Март 1992 г. Том 162, № 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.872

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров

(Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН)

Если заряженная частица излучает электромагнитные волны, на нее действуют силы реакции со стороны излучаемого ею поля. В ряде задач теории излучения (например, в случае черепковского излучения, синхротронного излучения, ондуляторного излучения) оказывается, что энергия, теряемая частицей на излучение, равна работе сил торможения. В случае черенковского излучения это равенство выполняется на любом отрезке пути, а в случае синхротронного и опдуляторного излучения речь идет о среднем значении соответствующих величин за достаточно большой промежуток времени (например, за период обращения): среднее значение работы, совершаемой тормозящей силой, равно среднему значению излученной энергии.

Однако в общем случае такое равенство не имеет места. В этой статье мы рассмотрим общее соотношение, которое следует из закона сохранения энергии электромагнитного поля. Это соотношение определяет связь между работой сил торможения и излучаемой энергией.

В дальнейшем мы будем для простоты рассматривать поле в пустом пространстве, а в конце рассмотрим, к каким изменениям приводит учет преломляющих свойств среды.

Предположим, что для заданных плотностей тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ мы нашли решение уравнений Максвелла, т.е. определили электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Выберем в пространстве некоторый, вообще говоря, произвольный в широких пределах объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Тогда из уравнений Максвелла следует соотношение, справедливое для указанных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{E^2+H^2}{8\pi}\mathrm{d}V = -\int\limits_V \mathbf{jE}\,\mathrm{d}V - \frac{c}{4\pi}\int\limits_S [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}; \qquad (1)$$

здесь значок V под знаком интеграла означает, что интеграл берется по выбранному объему V, а значок S — что интеграл берется по поверхности S, ограничивающей этот объем.

Соотношение (1) называется законом сохранения энергии для электромагнитного поля. Величина

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \tag{2}$$

называется плотностью энергии электромагнитного поля. Интеграл от этой величины

$$W = \int_V w\mathrm{d}V = \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\mathrm{d}V, \tag{3}$$

взятый по объему V, дает полную энергию электромагнитного поля в объеме V. Таким образом, в левой части равенства (1) стоит скорость изменения энергии поля, заключенной в объеме V (или изменение энергии за единицу времени). Это изменение происходит за счет работы электрического поля E над токами **j** в объеме V (первое слагаемое в правой части равенства (1)) и за счет потока энергии через границу объема V— через поверхность S (второе слагаемое в правой части равенства (1)). Скалярное произведение $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ есть работа, совершаемая полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ над током $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ за единицу времени в единичном объеме, окружающем точку **r**. Соответственно работа электрического поля над токами в элементе объема $\mathrm{d}V$ за единицу времени равна

$$\mathrm{d}a = \mathbf{jE}\mathrm{d}V. \tag{4}$$

Второе слагаемое в левой части равенства (1) описывает поток электромагнитной энергии через поверхность S, ограничивающую объем V.

Введем вектор

$$\mathcal{P} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \tag{5}$$

Этот вектор называется вектором Пойнтинга и определяет поток энергии электромагнитного поля через поверхность S, окружающую объем V. Поток энергии через поверхность S записывается в виде

$$\Pi = \int_S \mathcal{P}\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\int_S [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{6}$$

Подчеркнем, что в закон (1) сохранения энергии электромагнитного поля входит поверхностный интеграл от вектора Пойнтинга (5) по всей поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Было бы неверно считать, что выражение

$$\mathrm{d}\Pi = \mathcal{P}\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{7}$$

дает поток энергии электромагнитного поля через элемент поверхности $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Действительно, закон сохранения (1) записан в интегральной форме и получен из соответствующего локального соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \frac{c}{4\pi}\mathrm{div}[\mathbf{EH}], \tag{8}$$

которое можно считать законом сохранения энергии электромагнитного поля в точке. В левой части равенства (8) стоит скорость изменения плотности энергии в данной точке поля, и эта величина складывается из работы поля над током в данной точке и из дивергенции вектора Пойнтинга в этой точке. Таким образом, изменение плотности энергии электромагнитного поля зависит не от вектора Пойнтинга, а от его дивергенции. Это означает, что вихревая часть вектора Пойнтинга не дает вклада в поток электромагнитной энергии, потому что дивергенция этой части равна нулю. Соответственно, интеграл по замкнутой поверхности (поток) от вихревой части вектора Пойнтинга равен нулю. Но поток вихревой части вектора Пойнтинга через элемент $d\mathbf{S}$ замкнутой поверхности может быть отличен от нуля. В этом случае соответствующая часть потока через элемент поверхности $d\mathbf{S}$ не дает никакого реального излучения. В настоящем параграфе мы будем рассматривать поток вектора Пойнтинга через всю поверхность, ограничивающую заданный объем, так что вопрос о локальном потоке энергии электромагнитного поля здесь не возникнет.

