r\downarrow} \equiv S_r^+,$$

где

$$Q_i = \exp(i\pi \sum_{j<i} c_j^+ c_j), \quad (8.22)$$

дает гамильтониан (8.1), который совпадает с гамильтонианом ХУ-модели спина 1/2. При этом связь (8.4) заменяет соотношение  $S_z(\mathbf{r}) = j_0(\mathbf{r}) - 1/2$ . Таким образом, фермионы с черн-саймонсовским членом при  $\delta/\pi$ , кратным нечетному числу, эквивалентны ХУ-модели спина 1/2 или бозонам с твердым кором.

Обратим внимание на то, что нелокальный оператор в (8.18) для произвольных  $\delta$  можно записать [32, 156] также в виде

$$Q_k = \exp \left[ i \frac{\delta}{\pi} \sum_{j < k} \text{Im} \ln(z_k - z_j) c_j^\dagger c_j \right], \quad (8.23)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$  — комплексная координата узла. Он рождает разрез-струну, тянущуюся за каждой частицей, и имеет смысл оператора беспорядка [157 — 159].

Кроме пространственного распределения плотности числа частицы и калибровочного потока по ячейкам с узлами основной и дуальной решеток, возможны различные варианты в соотношении квантовых чисел, определяющих связь степени заполнения узла и величины потока. Обсудим это с большей степенью подробности, чем это было сделано в п. 4 и 6.

Фейнмановский интеграл по траектории имеет вид

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi Da \exp(i \int L dt). \quad (8.24)$$

Будем считать, что в (8.24) учтен химический потенциал и потенциал внешнего электромагнитного поля  $A_\mu$ :

$$i\partial_0 + a_0 \rightarrow D_0 = i\partial_0 + (a_0 + A_0 + \mu), \quad (8.25)$$

$$e^{ia_j(\mathbf{r}, t)} \rightarrow e^{i[a_j(\mathbf{r}, t) + A_j(\mathbf{r}, t)]} \quad (8.26)$$

Химический потенциал, как обычно, сдвигает скалярный потенциал  $A_0$ .

Ферми-поля входят в (8.24) квадратично. Поэтому после интегрирования в (8.24) по ним получаем

$$\det(D_0 - H(a + A)) = \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ i \int dt \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) [D_0 \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} - H(a + A) \psi(\mathbf{r}', t)] \right\}; \quad (8.27)$$

здесь

$$H = -t \sum_{j=1,2} e^{i(a_j + A_j)} \delta_{\mathbf{r}', \mathbf{r} + \mathbf{e}_j}. \quad (8.28)$$

В результате эффективное действие для калибровочных полей имеет вид

$$S_{\text{eff}} = -i \text{tr} \ln(D_0 - H(a + A)) - iS(a), \quad (8.29)$$

где  $S(a)$  есть черн-саймонсовский вклад от последнего слагаемого в (8.6). После сдвига векторного потенциала  $a + A \rightarrow a$ , оставляющего меру в (8.24) инвариантной, и выделения химического потенциала из  $D_0$  получаем

$$S_{\text{eff}} = -i \text{tr} \ln(D_0 + \mu - H(a)) - iS(a - A), \quad (8.30)$$

где

$$S(a - A) = S(a) + S(A) - \epsilon^{\mu\nu\lambda}(a_\mu \partial_\nu A_\lambda + A_\mu \partial_\nu a_\lambda). \quad (8.31)$$

Обратим внимание на выражение (8.31). Его структура существенна по нескольким причинам. Прежде всего в связи с существующими в литературе [160 — 162] несколькими способами включения внешнего электромагнитного поля при записи слагаемого Черна—Саймонса. Вообще говоря, внешнее поле  $A_\mu$  мало по сравнению со статистическим  $a_\mu$  и его можно рассматривать как возмущение. Исключением является однородное внешнее магнитное поле, когда для правильного описания [104] эффекта Мейсснера необходимо оставлять потенциалы в сумме  $a + A$  равноправными. Только в этом случае флуктуационные поправки могут сократить статистический затравочный член Черна—Саймонса 5(a).

Отложим до п. 13 случай  $A_\mu \neq 0$  и будем считать, что в точке стационарной фазы  $\delta S_{\text{eff}}/\delta a_\mu|_{a_\mu = \bar{a}_\mu} = 0$  напряженность статистического электрического поля  $e$  равна нулю, а статистическое магнитное поле  $b$  однородно. Аргументы в пользу справедливости последнего были приведены в п. 5, а случай  $e \neq 0$  обсуждается в работах [163, 164]. Уравнение  $\delta S_{\text{eff}}/\delta a = 0$  означает, что фермионный ток имеет вид

$$j^\mu = \partial \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda, \quad (8.32)$$

а нулевая компонента дает плотность фермионов

$$\rho = \partial b. \quad (8.33)$$

Система содержит

$$N_a = -\frac{i}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \quad (8.34)$$

анионов. Так как  $\mu$  есть сдвиг скалярного потенциала  $a_0$ , то

$$N'_a = \partial \Phi, \quad (8.35)$$

где  $\Phi$  — полный поток через площадку с линейным размером  $L$ , измеренный в единицах постоянной решетки:

$$\Phi = bL^2. \quad (8.36)$$

Таким образом, плотность анионов

$$N_a/L^2 = \partial b \quad (8.37)$$

совпадает с плотностью фермионов (8.33) и задает среднее статистическое магнитное поле [70, 71].

Пусть плотность  $\rho$  — отношение двух взаимно простых чисел  $r$  и  $q$ :

$$\rho = r/q, \quad (8.38)$$

фаза  $\delta$  и статистический угол  $\vartheta$

$$\delta = \pi \frac{n}{m}, \quad \vartheta = \frac{1}{2\delta} = \frac{m}{2\pi n} \quad (8.39)$$

с взаимно простыми  $n$  и  $m$ .

Среднее статистическое поле  $b$  в (8.36) есть дробная часть  $[\Phi/L^2]$ :

$$b = 2\pi P/Q \quad (8.40)$$

от кванта потока, равного  $2\pi$  ( $\hbar = 1$ ). Поэтому уравнение (8.37) связывает относительно простые числа в парах  $\{P, Q\}$ ,  $\{r, q\}$  и  $\{n, m\}$ :

$$2\pi \frac{P}{Q} = \frac{\rho}{\delta} = 2\pi \frac{nr}{mq}. \quad (8.41)$$

Напомним, что спектр одночастичных состояний (см. п. 6) для значений магнитного поля (8.40) содержит  $Q$  подзон с числом состояний для каждой подзоны, равным  $L^2/Q$ . Если  $f$  — дробная или целая часть занятых подзон, тоща  $f = N_a/(L^2/Q)$  и анионная плотность  $N_a/L^2 = f/Q$ . С использованием уравнения (8.37) это означает, что

$$f = (r/q)Q, \quad (8.42)$$

т.е.  $f$  есть целое число в том случае, если  $q$  является делителем  $Q$ .

Обозначим через  $(a, b)$  наибольший общий делитель двух целых чисел  $a$  и  $b$ . Пусть теперь  $s$  и  $l$  — два целых числа, удовлетворяющих условию

$$s = (n, q), \quad l = (m, r). \quad (8.43)$$

Существуют такие четыре числа  $\bar{n}, \bar{m}, \bar{r}, \bar{q}$ , что

$$n = s\bar{n}, \quad q = s\bar{q}, \quad (8.44)$$

$$m = l\bar{m}, \quad r = l\bar{r} \quad (8.45)$$

с условием

$$(\bar{n}, \bar{q}) = 1, \quad (\bar{m}, \bar{r}) = 1, \quad (8.46)$$

$$(\bar{n}, \bar{m}) = 1, \quad (\bar{q}, \bar{r}) = 1,$$

как следствие взаимно простых чисел, входящих в дроби (8.38), (8.39).

Таким образом, уравнение (8.41) эквивалентно уравнению

$$\frac{P}{Q} = \frac{\bar{n} \bar{r}}{\bar{m} \bar{q}} \quad (8.47)$$

или

$$P = \bar{n} \bar{r}, \quad Q = \bar{m} \bar{q}, \quad (8.48)$$

а степень заполнения подзон равна

$$f = \frac{r}{q}Q = \frac{l}{s} \bar{r} \bar{m} = \frac{rm}{(n, q)(m, r)}. \quad (8.49)$$

Поскольку  $s = (n, q)$  не имеет общего делителя с  $l$ ,  $\bar{r}$  или  $\bar{m}$ , то  $f$  — несократимая дробь, за исключением случаев, когда справедливо одно из соотношений

$$\begin{aligned} (n, q) = 1 & \quad \left( f = \frac{rm}{(m, r)} \right), \\ (n, q) = \frac{m}{(m, r)} & \quad (f = r), \end{aligned} \quad (8.50)$$

$$(n, q) = \frac{r}{(m, r)} \quad (f = m).$$

Из соображений об устойчивости состояния относительно флуктуаций около среднего поля следует, что предпочтительной является ситуация с щелями в спектре возбуждений, что отвечает целым значениям  $f$  и реализации тем самым одного из соотношений (8.50). Физические свойства системы, например, статистика возбуждений будет зависеть от того, какое из условий (8.50) выполняется. Другими словами, свойства системы зависят не только от степени заполнения узла, но также от условий соизмеримости.

Случай, рассмотренный в предыдущих разделах, соответствует  $n = 1$ , когда  $\vartheta = m/2\pi$ . Для него  $s = (n, q) = 1$  и  $f = mr/(m, r)$  — целое число заполненных уровней Ландау в системе с произвольной плотностью  $\rho = r/q$  и статистической фазой  $\delta = \pi/m$ .

Исключительным является половинное заполнение узла  $\rho = 1/2$  ( $r = 1$ ,  $q = 2$ ) и  $\vartheta = m/(2\pi n)$  с нечетным  $n$ . В этом случае из (8.44) — (8.50) следует, что  $f = m$ ,  $P = n$  и  $Q = 2m$ . Это означает, что химический потенциал лежит при  $\varepsilon = 0$ , все состояния с энергией  $\varepsilon < 0$  заполнены и в зоне Бриллюэна при  $\varepsilon = 0$  ветви энергетического спектра пересекаются в  $Q = 2m = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , точках. Стандартной фазе с потоком [9, 12] соответствовал бы набор  $m = 1$  и  $\rho = 1/2$ , когда  $b = \pi$ , что отвечает половине кванта потока на ячейку.

Квадратичные флуктуации около среднего значения магнитного поля в (8.37) будут давать в действие вклад, равный

$$S = \sum_{x, x'} a_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x, x') a_\nu(x') - \frac{\vartheta}{2} \sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda; \quad (8.51)$$

здесь  $a_\mu(x)$  — отклонение от среднего значения потенциала,  $x = (r, t)$ ;  $S$  содержит сумму вклада от фермионной части и от черн-саймонсовского слагаемого. Первое слагаемое содержит поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}(x, x')$  фермионов на решетке в присутствии магнитного поля  $b$ . При наличии щели в спектре после градиентного разложения  $\Pi_{\mu\nu}$  в низкоэнергетическом и длинноволновом пределе запишем (8.51) в виде

$$S = \int d^3x \left[ \frac{\varepsilon}{2} e^2 - \frac{\chi}{2} h^2 + \frac{1}{4} (\sigma_{xy} - \vartheta) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \right] + \dots \quad (8.52)$$

Если химический потенциал лежит в  $f$ -й щели Ховштадтера, то холловская проводимость  $\sigma_{xy}$ , как отмечалось в п. 6, равна  $t_f/2\pi$  ( $\hbar = 1$ ), где  $t_f$  есть решение уравнения Диофанта  $f = Qs_f + Pt_f$ . Комбинируя выражения (8.37) — (8.42), запишем холловскую проводимость в виде

$$\sigma_{xy} = \vartheta(1 - s_f \rho^{-1}). \quad (8.53)$$

Из выражений (8.52) и (8.53) следует, что точное сокращение черн-саймонсовского слагаемого в гауссовом приближении возникает для решений уравнения Диофанта с  $s_f = 0$ . Это решение играет важную роль, так как представляет сжимаемое состояние (см. п. 5), где существует голдстоуновская коллективная мода.

Рассмотрим сначала случай  $n = 1$  и  $\vartheta = m/2\pi$ , а плотность  $\rho = r/q$  пусть

произвольна. Тогда  $P = r/(m, r)$ ,  $Q = mq/(m, r)$  и заполнено  $f = mr/(m, r)$  подзон. Уравнение Диофанта имеет в этом случае решение

$$s_f = \begin{cases} 0, & t_f = m, & \text{если } |m| < \frac{mq}{2(m, r)}, \\ \frac{r}{(m, r)}, & t_f = m - \frac{mq}{(m, r)}, & \text{если } |m| > \frac{mq}{2(m, r)}. \end{cases} \quad (8.54)$$

Вырожденное решение и неоднозначность  $t_f$  возникает при  $|m| = mq/2(m, r)$ , т.е. при четных значениях  $q = 2(m, r)$ , что включает и случай половинного заполнения  $\rho = 1/2$ . Взаимодействие со следующими соседями вслед за ближайшими снимает это вырождение (см. п. 6).

Таким образом, в отсутствие вырождения, если  $q > 2(m, r)$ , решение уравнения Диофанта однозначно и мы имеем  $s_f = 0$ ,  $t_f = m$ ,  $\sigma_{xy} = m/2\pi$ , что равно  $\vartheta$ ! В противоположном случае, когда  $q < 2(m, r)$ , решение имеет вид  $s_f = r/(m, r) \neq 0$ . Для такой степени заполнения узла нет сокращения черн-саймонсовского слагаемого, отсутствует мода Голстоуна и сверхтекучее состояние невозможно. Калибровочные бозоны при  $s_f \neq 0$  имеют топологическую массу за счет слагаемого Черна—Саймонса, а спектр коллективных возбуждений в газе анионов имеет в длинноволновом пределе конечную щель. Коротко говоря, это абсолютно несжимаемое когерентное состояние есть состояние, аналогичное состоянию квантового эффекта Холла. Для последовательности с  $n \neq 1$  также невозможно найти решение уравнения Диофанта с  $s_f = 0$ , и в этой серии сверхтекучесть невозможна. Такие когерентные несверхтекучие состояния невозможно, конечно, найти в непрерывном пределе, так как они представляют собой результат дифракции на решетке. Флуктуационные вклады в параметр  $k \equiv m$  статистической фазы  $\vartheta = k/2\pi$  при разных плотностях и температурах с возможностью его зануления и перехода в сверхтекучее состояние составляют предмет обсуждения в обширной текущей литературе [100, 102, 104, 165, 166].

Таким образом, мы видим, что сверхтекучее состояние заряженных анионных возбуждений представляет собой лишь одно из когерентных состояний в двумерных системах с нарушенными  $P$ -четностью и симметрией относительно обращения времени. Место сверхтекучей фазы в ряду других будет рассматриваться в п. 11.

Во всем, что мы только что обсуждали, очень существенно распределение по узлам основной и дуальной решеток взаимосопряженных степеней свободы — фазы  $\varphi$  и числа частиц. Из коммутационных соотношений для операторов этих величин  $[\varphi, N] = i$  следует, что флуктуации фазы сравнимы с флуктуациями чисел частиц. В переменных фаза — число частиц "грубый" подход (2.15) формулируется [167] с помощью гамильтониана  $H = H_t^{(1)} + V_u^{(1)}$

$$H_t^{(1)} = -t^{(1)} \sum_{r,j} \cos(\Delta_t \varphi_{r,j}^{(1)} - a_{r,j}^{(1)}), \quad (8.55)$$

$$V_u^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} (N_r^{(1)} - \rho^{(1)}) U_{rr'}^{(1)} (N_{r'}^{(1)} - \rho^{(1)}) \quad (8.56)$$

со связью (8.4)



$$b_{\mathbf{x}} \equiv \epsilon_{ij} \Delta_i a_{j\mathbf{x}} = \frac{\alpha_s}{4} \sum_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{r}}^{(1)}. \quad (8.57)$$

Здесь статистический фазовый фактор  $\exp(i\pi\alpha_s)$  параметризован с помощью угла  $\alpha_s$ ,  $\rho^{(1)}$  — оператор плотности компенсирующего фона в расчете на один узел,  $U^{(1)}$  — отталкивающий потенциал между бозонами. Суммирование проводится по всем узлам квадратной ячейки с центром, являющимся узлом дуальной решетки.

Покажем, пользуясь результатами работы [167], как из (8.55) — (8.57) возникают иерархические последовательности состояний. Гамильтониан бозонов (8.55), (8.56) изоморфен [168] дуальной  $(2+1)$ -мерной скалярной квантовой электродинамике с ее переменной — векторным потенциалом  $\mathbf{A}^{(1)}$ . После дуального преобразования оператор числа бозонов  $N^{(1)}$  переходит в  $\nabla \times \mathbf{A}^{(1)}$  с  $\mathbf{A}^{(1)}$ , лежащим на ребре дуальной решетки, а гамильтониан (8.55), (8.56) переходит в

$$H^{(2)} = H_s^{(2)} + H_l^{(2)} + V_u^{(2)};$$

здесь

$$H_s^{(2)} = \frac{U^{(2)}}{2} \sum_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}}^{(1)2} + V_u^{(1)}, \quad N_1 = [\nabla \times \mathbf{A}^{(1)}]_z, \quad (8.58)$$

$$H_l^{(2)} = -t^{(2)} \sum_{\mathbf{x}, j} \cos(\Delta_j \varphi_{\mathbf{x}}^{(2)} - A_{\mathbf{x},j}^{(1)}), \quad (8.59)$$

$$V_u^{(2)} = \frac{U^{(2)}}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} (N_{\mathbf{x}}^{(2)} - \rho_{\mathbf{x}}^{(2)}) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (N_{\mathbf{x}'}^{(2)} - \rho_{\mathbf{x}'}^{(2)}), \quad (8.60)$$

$\pi_{\mathbf{x}}^{(1)}$  — канонически сопряженный по отношению к  $\mathbf{A}^{(1)}$  импульс,  $\nabla \cdot \mathbf{A}^{(1)} = 0$ , функция Грина (8.13)  $G(\mathbf{x}) \sim \ln|\mathbf{x}|$  при больших  $|\mathbf{x}|$ . Редуцированная компенсирующая плотность

$$\rho_{\mathbf{x}}^{(2)} = -\frac{\alpha_s}{4} \sum_{\mathbf{r}} \epsilon_{ij} \Delta_i A_{j\mathbf{r}}^{(1)}. \quad (8.61)$$

Оператор  $N^{(2)}$  в (8.60) представляет вихрь первоначального поля бозонов  $\varphi$  в (8.55).

На втором шаге итераций отображения модели (8.55) — (8.57) в эффективном гамильтониане  $H^{(3)} = H_s^{(2)} + H_s^{(3)} + H_l^{(3)} + V_u^{(3)}$  присутствуют следующие замены по сравнению с (8.58) — (8.61). Оператор числа вихрей  $N^{(2)} \rightarrow \text{rot } \mathbf{A}^{(2)}$ , поменялись узлы  $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{x}$  и статистический угол  $\alpha_s^{-1} \rightarrow \alpha_s^{-1} + p_1$ . Четное число  $p_1$  квантов потока присоединено к вихрям  $N^{(2)}$  в (8.58) — (8.61), чтобы сохранить бозонный характер  $N^{(2)}$ .

Отображение на  $n$ -м шаге дает гамильтониан  $H^{(n)} = H_s^{(2)} + \dots + H_s^{(n)} + H_l^{(n)} + V_u^{(n)}$ , зависящий от операторов  $N^{(n)}$ ,  $\varphi^{(n)}$  и полей

$A^{(1)}, \dots, A^{(n-1)}$ . Операторы беспорядка  $\exp(i\varphi^{(n)})$  локализованы в узлах основной или дуальной решеток, а калибровочное поле  $A^{(n)}$  лежит на ребрах дуальной или основной решеток для нечетных и соответственно четных  $n$ .