Закон сохранения энергии (1) дает связь интегральных энергетических величин, определяющих обмен энергией между полем и источниками. Эти величины — полная энергия электромагнитного поля, потери энергии источником на излучение электромагнитных волн и работа поля над источником. Уже из одного вида закона сохранения (1) следует, что поток энергии излучения (второе слагаемое в правой части равенства (1)) не равен только работе поля над источником, как можно было бы думать априори. Действительно, можно было бы думать, что если источник излучает электромагнитные поля, то на него действуют силы реакции со стороны излучаемого поля, причем работа этих сил реакции как раз равна излученной энергии (с обратным знаком). Закон (1) показывает, что это не так. Это было бы так, если бы полная энергия электромагнитного поля не менялась, т.е. если бы левая часть равенства (1) была равна нулю. Изменение полной энергии поля необходимо учитывать в балансе излучения.

Рассмотрим некоторые следствия из закона сохранения энергии (1) в применении к полю движущегося заряда.

Рассмотрим равномерно движущуюся в пустом пространстве заряженную частицу. Как известно, при движении заряда в пустоте с постоянной скоростью не возникает излучения. Поле равномерно движущегося заряда переносится в пространстве с той же скоростью, что и заряд, являющийся источником поля. При этом собственное поле никак не действует на движущийся заряд, не тормозит его, не отклоняет и не ускоряет. Следовательно, работа поля над зарядом равна нулю, т.е. в законе сохранения (1) $\mathbf{jE} = 0$ и первое слагаемое в правой части (1) отсутствует. Это видно, хотя бы из того, что в системе координат, где заряд покоится, его поле сферически симметрично и не ускоряет заряд. Тогда, в согласии с принципом относительности, поле не будет действовать и на равномерно движущийся заряд.

Построим плоскость так, чтобы она проходила через начало координат и была перпендикулярна скорости заряда. Пусть заряд движется вдоль оси z в положительном направлении. Тогда выбранная нами плоскость совпадает с плоскостью x, y. Рассмотрим полупространство $z > 0$ и примем его за объем V. Очевидно, выбранная нами плоскость может быть принята за поверхность S, ограничивающую объем V.

Выберем теперь два момента времени t_1 и t_2 следующим образом. В момент времени t_1 заряд находится вне объема V и далеко от границы S. Иными словами, момент времени t_1 находится далеко в прошедшем. Заряд движется по направлению к поверхности S, но находится от нее настолько далеко, что все его поле сосредоточено вне объема V. Точнее говоря, поле заряда отлично от нуля и в объеме V, но заряд еще находится на большом расстоянии от объема V, и поле его в объеме V настолько мало, что мы величиной этого поля можем пренебречь.

Момент времени t_2 выберем так, чтобы заряд к этому времени уже пересек границу S и ушел далеко от нее. В момент времени t_2 заряд уже находится в объеме V и притом настолько далеко от границы S, что поле заряда вне объема V пренебрежимо мало.

Проинтегрируем закон сохранения (1) по времени от момента t_1 до момента t_2. Как уже было сказано, в случае равномерного движения заряда $\mathbf{jE} = 0$, и мы получим

$$\int\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \mathrm{d}V \Bigg|_{t=t_2} - \int\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \mathrm{d}V \Bigg|_{t=t_1} = \frac{c}{4\pi} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int\limits_S [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{9}$$

В левой части равенства (9) стоит разность значений полной энергии поля, созданного движущимся зарядом в полупространстве V в моменты времени t_2 и t_1. Воспользуемся обозначением (3) для полной энергии поля и перепишем равенство (9)

$$W(t_2) - W(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int\limits_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{10}$$

Мы так выбрали моменты времени t_1 и t_2, что величиной $W(t_1)$ мы можем пренебречь по сравнению с $W(t_2)$. Таким образом,

$$W(t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int\limits_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{10'}$$

Будем отодвигать момент времени t_1 еще дальше в прошедшее, а момент времени t_2 еще далеко в будущее. В пределе величина $W(t_2)$ даст полную энергию электромагнитного поля, созданного движущимся зарядом в неограниченном пространстве, ибо та часть полной энергии поля, которая содержится вне объема V, в этом случае дает исчезающе малый вклад. Правая часть равенства (10') даст энергию, прошедшую через плоскость S за все время. Мы получим

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int\limits_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{11}$$

где

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \tag{12}$$

Интеграл по объему берется по всему пространству. Полученная величина W зависит от скорости заряда $\mathbf{v}$.

Соотношение (11) дает связь между энергией электромагнитного поля, созданного равномерно движущейся заряженной частицей, и потоком энергии этого поля.

Рассмотрим еще один пример. Пусть заряженная частица движется в положительном направлении оси z, приближаясь к началу координат, так что на больших расстояниях от начала координат скорость частицы равна $\mathbf{v}_1$. В некоторой области с линейными размерами L вблизи от начала координат скорость частицы меняется по закону, который мы не будем уточнять (для нас достаточно самого факта, что скорость меняется) и по величине и по направлению. Затем частица вылетает из этой области, скорость ее принимает значение $\mathbf{v}_2$, которое в дальнейшем уже не меняется. Для простоты будем предполагать, что скорость $\mathbf{v}_1$, так же как и скорость $\mathbf{v}_2$, направлена в положительном направлении оси z. Это предположение никак не ограничит общности рассуждений.

Поскольку в области с размерами L, расположенной вблизи от начала координат, частица движется ускоренно, возникнет излучение электромагнитных волн. Применим к рассмотрению этого процесса закон сохранения (1). Сначала выберем объем V и ограничивающую этот объем поверхность S. Выбор объема и поверхности определяет величину интегралов, входящих в (1). Примем за V объем, заключенный между двумя параллельными плоскостями P_1 и P_2. Плоскости P_1 и P_2 перпендикулярны оси z и расположены так, что область L, в пределах которой заряд движется с ускорением, расположена между P_1 и P_2. Плоскость P_1 пересекает ось z при достаточно большом по абсолютной величине и отрицательном значении z, а плоскость P_2 пересекает ось z при большом и положительном значении z. Таким образом, выбранные плоскости находятся достаточно далеко от области L и по обе стороны от нее. Расположение плоскостей P_1, P_2 и области L, в пределах которой заряженная частица движется с ускорением, показано на рис. 1.

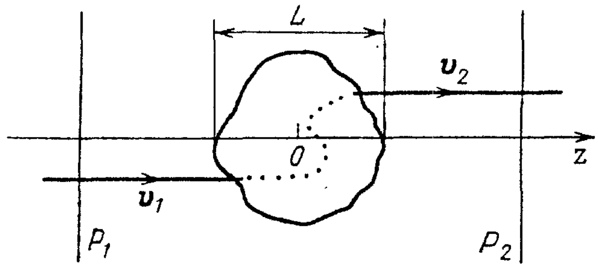

Рис. 1

Примем за объем V часть пространства, заключенную между плоскостями P_1, P_2, а сами эти плоскости — за поверхность S, ограничивающую объем V. Тем самым мы задали области интегрирования для всех интегралов, входящих в закон сохранения (1).

Перед тем, как рассматривать закон сохранения энергии электромагнитного поля в выбранном объеме V, попытаемся представить себе, каковы физические особенности поля в рассматриваемом случае, изображенном на рис. 1. До того, как заряд попадет в область V, он движется с постоянной скоростью v_1. В это время электромагнитное поле есть поле равномерно движущегося заряда. Это поле велико вблизи от заряда и быстро спадает по мере удаления от движущегося заряда. Электромагнитное поле равномерно движущегося в пустоте заряда есть функция от аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t$, т.е. поле перемещается в пространстве с той же скоростью v_1, что и заряд, создающий это поле. Картина поля на подлете заряда к области схематически изображена на рис. 2. Область, где поле заряда велико, заштрихована.