Из условия нейтрализации среднего фона для частиц  $N^{(3)}$  на втором шаге итераций имеем  $\langle \rho^3 \rangle = \langle \nabla \times A^{(1)} \rangle - p_1 \langle \nabla \times A^{(2)} \rangle = 0$ . Так как слагаемое  $H_s^{(3)}$  требует, чтобы  $\langle \nabla \times A^{(2)} \rangle = \alpha_s \langle \nabla \times A^{(1)} \rangle$ , отсюда получаем  $\alpha_s = 1/p_1$ . Если это условие не выполняется, то процедуру отображения необходимо продолжить, пока на  $n$ -м шаге итерации не найдется такая нейтрализующая плотность фона  $N^{(n+1)}$  частиц, что  $\langle \rho^{(n+1)} \rangle = 0$ . В этом случае

$$\alpha_s = \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \dots + 1/p_n}}} \equiv \frac{P}{Q} \quad (8.62)$$

с  $p_i = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, i = 1, \dots, n$ .

В таком состоянии, например, когда  $\{N_r^{(3)}\} = 0$  и  $I^{(3)} = 0$ , спектр квадратичного по  $A^{(1)}, A^{(2)}$  эффективного гамильтониана  $\tilde{H}(\{N^{(3)}\} = 0)$  содержит бесщелевую моду (5.12) — индикатор явления сверхтекучести. Полюс проводимости

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{2\pi}{i\omega} \frac{U^{(2)}U^{(3)}}{\alpha_s^2 U^{(2)} + U^{(3)}} \quad (8.63)$$

при  $\omega \rightarrow 0$  указывает на ненулевую плотность сверхтекучей жидкости, а конечное значение холловской проводимости  $\sigma_{xy}(\omega = 0) = -\alpha_s^3 (U^{(2)})^2 / (\alpha_s^2 U^{(2)} + U^{(3)})^2$  вместе с (8.63) дает нулевое значение холловского сопротивления при  $\omega \rightarrow 0$ .

## 9. Фермионный подход

Фермионное представление для анионов очень удобно, так как в этом случае при  $k \rightarrow \infty$  существует контролируемый при вычислениях малый параметр  $k^{-1}$ , а статистическая фаза  $\vartheta = \pi(1 - k^{-1})$  близка к привычному фермионному значению  $\pi$ . При  $k \gg 1$  мы, конечно, далеки от основного состояния  $k = 2$  с его сильными корреляциями. Состояния с большими  $k$  можно рассматривать скорее как метастабильные, чаще всего неравновесные состояния, характеризующиеся долговременной релаксацией из-за существования изрезанной провалами фрактальной энергии анионов и необходимости возбужденным анионам пройти через состояния, разделенные энергетическими барьерами (см. рис. 7). Тем не менее и при больших  $k$  анионы сохраняют свое основное свойство, выражающееся в теоретико-числовой ультраметричности. В этом разделе, следуя результатам, полученным в работах [97, 169], мы рассмотрим некоторые особенности фермионного подхода.

В представлении вторичного квантования гамильтониан в фермионной картине (3.4), (3.6) имеет вид

$$H = \int d^2r \psi^\dagger(r) \cdot \frac{1}{2m} |(\mathbf{p} + \mathbf{a}(r))|^2 \psi(r), \quad (9.1)$$

где  $\psi$  — поле бесспиновых фермионов. Заменим точное выражение для векторного потенциала

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \int d^2 r' \frac{[\mathbf{e}_z(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \quad (9.2)$$

введя среднюю плотность  $\rho$  и магнитное поле  $b$ , приближенным

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{k} \int d^2 r' \frac{[\mathbf{e}_z(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} (\psi^\dagger \psi - \rho), \quad (9.3)$$

где

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} b [\mathbf{e}_z \mathbf{r}], \quad b = \frac{2\pi}{k} \rho. \quad (9.4)$$

После подстановки в (9.1) гамильтониан представим в виде ряда по  $1/k$

$$H = H_0(\bar{\mathbf{a}}) + \frac{1}{k} H_1(\bar{\mathbf{a}}) + \frac{1}{k^2} H_2(\bar{\mathbf{a}}) + \dots \quad (9.5)$$

Теория возмущений (9.5) дает возможность вычислить реакцию на внешнее электромагнитное поле  $A_\mu$ :

$$J_\mu(\mathbf{q}, \omega) = -K_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) A_\nu(\mathbf{q}, \omega). \quad (9.6)$$

**Функция  $K_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega)$** , как показано в работах [33, 97, 101, 169], в длинноволновом пределе имеет полюс при

$$\omega = v_0 q, \quad v_0 = (2\pi\rho)^{1/2}/m. \quad (9.7)$$

Существование голстоуновской моды (9.7) означает, что система трансляционно инвариантна.

Остановимся на этом более подробно. Обычно появление голстоуновской моды происходит после фазового перехода и связано с нарушением непрерывной симметрии. Однако в двумерном случае теорема Элитцера [170] запрещает существование в решеточных системах с непрерывной симметрией обычного локального параметра порядка. Поэтому предложение авторов работы [169] состоит в том, чтобы выражение (9.7) воспринимать как результат восстановления той утраченной трансляционной инвариантности, когда гамильтониан и генераторы трансляции коммутировали между собой, т.е. восстановление коммутации  $[P_x, P_y]$  при том, что  $[P_x, H] = 0$ . Действительно, генераторы трансляции в однородном магнитном поле с гамильтонианом не коммутируют, а генераторы магнитных трансляций (6.34), коммутируя с гамильтонианом, не коммутируют между собой. По этой причине на "макроскопическом" уровне квазичастиц можно было бы считать, что в начальном состоянии по отношению к явлению (9.7) коммутатор операторов трансляций  $P_i$  не равен нулю:

$$[P_k, P_j] = i b \epsilon_{kj} Q \quad (9.8)$$

и определяется числом частиц  $Q$  и статистическим магнитным полем  $b = \epsilon_{ij} \partial_i a_j$ . Последнее играет роль параметра порядка. Результативно это тот же параметр порядка, что и (4.11). Тензор  $\epsilon_{kj}$  и  $i$  в (9.8) отражают соответ-

ственно нарушение двумерной четности  $P$  и инверсии относительно обращения времени  $T$ , а их произведение сохраняет РТ-инвариантность анионной системы. Посмотрим, как происходит сокращение  $Q$  в (9.8) в сверхтекучем состоянии<sup>(25\*)</sup>.

Рассмотрим сначала ради простоты одну частицу в постоянном заданном магнитном поле, когда гамильтониан равен

$$H = (-1/2m)D^2, \quad (9.9)$$

а ковариантные производные удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[D_i, D_j] = i\epsilon_{ij}b. \quad (9.10)$$

Так как  $[D_i, H] \neq 0$ , то операторы трансляции не совпадают с  $D_i$ . Они равны

$$P_i = -iD_i + b\epsilon_{ij}x^j. \quad (9.11)$$

Для них

$$[P_i, H] = 0, \quad [P_k, P_i] = ib\epsilon_{ki}. \quad (9.12)$$

В терминах вторично квантованного поля квазичастиц  $\chi$  гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} \int d^2x |D_k \chi|^2 \quad (9.13)$$

и аналогичный (9.11) оператор трансляций

$$P_k^{(\chi)} = \int d^2x [\chi^* (-iD_k) \chi + b\epsilon_{kj} x^j \chi^* \chi] \quad (9.14)$$

коммутируют друг с другом, но

$$[P_i^{(\chi)}, P_k^{(\chi)}] = ib\epsilon_{ik}Q, \quad (9.15)$$

где

$$Q = \int d^2x \chi^* \chi \quad (9.16)$$

— оператор заряда.

Введем дополнительно к системе квазичастиц  $\chi$ , которые при больших  $k$  близки к фермионам и занимают  $k$  уровней Ландау, безмассовый бозон, который обеспечит "микроскопическое" равенство  $[P_i, P_j] = 0$ . Представим бозон скалярным полем  $\phi$  с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_0 \phi)^2 - v^2 (\partial_i \phi)^2]. \quad (9.17)$$

Затем, аналогично (5.16), перепишем лагранжиан для поля  $\phi$  в терминах калибровочного поля  $a_i$  с напряженностью  $h_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i$ . После замены переменных  $\partial_0 \phi = h_{12}$ ,  $v^2 \partial_i \phi = \epsilon_{ij} h_{0j}$ :

$$L = \frac{1}{2} \int d^3x (h_{0i}^2 - v^2 h_{12}^2). \quad (9.18)$$

Генератор трансляций для (9.18) имеет вид

$$P_i^{(a)} = \int d^2x T_{0i}^{(a)}, \quad (9.19)$$

где плотность импульса

$$T_{0i}^{(a)} = -h_{0j}h_{ij} \quad (9.20)$$

и, конечно,  $[P_i, P_j] = 0$ . Однако после операции (9.11)

$$T_{0i}^{(a)} = -h_{0j}h_{ij} + \epsilon_{ij}h h_{0j}, \quad (9.21)$$

$$[P_i^{(a)}, P_j^{(a)}] = i b \epsilon_{ij} \oint d\ln^k h_{0k}. \quad (9.22)$$

Интегрирование в (9.22) идет по контуру на бесконечности и  $n^k$  — единичный вектор нормали к контуру.

Объединяя обе системы, мы имеем полный оператор импульса  $P_i = P_i^{(\chi)} + P_i^{(a)}$  и коммутатор

$$[P_i, P_j] = i b \epsilon_{ij} (Q - \oint d\ln^k h_{0k}). \quad (9.23)$$

Таким образом, ограничивая пространство состояний условием

$$Q = \oint d\ln^k h_{0k}, \quad (9.24)$$

мы получаем  $[P_i, P_j] = 0$ . Другими словами, операторы трансляций будут коммутировать только в том случае, когда приняты во внимание поверхностные члены.

Без добавок в (9.14) и (9.21) прийти к (9.23) невозможно. Поэтому для получения (9.23) нужно изменить исходные лагранжианы, сделав калибровочное поле  $a_\mu$  динамическим. Требуемый лагранжиан имеет вид

$$L = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (h_{0i}^2 - v^2 h_{12}^2) + i \chi^* D_0 \chi - \frac{1}{2m} |D_k \chi|^2 \right], \quad (9.25)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + i a_\mu$ . Роль поля  $a_\mu$  (или  $\phi$ ) состоит в восстановлении коммутативности операторов трансляции. Равенство нулю правой части коммутатора (9.23) нашло свое выражение в том, что слагаемое Черна—Саймонса в (9.25) отсутствует. В терминах поля  $\phi$  выражение (9.21) эквивалентно

$$T_{0i} = -\partial_0 \phi \partial_i \phi + b \partial_i \phi, \quad (9.26)$$

а поверхностный член

$$\oint d\ln^k h_{0k} = v^2 \oint d\ell^i \partial_i \phi \quad (9.27)$$

равен числу вихрей  $\Phi$ . Поэтому условие сокращения

$$Q = \Phi \quad (9.28)$$

означает, что вихревые возбуждения несут заряд. Другими словами, завихренность и заряд не разъединены между различными частицами, а являются характеристиками одних и тех же частиц.

Сделаем в заключение этого раздела несколько замечаний. Из (9.27) следует, что в любом состоянии с  $\Phi \neq 0$  скалярное поле должно быть на больших расстояниях сингулярно. Это может быть в случае, если  $\phi$  есть аргумент комплексного скалярного поля, которое имеет нули. Например, на границе однородности распределения квантовых чисел. Проще говоря, для нас существенны краевые состояния и нетривиальные граничные условия.

Так как в двумерном пространстве число вихрей сохраняется, то вследствие (9.28) сохраняется в сверхтекучем состоянии и электрический заряд. Таким образом, локального параметра порядка обычного типа (такого, например, как в 3D-БКШ-сверхпроводниках, где закон сохранения заряда спонтанно нарушен) в нашем случае не существует.

### 10. Классификация фазовых состояний

Используя параметр порядка, можно провести классификацию возможных фазовых состояний системы с развитыми квантовыми флуктуациями. Поэтому более широкий и содержательный выбор его по сравнению с (9.8), который отражал бы происходящие в системе изменения, крайне важен. Некоторую помощь в решении этой задачи мы получаем от сравнения с похожей ситуацией в дробном квантовом эффекте Холла [171, 172]. Эта аналогия позволила для состояния, описываемого волновой функцией (7.9) с  $\vartheta = \pi/k$ , установить [137, 173, 174], что  $k$ -частичная матрица плотности убывает с расстоянием  $|\xi - \eta|$  степенным образом:

$$\rho(\{\xi_k\}, \{\eta_k\}) \sim |\eta - \xi|^{-k/2}. \quad (10.1)$$

Близкие предложения в нелокальном параметре порядка в анионных системах и вывод о степенном падении корреляционных функций содержатся также в работе [32].

Квазидальний порядок (10.1) свойствен конформным  $(1 + 1D)$ -теориям, и мы в дальнейшем обсудим возможность формулировки теории с топологическим  $(2 + 1D)$ -действием Черна—Саймонса как  $(1 + 1D)$ -конформной теории. Сейчас же обратим внимание, что наши проблемы фактически совпадают (за исключением, может быть, размерности) с проблемами сильной связи в квантовой хромодинамике. В самом деле, в отсутствие допинга мы имеем дело с  $SU(2)$ -симметричной калибровочной теорией на решетке. Допинг понижает локальную симметрию до  $U(1)$ . Физические наблюдаемые в калибровочной теории — калибровочно-инвариантные величины. Таковыми являются петлевой оператор Вильсона и оператор беспорядка т'Хофта [175], средние значения которых можно использовать в качестве характеристик различных фазовых состояний. Разумеется, в теории всегда присутствует и калибровочно-инвариантный фермионный пропагатор

$$G(x, x') = \langle c^+(x') \exp(i \int_x^{x'} a \, dl) c(x) \rangle. \quad (10.2)$$

Рассмотрим среднее значение петлевого оператора Вильсона для статистического векторного потенциала, упорядоченного вдоль замкнутого контура  $C$ :

$$\langle W(C) \rangle = \langle \text{tr} P \exp(i \oint_C a \, dl) \rangle. \quad (10.3)$$

Среднее значение в (10.3) понимается в смысле фейнмановского интегрирования, след  $\text{tr}$  учитывает случай группы  $SU(2)$ , Существенно также  $P$ -упорядочение вдоль контура  $C$ , так как компонента  $a_2$  канонически сопряжена с  $a_1$  (см. (8.9)).

Если контур в (10.3) пространственноподобен, то среднее Вильсона для произвольной замкнутой петли на квадратной решетке описывает вследствие

связи (8.4) флуктуации чисел анионов внутри контура  $C$ :

$$\langle W(C) \rangle = \left\langle \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{\sigma} j_0 d^2 x \right) \right\rangle = \left\langle \exp \left( \frac{2\pi i n}{k} N_a(\sigma) \right) \right\rangle. \quad (10.4)$$

Обратим внимание на то, что (10.4) измеряет число зацеплений (обмотки) вихря вокруг контура  $C$  [77, 176]. В случае времениподобной петли  $C$  так же, как и в КХД, среднее (10.3) определяет величину энергии, необходимую для добавления частицы в одной точке и удаления в другой.

Оператор беспорядка  $V(C)$  [76, 175] может быть определен следующим его действием на вектор состояния  $|a_{\mu}\rangle$  системы

$$V(C)|a_{\mu}\rangle = |a_{\mu}^{g(C)}\rangle. \quad (10.5)$$

Оператор беспорядка переводит  $|a_{\mu}\rangle$  в состояние, определенное по отношению к калибровочно-преобразованному полю

$$a_{\mu}^{g(C)} = g^{-1} a_{\mu} g + i g^{-1} \partial_{\mu} g \quad (10.6)$$

с сингулярным элементом на кривой  $C$ , который состоит в том, что другая петля  $C'$  обвита вокруг  $C$   $n$  раз. Если  $C'$  параметризована переменной  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то  $g^{(C)}(\varphi = 2\pi) = g^{(C)}(\varphi = 0) \exp(2\pi i n / N)$ , где  $N$  — ранг группы [175, 176]. Оператор беспорядка может быть определен с помощью коммутационных соотношений

$$W(C)V(C') = V(C')W(C) \exp(2\pi i n / N), \quad (10.7)$$

где кривая  $C'$  обвита  $n$  раз вокруг  $C$  и

$$[W(C), W(C')] = 0, \quad [V(C), V(C')] = 0. \quad (10.8)$$

На основе (10.7) в работах [175 — 177] показано, что система с сильными калибровочными флуктуациями может находиться только в одном из следующих состояний:

1. Фаза Хиггса, характеризующаяся следующим поведением средних:

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &\sim \exp(-\alpha L(C)), \\ \langle V(C) \rangle &\sim \exp(-\gamma S(C)), \end{aligned} \quad (10.9)$$

где  $L(C)$  и  $S(C)$  — соответственно периметр и площадь, ограниченная кривой  $C$ .

2. Фаза конфайнмента характеризуется средними

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &\sim \exp(-\alpha S(C)), \\ \langle V(C) \rangle &\sim \exp(-\gamma L(C)). \end{aligned} \quad (10.10)$$

3. Частично фаза Хиггса и все еще конфайнмент означает, что

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &\sim \exp(-\alpha S(C)), \\ \langle V(C) \rangle &\sim \exp(-\gamma S(C)). \end{aligned} \quad (10.11)$$

4. Состояние безмассовых частиц,

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &\sim \exp(-\alpha L(C)), \\ \langle V(C) \rangle &\sim \exp(-\gamma L(C)) \end{aligned} \quad (10.12)$$

противоречит (10.7) и может рассматриваться как пограничное между (10.9) и (10.10).

Фаза конфайнмента существует, например, в системе со случайным гауссовым распределением потоков калибровочного поля [178]

$$P(\phi) = (\pi cS)^{-1/2} \exp(-\phi^2/cS) \quad (10.13)$$

со средним  $\langle \phi \rangle = 0$  и дисперсией

$$\langle \phi^2 \rangle_S = \sum_i \langle \phi^2 \rangle_{S_i} = cS, \quad (10.14)$$

которая пропорциональна общей площади  $S$ . В этом случае

$$\langle W \rangle = \int d\phi e^{i\phi} P(\phi) \sim e^{-\alpha S}, \quad (10.15)$$

т.е. система находится в фазе конфайнмента (10.10). Посмотрим, что происходит в распределении дуальных степеней свободы при изменении константы связи и переходе от конфайнмента (10.10) к фазе Хиггса (10.9).

## 11. Иерархия фазовых переходов

Состав квантовых чисел анионов и особенности распределения их в плоскостях значительно ограничивают нас в выборе решеточной модели для описания фазовых свойств системы с развитыми квантовыми флуктуациями. В частности, требование калибровочной инвариантности приводит к необходимости рассматривать калибровочно-инвариантные петлевые переменные Вильсона (2.12), (10.3) и корреляционные функции этих полей. Модель (8.55) — (8.57), не считая отсутствия источников спин-волновых возбуждений и неполного учета симметрии, не может нас полностью устроить еще и по той причине, что она перегружена несущественной для области низких энергий нелинейной функцией  $\cos(\Delta_i \phi_{r,j} - a_{r,j})$ . Важное для квантования заряда <sup>(26\*)</sup> свойство компактности, которое отражает эта функция, можно выразить в более простой форме периодически продолженной квадратичной функции тех же переменных. При переходе к периодически продолженной гауссовой модели мы рассмотрим более широкую, чем в (8.55) — (8.57), симметрию и в полной мере учтем топологические ограничения. Кроме удобства, гауссова модель соответствует стандартному желанию сформулировать теорию сильно взаимодействующих частиц в терминах невзаимодействующих элементарных возбуждений, вобравших в себя информацию о максимально возможном числе каналов изменения квантовых чисел.

Перед описанием модели сделаем еще одно замечание относительно размерной редукции. В реальной размерности пространства-времени  $3 + 1$  основным низкоэнергетическим слагаемым в действии калибровочной теории является плотность топологического заряда  $f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma}$ ,  $(2 + 1)$ -мерное граничное значение которого дает действие Черна—Саймонса, а проекция на 2D-пространство плоскости, ортогональное осям  $z$  и  $t$ , образует соответствующую 2D-плотность топологического заряда. (Более подробное обсуждение см. в следующем разделе.)

Будем рассматривать топологию четырехмногообразия как  $T^2 \times S^1 \times S^1$ , где  $T^2$  — компактифицированная в тор или, при наличии дефектов, в риманово



пространство рода  $g$  с большим числом **ручек**<sup>(27\*)</sup> двумерная плоскость, а  $S^1$  и  $S_1$  — соответственно  $z$ - и  $t$ -циклические направления, от которых нам понадобятся расположенные вблизи перпендикулярных срезов однородные **малые куски**  $R_{1,2}$ . Подобно отображению на плоскость топологического заряда аналогичное проецирование на 2D-пространство можно осуществить и для кинетического слагаемого в действии. После проекции, как естественный результат, модель будет описывать динамику следов на двумерной решетке, на которой зацепления "винтовых" мировых линий квазичастиц проявятся в виде фрустрированных звеньев. Поскольку периодичность по оси  $z$  аналогична матцубаровскому циклу, то зацепление мировых линий квазичастиц можно рассматривать и как пространственное зацепление вихрей вдоль направления  $z$ , если перемещаться от одной плоскости к другой<sup>(28\*)</sup> (см., например, [179, 180]).

Перейдем к обсуждению модели. Рассмотрим совокупность квазичастиц-петель, покрывающих основную решетку, и будем считать, что система находится в жидкой фазе. Это означает, что подобно дробному квантовому эффекту Холла вклад контура с  $N_1$  частицами в вакуумную амплитуду перехода имеет вид  $\exp(iN_1 S)$  с  $\text{Im } S$  порядка единицы [181]. Здесь учтен также вклад пересекающихся контуров, которые перенормируют мнимую часть действия. Соприкосновение контуров по звеньям, проходимым в противоположных направлениях, ведет в пространстве контуров к фрустрациям. Для учета вклада в действительную часть действия за счет когерентного кругового обмена [181] рассмотрим симметрию фазовых переменных в выражениях (2.15) или (8.55). До сих пор это были параметры группы  $U(1)$  локальных преобразований. Однако наибольший интерес представляет глобальная симметрия переменных, которая отражает топологию нетривиальных граничных условий. Из разных соображений — из конструкции, включающей в рассмотрение вложенные друг в друга контуры [182], из рассмотрения калибровочной-инвариантности на торе и представлений группы  $\text{Kos}$  [183] и из условия, что теория определена на решетке [169] или ассоциаций, связанных с коммутационными соотношениями (6.31), следует существование скрытой топологической симметрии  $Z_N$ <sup>(29\*)</sup>. Фазы в этой группе  $\{\exp(2\pi i \varphi / N)\}$  дискретно распределены по единичному кругу:  $\varphi = 0, 1, \dots, N-1$ . Мы не будем пока фиксировать значение параметра  $N$ , оставив его свободным.

К этому моменту читатель уже подготовлен, чтобы мотивированно принять каждое слагаемое в статистической сумме

$$Z = \text{Tr} \exp \left[ -\frac{1}{2g^2} \sum_{\mu,a} (\Delta_\mu \varphi_a - 2\pi s_{\mu a})^2 + iN \sum_a n_a \varphi_a + \right. \\ \left. + \frac{iN\vartheta}{32\pi^2} \sum \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{ab} (\Delta_\mu \varphi_a - 2\pi s_{\mu a})(\Delta_\nu \varphi_b - 2\pi s_{\nu b}) \right] \quad (11.1)$$

$Z_N$ -модели с  $\vartheta$ -членом, изученной в работах [185, 186]. Все же поясним структуру выражения (11.1) еще раз. Первое слагаемое есть периодически продолженный кинетический член, второе содержит источник  $n_a$  полей  $\varphi_a$ , **третье** представляет собой решеточную аппроксимацию плотности топологического заряда. Дискретные поля  $\varphi_a(x_1, x_2) = 0, 1, \dots, N-1$ , которые параметризуют фазу вильсоновских переменных, имеют смысл потоков статистического маг-

нитного поля, измеренных в единицах кванта потока. Переменные  $n_a(x_1, x_2)$  и  $s_{\mu a}$  — "живущие" соответственно в узлах и на ребрах решетки целые числа, индексы на решетке  $\mu, \nu = 1, 2$ . Индексы  $a, b = 3, 4$  — наследие от среза  $z = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  в  $(3 + 1)\text{D}$ -теории — стали внутренними индексами  $(2 + 0)\text{D}$ -модели. В (11.1) константа связи  $g^{-2} = J/T$ , а вакуумный угол  $\vartheta$  в непрерывном пределе выступает как множитель при топологическом слагаемом

$$\frac{\vartheta}{16\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma} \quad (11.2)$$

в действии  $(3 + 1)\text{D}$ -теории до операции проецирования.

В выражении (11.1) переменные  $n_a$  представляют собой электрические заряды, выступающие здесь как источники спин-волновых движений поля  $\varphi$ . Подробное обсуждение корректного определения электрического заряда и сильно скоррелированных системах содержится в работе [187]. Представляющие эффект Березинского монополярные заряды  $m_\mu = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\Delta_\nu s_{\lambda\sigma}$  имеют ненулевые компоненты

$$-m_3 = \Delta_1 s_{24} - \Delta_2 s_{14}, \quad (11.3)$$

$$m_4 = \Delta_1 s_{23} + \Delta_2 s_{13}$$

и представляют соответственно вихри поля  $\varphi_4$  и  $\varphi_3$ . Переменные  $\varphi_4$  и  $m_4$  определены в узлах дуальной решетки. Поэтому последнее слагаемое в (11.1) описывает локальное взаимодействие

$$\frac{iN\vartheta}{2\pi} \left( \sum_{\mathbf{r}} m_3 \varphi_3 + \sum_{\mathbf{x}} m_4 \varphi_4 \right) \quad (11.4)$$

вихря поля  $\varphi_3$  с полем  $\varphi_4$  и наоборот. Это взаимодействие совершенно аналогично связи электрических зарядов  $n_a$  с полями  $\varphi_a$  в (11.1).

Действие в (11.1) квадратично по  $\varphi$ . Поэтому пекле интегрирования по ним можно переписать (11.1) в представлении кулоновского газа взаимодействующих электрических и магнитных зарядов [185, 186]:

$$\begin{aligned} Z = \text{Tr} \exp & \left[ -\frac{2\pi^2}{g^2} \sum_{\left\{ \substack{r, r', \mu=3, \\ r \rightarrow x, r' \rightarrow x', \mu=4} \right\}} m_\mu(r) G(r - r') m_\mu(r') - \right. \\ & - \frac{1}{2} N^2 g^2 \sum_{\left\{ \substack{r, r', \mu=3, \\ r \rightarrow x, r' \rightarrow x', \mu=4} \right\}} \tilde{n}_\mu(r) G(r - r') \tilde{n}_\mu(r') + \\ & + iN \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{x}} (m_3(r) n_4(x) - m_4(x) n_3(r)) \theta(r - x) - \\ & \left. - \frac{N^2 g^2}{8} \left( \sum_{\mathbf{r}} n_3^2(r) - \sum_{\mathbf{x}} n_4^2(x) \right) - \frac{\pi^2}{2g^2} \left( \sum_{\mathbf{r}} m_3^2(r) + \sum_{\mathbf{x}} m_4^2(x) \right) \right]; \quad (11.5) \end{aligned}$$

здесь  $G = -(1/2) \ln r$  — кулоновская функция Грина,  $\theta(r - x) =$

$= -\arctg[(y - x_2)/(x - x_1)]$ . — ее дуальный партнер,

$$\tilde{n}_\mu = n_\mu + (\vartheta/2\pi)m_\mu \quad (11.6)$$

учитывает, что электрический заряд содержит пропорциональный вакуумному углу монопольный вклад [188].

Преимущество представления модели (11.1) в виде (11.5) в том, что оно выражает динамику непосредственно в терминах квантовых чисел ее элементарных топологических возбуждений. Первые два члена описывают кулоновское взаимодействие газа магнитных и электрических зарядов, а третье представляет эффект Бома—Ааронова, т.е. зацепление электрического тока  $Ngn_a$  за струну Дирака, переносящую ток  $2\pi m_a/g$  магнитного заряда. Подчеркнем еще раз, что необходимость в магнитном заряде возникает из рассмотрения поля  $\varphi_a$  в (11.1) как угловой переменной. В результате для учета многозначности калибровочных конфигураций мы должны просуммировать по всем числам  $s_{\mu a}$ , т.е. по всем топологически нетривиальным конфигурациям с магнитными монополями (ср. с [189], где показано, как член Черна—Саймонса, противодействуя монополии и конфайнменту, "освобождает" электрические заряды).

Опишем фазовую диаграмму модели (11.1), следуя аргументам Костерлица и Таулесса [190]<sup>63\*</sup>. В системе (11.5) с характерным размером  $L$  и, следовательно, энтропией  $\ln L^2$  энергия возбуждений с квантовыми числами<sup>(31\*)</sup>  $n_4 = m_4 = 0$ , а  $n_3 \equiv n$  и  $m_3 \equiv m$ , имеет вид

$$\varepsilon_{n,m}(g, \vartheta) = \left[ \frac{\pi^2}{2g^2} + \frac{N^2 g^2}{8} \left( n + \frac{\vartheta}{2\pi} m \right)^2 \right] \ln L. \quad (11.7)$$

Из сравнения (11.7) с энтропией мы видим, что в основном состоянии находятся такие квазичастицы, квантовые числа которых удовлетворяют условию

$$\min_{\{n,m\}} \left[ \frac{m^2}{T_N} + T_N \left( n + \frac{\vartheta}{2\pi} m \right)^2 \right] < \frac{4}{N}. \quad (11.8)$$

Эллипс в (11.8) имеет отношение осей  $T_N = NT/2\pi J$ , наклон с  $\tg \alpha = \vartheta/2\pi$ , дающий наклон решетки зарядов на рис. 12, и площадь  $4\pi/N$ . Это значит, что при различных температурах  $T$  и вакуумных углах  $\vartheta$ , а также при разных значениях  $N$  возможны разные фазы.

Для данного  $\vartheta \neq 0$  при малых константах связи  $g^2 = T/J$  всегда существует низкотемпературная фаза с зарядами  $(n, m) = (1, 0)$ , удовлетворяющими условию (11.8) (обычная фаза Хиггса). За ней следует кулоновская фаза, особенность которой состоит в том, что эллипс (11.8) не охватывает ни одного узла на решетке зарядов. С увеличением  $N$ , т.е. с переходом к состоянию большей изотропизации, например, из-за приложенного внешнего магнитного поля [193], область существования тираничной кулоновской фазы с далекодействующими корреляциями увеличивается. При больших значениях  $g^2$  существует обычная фаза конфайнмента с конденсацией монополей, отделенная кулоновской фазой от состояния наклонного конфайнмента, когда в основном состоянии сконденсированы токовые петли, несущие электрический и магнитный заряды. Последовательность фаз показана на рис. 13, а на рис. 14 приведена фазовая диаграмма для случаев  $N < 4$  и  $N = 4$  [185, 186].

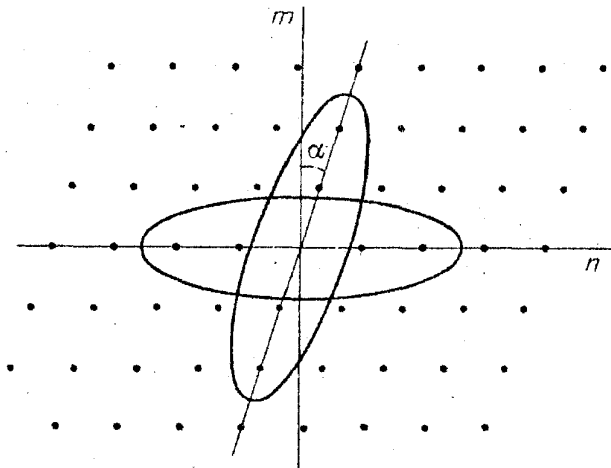


Рис. 12. Решетка зарядов с наклоном  $\alpha = \arctg(\vartheta/2\pi)$  [185]. Показаны эллипсы для различных значений константы связи и те заряды внутри эллипсов, которые могут уходить в конденсат

Число фаз наклонного конфайнмента очень критично по отношению к значению вакуумного угла  $\vartheta$ . Если  $\vartheta/2\pi = 1/q$  с целым  $q$ , то существует только одна такая фаза. В случае  $\vartheta/2\pi = p/q$  с нечетным  $q$  число фаз наклонного конфайнмента равно  $p$ . При иррациональном  $\vartheta/2\pi$  число фазовых состояний бесконечно.

В любой фазе возбуждения с электрическим и магнитным зарядами, кратными зарядам частиц в конденсате, ведут себя как физические частицы. Все другие частицы удерживаются потенциалом конфайнмента. Например, в состоянии наклон-

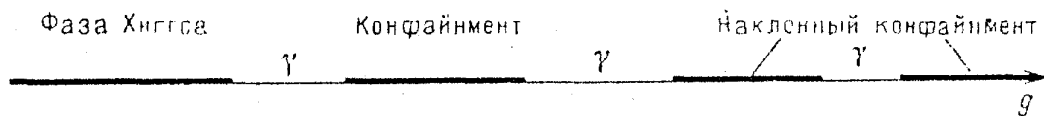


Рис. 13. Типичная фазовая диаграмма. Кулоновские фазы с безмассовыми калибровочными бозонами обозначены как  $\gamma$

ного конфайнмента электрический заряд и магнитный монополь заперты линейным потенциалом, но связанные состояния этих зарядов могут быть состояниями свободных квазичастиц. Вычисления [185] параметра порядка Вильсона (10.3) показывают, что в фазе с сконденсированными зарядами  $(n, m)$  для частиц с квантовыми числами  $(n', m')$  вне конденсата коррелятор Вильсона удовлетворяет закону площадей с натяжением струны, пропорциональным  $(mn' - m'n)^2$ . Это есть "расстояние" на решетке зарядов от квантовых чисел тех частиц, которые находятся в конденсате. Частицы в конденсате характеризуются законом периметра у петлевых корреляционных функций и поэтому, не будучи удерживаемы запирающим потенциалом, имеют короткодействующее взаимодействие с масштабом, обратно пропорциональным цели в спектре:  $M \sim [(2\pi^2/g^2)\cos^2\alpha + (N^2g^2/2)\sin^2\alpha]^{1/2} \text{ с } \text{tg } \alpha = \tilde{n}/m$  для зарядов  $(n + (\vartheta/2\pi)m, m)$  из конденсата.

Из этого и предыдущего раздела следует, что в теории присутствует богатая и очень красивая картина дуальной смены явлений конфайнмента и фазы Хиггса в двух ортогональных каналах изменения квантовых чисел "электрически" и "магнитно" заряженных частиц. Самодуальность с  $(2+1\text{D})$ -точки зрения рассматривалась в [191].

Соотношения дуальности [192] представляют собой соотношения эквивалентности статистических моделей при высоких и низких температурах. В нашем случае при  $\vartheta = 0$  [193] модель (11.5) самодуальна [194 — 196], если

$$g \rightarrow 2\pi/Ng. \quad (11.9)$$

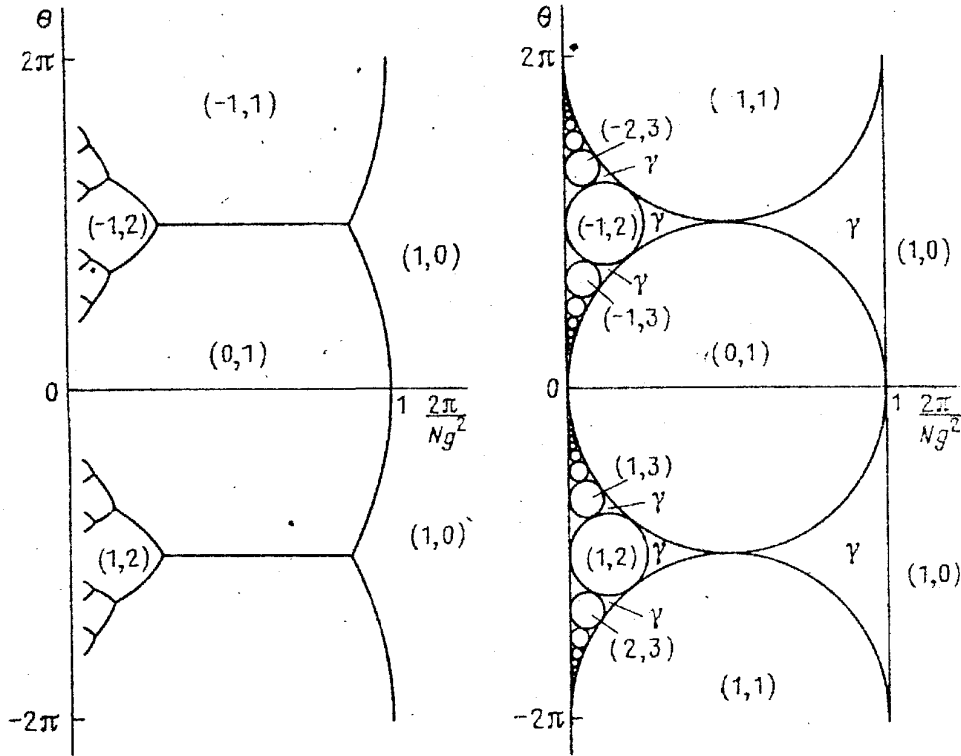


Рис. 14. Фазовая диаграмма при  $N < 4$  (а) и при  $N = 4$  (б) [185, 186]. В скобках  $(n, m)$  указаны электрический и магнитный заряды частиц, находящихся в конденсате

Эта замена переставляет местами электрический и магнитный заряд. При  $\vartheta/2\pi = 1/q$  фазовая диаграмма на рис. 14 инверсионно-симметрична относительно самодуального значения  $g^2 = 2\pi q/N$  [185].

Обобщение этих симметрии параметрического пространства констант связи выглядит следующим образом [185]. Введем комплексный параметр

$$\zeta = \frac{\vartheta}{2\pi} + i \frac{2\pi}{Ng^2}. \quad (11.10)$$

Тогда скрытая в теории дуальная симметрия, оставляющая гамильтониан  $H(\{m\}, \{n\}, g, \vartheta) = H(\{n\}, -\{m\}, g', \vartheta')$  ( $Z = \text{Tr} \exp(-H)$ ) неизменным, соответствует инверсии

$$\zeta \rightarrow \zeta' = -\zeta^{-1}. \quad (11.11)$$

Некоммутирующие между собой операции дуальности  $S$  (11.11) и трансляции  $T$  по вакуумному углу  $\vartheta(\zeta \rightarrow \zeta + 1, m \rightarrow m, n \rightarrow n - m)$  генерируют бесконечную дискретную группу симметрии с групповым элементом

$$T^{a_n} S T^{a_n - 1} S \dots S T^{a_1}. \quad (11.12)$$

Целые числа  $a_i$  в (11.12) задают "слово"  $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1\}$ , определяющее преобразование  $\zeta$  в виде цепной дроби

$$\zeta \rightarrow a_n - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_1 - \zeta}}}. \quad (11.13)$$

Из этого выражения видно, что группа всех таких преобразований изоморфна группе  $SL(2, Z)$  матриц  $2 \times 2$  с единичным детерминантом и элементами, являющимися целыми числами:

$$\xi \rightarrow \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad ad - bc = 1, \quad \{a, b, c, d\} \in Z. \quad (11.14)$$

Существование этой большой группы симметрии соединяет иерархические последовательности (8.62) основных состояний и фазовую диаграмму модели. В пределе  $g \rightarrow \infty$  фазовая диаграмма бесконечно усложняется, так как всегда существует фаза сконденсировавшегося электрического  $n$  и магнитного заряда  $m$  с отношением

$$\frac{n}{m} = a_n - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{\dots - 1/a_1}}, \quad (11.15)$$

соответствующим  $\vartheta/2\pi = n/m$  [186]. Если же зафиксировать  $\vartheta$  и менять  $g$ , то, как следует из рис. 14, мы имеем конечное число фазовых переходов. Критическая температура и критические индексы корреляционных функций [191] кулоновского газа будут зависеть от значений вакуумного угла  $\vartheta$  и параметра  $N$  центра группы, т.е. будут определяться статистикой возбуждений.