Пока нам достаточно этих качественных замечаний. Когда заряд попадает в область L, он начинает, двигаться с ускорением. При этом возникает излучение электромагнитных волн; т.е. возникает волновой пакет, состоящий из волн, которые расходятся во все стороны от области L и уходят на бесконечность со скоростью света. Эти волны уносят с собой энергию. Кроме того, излучаемые волны воздействуют на движущийся заряд, так что величина $\mathbf{jE}$ в законе сохранения отлична от нуля. После того, как заряд вышел из области L, он движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. Полное электромагнитное поле складывается из поля излучения (т.е. из волн, идущих от области L со скоростью света) и из поля заряда, движущегося равномерно со скоростью v_2. Поле равномерно движущегося заряда иногда также называют увлекаемым полем. Это поле зависит от координат и времени в комбинации $\mathbf{r} - \mathbf{v}_2 t$, т.е. перемещается в пространстве как целое со скоростью заряда $\mathbf{v}_2$. Поскольку поле заряда перемещается в пространстве со скоростью заряда $\mathbf{v}_2$, а поле излучения распространяется со скоростью света c, то волновой пакет излучения рано или поздно отделится от поля заряда, т.е. в тех областях пространства, где поле равномерно движущегося заряда будет велико, поле излучения будет пренебрежимо мало, и наоборот, там, где поле излучения будет заметно велико, поле заряда будет пренебрежимо мало. Говоря другими словами, произойдет пространственное разделение поля заряда и поля излучения. Пространственная картина поля после разделения схематически изображена на рис. 3.

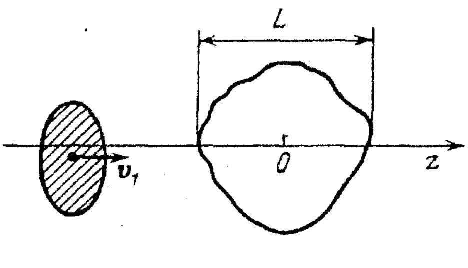

Рис.2

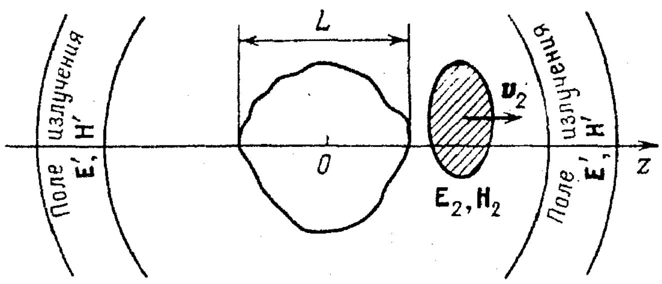

Рис. 3

Поле равномерно движущегося заряда, имеющего скорость v_1, мы будем обозначать индексом 1 ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$); поле заряда, равномерно движущегося со скоростью $\mathbf{v}_2$, обозначим через $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Поле излучения будем обозначать штрихами: $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$. Теперь проинтегрируем закон сохранения (1) по времени от момента времени t_1 до момента t_2. Мы получим

$$\int\limits_V \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V\Big|_{t=t_2} - \int\limits_V \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V\Big|_{t=t_1} = \\ = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int\limits_V \mathbf{E}\mathbf{j}\,\mathrm{d}V - \frac{c}{4\pi}\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int\limits_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]\,\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{13}$$

В левой части полученного равенства стоит разность полных энергий поля, взятых в моменты времени t_2 и t_1. Эта разность, как видно из правой части равенства, складывается из работы тормозящей силы, действующей на заряд со стороны поля, и из потока электромагнитной энергии через поверхность S, ограничивающую объем V, причем имеются в виду полная работа за время от t_1 до t_2 и полная излученная энергия за тот же промежуток времени.

Напомним, что выбор объема V и поверхности S в формуле (13) мы уже сделали (см. рис. 1 и относящийся к нему текст). Добавим еще, что плоскость P_2 мы расположим в той области, где волновой пакет излучения уже отделился от поля заряда, и поле заряда уже не перекрывается с полем излучения. В дальнейшем мы оценим величину расстояния области L, на котором происходит разделение поля заряда и поля излучения. Теперь определим моменты времени t_1 и t_2, т.е. уточним пределы интегрирования по времени. Момент времени t_1 выберем далеко в прошлом. В момент времени t_1 заряд далеко еще не долетел до плоскости P_1. Наоборот, момент времени t_2 выберем большим по абсолютной величине и положительным. К моменту времени t_2 заряд уже вылетел из объема V, т.е. пересек плоскость P_2 и успел уйти на большое расстояние от этой плоскости. При нашем выборе объема V и поверхности S первый член в левой части равенства (13) равен нулю, так как в момент времени t_1 заряд еще далеко не дошел до поверхности P_1, и в объеме V поле равно нулю. Обращается также в нуль и второе слагаемое в левой части равенства (8), так как к моменту времени t_2 заряд уже далеко ушел от объема V, а поле излучения покинуло объем V еще раньше, чем заряд. Поэтому в момент времени t_2 в объеме V между плоскостями P_1 и P_2 нет никакого поля. Таким образом, равенство (13) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathbf{jE}\,\mathrm{d}V = -\frac{c}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_S [\mathbf{EH}]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{14}$$