Источник рассматриваемой иерархичности состояний в сильно коррелированных системах универсален. Он заключен в операциях адиабатической локализации данного покрытия (распределения потоков статистического магнитного поля по решетке), а также сопряжения частица—дырка, которые можно записать [184, 197] в виде элементов конгруэнц-подгрупп группы  $SL(2, Z)$ :

$$\alpha \rightarrow \pm \alpha + 2 \quad (\nu^{-1} \rightarrow \pm \nu^{-1} + 2), \quad (11.16)$$

$$\alpha \rightarrow 1/\alpha \quad (\nu \rightarrow 1 - \nu);$$

здесь  $\alpha = \nu^{-1} - 1 = (\vartheta/2\pi)^{-1}$  [184, 191] и  $\nu$  — фактор заполнения. В дробном квантовом эффекте Холла  $SL(2, Z)$ -операции (11.16) [89, 198] над торами дают иерархические последовательности состояний с фактором заполнения  $\nu = r/(2r \pm 1)$  [198].

## 12. Анионы с $(3 + 1)D$ - и $(1 + 1)D$ -точек зрения

Что нового вносит в анионную картину рассмотрение ее с пространственно-трехмерной точки зрения? Сравнение значений полей в соседних точках в кинетической части действия во всех размерностях по форме одинаково и трудностей не создает. Однако при  $g^2 \gg 1$  основной вклад в действие дает не кинетическое, а топологическое слагаемое Черна—Саймонса. Первоначально введенный [56 — 59] как добавка к стандартному выражению для действия член Черна—Саймонса при больших константах связи становится главным. В этом пределе возбуждения, имеющие энергию порядка массы  $m = g^2 k^2 / 4\pi^2$ , отщепляются от вакуумного сектора теории; здесь  $g$  — константа связи в обычном слагаемом в лагранжиане —  $(1/4g^2)F_{\mu\nu}^2$  и  $m$  — коэффициент в уравнении движения  $(\square + m) *F_\alpha = 0$ , где  $*F_\alpha = (1/2)\epsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma}$  [62]. С черн-саймонсовским слагаемым связаны также изменения в структуре фазового пространства [89, 94] и, как мы уже знаем, многосвязность  $(2 + 1)$ -мерных систем.

Слагаемое Черна—Саймонса само по себе можно рассматривать как вклад от границы  $M_3$  объемлющего  $(3+1)$ -мерного пространства  $M_4$ . Действительно, для вклада

$$S_{(4)} = \int_{M_4} d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma} = \int_{M_4} d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_{M_3} d\Omega_\mu j^\mu \quad (12.1)$$

в действие четырехмерной теории, где

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\nu \partial_\lambda a_\sigma, \quad (12.2)$$

после интегрирования по гиперповерхности, перпендикулярной оси  $z$ , получаем

$$S_{(4)} = S_{(3)} \Big|_{z=L_z} - S_{(3)} \Big|_{z=0}. \quad (12.3)$$

Топологический заряд  $S_{(4)}$  в случае  $U(1)$ -симметрии непрерывным калибровочным преобразованием можно обратить в **нуль**<sup>(32\*)</sup>. Отсюда следует, что нарушение двумерной четности и симметрии относительно обращения времени может маскироваться в объеме "антиферромагнитным" упорядочением знака множителя  $k$  в слагаемом Черна—Саймонса  $S_{(3)}$  от слоя к слою вдоль оси  $z$ . (См. также примечание<sup>(28\*)</sup> и предположения о "ферромагнитном" упорядочении знака  $k$  в работе [321].) Чередование знака  $k$  можно воспринимать как существование ориентированных вихревых нитей с находящимися на их концах зарядами. Переплетение вихревых линий — кос вдоль оси  $z$  в этом случае имеет наглядный пространственный образ. Распределение магнитных зарядов по решеточным узлам, расположенным между базисными плоскостями, рассматривается в работах [140, 200].

Из выражения (12.1) видно, что дополнительно к обычному слагаемому Черна—Саймонса  $S_{xy+\tau}$  существуют также вклады [201]  $S_{xy+z}$ ,  $S_{xz+\tau}$  от других срезов четырехмерного многообразия. Выбор между  $S_{xy+z}$  и  $S_{xy+\tau}$ , где  $\tau$  — переменная Матцубары, или совместное использование зависит от архитектуры решетки<sup>(33\*)</sup> и температуры. При переходе к изотропному случаю (к кубической решетке, например) роль топологических слагаемых понижается из-за взаимных сокращений на различных срезах пространства  $M_4$ .

Рассмотрим отображение  $(2+1)D$ -теории Черна—Саймонса в модели, определенной в пространстве меньшей размерности. Сейчас, в отличие от раздела 11, нас будет интересовать вакуумный сектор теории. Как показано в работе [89], калибровочная теория Черна—Саймонса в трехмерном пространстве непосредственно связана с рациональной конформной теорией в двух измерениях [203]. Будем рассматривать трехмерное многообразие с топологией  $\Sigma \times R$ , где  $R$  — однородная малая часть оси  $z$  или  $\tau$  вблизи перпендикулярного по отношению к этим направлениям среза  $\Sigma$ . Если многообразие  $\Sigma$  компактно, размерность гильбертова пространства состояний теории Черна—Саймонса совпадает с размерностью векторного пространства конформных блоков конформной теории поля на  $\Sigma$ . **Если же  $\Sigma$  имеет границу**, то гильбертово пространство реализуется как бесконечномерное пространство представлений киральной алгебры конформной теории поля.

Работа Виттена [89] стимулировала появление большого числа публикаций, где были установлены новые соотношения между различными, казалось

бы, не связанными областями. В частности, был приведен в порядок конформный зоопарк [204], найдена связь с теорией узлов и зацеплений [205], открыты новые соотношения между квантовыми группами, группой кос и точными решениями в конформной теории [206 — 208]. Все это в целом позволило обнаружить глубокие свойства топологической теории Черна—Саймонса [83, 105, 209 — 215]. К сожалению, в рамках настоящего обзора отсутствует возможность дать сколь-нибудь беглое изложение результатов этих и близких по тематике работ [216 — 218], имеющих отношение к рассматриваемой проблеме. Поэтому, чтобы привлечь внимание читателя на новые возможности, обратимся к анализу, выполненному в некоторых из этих работ [105, 213 — 215]. Он дает полезную информацию о структуре вакуумного сектора теории.

Рассмотрим предел  $g^2 \rightarrow \infty$ , который в полном лагранжиане оставляет член Черна—Саймонса. Лагранжиан для группы  $U(1)$  в калибровке  $A_0 = 0$  в этом пределе имеет вид

$$L = \frac{k}{4\pi}(A_1\dot{A}_2 - A_2\dot{A}_1) \quad (12.4)$$

с уравнением движения

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0, \quad (12.5)$$

которое играет роль уравнения связи на вектора состояния  $|\rangle$  в квантовой теории (закон Гаусса):  $F_{12}|\rangle = 0$ . Напомним, что канонически сопряженные переменные  $A_1$  и  $A_2$  фазового пространства системы удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{y})] = i(2\pi/k)\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (12.6)$$

В соответствии с тем, что гамильтониан, как легко видеть из (12.4), равен нулю, нас будут интересовать свойства вакуумного сектора теории, в частности, его размерность<sup>(34\*)</sup>. Пусть пространство с выбором подходящих граничных условий компактифицировано в произвольное многообразие  $\Sigma$ . Физическими наблюдаемыми в топологической теории являются калибровочно-инвариантные переменные Вильсона, которые определены на  $\Sigma$  и характеризуются контуром  $C$ , зарядом  $n$  и представлением  $R_k$ :

$$W_{R_k}(C, n) = \text{Tr}_{R_k} P \exp(in \oint_C A \, dl). \quad (12.7)$$

В абелевом случае  $U(1)$  можно работать непосредственно с показателем экспоненты петли Вильсона  $i n \oint(C)$ , положив  $n = 1$ . Для каждого момента времени (или на каждом срезе  $z = \text{const}$ ), совокупность всех "петель"  $\{\phi(C)\}$  на  $\Sigma$  образует полный набор переменных. Под этим имеется в виду следующее.

Из ограничения (12.5) следует, что на срезе  $t = \text{const}$  потенциал является чисто калибровочным. Для таких потенциалов переменные Вильсона могут быть за счет непрерывной деформации превращены друг в друга. Поэтому имеют значения лишь гомотопические классы недеформируемых друг в друга петель и важно лишь, как много независимых нетривиальных петель существует на  $\Sigma$ . В случае римановой поверхности рода  $g$  (с  $g$  ручками) существует  $2g$  таких петель. Они составляют полный набор переменных фазового пространства теории Черна—Саймонса.

Коммутационные соотношения (12.6) можно переписать в терминах пе-



ременных  $\phi(C)$  следующим образом [214]:

$$[\phi(C_i), \phi(C_j)] = i \frac{2\pi}{k} \int \int_{C_i C_j} d^2x \delta^{(2)}(x_i - x_j) = i \frac{2\pi}{k} \sum_{P_{ij}} (-1)^{P_{ij}}, \quad (12.8)$$

здесь  $P_{ij}$  — точки пересечения кривых  $C_i$  и  $C_j$  и  $P_{ij}$  — четность этих пересечений. В некотором подходящем базисе петель  $\phi(C_1), \phi(C_2)$  на поверхности рода  $g$ , когда они соответствуют двум нетривиальным циклам  $a_i$  и  $b_i$  для каждой ручки с  $i = 1, \dots, g$  и числам обмотки  $m_{a,b}^i, n_{a,b}^i$  вокруг циклов  $a$  и  $b$   $i$ -й ручки, коммутатор (12.8) равен

$$[\phi(C_1), \phi(C_2)] = i \frac{2\pi}{k} \sum_i (m_a^i n_b^i - m_b^i n_a^i). \quad (12.9)$$

Поскольку петли из каждой пары  $(a_i, b_i)$  пересекаются нечетное число раз (рис. 15), то

$$[\phi(a_i), \phi(b_j)] = i(2\pi/k) \delta_{ij}, \quad (12.10)$$

а все другие операторы коммутируют.

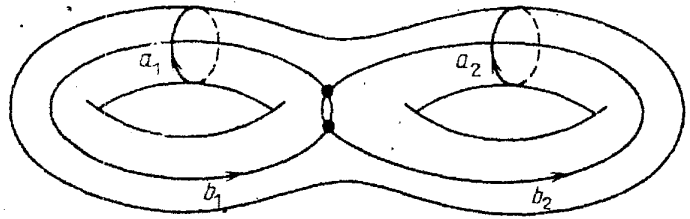


Рис. 15. Нетривиальные циклы на римановой поверхности с двумя ручками

В случае тора, когда  $g=1$ , при выборе поляризации [214] в виде  $\phi_a = Q$ ,  $(k/2\pi)\phi_b = P$  мы имеем стандартное соотношение  $[Q, P] = i$  и можем использовать представление  $P = -i\partial_Q$ . Для компактной группы  $U(1)$  переменные  $\phi$  — чистые фазы. Следовательно, фазовое пространство компактно, а состояния инварианты относительно сдвигов  $Q \rightarrow Q + 2\pi$  и  $P \rightarrow P + k$ . Таким образом, волновая функция удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\psi(Q + 2\pi) = e^{i\beta} \psi(Q). \quad (12.11)$$

То же самое справедливо и для фурье-образа  $\tilde{\psi}$  волновой функции  $\psi(Q)$ :

$$\tilde{\psi}(P + k) = e^{i\alpha} \tilde{\psi}(P); \quad (12.12)$$

здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные произвольные фазы, имеющие смысл вакуумных углов  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ .

Из (12.11) и (12.12) следует, что при целом  $k$  существует  $k$  линейно независимых состояний в гильбертовом пространстве. Для произвольного  $\delta$ -вектора состояния разложение по собственным состояниям имеет вид

$$\psi(\phi_a) = \sum_n A_{i,n} \delta(\phi_a - \frac{\alpha}{k} - \frac{2\pi}{k}n) e^{in\beta/k} \quad (12.13)$$

или

$$\tilde{\psi}(\phi_b) = \sum_n \tilde{A}_{i,n} \delta(\phi_b - \frac{\beta}{k} - \frac{2\pi n}{k}) e^{-in\alpha/k} \quad (12.14)$$

с периодическим условием на коэффициенты

$$A_{i,n+k} = A_{i,n}, \quad \tilde{A}_{i,n+k} = \tilde{A}_{i,n}, \quad (12.15)$$

которые связаны между собой преобразованием Фурье

$$A_{i,n} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(2\pi/k)mn} \tilde{A}_{i,m}. \quad (12.16)$$

Комплексными числами  $\{A_i\}$  исчерпывается  $k$ -мерное гильбертово пространство. Этот вывод, конечно, не изменяется, если использовать переменные Вильсона  $W_{a,b} = \exp(i\phi_{a,b})$ , так как коммутационные соотношения

$$W_a W_b = W_b W_a e^{i(2\pi/k)} \quad (12.17)$$

имеют представления с  $k$  независимыми состояниями. Сравнение с (10.7) позволяет высказать предположение, что  $N = 2k$ . Поэтому  $Z_2$ -теория соответствует системе свободных бозонов, а  $Z_4$ -калибровочная теория описывает полудермионы [218]. Заметим здесь же, что числу  $N$ , определяющему центр  $U(1)^{N-1}$  группы  $SU(N)$ , можно придать смысл числа узлов в элементарной ячейке квадратной решетки, где независимо преобразуются фазовые параметры группы  $U(1) \otimes U(1) \otimes U(1) \otimes U(1)$  или  $U(1) \otimes U(1)$ .

В общем случае поверхности  $\Sigma$  с  $g$  ручками гильбертово пространство параметризовано с помощью  $2g$  вакуумных углов и имеет  $k^g$  линейно независимых состояний. Этот результат справедлив для целых  $k$ , когда волновая функция инвариантна с точностью до фазы относительно глобальных калибровочных преобразований.

Если  $k = 2(k_1/k_2)$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — взаимно простые числа, инвариантность относительно преобразований из группы  $SL(2, Z)$  в пространстве переменных  $\phi_a$  и  $\phi_b$  дает возможность установить [214], что размерность гильбертова пространства равна  $(2k_1 k_2)^g$ . Здесь числа  $k_1$  и  $k_2$  заменяют числа  $q$  и  $p$  предыдущих параграфов. Требование модулярной инвариантности, которое имеет смысл общей ковариантности при параметризации ручек, представляет собой дополнительное условие на  $k$  и значения вакуумных углов.

Вернемся к лагранжиану (12.4) и соотношению между гильбертовым пространством теории Черна—Саймонса и пространством модулей двумерной конформной теории поля. Пусть  $M_3 = D_2 \times R$ , где  $D_2$  — диск, и  $A_i = \partial_i \Phi$ . После подстановки в лагранжиан и переопределения  $\Phi = k^{-1/2} \varphi$  мы получаем действие

$$S = (1/2\pi) \int ds dt \partial_s \varphi \partial_t \varphi \quad (12.18)$$

свободного бозонного поля  $\varphi$  в двумерном плоском пространстве Мииковского. Аргумент  $s$  в (12.18) параметризует границу диска  $D_2$ . Вследствие периодичности поля  $\Phi$  поле  $\varphi$  компактифицировано на круге с квадратом радиуса  $r^2 = k = 2(k_1/k_2)$ . Для всех этих значений гильбертово пространство исходной

теории соответствует пространству конформных блоков конформной теории поля (12.18) с центральным зарядом  $c = 1$ .

В случае  $M_3 = S^2 \times S^1$  ортогональный базис гильбертова пространства состоит из функций [210]

$$\psi_p = \exp(-2k\gamma(U)) \exp[\pi k a (\operatorname{Im} \tau)^{-1} a] \eta^{-1}(\tau)^p \begin{bmatrix} p/2k \\ 0 \end{bmatrix} (2ka | 2k\tau) \quad (12.19)$$

$p \in \mathbb{Z}_{2k}$ ,

совпадающих с характеристиками рациональной конформной теории [83, 209, 219]. С использованием свойств тэта-функции Якоби и функции Дедекинда  $\eta(\tau)$  можно найти [83, 209, 210], что генераторы модулярной группы  $S: a \rightarrow a/\tau, \tau \rightarrow -1/\tau$  и  $T: a \rightarrow a, \tau \rightarrow \tau + 1$  преобразуют (12.19) следующим образом:

$$\psi_p|_S = \frac{1}{(2k)^{1/2}} \sum_{q=0}^{2k-1} \exp\left(-\frac{i\pi pq}{k}\right) \psi_q, \quad (12.20)$$

$$\psi_p|_T = \exp\left[2\pi i \left(\frac{p^2}{4k} - \frac{1}{24}\right)\right] \psi_p. \quad (12.21)$$

Из сравнения (12.21) со стандартным преобразованием  $\psi_p|_T = \exp 2\pi i [h_p - (c/24)] \psi_p$  следуют значения конформной размерности  $h_p = p^2/4k$  и центрального заряда  $c = 1$ . Конформная размерность определяет, как известно [203], показатель в степенном убывании корреляционных функций примарных полей и значение конформного спина, а центральный заряд дает число степеней свободы в элементарной ячейке импульсного пространства [220, 221] и определяет их вклад в теплоемкость.

Обратим внимание также на результат действия [209, 210] оператора Вильсона на состояние (12.19)

$$W(C, n) \psi_p = \psi_{p+n}, \quad (12.22)$$

из которого следует  $Z_n$ -правило слияния Верлинде [222]  $W(n) \times W(q) = W(n+q)$  этих операторов и возможность идентификации с примерными полями конформной теории. Физические состояния (корреляционные функции) удовлетворяют [223] уравнению Книжника—Замолотчикова [105, 210, 212, 214, 215, 224], которое описывает транспорт в пространстве модулей  $(1+1)$ -мерной  $SU(2)$ -модели Весса—Зумино—Виттена—Новикова с решением [210]:

$$\mathcal{F}(\{P\}, \{Q\}) = \left( \prod_{i < j}^N (z_{P_i} - z_{P_j})(z_{Q_i} - z_{Q_j}) \right)^{P_i P_j / 2k} \left( \prod_{i, j=1}^N (z_{P_i} - z_{Q_j}) \right)^{-P_i P_j / 2k}.$$

Соотношение между состояниями (7.9) и (7.11) киральной жидкости и корреляционными функциями киральной  $SU(2)$ -модели Весса—Зумино—Виттена—Новикова в случае  $k = 1$  и  $P_i = 1$  обсуждается в работах [225].

Включение в лагранжиан  $(1+1)$ -теории (12.18) для произвольной метрики<sup>(35\*)</sup> топологического слагаемого  $i\alpha_0 R \varphi$  [226], где  $R$  — двумерная кривизна поверхности, натянутой на контур  $C$ , т.е. пополнение теории (12.18) двумерной гравитацией, эквивалентно введению заряда на бесконечности

[227], что смещает значение конформной размерности.

Включение в лагранжиан

$$L = \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + A_\mu j^\mu \quad (12.23)$$

внешнего сохраняющего тока  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$  с зарядом

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}, t) d^2x \quad (12.24)$$

изменяет предыдущие ответы следующим образом [213]. Гамильтониан теперь не равен нулю и имеет вид

$$H = \int A_k j^k d^2x, \quad (12.25)$$

а связь (12.5) заменяется на уже привычное для нас выражение

$$\epsilon_{ij} \partial_i A_j = b = (2\pi/k)\rho. \quad (12.26)$$

Разделив векторный потенциал

$$A_i = \partial_i \phi + \epsilon^{ij} \partial_j^{-1} b, \quad \partial_j^{-1} = \partial_j / \nabla^2 \quad (12.27)$$

на продольную и поперечную компоненты, перепишем коммутационное соотношение (12.6) для канонической пары  $(\phi, b)$ :

$$[\phi(\mathbf{x}), b(\mathbf{y})] = i(2\pi/k)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (12.28)$$

С выбором вращательно-инвариантной поляризации<sup>(36\*)</sup> магнитное поле  $b$  реализуется как производная по координате  $\phi$ :  $b = i(2\pi/k)\partial_\phi$ . Поэтому ограничение Гаусса (12.26) на векторы состояния имеет вид уравнения

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\phi} + \rho\right)\psi(\phi, t) = 0 \quad (12.29)$$

с решением

$$\psi(\phi, t) = N(t) \exp\left(i \int \rho \phi d^2x\right), \quad (12.30)$$

$$N(t) = \exp\left(\frac{2\pi i}{k} \int_0^t \rho(t', \mathbf{x}) j(t', \mathbf{x}) d^2x dt'\right).$$

Статическое состояние  $\psi(\phi)$  является собственным состоянием гамильтониана (12.25), где  $j_i = -\partial_i^{-1} \dot{\rho} + \epsilon_{ik} \partial_k j$ , с энергией

$$E = \frac{2\pi}{k} \int \rho j d^2x. \quad (12.31)$$

Оператор Вильсона  $W(C)$  (10.3), действуя на состояние (12.30), имеет собственное значение [213]

$$W(C) = \exp[i(\gamma(C) + \frac{2\pi}{k}Q(C))], \quad (12.32)$$

зависящее от общего заряда  $Q(C)$ , заключенного внутри контура  $C$ , и фазы  $\gamma(C)$ .

Если петля  $C$  самопересекается  $\nu$  раз, то вклады в  $Q(C)$  входят с соответствующими знаками, а вакуумная голономия  $\exp[i\gamma(C)]$  определяется [208, 213] фазой

$$\gamma = 2\pi m/k, \quad m = -\nu/2, -(\nu/2) + 1, \dots, (\nu/2) - 1, \nu/2. \quad (12.33)$$

Другими словами, для класса самопересекающихся петель вакуумная голономия соответствует представлениям группы  $SU(2)$  со спином  $\nu/2$ , размерностью  $\nu + 1$  и минимальной совокупностью  $SU(2)$ -представлений с  $\nu/2 = 0, 1, \dots, k$ . Для этих значений  $\nu$  и при  $Q(C) = 0$  собственные значения оператора Вильсона  $\exp(2\pi i m/k)$  совпадают со значением параметра  $q$  в минимальных моделях конформной теории поля. Этот параметр входит в квадратичное ограничение  $g_i^2 = (q - 1)g_i + q$  и вместе со стандартными соотношениями  $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $g_i g_j = g_j g_i$  для  $|i - j| \geq 2$  на элементы  $g_i$  группы кос определяет соотношения алгебры Гекке  $H_n(q)$  [217], а также аргумент полиномов Джонса  $V_L(t)$  [205], где  $t = -q^{-1}$ . Представления  $H_n(q)$  совпадают [228] с монодромиями  $N$ -частичных корреляционных функций, удовлетворяющих уравнению Книжника—Замолотчикова. Отличный от нуля заряд  $Q(C)$  в (12.32) деформирует значения  $m$ .

Обратим внимание на то, что статистика зарядов, пропорциональная  $1/k$ , дуально сопряжена статистике потоков, где она порядка  $k$ . В теории (12.33) заряженного тока, взаимодействующего с  $U(1)$ -статистическим калибровочным полем, заряд  $Q$ , магнитный поток  $2\pi\Phi$  (в единицах  $\hbar = 1$ ) и спин  $s$  элементарной трубки с потоком связаны друг с другом:  $Q = k\Phi$ ,  $s = k\Phi^2/2 \doteq Q^2/2k$  [214, 229, 230]. Вопрос состоит лишь в том, что является элементарными возбуждениями в теории и каковы их квантовые числа. Как мы видели в разделе 11, это зависит от константы связи. Если это кванты потока, то, полагая  $\Phi = 1$ , мы имеем спин  $s = k/2$ , пропорциональный  $k$ . Если же это кванты заряда, то, считая  $Q = 1$ , мы приходим к  $s = 1/2k$ . Во всех формулах этого раздела, так как оператор Вильсона в (12.22) рождает единицы заряда, имелась в виду последняя точка зрения.

### 13. Термодинамика и электродинамика анионных систем

Изменения в поведении термодинамических характеристик системы частиц с промежуточной статистикой по сравнению со стандартными случаями проще всего увидеть на примере модели (3.14). Статистическая сумма

$$Z = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[-(m + \alpha)^2 T^{-1}] = (\pi T)^{1/2} \theta_3(\alpha, i\pi T) \quad (13.1)$$

выражается [231] через тэта-функцию  $\theta_3$ ; здесь  $T$  — нормированная на  $\hbar^2/2I$  температура,  $\alpha = \vartheta/2\pi$ ;  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1/2$  соответствуют бозе- и ферми-статистикам, а  $\alpha = 1/4$  — полуфермионам.

Зависимость теплоемкости для (13.1) от температуры показана на рис. 16 [231]. В области высоких температур при  $0 < \alpha < 1/4$   $c_V$  стремится к классическому значению  $1/2$  сверху. Если  $1/4 < \alpha < 1/2$ , то  $c_V \rightarrow 1/2 - 0$ . Обратим внимание на то, что в случае  $\alpha \neq 1/2$  теплоемкость имеет максимум.

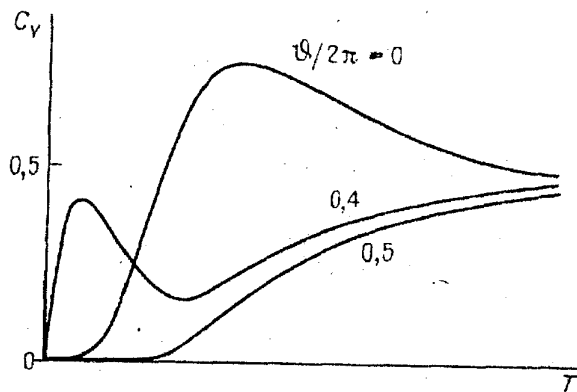


Рис. 16. Зависимость теплоемкости от температуры для трех значений статистического параметра  $\theta/2\pi$  [231] идеального газа ротаторов

Другой содержательной термодинамической величиной является второй вириальный коэффициент  $B(T)$ . Впечатляющий результат работ [232, 143]

$$B(T, \alpha) = (\lambda^2/4) \times \\ \times [1 - 2(1 - 2\alpha)^2], \quad (13.2)$$

возможно, был для многих началом знакомства с теорией анионов. В выражении (13.2)  $\lambda^2 = h^2/mT$  — квадрат длины тепловой волны де Бройля.

Глубокие провалы при  $\alpha = 0 \bmod 2\pi$  с  $B < 0$  и максимум при  $\alpha = 1/2$  с  $B > 0$  в

(13.2) иллюстрируют притяжение и отталкивание соответственно для бозе-и ферми-систем. Такие же провалы существуют у плотности вакуумной энергии

$$E = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \quad (13.3)$$

комплексного поля с фазой, определенной с точностью до замены на  $\exp(2\pi i \alpha) = \exp(i\theta)$ , на многообразии  $T \times S^1$ , в присутствии элементарного соленоида с потоком [233]. Отметим также, что ответ (13.2) имеет место [93] также и для газа двухскирмионных конфигураций  $z$ -поля  $CP^1$ -представления (4.5), (4.6) нашей задачи.

Более трудным является вычисление функции распределения. Перенос стандартного способа вычисления функции распределения на случай конечного вырождения со степенью  $k$  (для ферми- и бозе-частиц соответственно  $k = 1$  и  $k = \infty$ ) некорректен, так как нахождение функции распределения является частью точного решения задачи. Для иллюстрации тех возможностей, которые возникают в такого рода проблемах, приведем ответ для функции распределения

$$n(\epsilon) = \frac{1}{1 + \sigma^{-1} \exp(\epsilon/T)}, \quad (13.4)$$

$$\sigma = \frac{\text{sh}(NH/2T) \sin[\pi N/(N+M)]}{\text{sh}(H/2T) \sin[\pi/(N+M)]} \quad (13.5)$$

в секторе массивных возбуждений со спектром  $\epsilon_j = (c^2 p^2 + \Delta_j^2)^{1/2}$ ,  $\Delta_j = -\Delta_0 \sin(\pi j/N)$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ , в точном решении [234]  $SU(N) \otimes SU(M)$  симметричной  $(1+1D)$ -фермионной модели. Обратим внимание на отличие (13.4) от фермиевской функции распределения. В настоящее время есть основания думать, что близкая структура существует и в нашем случае. Дело в том, что термодинамический потенциал

$$\Omega = -T \ln \sum_i \sum_{N=0}^1 g_N e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)N} = -T \ln \sum_i (1 + g_i e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}), \quad (13.6)$$

дающий среднюю степень заполнения  $\bar{n}_i = -\partial\Omega/\partial\mu = [1 + g_i^{-1} e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}]^{-1}$   $i$ -го фермионного состояния, в общем случае содержит статистические веса  $g_N$ . Для стандартных фермионов  $g_i = 1$ . В случае вырожденного основного состояния  $g_1$  будет зависеть от  $q$ -размерности  $[2j+1]_q$  [217] пространства вырождения так, как это представлено в (13.4). (Для группы  $SU_q(M)$   $q = \exp[2\pi i/(k+M)]$ , а  $j = (k-1)/2$  [208].)

В отсутствие точного решения мы можем рассчитывать на качественный анализ. Например, для оценки температуры сверхпроводящего перехода  $T_c \sim \hbar^2 n / m k^2$  в (5.19) существенно, что она, имея типичный для бозе-конденсации вид, обратно пропорциональна квадрату статистического параметра  $k^2$ . Если предположить, что энергия конденсации составляет  $\xi$ -ю часть от энергии первого уровня Ландау, т.е. равна  $\xi \pi \hbar^2 n / k^2$  с  $0 < \xi \ll 1$ , то из оценки [33] для активно обсуждаемого экспериментаторами отношения  $\Delta/T_c$  следует его зависимость от  $k$  и тем самым от экспериментального способа приготовления состояния. Напомним, что в равновесии  $k = 2$ .

Рассмотрим некоторые электродинамические свойства анионных систем. Пусть температура равна нулю и существует внешнее электромагнитное поле. Тогда действие (8.52) при учете (8.31) в случае  $\sigma_{xy} = \vartheta = k/2\pi$  имеет вид

$$S = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \varepsilon e^2 - \frac{1}{2\chi} b^2 + \frac{\vartheta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu F_{\nu\lambda} - \frac{\vartheta}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} \right], \quad (13.7)$$

где  $a_\mu$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{b}$  — флуктуирующие около среднего значения поля  $\mathbf{b}$  статистические поля,  $A_\mu$  — потенциал внешнего поля с напряженностью  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Дуальная, эквивалентная (13.7) формулировка достигается [149] с помощью антисимметричного поля  $\Lambda_{\mu\nu}$  с компонентами  $\Lambda_{0i} = \tilde{e}_i$ ,  $\Lambda_{ij} = \varepsilon_{ij} \tilde{b}$  и с действием

$$S' = \int d^3x \left[ -\frac{1}{2\varepsilon} \tilde{e}^2 + \frac{1}{2\chi} \tilde{b}^2 + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{\vartheta}{4} (f_{\nu\lambda} + F_{\nu\lambda}) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \right]. \quad (13.8)$$

Интегрирование по  $a_\mu$  дает связь

$$\partial_\mu (\Lambda_{\mu\nu} - \vartheta \varepsilon_{\mu\nu\lambda} A^\lambda) = 0 \quad (13.9)$$

на поле  $\Lambda_{\mu\nu}$  с решением ( $\vartheta = k/2\pi$ ):

$$\Lambda_{\mu\nu} = (1/2\pi) \varepsilon_{\mu\nu\lambda} (\partial^\lambda \alpha + k A^\lambda). \quad (13.10)$$

После подстановки в (13.8) и добавления лагранжиана для электромагнитного поля  $(-1/4e^2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  мы получаем лагранжиан

$$L = \frac{1}{8\pi^2\chi} (\partial_0 \alpha + k A_0)^2 - \frac{1}{8\pi^2\varepsilon} (\partial_i \alpha + k A_i)^2 - \frac{\vartheta}{4\varepsilon} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (13.11)$$

записанный в терминах полей  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  и  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ .

Первые два слагаемых представляют собой функционал Гинзбурга—Ландау для параметра порядка  $\exp[i\alpha(\mathbf{x}, t)]$  в лондоновском пределе. Третий член описывает индуцированные флуктуациями эффекты нарушения Р- и Т-четности, которые существуют в сверхпроводящем состоянии на больших расстояниях лишь в присутствии внешнего электромагнитного поля [100].

Классические уравнения движения, следующие из (13.11), дают возможность [149] найти длину экранировки статического заряда  $\xi = M_-^{-1}$ , а также дисперсионные зависимости поперечных и продольных плазменных колебаний. В пределе длинных волн частота поперечных  $M_+$  и продольных  $M_-$  волн конечна, причем

$$M_\pm^2 = \frac{\vartheta^2 e^2}{2\chi} \times \left\{ \left(1 + \frac{\chi}{e} + e^2 \chi\right) \pm \left[ \left(1 - \frac{\chi}{e}\right)^2 + e^4 \chi^2 + 2e^2 \chi \left(1 + \frac{\chi}{e}\right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (13.12)$$

Это различие в плазменных частотах, возникающее благодаря электромагнитному члену Черна—Саймонса, известно довольно давно [235, 236]. Нетрудно понять, что конечная частота в длинноволновом пределе в дисперсионной зависимости поперечных колебаний возникает из-за связи поперечной бесщелевой голстоуновской моды (9.7) с колебаниями поперечных компонент электромагнитного поля. Голстоуновские колебания фазовой переменной  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  "съедаются" электромагнитным полем и становятся массивными. Разница квадратов частот  $\delta M^2 = (k^2 e^2 / 4\pi^2) [1 + (4\epsilon / e^2)]^{1/2}$  не зависит от знака целого числа  $k = 2, 4, \dots$  и является, по-видимому, наилучшим выражением для экспериментальной проверки нарушения в объеме образца Р- и Т-четности.

В сверхпроводящем состоянии лондоновский сверхтекучий ток и холловский ток конденсата образуют сумму

$$J_i = -\frac{\delta L}{\delta A_i} = \frac{k}{4\pi^2 \epsilon} (\partial_i \alpha + k A_i) - \frac{k}{4\pi} \epsilon_{ij} E_j, \quad (13.13)$$

слагаемые которой зависят от знака  $k$ . Вследствие изменения знака этого коэффициента при переходе от одной плоскости к другой наблюдать холловский вклад в полный ток (13.13), по-видимому, крайне трудно. Любопытно, что холловский эффект вследствие его вакуумного происхождения имеет место в условиях эффекта Мейсснера. Обратим внимание на то, что последний пропорционален  $k^2$ .

Плотность заряда

$$J_0 = \frac{\delta L}{\delta A_0} = \frac{\vartheta}{2\pi\chi} (\partial_0 \alpha + k A_0) - \vartheta B, \quad (13.14)$$

если ее использовать в статическом случае при  $A_0 = 0$  для вычисления полного заряда

$$Q = \int d^2 x J_0 = -\vartheta \int d^2 x B = -\vartheta \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (13.15)$$



дает нам возможность еще раз увидеть [236, 149], что вихри в системе (13.11) обладают зарядом. Действительно, вихревые конфигурации с числом обмотки  $s$  фазы "параметра порядка" ( $\Delta\alpha = 2\pi s$ ) в отсутствие внешнего поля  $E_i$  и тока ( $\partial_i\alpha + kA_i = 0$ ) имеют целый заряд

$$Q = \vartheta\Delta\alpha/k = s, \quad (13.16)$$

равный  $s$  единицам завихренности.

Естественно, что в системе, где развито состояние с нарушенной Р- и Т-четностью существуют эффекты вращения плоскости поляризации света [21, 162, 169], отраженного от сверхпроводника. Благодаря присутствию в лагранжианах, описывающих свойства системы как при  $T < T_c$ , так и при  $T > T_c$ , слагаемых Черна—Саймонса, которые при  $T < T_c$  зависят только от потенциалов внешнего электромагнитного поля, этот эффект не исчезает и в несверхпроводящем состоянии. Зависимость угла вращения  $\varphi$  от частоты  $\omega$  имеет вид [21]

$$\varphi(\omega) \sim \omega_p \omega^2 / (\omega_p^2 - \omega^2)^{3/2}, \quad (13.17)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота. С повышением температуры термически возбужденные состояния с большими значениями  $k$  зануляют угол поворота.

Для обсуждения электродинамических свойств анионной системы при конечных температурах [237] вернемся к лагранжиану (4.23), оставляя в нем переменные, описывающие динамику заряда, и включив в рассмотрение внешнее электромагнитное поле. В работах [104, 237] для изучения магнитных свойств системы в лагранжиане были учтены следующие слагаемые:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{e^2\bar{k}}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda + en_e A_0 + i\psi^\dagger D_0\psi - \\ - \frac{1}{2m}|D_k\psi|^2 + \frac{e}{2m}B\psi^\dagger\sigma_3\psi, \quad (13.18)$$

где  $D_0 = \partial_0 + ie(A_0 + a_0)$ ,  $D_k = \partial_k + ie(A_k + a_k)$ ,  $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ ,  $b = \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1$ ,  $n_e$  — нейтрализующая фоновая плотность. В (13.18)  $\psi$  — фермионное поле (вакуумный угол  $\vartheta = \pi[1 - (2\bar{k})^{-1}]$ ), а статистический потенциал  $a_\mu$  нормирован так, что имеет ту же константу связи — заряд  $e$ , что и потенциал  $A_\mu$ . В случае нормировки множителя у слагаемого Черна—Саймонса на  $1/2$  константа связи поля  $a_\mu$  с фермионами равна  $(\pi/|k|)^{1/2}$  и предел  $\bar{k} \rightarrow \infty$  соответствует отсутствию взаимодействия Черна—Саймонса.

Уравнения движения для калибровочных полей имеют вид

$$\partial_\nu F^{\nu\lambda} = \langle J^\lambda \rangle - en_e \delta^{\lambda 0}, \\ -(e^2\bar{k}/2\pi)\epsilon^{\lambda\nu\rho}f_{\nu\rho} = \langle j^\lambda \rangle; \quad (13.19)$$

здесь

$$j^k = -\frac{ie}{2m}(\psi^\dagger D_k\psi - (D_k\psi^\dagger)\psi) = J^k - \frac{e}{2m}\epsilon^{kj}\partial_j(\psi^\dagger\sigma_3\psi), \quad (13.20)$$

а поле  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$i\partial_0\psi = \left[ -\frac{1}{2m}(D_k^2 + eB\sigma_3) + e(a_0 + A_0) \right] \psi. \quad (13.21)$$

Средние значения тока  $\langle j^\mu \rangle$  в (13.19) понимаются как средние по основному состоянию и по ансамблю [237]. Например,

$$\langle j^0(\mathbf{x}) \rangle = \text{Tr}(j_0(\mathbf{x}) \exp\{\beta F_e[A, a] - H_e[A, a]\}) = \frac{\delta F_e[A, a]}{\delta a_0}, \quad (13.22)$$

$$j_0(\mathbf{x}) = \frac{\delta H_e[A, a]}{\delta a_0}, \quad (13.23)$$

где  $F_e$  — свободная энергия:  $\exp(-\beta F_e) = \text{Tr} \exp(-\beta H_e)$ , а электронная часть гамильтониана равна

$$H_e[A, a] = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m} |\partial_k - ie(A_k + a_k)|\psi|^2 - \frac{e}{2m} B\psi^+ \sigma_3 \psi + e(a_0 + A_0)\psi^+ \psi \right\}. \quad (13.24)$$

Приведем основные результаты такого подхода [237]. При  $T = 0$  существует критическое поле  $H'_c = en_e/2m$  порядка 10 Гс, выше которого проникновение внешнего поля имеет частичный характер, причем оно однородно распределено в пространстве. С повышением температуры  $H'_c(T)$  уменьшается и при некоторой температуре  $T'_c$  становится исчезающе малым. Эта температура имеет порядок  $10^2$  К из оценки [237]

$$\frac{2\pi^2 n_e}{k^3 e^2 T'_c} \exp\left(-\frac{\pi n_e}{2\pi k T'_c}\right) \sim 1, \quad (13.25)$$

следующей из зависимости лондоновской глубины проникновения поля от температуры [237]

$$\lambda^{-2}(T) = \lambda^{-2}(0) \left[ 1 + \frac{2\pi^2 n_e}{k^3 e^2 T} \exp\left(-\frac{\pi n_e}{2\pi k T}\right) \right]. \quad (13.26)$$

При  $T < T'_c$  магнитное поле вблизи границы убывает от значения  $B_{\text{ext}}$  до  $B_{\text{in}} = B_{\text{ext}} - H'_c$  при  $B_{\text{ext}} > H'_c$  по экспоненте  $\exp(-x/\lambda(T))$ . Причем в широкой области  $T < 70$  К длина  $\lambda(T)$  от температуры почти не зависит и резко стремится к нулю при  $T = 100$  К, не имея при этом БКШ-особенности  $(T'_c - T)^{-1/2}$ .