Таким образом, работа тормозящего поля над зарядом выражается через энергию, которая прошла за то же время через поверхность S.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (14). За время, протекающее между t_1 и t_2, через поверхность S в объем V втекает поток энергии, связанный с полем заряда, влетающего в объем V со скоростью v_1. Это поле мы обозначили через $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ (см. выше). Таким образом, энергия, втекающая в объем V, равна

$$W_1 = \frac{c}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{P_1} [\mathbf{E}_1\mathbf{H}_1]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь энергию, вытекающую из объема V в промежуток времени (t_1, t_2). Это, во-первых, энергия поля излучения $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$

$$W' = \frac{c}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_S [\mathbf{E}'\mathbf{H}']\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{16}$$

Эта энергия вытекает из объема V через обе поверхности P_1 и P_2. Во-вторых, из объема V вытекает поток энергии, связанный с полем заряда, вылетающего со скоростью v_2 из объема V:

$$W_2 = \frac{c}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{P_2} [\mathbf{E}_2\mathbf{H}_2]\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{17}$$

С учетом равенств (15) — (17) мы можем переписать закон сохранения следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathbf{E}\mathbf{j}\mathrm{d}V = W_1 - W_2 - W'. \tag{18}$$

Теперь устремим момент времени t_1 еще дальше в прошедшее, а момент времени t_2 — еще дальше в будущее. В пределе при $t_1 \to -\infty$ и $t_2 \to \infty$ левая часть последнего равенства даст полную работу поля над заряженной частицей за все время движения. Величина W_1 в согласии с (11) и (12) перейдем в полную энергию поля заряженной частицы, движущейся равномерно со скоростью v_1. Величина W_2 при этом перейдет в полную энергию увлекаемого поля, сопровождающего равномерно движущуюся заряженную частицу, скорость которой равна v_2. Наконец, величина W' даст полную энергию излучения за все время движения. Воспользовавшись обозначением (12) для полной энергии увлекаемого поля, мы можем переписать предельную форму закона сохранения (18) в виде

$$\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_S [\mathbf{E}'\mathbf{H}']\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}\mathrm{d}V + W_1 - W_2. \tag{19}$$

В формуле (19) $\mathbf{E}$ — полное поле на пути частицы, а $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ — поле излучения.

Формула (19) говорит о том, что поток излучения из объема V определяется не только работой сил, действующих со стороны поля на заряд (интеграл от $\mathbf{jE}$), но и изменением полной энергии увлекаемого поля. Если скорость заряженной частицы после вылета из области ускорения L оказывается такой же по величине, как и на подлете, то разность $W_1 - W_2$ в (19) обращается в нуль. В этом случае работа поля над частицей в точности равна энергии излучения с обратным знаком.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с полями, разложенными в интеграл Фурье по времени. В частности, разложение полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по времени имеет вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{20}$$

Разложения (20) представляют поля в виде суперпозиции монохроматических колебаний. Например, подынтегральное выражение в разложении (20) для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Описываемые этим выражением электрическое поле гармонически меняется во времени с частотой ω, причем в заданной точке г амплитуда изменения электрического поля равна $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$. Разложение (20) представляет поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в виде суммы колебаний вида $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ со всевозможными частотами. Амплитуды $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$ в разложении (20) можно далее представить в виде суперпозиции плоских волн вида $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{k}, \quad H_\omega(\mathbf{r}) = \int \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{k}. \tag{21}$$

Для дальнейшего нам понадобится знать, как выражаются интегралы, входящие в закон сохранения (19), через амплитуды $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$. Для того чтобы получить соответствующие выражения, рассмотрим, например, формулу (11) для интеграла по времени от потока вектора Пойнтинга через поверхность S. Выражения именно такой структуры входят и в правую, и в левую части закона сохранения (19):

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{22}$$

Подставим сюда разложения (20) для полей **E** и **H** и проведем интегрирование по времени. Но предварительно отметим одно свойство амплитуд $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$. При изменении знака ω эти амплитуды переходят в комплексно сопряженные выражения:

$$\mathbf{E}_{-\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^*_\omega(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_{-\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^*_\omega(\mathbf{r}). \tag{23}$$

Это свойство амплитуд $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$ вытекает из того обстоятельства, что электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ являются действительными функциями координат и времени. Доказать соотношения (23) можно, например, с помощью обратного преобразования Фурье

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t, \quad \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t. \tag{24}$$