Экспериментально измеряемая эффективная глубина определяется градиентом магнитного поля

$$\lambda_{\text{eff}}(T, d)^{-1} = -\frac{1}{d} \int_0^d dx \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} = \frac{1}{d} \ln \frac{B(0)}{B(d)} \quad (13.27)$$

и показывает, как быстро магнитное поле изменяется на расстоянии  $d$  внутри сверхпроводника. Совпадая в теории Гинзбурга—Ландау с  $\lambda(T)$ ,  $\lambda_{\text{eff}}$  сейчас

отличается от  $\lambda(T)$  и может быть представлена [237] при  $T \sim T'_c$  и  $T = 0$  соответственно формулами

$$\lambda_{\text{eff}}^{-1}(T, d) = d^{-1} \ln \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{ext}} + M(B_{\text{in}}) [1 - \exp(-d/\lambda(0))]}, \quad (13.28)$$

$$\lambda_{\text{eff}}^{-1}(0, d) = \begin{cases} \lambda^{-1}(0), & B_{\text{ext}} < H'_c, \\ d^{-1} \ln \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{ext}} - H'_c [1 - \exp(-d/\lambda(0))]}, & B_{\text{ext}} > H'_c. \end{cases} \quad (13.29)$$

Обратим внимание читателя также на зависимости свободной энергии и намагниченности от магнитной индукции при различных температурах и зависимости намагниченности от температуры при разных значениях внешнего поля, полученные в работе [237]. Все эти зависимости получены в приближении самосогласованного поля без учета вихревых возбуждений. Некоторые предложения о том, как включить в рассмотрение вихри и рассчитать их вклад в наблюдаемые характеристики, содержатся в работах [33].

Каковы особенности реакции анионной системы на действие переменных электромагнитных полей? Полный гамильтониан системы [101]

$$H = H_{\text{holon}} + H_{\text{spinon}}, \quad (13.30)$$

$$H_{\text{holon}} = \sum_{a=1,2} \left[ \frac{1}{2m_h} \varphi_a^+ (i\nabla - \mathbf{a} - \mathbf{A})^2 \varphi_a + \varphi_a^+ (a_0 + A_0 - \mu_h) \varphi_a \right], \quad (13.31)$$

$$H_{\text{spinon}} = \sum_{\sigma, a=1,2} \left[ \frac{1}{2m_s} \chi_{\sigma a}^+ (i\nabla + \mathbf{a})^2 \chi_{\sigma a} + \chi_{\sigma a}^+ (a_0 - \mu_s) \chi_{\sigma a} \right] \quad (13.32)$$

включает холонную и спиновую части. При малых значениях волнового вектора  $\mathbf{k}$  и частоты  $\omega$  флуктуации калибровочного поля  $\mathbf{a}_\mu$  около среднего значения  $\bar{\mathbf{a}}$ , являющегося решением уравнения (5.1), малы и могут рассматриваться в гауссовом приближении.

После интегрирования по переменным  $\varphi$  и  $\chi$  эффективное действие

$$S_{\text{eff}} = (a + A)_\mu \pi_h^{\mu\nu} (a + A)_\nu + a_\mu \pi_s^{\mu\nu} a_\nu \quad (13.33)$$

выражается через поляризационные операторы, эквивалентные токовым корреляционным функциям двумерных частиц в сильном магнитном поле  $\bar{\mathbf{b}}$  основного состояния системы. Интегрируя по флуктуациям  $\mathbf{a}_\mu$  так, как это сделано в работе [20], получаем [101] электромагнитный отклик

$$K_{\mu\nu} = -\langle j_\mu, j_\nu \rangle = (\pi_s^{-1} + \pi_h^{-1})^{-1}, \quad (13.34)$$

где  $\pi_{s,h}^{-1}$  — обратные операторы по отношению к поперечным  $\pi_{s,h}$ . Последние можно записать в виде

$$A_\mu \pi_{\mu\nu} A_\nu = -\varepsilon_\parallel E_\parallel^2 - \varepsilon_\perp E_\perp^2 + \chi B^2 + i\sigma_{xy} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda; \quad (13.35)$$

здесь  $\mathbf{E} = \omega \mathbf{A} - \mathbf{k} A_0$ ,  $E_\parallel$  и  $E_\perp$  — продольная и поперечная части электрического поля,  $\mathbf{B} = [k\mathbf{A}]$  — магнитное поле. Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ ,

магнитная восприимчивость  $\chi(\mathbf{k}, \omega)$  и холловская проводимость  $\sigma_{xy}(\mathbf{k}, \omega)$  спинов и холонов являются аналитическими функциями  $\mathbf{k}$  (так как одночастичные возбуждения имеют щель  $\omega_c$ ) и имеют следующие свойства [101]. В частном случае  $\omega = 0$ ,  $\sigma_h(\mathbf{k}, 0) = \sigma_s(\mathbf{k}, 0)$ . При  $\mathbf{k} = 0$   $\omega_c^2 \epsilon_{\perp} = 4\sigma_{xy}^2(0, \omega)$ . Компоненты электромагнитного отклика  $K_{\mu\nu}$  при  $\mathbf{k} \neq 0$  и  $\omega \neq 0$  имеют вид

$$K_{00} = -\langle \rho(\mathbf{k}, \omega) \rho(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle = d^{-1} k^2 (\epsilon_h^{\perp} d_s + \epsilon_s^{\perp} d_h), \quad (13.36)$$

$$K_{\perp} = -\langle j(\mathbf{k}, \omega) j(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle = d^{-1} (\Delta_h d_s + \Delta_s d_h), \quad (13.37)$$

$$K = \frac{\langle \rho, [\mathbf{k}j] \rangle}{ik^2} = \frac{\langle [\mathbf{j}j] \rangle}{i\omega} = d^{-1} (\sigma_h d_s + \sigma_s d_h); \quad (13.38)$$

здесь

$$\Delta_{h,s} = -\epsilon_{h,s}^{\perp} \omega^2 + \chi_{h,s} k^2, \quad (13.39)$$

$$d_{h,s} = -\epsilon_{h,s}^{\perp} \Delta_{h,s} - \sigma_{h,s}^2, \quad (13.40)$$

$$d = -(\epsilon_h^{\parallel} + \epsilon_s^{\parallel}) [-(\epsilon_h^{\perp} + \epsilon_s^{\perp}) \omega^2 + (\chi_h + \chi_s) k^2] - (\sigma_h + \sigma_s)^2. \quad (13.41)$$

При  $\omega = k = 0$   $\sigma_h = -\sigma_s = \sigma_{xy}(0) = \vartheta/2\pi = 2\bar{k}$ . Из этих выражений следует

$$K_{00}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \frac{k^2}{\omega^2 - v_0^2 k^2} \quad (13.42)$$

— уже известный нам результат,

$$K_{\perp}(0) = 1/4\pi^2 \lambda^2, \quad (13.43)$$

т.е. эффект Мейсснера, и

$$K(\mathbf{k}, \omega) \sim \frac{\omega^2 k^2}{\omega^2 - v_0^2 k^2}, \quad (13.44)$$

$K(\mathbf{k}, 0) = K(0, \omega) = 0$ , т.е. восстановление в длинноволновом и статическом пределах нарушенной четности. Это является общей чертой анионной системы — нарушение дискретных симметрии существует только на меньших пространственно-временных масштабах, где  $K \rightarrow \vartheta$  [101].

#### 14. Экспериментальные следствия кирального состояния

Одним из характерных свойств двумерных систем с развитыми квантовыми флуктуациями является жесткость существующих в них когерентных состояний. Длинноволновое смягчение коллективной моды при переходе в сверхпроводящее состояние мало что меняет в этом отношении. По-прежнему основные события разыгрываются на масштабах порядка нескольких постоянных решетки. Если при низких температурах в отсутствие внешнего электромагнитного поля нарушение симметрии относительно Р- и Т-инверсий на таких масштабах компенсируется за счет перескоков, то при  $T > T_c$ , где эта

компенсация отсутствует, статистическое калибровочное поле имеет конечный корреляционный масштаб. Кроме того, ослабление эффектов, связанных с нарушением симметрии относительно Р- и Т-инверсии, существует из-за антиферромагнитного распределения по базисным плоскостям знака множителя  $k$  у слагаемого Черна—Саймонса. Явление в целом выглядит внешне как экранировка дробной статистики.

По этой причине найти в эксперименте поддержку анионной картины крайне трудно. На малость локальных отклонений от среднего магнитного поля указывают и  $\mu^+$ SR-опыты [238]. В этой ситуации наибольшие шансы на экспериментальное подтверждение имеют формулы, содержащие квадрат множителя  $k$  у члена Черна—Саймонса. Например, выражение (5.19), которое нашло подтверждение в эксперименте [239]. Другое предложение [149], также квадратичное по  $k$  и поэтому относящееся к явлениям, происходящим в объеме образца, касается различия в плазменных частотах продольных и поперечных колебаний (см. (13.12)). Оно пока не привлекло внимание экспериментаторов.

Киральность состояния во внешнем электромагнитном поле в сверхпроводящем состоянии [240] (см. (13.11)) является причиной предсказываемого поворота на угол  $\varphi$  (13.17) [21] плоскости поляризации электромагнитных волн при отражении от их поверхности образца. При прохождении волн через тонкие пленки из-за альтернации знака  $k$  эффект отсутствует [162]. Эти предсказания подтвердились в первых экспериментах [241]. Однако к настоящему времени экспериментальный ответ остается неясным (см. [242]).

В литературе [32, 169] существует несколько программ экспериментального изучения следствий квантовой динамики анионов. Здесь хотелось бы обратить внимание на некоторые общие для этой области обстоятельства.

Рассмотрим реакцию системы в так называемой "нормальной" области на внешнее воздействие, характеризующееся частотой и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . При конечных температурах, кроме переходов внутри магнитных подзон под действием внешнего поля, будут происходить переходы между подзонами, энергетический спектр в которых отличается знаком в "релятивистской" дисперсионной зависимости типа (6.21). Закон сохранения энергии для таких процессов имеет вид:  $\epsilon_i + \omega = \epsilon_f$ , где  $\epsilon_i = -\epsilon$ ,  $\epsilon_f = +\epsilon$ , т.е.  $\epsilon = \omega/2$ , а также  $n(-\epsilon) = 1 - n(\epsilon)$  для функции распределения  $n(\epsilon)$ . Поглощение пропорционально разнице функций распределения  $n(\epsilon_f) - n(\epsilon_i) = 2n(\epsilon) - 1 = -\text{th}(\epsilon/2T) = -\text{th}(\omega/4T)$ . Здесь использован однородный предел  $\mathbf{k} = 0$  и закон сохранения энергии. Кроме того, в связи с совмещением спиновых и зарядовых степеней свободы у связанных состояний из анионных мультиплетов (см. (4.19)), существующим при  $T > T_c$  в широкой области волновых векторов, вклад спиновых и зарядовых возбуждений в мнимую часть зарядовой и спиновой восприимчивости, которая пропорциональна  $n(\epsilon_f) - n(\epsilon_i)$ , будет иметь одинаковый вид:  $\text{Im } P_{c,s}(\mathbf{k}, \omega) \sim N(0)\text{th}(\omega/4T)$ ;  $N(0)$  — плотность одночастичных состояний. Это замечание фактически поясняет причину справедливости гипотезы работы [243] о поведении  $\text{Im } P_{c,s} \sim -\text{th}(\omega/4T)$ , на которой основан вывод о существовании ферми-жидкости со спектральным весом одночастичной функции Грина, имеющей ноль при  $\epsilon = 0$ . Такая среда имеет многие необычные свойства. Они проявляются, например, в линейной зависимости сопротивления от температуры, в зависимости туннельной проводимости SIN-

контакта от напряжения, обнаруженной экспериментально [244], и в транспортных явлениях [245]. Обратим внимание на несимметричность вольтамперных характеристик SIN-контактов относительно замены  $V \rightarrow -V$ , что может отражать нарушение симметрии основного состояния относительно Р- и Т-инверсий. На это можно смотреть как на частичную реализацию общей асимметрии кинетических коэффициентов [32] из-за проявления эффектов нарушения Р- и Т-четности в амплитуде рассеяния [98]. Специального внимания заслуживает также детальный анализ вольтамперных характеристик, которые имеют множество особенностей при напряжениях, отвечающих "нормальной" области. Из обычно связывают с фононами. Однако в связи с обсуждаемой в настоящей статье богатой структурой энергетического спектра в задаче Ховштадтера более подробное изучение их представляется крайне желательным. Дело в том, что туннелирование наряду с фотоэмиссией представляет собой одно из немногих средств изучения детальной структуры состояний, так как использует процессы с изменением полного заряда системы. Поэтому очень существенны результаты работы [246], где проведен симметричный анализ состояний различных типов вихрей и их вклад в джозефсоновский ток.

Реальные соединения содержат разнообразные несовершенства своей структуры, которые играют роль центров пиннинга и индуцируют множество гистерезисных явлений и эффектов, связанных с крипом потока. Из содержания предыдущих разделов следует, что на этом мощном маскирующем фоне присутствует причина для существования в системе квантовой памяти. Она целиком обусловлена когерентным движением квазичастиц в основном состоянии и связана с розыгрышем явлений соизмеримость — несоизмеримость при покрытии основной решетки ячейками с ненулевым потоком статистического магнитного поля, что приводит к появлению иерархических структур и фрактальной зависимости полной энергии от магнитного поля (см. рис. 7). Энергетический масштаб явлений составляет величину порядка  $10^{-4} - 10^{-3}$  эВ.

Представим себе, что за счет облучения или помещения во внешнее магнитное поле мы перевели систему из равновесного состояния с некоторым фактором заполнения  $\nu_0 = \phi$  и полной энергией  $E_{\nu_0}(\phi)$  в другое состояние с энергией  $E_{\nu}(\phi)$ . Любое из конечных состояний характеризуется радикально измененной зависимостью  $E_{\nu}(\phi)$ . Возникающее после термализации неравновесное макроскопическое состояние представляет собой одно из состояний в иерархической системе распределенных по энергетической шкале состояний с локальными минимумами полной энергии, которые отделены от равновесного основного состояния последовательностью энергетических барьеров. Поэтому релаксационный спуск по энергии из-за туннелирования через барьеры будет выглядеть как долговременное течение потока, а любой новый подъем будет зависеть от предыстории и носить термоактивационный характер. Долговременная релаксация магнитного момента и близкие свойства фотоиндуцированных явлений представляют собой эффекты, в которых разыгрываются различные наборы квантовых чисел у метастабильных состояний квазичастиц. В равной степени это относится как к связанным состояниям холонов и спинов при  $T > T_c$ , так и к неравновесным анион-холонным возбуждениям при  $T < T_c$ .

Существование множества времен релаксации из-за туннельного прохождения неравновесных анионов через систему барьеров и Р- и Т-асимметрия амплитуды рассеяния [98], т.е. "двухуровневость" системы [247], могут быть причиной  $1/f$ -шума в системе заряженных квантовых вихрей. На тот факт, что внешнее магнитное поле визуализирует при  $T \ll T_c$  уже существующие вихревые элементарные возбуждения, указывают крайне низкие значения напряженности внешнего поля, при которых образуется вихревая решетка [248]. В условиях таких экспериментов было бы крайне важным убедиться в предсказываемом электрическом заряде вихрей. Из-за малой длины экранировки это сделать нетрудно, но при современном уровне эксперимента не находится за пределами возможного. Изучение строчек вихрей представляет также интерес в связи с предсказываемой теорией [120] пространственно одномерной кластеризацией.

Приборный ноль сопротивления при сверхпроводящем переходе определяет температуру, которая очень близка к температуре фазового перехода Костерлица—Таулесса, обнаруженного в работах [249 — 252]<sup>(37\*)</sup>. При температуре костерлиц-таулессовского перехода наблюдается [253] скачок Костерлица—Нельсона [254]. Причем оказывается [255], что в сверхпроводящих слоистых соединениях теория [256] имеет очень широкую область применимости, в то время как обычно она справедлива вблизи критической точки. Все эти результаты можно рассматривать как экспериментальные аргументы в пользу костерлиц-таулессовского механизма сваривания полуфермионов с образованием молекулярной бозонной фазы (см. п. 11 и [218]). С точки зрения решеточной калибровочной теории п. 11 при больших значениях параметра  $N$  группы  $Z_N$  к критической точке  $T_c$  сверху примыкает "атомная" фаза распаренных костерлиц-таулессовских полуфермионных вихрей (кулоновская фаза с дальнедействующим калибровочным взаимодействием). Поэтому изотропизация ( $Z_N \rightarrow U(1)$ ) увеличивает область существования кулоновской фазы (см. рис. 14) за счет сверхпроводящего конденсата, что наблюдается в сильном магнитном поле экспериментально [259].

Заметим в заключение этого раздела, что рассмотрение экспериментальных результатов в рамках анионного механизма обладает той необходимой степенью универсальности и полноты, которая необходима для понимания широкого спектра явлений в сверхпроводящей и "нормальной" фазах с единой точки зрения.

Изучение конденсата холон-спионных связанных состояний на фоне наклонного конфайнмента, примыкающих фазовых переходов и влияния на них магнитного поля, подробный анализ зависимости критических индексов от магнитного поля для кулоновского газа костерлиц-таулессовских вихрей [257], а также интригующих деталей зависимости сопротивления от температуры во внешнем магнитном поле составляет широкий круг актуальных экспериментальных задач. К ним относится и температурная зависимость холловского напряжения, изменяющего знак вблизи температуры  $T'_c$  [128, 258, 259], начиная с которой при  $T > T'_c$  влияние внешнего магнитного поля на зависимость сопротивления  $\rho_{xx}(T, H)$  от температуры отсутствует. Обратим внимание также на то, что вблизи температуры сверхпроводящего перехода  $T < T'_c$  холловское напряжение и сопротивление  $\rho_{xx}$  подчиняются одному и тому же [128] термоактивационному закону Аррениуса [260]  $\exp(-T_0/T)$  с  $T_0 \approx \omega_c$ .

## 15. Заключение

Для описания свойств основного состояния и низколежащих возбуждений в настоящем обзоре использовались различные язык и технические средства, которые внешне часто были непохожими друг на друга. Это привело к повторам, по-видимому, неизбежным не только с педагогической точки зрения. В частности, закон Гаусса — условие компенсации (4.10), повторялся неоднократно (см. (4.16), (5.1), (6.39), (6.41), (7.14), (8.4), (8.37), (8.41), (8.53), (8.57), (9.28), (12.29)). Причем каждый раз обсуждалась одна из сторон этого соотношения. В целом, кроме многосвязности двумерной системы, основной акцент в обзоре был сделан на том, чтобы тем или иным способом отразить крайне сильные квантовые флуктуации, когда неопределенность фазы порядка неопределенности ее канонически сопряженного партнера — числа частиц. Обратимся сейчас к общим чертам проблемы, рассматривая их с точки зрения скрытых внутренних симметрии.

Одним из результатов теории среднего поля [261] было обнаружение локальной спиновой  $SU(2)$ -симметрии [79 — 81]. Допинг понизил локальную калибровочную симметрию до группы  $U(1)$ . Любопытно, что дальнейшее разрушение калибровочной инвариантности существует почти в том же виде [262], как и в теории БКШ<sup>(38\*)</sup>. Хотя, казалось бы, основная роль группы  $U(1)$  должна состоять в том, чтобы помочь фермиону стать бозоном и наоборот. Однако условие  $\vartheta = \pi$  этого превращения не реализуется.

Действительно, рассмотрим динамику освобожденных от спина вакантных мест на квадратной решетке. Они окружены ориентированными из-за выделенной размерности пространства контурами, по которым осуществляется когерентный перенос спиновых степеней свободы. При склейке, т.е. при отождествлении ребер и диагоналей контуров, мы получаем топологические пространства, простейшим из которых является тор. Глобальные калибровочные преобразования калибровочных полей, параметризующих фазы амплитуд перескока, в этих условиях должны быть соотнесены к различным топологическим многообразиям. Теория Черна—Саймонса на торе [263, 264] дает многокомпонентную волновую функцию [183] и определена неабелевыми представлениями группы кос [265]. В общем случае топология линзового пространства  $L_{k,p}$  определяющая статистику фундаментальная группа  $\pi_1(L_{k,p}) = Z_k$  [266], что использовалась в п. 11. Существование дискретной группы  $Z_k$  (см. (12.33)) и в более общем случае  $Z_{k_1} \times \dots \times Z_{k_l}$  для симплектической модулярной группы  $Sp(2k, Z)$  [184] обязано линзам, которые являются пространствами расслоения для монополя с топологическим зарядом  $k$  [267, 268].

Изучение скрытых дискретных симметрии [269 — 277] важно по многим причинам. Прежде всего из-за естественного появления корневых решеток, которые ведут к обобщению иерархических последовательностей в анионных системах [273]. Действительно, пополнение действия (12.18) за счет корневой решетки ( $k \rightarrow k_{ij}$ ), замена скалярного поля  $\varphi$  на матричную переменную и дополнение за счет члена  $i\alpha R$  [226] — якобиана перехода от переменных при геометрическом квантовании к переменным конформной теории, т.е. наиболее полная реализация калибровочной и диффеоморфной инвариантности, дает действие двумерной квантовой гравитации. Можно думать, что в основе стохастического поведения наблюдаемых величин в высокотемпературных сверх-



проводниках лежит фрактальная геометрия [274] этой теории. Основанием для такого предположения служит совпадение действий этих двух теорий. В самом деле, уже на первом шаге к (12.18) — при репараметризации поля  $\Phi \rightarrow \varphi/k^{1/2}$  — оказываются важными значения  $k$ . Серии  $k = 2k_1$ ,  $k_1 = 1, 2, 3, \dots$  и  $k = 2k_1/k_2$  с  $k_2 \neq 1$  принадлежит разным радиусам компактификации с различным критическим поведением [219], например ко-стерлиц-таулессовского или изинговского типа. Напомним, что в последовательности с  $k_2 \neq 1$  сверхпроводящее состояние отсутствует (см. п. 8).

Индукцированное дефицитом спина коллективное движение взаимно дуальных степеней свободы по многократно зацепленным контурам, являющихся образующими топологических многообразий, на другом языке означает покрытие основной решетки треугольными ячейками с потоком статистического калибровочного поля. В отличие от классической и квантовой механики, состояния в такой системе определяются элементами неабелевой группы, а наблюдаемыми, например, значения петли Вильсона, являются функции от элементов групп [275]. Эта ситуация типична для квантовых групп (алгебр Хопфа) [275, 276]. Особенность ее в нашем случае состоит в том, что параметр деформации является корнем из единицы и образующей циклической группы  $Z_N$ , которая определяет статистику "поточковых" возбуждений. Несингулярные представления [277] квантовых групп для таких значений параметра деформации совпадают с представлениями алгебры Гекке группы кос и заданы монодромиями [217, 228] конформных блоков  $(1 + 1)D$  WZW-теории. Детальное изучение квантовых групп, а также продвижение в области некоммутативной-геометрии [278] позволят расставить внутренние симметрии по своим местам и дать детальную картину того, в каких случаях коррелятор ведет себя по Вильсону, а когда имеет место закон периметра и возникает конденсат Хиггса. Предварительный ответ п. 11 выглядит так, что для данного набора квантовых чисел  $n$  и  $m$  смена режима и фазовый переход возникают в точке самодуальности  $T_c^{(k)}$ , причем при  $k \rightarrow \infty$   $T_c^{(k)} \rightarrow 0$ .

Новая ситуация в физике конденсированного состояния, возникшая в связи с проблемами сильной связи, потребовала не только численных экспериментов [154, 279] на системах из малого числа частиц. Она стимулировала привлечение из квантовой теории поля аналитических методов алгебры токов для описания [280, 281] краевых состояний [282, 283]. Дело в том, что в теории сильных корреляций при компактификации в то или иное топологическое многообразие требуются определенные граничные условия. Поэтому экспериментальное изучение краевых состояний в физике конденсированного состояния при низких кулоновских энергиях фактически открывает окно в область новых явлений топологической квантовой теории поля.

К настоящему времени в литературе существует несколько обзоров [164, 284, 285] на близкую тему. Часть из них уже была опубликована к моменту завершения работы над настоящей статьей и содержит частично совпадающий материал. Надеюсь, что более широкая по тематике область будет полезна как теоретикам, так и экспериментаторам при изучении сильно коррелированных систем.

В заключение мне приятно поблагодарить П.Б. Вигмана и Г.Е. Воловика за полезные советы, так же как и всех, с кем обсуждал различные проблемы сильно коррелированных систем. В особенности я благодарен Д.В. Хвещенко за просмотр первоначального варианта статьи и высказанные замечания, а также А.В. Гапонову-Грехову и А.Г. Литваку за поддержку работы.

## ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>(1)</sup> Мы пренебрегаем сейчас слабым отклонением спинов относительно базовой плоскости с альтернативой направления отклонения при переходе от одной плоскости к другой.

<sup>(2)</sup> Этот вывод справедлив при учете граничных условий на двумерной решетке.

<sup>(3)</sup> Параметры  $t$  и  $U$  в (2.1) следует рассматривать как эффективные параметры, связанные с амплитудами перескока и отталкивания d- и p-состояний меди и кислорода следующим образом [5]:  $t = t_{\Phi}/U_p$ ,  $U = t_{\Phi}$  при  $U_d \gg U_p$ .

<sup>(4)</sup> Во избежание недоразумения еще раз подчеркнем, что термин "дырка" в данном случае означает образование дефекта спиновой текстуры и не совпадает с тем, что мы понимаем под дыркой при возбуждении основного состояния электронов в металлах.

<sup>(5)</sup> Рассматриваемый класс образован множеством всех взаимно простых чисел  $p$  и  $q$ , отношение которых принадлежит интервалу  $0 < p/q < 1$ .

<sup>(6)</sup> Термин "анион" был предложен в работе Вильчека [24] как производное от слова any.

<sup>(7)</sup> В настоящем обзоре мы ограничимся основными утверждениями, отсылая читателя к обширной литературе (см., например, [30]).

<sup>(8)</sup> Сингулярность калибровочного преобразования есть следствие неперIODичности функции  $f$  при повороте на  $2\pi$  и означает переход на следующем листе римановой поверхности к другой компоненте волновой функции.

<sup>(9)</sup> Приставка "ани" в данном случае отражает ту стадию обсуждения, когда значение параметре  $\theta$  не определено.

<sup>(10)</sup> В терминах операторов рождения бозе-частиц условие твердого кора [34]  $(b_i^\dagger)^2 = 0$  исключает оккупацию состояния двумя бозонами.

<sup>(11)</sup> Существование сингулярных точек связано в условиях допинга с тороидальной компактификацией.

<sup>(12)</sup> Мы обсуждаем возможность добавок к действию. Необходимость таких слагаемых существует в связи с тем, что состояния возбуждений в двумерных системах реализуют представления группы кос.

<sup>(13)</sup> Способ компактификации зависит от граничных условий на поле  $\mathbf{n}$  или  $\mathbf{z}$ .

<sup>(14)</sup> При наличии допинга группа симметрии  $SU(2)$  понижается до  $U(1)$ .

<sup>(15)</sup> Выражение (4.14) можно рассматривать как фиксированную точку (в смысле ренормгруппы) в пространстве  $(2+1)D$ -лагранжианов.

<sup>(16)</sup> Кэлеровым многообразием называется комплексное дифференцируемое многообразие с эрмитовой метрикой, обладающей потенциалом. Явное выражение для него в случае  $CP^1$ -скирмионной системы приведено в работе [93].

<sup>(17)</sup> Для концентрации  $n = 10^{14} \text{ см}^{-2}$  и  $\Phi_0 = 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$  статистическое магнитное поле  $b = 10^7 \text{ Гс}$ .

<sup>(18)</sup> Строго говоря, поля  $\mathbf{a}_\mu$  в (4.10) и (4.7) взаимно дуальны. Свойство дуальности подробно обсуждается в п. 8 и 11.

<sup>(19)</sup> Одинаковое обозначение различных величин, как мы надеемся, не должно привести к недоразумению, так как смысл величин в разных параграфах различен и оговаривается отдельно.

<sup>(20)</sup> Представления группы магнитных трансляций совпадают с проективными представлениями группы трансляций решетки.

<sup>(21)</sup> Анионы рассматриваются здесь как фермионы, находящиеся во "внешнем" статистическом магнитном поле.

<sup>(22)</sup> Наибольшая щель возникает при  $\Phi/\nu = 1/2$  для треугольной решетки и при  $\Phi/\nu = 2$  для гексагональной [106].

<sup>(23)</sup> Обратим внимание на то, что рассматриваемую роль амплитуды перескока  $t_c$  по диагонали в квадратной решетке может играть амплитуда  $\tilde{t}_c$  перескока в направлении, перпендикулярном слоям [116].

<sup>(24)</sup> Волновая функция основного состояния частицы, находящейся в двоякопериодическом потенциале решетки и во внешнем магнитном поле, изучалась в работах [91].

<sup>(25)</sup> В "состоянии дробного квантового эффекта Холла" при  $T > T_c$  электрический заряд  $Q$  в коммутаторе (9.8) не сокращается.

<sup>(26)</sup> В данном случае речь идет о магнитном заряде, возникающем вследствие компактификации решеточной теории. С его помощью учитывается эффект Березинского—Костерлица—Таулесса.

<sup>(27)</sup> Соответственно этому увеличивается и число нетривиальных петлевых циклов в выражении для среднего значения оператора Вильсона (10.3).

<sup>(28)</sup> Одним из аргументов в пользу того, что замыкание по оси  $z$  происходит не в той же плоскости, а в соседних, может быть следующее соображение. Известно, что при малой анизотропии в тонких по сравнению с толщиной блоховской стенки пленках домены в пленке не образуются. Мы встречаем в рассматриваемой ситуации именно такое соотношение пространственных масштабов (ср., однако, с предположениями работы [32]).

<sup>(29)</sup> Мы рассматриваем здесь простейший случай  $l = 1$  возможной симметрии  $Z_{N_1} \times \dots \times Z_{N_l}$  на решетке  $R_l^1$  [184].

<sup>(30)</sup> Ренормгрупповой анализ [191] уточняет рассматриваемую картину.

<sup>(31)</sup> Наборы  $(n_4, m_4)$  и  $(n_3, m_3)$  чисел соответствуют циклам  $S_1$  и  $S^1$  и двум несвязанным моделям часов.

<sup>(32)</sup> Это справедливо для незамкнутого многообразия  $M_4$ . Для замкнутого многообразия и в случае  $U(1) \subset SO(3)$  произведение  $kn$  есть кратное 4 целое число, где  $n = 1/4$  — топологический заряд [199].

<sup>(33)</sup> В частности, при рассмотрении дробного квантового эффекта Холла с пространственно-трехмерной точки зрения статическая холловская проводимость зависит от периода обратной решетки вдоль оси  $z$  [202].

<sup>(34)</sup> Гамильтониан равен нулю во всех не зависящих от метрики топологических теориях. Поэтому вклад в статистическую сумму будет определяться размерностью пространства состояний.

<sup>(35)</sup> Зависимость от метрики плоского пространства в (12.18) и нарушение диффеоморфной инвариантности возникли из-за фиксации калибровки  $A_0 = 0$ .

<sup>(36)</sup> Под поляризацией имеется в виду определенный выбор переменных, одну из которых мы называем "координатой", а вторую, канонически сопряженную по отношению к "координате", мы называем "импульсом".

<sup>(37)</sup> Трудности экспериментальной проверки существования состояний с нарушенной симметрией относительно Р- и Т-инверсий весьма значительны. Так, например, контраргументы в связи с тем, что эксперимент [128] подтвердил костерлиц-таулессовский механизм корреляций вихрей, основаны на экспериментальном обнаружении перехода лишь в достаточно тонких пленках. Поэтому можно думать, что двумерное пространство пленки, а не отдельной плоскости, дает переход Костерлица—Таулесса. Этот пример типичен и хорошо иллюстрирует трудности при интерпретации экспериментальных результатов.

<sup>(38)</sup> Обратим внимание на то, что в теории БКШ оставшаяся симметрия есть  $Z_2$  [262].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bednorz J.G., Muller K.A.//Zs. Phys. K1. B. 1986. Bd. 64. S. 189.
2. Wu M.K., Ashburn J.R., Torng C.J., Hor P.H., Meng R.L., Goo L., Huang Z.J., Wang Y.O., Chu C.W.//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 908.
3. Квантовый эффект Холла: Пер. с англ./Под ред. Р. Пренджа, С. Гирвина. — М.: Мир, 1989.
4. Hubbard J.//Proc. Roy.Soc. Ser. A. 1963. V. 276. P. 238.
5. Anderson P.W.//Phys. Rep. 1989. V. 184. P. 195.
6. Gutzwiller M.// Phys. Rev. Ser. A. 1965. V. 137. P. 1726.
7. Anderson P.W.//Ibidem, 1959. V. 115. P. 2.
8. Anderson P.W.//Sol. State Phys./Ed. F. Seitz, D. Turlull. — New York: Academic Press. 1963. V. 14: P. 99.
9. Kotliar G.//Phys. Rev. Ser. B. 1988. V. 37. P. 3664.
10. Kivelson S.A., Rokhsar D.S., Sethna J.P.//Ibidem. 1987. V. 35. P. 8865.
- [11] Marston J.B.//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 17. P. 1914.
12. Affleck I., Marston J.B.//Phys. Rev. Ser. B. 1988. V. 37. P. 3774; 1989. V. 39. P. 11538.
13. Anderson P.W.//Mat. Res. Bull. 1973. V. 8. P. 153.
14. Anderson P.W.// Science. 1987. V. 235. P. 1196.
15. Sacndev S.//Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 4502.
16. Anderson P.W.//Phys. Scripta. Ser. T. 1989. V. 27. P. 60.
17. Ebner C., Stroud D.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 165.
18. Morgenstern I., Muller K. A., Bednorz J.C.// Physica B. 1988. V. 152. P. 85.
19. Khveshchenko D.V., Wiegmann P.B.//Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 4. P. 17.
20. Ioffe L.B., Lee-kin A.I.//Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 8988.
- [21] Wen X.G., Zee A.// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2873.
22. Laidlaw M., De Witt C.// Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 1375.
23. Leinaas J.M., Myrneim J.//Nuovo Cimento. Ser. B. 1977. V. 37. P. 1.
24. Goldin G.A., Menikoff R., Sharp D.H.// J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1664.
25. Wilctek F.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1144; V. 49. P. 957.

26. *Wu Yong-Shi*//Ibidem. 1984. V. 52. P. 2103; V. 53. P. 111.
27. *Wen X.G., Zee A.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 461.
28. *Laughlin R.B.*// Science. 1988. V. 242. P. 525.
29. *Artin E.*// Ann. Math. 1947. V. 48. P. 101.
30. *Wadati, Deguchi, Akutsu Y.*// Phys. Rep. 1989. V. 180. P. 248.
- [31] *Homa C.B., Laughlin R.B., Fetter A.L.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 8745.
32. *Halperin B.L., March-Russel J., Wilczek F.*// Ibidem. P. 8726.
33. *Wen X.G., Zee A.*//Ibidem. 1990. V. 41. P. 240.
34. *Ruckenstein A.E., Hirschfeld P.J., Appel J.A.*// Ibidem. 1987. V. 36. P. 857.
35. *Canright G.S., Girvin S.M.*// Science. 1990. V. 247. P. 1197.
36. *Wilczek F., Zee A.*//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2111.
37. *Wilczek R., Zee A.*//Ibidem. 1983. V. 51. P. 2250.
38. *Polyakov A.M.*// Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 3. P. 325.
39. *Mackenzie R., Wilczek F.*// Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 2827.
40. *Polychronakos A.P.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 324. P. 597.
- [41] *Haldane F.D.M.*// Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 635.
42. *Shortly B. Sriram*// Ibidem. P. 639.
43. *Kalmeyer V., Laughlin R.B.*// Ibidem. 1987. V. 59. P. 2095.
44. *Kalmeyer V., Laughlin R.B.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 11879.
45. *Wen X.G., Wilczek P., Zee A.*//Ibidem. P. 11413.
46. *Laughlin R.B.*// Ann. Phys. N.Y. 1989. V. 191. P. 163.
47. *Wiegmann P.B.*// Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 821.
48. *Dzyaloshinskii I.E., Polyakov A.M., Wiegmann P.B.*//Phys. Lett. 1988. Ser. A. V. 127. P. 112.
49. *Read N., Sachdev S.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 319. P. 609.
50. *Wu Y.S., Zee A.*// Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 147. P. 325.
- [51] *Wu Y.S., Zee A.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 272. P. 322.
52. *Din A.M., Zakrewski W.J.*//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 146. P. 341.
53. *Wen X.G., Zee A.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1937.
54. *Schwartz A.*// Phys. Math. Lett. 1977. V. 2. P. 247.
55. *Siegel W.*// Nucl Phys. Ser. B. 1979. V. 156. P. 135.
56. *Schonfeld J.F.*// Ibidem. 1981. V. 185. P. 157.
57. *Jackiw R., Templeton S.*// Phys. Rev. Ser. D. 1981. V. 23. P. 2291.
58. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975.
59. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.*// Ann. Phys., New York. 1982. V. 140. P. 372; P. 420; 1988. V. 185. P. 406 (E).
60. *Redlich A.N.*// Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 18; Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 29. P. 2366.
- [61] *Jackiw R.*// Ibidem. P. 2375.
62. *Hagen C.R.*// Ann. Phys., New York. 1984. V. 157. P. 342.
63. *Jaroszewicz T.*// Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 146. P. 337.
64. *Jaroszewicz T.*//Ibidem. 1985. V. 159. P. 299.
65. *Белавин А.А., Поляков А.М.*//Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 503.
66. *Alvarez O.*//Commun. Math. Phys. 1985. V. 100. P. 279.
67. *Henneaux M., Teitelboim C.*// Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 689.
68. *Pisarski R.D.*//Phys. Rev. Ser. D. 1986. V. 34. P. 3851.
69. *Hosotani Y.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2785.
70. *Laughlin R.B.*//Ibidem. 1988. V. 60. P. 2677.
- [71] *Протогенов А.П.*// I Всесоюзное совещание по высокотемпературной сверхпроводимости: Тезисы докладов. — Харьков, 1988. — Т. 1. С. 16.
72. *Protopenov A.P.*// Phys. Lett. Ser. A. 1990. V. 114. P. 269.
73. *Voruganti P.*//Ibidem. Ser. B. 1989. V. 223. P. 181.
74. *Voruganti P., Doniach S.*// Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 9358.
75. *Wiegmann P.B.*//Physica C. 1988. V. 153. P. 103.
76. *Wiegmann P.B.*//Phys. Scripta. Ser. T. 1989. V. 27. P. 160.
77. *Baskaran G., Anderson P. W.*// Phys. Rev. Ser. B. 1988. V. 37. P. 580.
78. *Baskaran G., Shankar R.*//Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 2. P. 1211.
79. *Affleck I., Zou Z., Hsu T., Anderson P.W.*// Phys. Rev. Ser. B. 1988. V. 38. P. 745.
80. *Dagotto E., Fradkin E., Moreo A.*// Ibidem. P. 2926.
- [81] *Zou Z.*// Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 131. P. 197.
82. *Polychonakos A.P.*// Ibidem. Ser. B. 1987. V. 192. P. 385; Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 281. P. 241.
83. *Elitzir S., Moore G., Schwimmer A., Seiberg N.*// Ibidem. 1989. V. 326. P. 108.
84. *Nielsen H.B., Ninomiya*//Ibidem. 1981. V. 185. P. 20; V. 193. P. 173; Phys. Lett. Ser. B. 1981. V. 105. P. 219.

85. *Khveshchenko D., Wiegmann P.B.*// Ibidem. 1989. V. 225. P. 279.
86. *Baskaran G.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2524.
87. *Zou Z.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 2262.
88. *Witten E.*//Commun. Math. Phys. 1989. V. 117. P. 353.
89. *Witten E.*//Ibidem. V. 121. P. 351.
90. *Aharonov Y., Cosher A.*//Phys. Rev. Ser. A. 1979. V. 19. P. 2461.
- [91] *Дубровин Б.А., Новиков С.Я.*//ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 1006.
92. *Wen X.G.*//Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 7387.
93. *Din A.N.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 330 P. 757.
94. *Березин Ф.Л.*//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38. С. 1116; 1975. Т. 39. С. 363.
95. *Ioffe L.B., Wiegmann P.B.*// Phys. Rev. Lett 1990. V. 65. P. 653.
96. *Lee P.A.*//Ibidem. 1989. V. 63. P. 680.
97. *Fetter A.L., Homa C.B., Laughlin R.B.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 9679.
98. *March-Russel J., Wilczek K.*// Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 1066.
99. *Ландау Л.Д.*//ЖЭТФ. 1941. Т. II. С. 592,
100. *Banks T., Lykken J.D.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 336. P. 500.
- [101] *Wiegmann P.B.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2070.
102. *Khveshchenko D.V., Kogan Y.I.*//Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 4. P. 999.
103. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М., Мир, 1968.
104. *Hosotani Y., Chakravarty S.*//Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 42. P. 342.
105. *Khveshchenko D.V., Kogan Y.I.* Preprint. CERN-TH-5962/90.
106. *Hasegawa Y., Lederer P., Rice T.M., Wiegmann P.S.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 1657.
107. *Азбель М.Я.*//ЖЭТФ. 1964, Т. 19. С. 634.
108. *Hofstadter D.R.*//Phys. Rev. Ser. B. 1976. V. 14. P. 2239.
109. *Wannier C.H.*// Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1978. V. 88. P. 757.
110. *Wannier G.H., Obermaier G.M., Ray R.*//Ibidem. 1979. V. 93. P. 337.
- [111] *Montambaux G.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 1657.
112. *Hatsugai Y., Kohmoto M.*// Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 42. P. 8282.
113. *Анфимов Д.С., Белов А.А, Лозовик Ю.Е., Мандельштам В.А.*//Письма ЖЭТФ. 1990. Т. 5. С. 880.
114. *Kohmoto M.*//Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 11943.
115. *Hasegawa Y., Hatsugai Y., Kohmoto M., Montambaux G.*//Ibidem. 1990. V. 41. P. 9174.
116. *Montambaux G., Kohmoto M.*// Ibidem. P. 11417.
117. *Kunst Z., Zee A.* Preprint ETH/TP-91-2, NSE-ITP-91-14L — 1991.  
*Zee A.*// Int. J. Mod. Phys. Ser. B. 1991. V. 5. P. 529.
118. *Harper P.G.*// Proc. Phys. Soc. bond. Ser. A. 1955. V. 68. P. 874.
119. *Aubry S., Andre G.*// Ann. Isr. Phys. Soc. 11980. V. 3. P. 133.
120. *Kohmoto M., Hatsugai Y.*//Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 9527.
- [121] *Wen X.G., Zee A.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 316. P. 641.
122. *Kohmoto M.*// Ann. Phys., New York 1985. V. 160. P. 343.
123. *Jackiw R.*//Current algebra and anomalies/Eds. Treiman et al. Singapore a.o.: World Scientific, 1985.— P. 211.
124. *Zak J.*// Phys. Rev. Ser. A. 1964. V. 134. P. 1602.
125. *Thoukss D.J., Kohmoto M., Nightingale P., den Nijs M.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 405.
126. *Avron J., Sellaer R., Simon B.*// Ibidem. 1983. V. 51. P. 51.
127. *Avron J., Yaffe L.C.*//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 2084.
128. *Артеменко С.Н., Горлова И.Г., Латышев Ю.И.*//Письма ЖЭТФ. 1989. Т. 49. С. 352.
129. *Новиков С.П.*//ДАН СССР. 1981. Т. 257. С. 538.
130. *Новиков С.П.*// Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики". 1983. Т 23 С 3
- [131] *Lederer P., Poilblanc D., Rice T.M.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 1,519.
132. *Poilblanc D., Hasegawa Y., Rice T.M.*// Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 1949.
133. *Poilblanc D.*//Ibidem. 1989. V. 40. P. 7376.
134. *Anderson P.W., Shastry B.S., Hristopulos D.*//Ibidem. P. 8939.
135. *Poilblanc D.*// Ibidem. 1990. V. 41. P. 4827.
136. *Liang S., Trivedi N.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 232.
137. *Ogata M., Doucot B., Rice T.M.* Preprint ETH-TH/90-18. — 1990.
138. *Mele E.J.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 2670.
139. *Zou Z., Doncot B., Shastry B.S.*//Ibidem. V. 39. P. 11424.
140. *Laughlin R.B., Zou Z.*// Ibidem. V. 41. P. 664.
- [141] *Girvin S.M., Mac Donald A.H., Platzman P.M.*// Ibidem. 1986, V. 33. P. 2481.
142. *Girvin S.M., Mac Donald A.H., Fischer M.P.A., Rey S.-J., Sethna J.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1671.
143. *Johnson M.D., Canright G.S.*// Phys. Rev. Ser. B. 1990. Y. 41. P. 6870; V. 42. P. 7931.

144. *Kриве И.В., Рожавский АС.*// УФН. 1987. Т. 152. С. 33.
145. *Fröhlich J., Marchetti P.A.*// Lett. Math. Phys. 1988. V. 16. P. 347; Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 177.
146. *Müller V.F.*// Zs. Phys. Ю. C. 1990. Bd. 47. S. 301.
147. *Lücher M.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 326. P. 557.
148. *Coste A., Lücher M.*// Ibidem. V. 323. P. 631.
149. *Fradkin E.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 322; Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 42. P. 570.
150. *Dunne G.V., Jackiw R., Trugenberger C.A.*// Ibidem. Ser. D. 1990. V. 41. P. 661.
- [151] *Hagen C.R.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 1025.
152. *Semenoff G.W.*// Ibidem. 1988. V. 61. P. 517; 1989. V. 63. P. 1026.
153. *Boyanovsky D.*// Phys. Rev. Ser. D. 1990. V. 42. P. 1179.
154. *Canright G.S., Girvin S.M., Brass A.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2291.
155. *Jordan P., Wigner E.*// Zs. Phys. 1928. Bd. 47. S. 631.
156. *Mete E.J.*// Phys. Scripta. Ser. T. 19\*9. V. 27. P. 82.
157. *Kadanoff L.P., Ceva H.*// Phys. Rev. Ser. B. 1971. V. 3. P. 3918.
158. *Fradkin E., Kadanoff L.P.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1980. V. 170. P. 1.
159. *Fradkin E., Susskind L.*// Phys. Rev. Ser. D. 1978. V. 17. P. 2637.
160. *Aitchison I.J.R., Mavromatos N.E.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2684.
- [161] *Lee D.-H., Kane C.L.*// Ibidem. 1990. V. 64. P. 1313.
162. *Kitazawa K.*// Ibidem. V. 65. P. 1275.
163. *Gerbert P.H.*// Phys. Rev. Ser. D. 1990. V. 42. P. 543.// Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6. P. 173.
164. *Rejaei B., Beenakker C.W.J.*// Phys. Rev. Ser. B. 1991. V. 43. P. 11392.
165. *Lykken J.D., Sonnenschein J., Weiss N.*// Ibidem. Ser. D. 1990. V. 42. P. 2161.
166. *Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 340. P. 403.
167. *Lee D.H., Fischer M.P.A.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 903.
168. *Fischer M.P.A., Lee D.H.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 2756.
169. *Chen Y.-H., Wilczek F., Witten E., Halperfn B.I.*// Intren. J. Mod. Phys. Ser. B. 1989. V. 3. P. 1001.
170. *Elitzur S.*// Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 12. P. 2259.
- [171] *Read N.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 86.
172. *Zhang S., Hansson T., Kivelson S.*// Ibidem. P. 82. ,
173. *Jain J.K., Read N.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 2723.
174. *Girvin S.M., McDonald A.H.*// Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1252.
175. *'t Hooft G.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1978. V. 138. P. 1; 1979. V. 153. P. 141.
176. *'t Hooft G.*// Ibidem. 1979. V. 153. P. 141.
177. *Ragiadakos Ch., Viswanatnan K.S.*// Phys. Lett. Ser. B. 1980. V. 93. P. 262.
178. *Olesen P.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1982. V. 200. P. 381.
179. *Nelson D.R., Seung S.*// Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 39. P. 9153.
180. *Obuknov S.P., Rubinstein M.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1279.
- [181] *Kivelson S., Kallin C., Arovas D.P., Schriffer J.R.*// Phys. Rev. Ser. B. 1987. V. 36. P. 1620.
182. *Protopenov A.P.*// Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 142. P. 285.
183. *Wu Y.S., Hatsudai Y., Kohmoto M.*// Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 659.
184. *Shapere A., Wilczek F.*// Nud. Phys. Ser. B. 1989. V. 320. P. 669.
185. *Cardi J., Rabinovid E.*// Ibidem. 1982. V. 205. P. 1.
186. *Cardi J.*// Ibidem. P. 17.
187. *Goldhaber A.S., Kivelson S.A.*// Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 255. P. 44.
188. *Witten E.*// Ibidem. 1979. V. 86. P. 283.
189. *Affleck L., Harvey J., Palla L., Semenoff G.*// Nud Phys. Ser. B. 1989. V. 325. P. 575.
190. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.*// J Phys. Ser. C. 1973. V. 6. P. 1181.
- [191] *Rey S.-J., Zee A.*// Nucl Phys. Ser. B. 1991. V. 353. P. 897.
192. *Kramers H.A., Wannier G.H.*// Phys. Rev. 1941. V. 60. P. 252.
193. *Jose J., Kadanoff L., Kirkpatrick S., Nelson D.*// Ibidem. Ser. B. 1977. V. 16. P. 1217.
194. *Elitzur S., Pearson R., Shigemitsu J.*// Ibidem. Ser. D. 1979. V. 19. P. 3698.
195. *Horn D., Weinstein M., Yankiewicz Q.*// Ibidem. P. 3715.
196. *Guth A., Ukawa A., Windey P.*// Ibidem. 1980. V. 21. P. 1013.
197. *Greiter M., Wilczek F.*// Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 4. P. 1063.
198. *Jain J.K.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 199; Phys. Rev. Ser. B. 1989. V. 40. P. 8079.
199. *Di/kgraaf R., Witten E.*// Commun. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 393.
200. *Libby S.B., Zou Z., Laughlin R.B.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 348. P. 693.

- [201] Дзялошинский И.Е.//Письма ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 486.
202. Halperin B.I.// J. Appl. Phys. 1987. V. 26. P. 1913.
203. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.// Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 241. P. 333.
204. Moore G., Seiberg N.// Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 212. P. 451; 1989. V. 220. P. 422.
205. Jones V.F.R.// Am Math. 1987. V. 126. P. 335.
206. Witten E.// Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 330. P. 285.
207. Smit D.J.//Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 1.
208. Awoda M.// Ibidem. V. 129. P. 329.
209. Bos M., Nair V.P.// Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 223. P. 61; Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 5. P. 959.
210. Labastida J.M.F., Ramallo A.V.// Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 227. P. 92; V. 228. P. 214.
- [211] Killingback T.P.// Ibidem. V. 219. P. 448; V. 223. P. 357.
212. Guadagnini E., Martelloni M., Mintchev M.// Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 330. P. 575; V. 333. P. 581; Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 227. P. 111; V. 228. P. 489.
213. Dunne G.V., Jackiw R., Trugenberger C.A.// Ann. Phys., New York 1989. V. 194. P. 197.
214. Polychronakov A.P.// Ibidem. 1990. V. 203. P. 231.
215. Протогенов А.П.// Международный семинар по теории высокотемпературной сверхпроводимости. - Доклады. - Дубна, ОИЯИ, 1990; ФНТ. 1991. Т. 17. С. 1249.
216. Labastida J.M.F., Utiyama P.M., Ramallo A.V.// Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 348. P. 651.
217. Alvarez-Gaume L., Gomez C., Sierra G.// Ibidem. 1989. V. 319. P. 155; 1990. V. 330. P. 347; Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 220. P. 142.
218. Kitazawa Y., Murayama H.// Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 338. P. 777; Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 11101.
219. Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.//Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 649.
220. Affleck I.// Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 746.
- [221] Bloete H.W.J., Cardy J.L., Nightingale M.P.// Ibidem. P. 742.
222. Verlinde E.// Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 300. P. 360.
223. Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.// Ibidem. 1984. V. 247. P. 83.
- 224. Fröhlich J., King C.// Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 197.**
225. Balatsky A.V.// Phys. Rev. Ser. B. 1991. V. 43. P. 1257.
- Balatsky A., Fradkin E.// Ibidem. P. 10622; Balatsky A., Stone M.//Ibidem. P. 8035.
226. Alekseev A., Snatashvili S.//Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 197.
227. Dotsenko V.S., Fateev V.A.// Nucl. Phys. Ser. B, 1984. V. 240. P. 312; 1985. V. 251. P. 691; Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 154. P. 291.
228. Tsuchiya A., Kanie Y.// Lett. Math. Phys. 1987. V. 13. P. 303.
229. Hansson T.H., Karlhede A.// Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 1937.
230. Goldhaber A.S., Mackenzie R., Wilczek F.// Ibidem. P. 21.
- [231] Dowker J.S.// J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. 3521.
232. Arovas D.P., Schrieffer R., Wilczek F., Zee A.// Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 251. P. 117.
233. Dowker J.S., Banach R.// J. Phys. Ser. A. 1978. V. 11. P. 2255.
234. Цвеллик А.М.//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1329.
235. Paul S.K., Khare A.//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 174. P. 470.
236. Jakobs L.// Physica. Ser. B. 1988. V. 152. P. 288.
237. Hetrick J.K., Hosotani Y., Lee B.-H. Preprint TPI-MINN-90/40-T. — 1990.
238. Kiehl R.E. et al.// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2082.
239. Uenura et al. // Ibidem 1989. V. 62. P. 2317.
240. Khveshchenko D.V., Kogan Y.I.// Int. J. Mod. Phys. Ser. B. 1990. V. 4. P. 631.
- [241] Lyons K.B. et al.// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2949; Phys. Rev. Ser. B. 1991. V. 43. P. 11408.
242. Spielman S. et al.// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 123.
243. Varma C.M., Littlewood P.B., Schmitt-Rink S., Abrahams K., Ruckenstein A.E.//Ibidem. 1989. V. 63. P. 1996.
244. Svistunov V.M. et al.//Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 4. P. 111.
245. Aronov A.G., Mirlin A.D.// Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 152. P. 371.
246. Khveshchenko D.V., Kogan Y.I.//Mod. Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 4. P. 317.
247. Гальперин Ю.М., Карпов В.Г., Козуб В.И.//ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1123.
248. Gammel P.L. et al.// Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2592.
249. Artemenko S.N., Gorlova I.G., Latyshev Yu.I.//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 138. P. 428.
250. Stamp C.E., Forro L., Ayache C.// Phys. Rev. Ser. B. 1988. V. 38. P. 2847.
- [251] Yeh N.C., Tsuei C.C.// Ibidem. 1989. V. 39. P. 9708.

252. *Martin S. et al.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 677.  
253. *Артеменко С.Н., Горлова И.Г., Латышев Ю.И.*// Письма ЖЭТФ. 1989. Т. 49. С. 566.  
254. *Nelson D.R., Kosterlitz J.M.*// Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 1201.  
255. *Матизен Э.В.*// III Всесоюзный симпозиум «Неоднородные электронные состояния», — Тезисы докладов. — Новосибирск, 1989. — С. 9, 71.  
256. *Halperin B.I., Nelson D.R.*//J. Low-Temp. Phys. 1979. V. 36. P. 599.  
257. *Minnhagen P.*//Rev. Mod. Phys. 1987. V. 59. P. 1001.  
258. *Ioffe L.B., Kalmeyer V., Wiegmann P.B.*// Phys. Rev. Ser. B. 1991. V. 43. P. 1219.  
259. *Nagaosa N., Lee P.A.*// Ibidem. P. 1233.  
260. *Palstra T.T.M., Batlogg B., Scheemeyer L.F., Waszczak J.V.*//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 1662.  
[261] *Baskaran G., Zou Z., Anderson P.W.*// Sol. State Commun. 1987. V. 63. P. 973.  
262. *Weinberg S.*// Prog. Theor. Phys. (Suppl.). 1986. V. 86. P. 43.  
263. *Iengo R., Lechner K.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 346. P. 551.  
264. *Wen X.G., Dagotto K., Fradkin E.*// Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 42. P. 6110.  
265. *Einarsson T.*// Phys. Rev. Lett. 1999. V. 64. P. 1995.  
266. *Danielson U.*// Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 220. P. 137.  
267. *Соловьев М.А.*// Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 540.  
268. *Монастырский М.И.*// Поль Дирак и физика XX века. — М.: Наука, 1990.  
269. *Anderson P. W.*// Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 2264.  
270. *Krauss L., Wilczek F.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1221.  
[271] *Banks T.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 323. P. 90.  
272. *Giveon A., Malkin N., Rabinovici E.*// Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 238. P. 52.  
273. *Read N.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1502.  
274. *Khizhnik V.G., Potyakov A.M., Zamolodnikov A.B.*// Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 3. P. 819.  
275. *Drinfeld V.G.*// Proc. ICM Berkeley. 1986. P. 798.  
276. *Jimbo M.*// Lett. Math. Phys. 1986. V. 102. P. 537.  
277. *Wenzl H.*// Invent. Math. 1988. V. 92. P. 349.  
278. *Connes A.*// Pub. Math. IHES. 1986. V. 62. P. 257.  
279. *Xie X.C., He Song, Das Sarma S.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 649.  
280. *Wen X.G.*// Ibidem. V. 64. P. 2206; Phys. Rev. Ser. B. 1990. V. 41. P. 12838.  
[281] *Stone M.*// Ibidem. V. 42. P. 8388; Intern. J. Mod. Phys. Ser. B. 1991. V. 5. P. 509.  
282. *Beenakker C.W.J.*// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 216.  
283. *Mac Donald A.H.*// Ibidem. P. 220.  
284. *Stone M.*// I I I . J. Mod. Phys. Ser. B. 1990. V. 4. P. 1465.  
285. *Balachandran A.P., Ercolessi E., Morandi G., Srivastava A.M.*// Ibidem. P. 2057.

Статья поступила 29.01.92 г.