Используя известную формулу Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \tag{25}$$

мы можем переписать выражение (24) для $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ следующим образом

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left(\int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t + i \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t \right). \tag{26}$$

Поскольку $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ есть действительная функция, выражение (26) для $\mathbf{E}_{-\omega}(\mathbf{r})$ переходит в комплексно сопряженное из-за нечетности $\sin \omega t$. Для $\mathbf{H}_\omega$ свойство (23) доказывается аналогично. Таким же свойством обладает и амплитуда $j_\omega(\mathbf{r})$, входящая в разложение Фурье плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и вообще амплитуды f_ω любой действительной функции $f(t)$. Подставим теперь разложения (20) в интегральное выражение (22) для энергии, прошедшей через поверхность S за бесконечное время. Мы получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \int_S [\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_{\omega'}] e^{i(\omega+\omega')t} \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{27}$$

Интегрирование по времени t легко проводится с помощью известной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega')t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega + \omega'). \tag{28}$$

После этого можно, воспользовавшись свойством **δ-функции**, провести интегрирование по ω'. В итоге получим

$$W = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_S [\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_{-\omega}] \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{29}$$

Использовав (23), получим

$$W = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_S [\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*] d\mathbf{S}. \tag{30}$$

Из (23) следует, что при изменении знака ω подынтегральное выражение в (30) переходит в комплексно сопряженное. Это значит, что мнимая часть подынтегрального выражения, $\mathrm{Im}[\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*]$, есть функция, нечетная по ω, а действительная часть, $\mathrm{Re}\ [\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*]$ четна по ω. Интеграл от нечетной части в бесконечных пределах равен нулю, и поэтому выражение (30) действительно, как это и должно быть. С учетом сказанного мы можем переписать (30) в виде

$$W = c\int_0^{\infty} d\omega \int_S \mathrm{Re}[\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*] d\mathbf{S}. \tag{31}$$

Теперь вспомним, что величина W дает полную энергию, прошедшую через поверхность S за все время. Формула (31) представляет эту энергию в виде интеграла по частоте от выражения

$$W_\omega = \mathrm{Re}\int_S c[\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*] d\mathbf{S}. \tag{32}$$

Это выражение естественно принять за энергию поля на частоте ω, прошедшую через поверхность S.

Если все интегралы, входящие в закон сохранения (19), выразить через амплитуды Фурье, можно получить закон сохранения энергии для компонент Фурье, отвечающих частоте ω:

$$\mathrm{Re}\int_S c[\mathbf{E}'_\omega \mathbf{H}'^*_\omega] d\mathbf{S} = -4\pi\,\mathrm{Re}\int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV +$$
$$+ \mathrm{Re}\int_{P_1} c[\mathbf{E}_{1\omega} \mathbf{H}_{1\omega}^*] d\mathbf{S} - \mathrm{Re}\int_{P_2} c[\mathbf{E}_{2\omega} \mathbf{H}_{2\omega}^*] d\mathbf{S}, \tag{33}$$

здесь $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ — компонента Фурье от плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \tag{34}$$

Напомним, что поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ — это поле излучения, а $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — поля равномерно движущегося заряда, скорость движения которого равна соответственно $\mathbf{v}_1$ или $\mathbf{v}_2$. Объем V заключен между двумя плоскостями P_1 и P_2. Эти обе плоскости и составляют поверхность S, ограничивающую объем V. Все расположение схематически показано на рис. 1.

Предыдущее рассмотрение, основанное на законе сохранения энергии, было проведено для случая поля в пустоте. Нетрудно распространить выводы на случай, когда движение заряда происходит в преломляющей среде. Пусть среда является однородной, а закон движения заряженной частицы в среде такой же, как в разобранном выше примере для случая пустоты. Это означает, что частица вначале двигалась равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$, пока не вошла в область L, где движение частицы стало ускоренным. По выходе из области L частица снова стала двигаться равномерно со скоростью $\mathbf{v}_2$ и в дальнейшем скорость частицы уже не менялась. Мы, следовательно, рассматриваем движение того же характера, что и в пустоте. Отличие заключается лишь в том, что на этот раз движение частицы происходит в однородной преломляющей среде с диэлектрической постоянной ε и магнитной проницаемостью μ. В этом случае законы сохранения имеют такой же вид, как и (19), и (33). Разница заключается лишь в том, что на этот раз все поля — поле излучения $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$; увлекаемое поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ подлетающего заряда и увлекаемое поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ отлетающего заряда вычисляются с учетом среды.

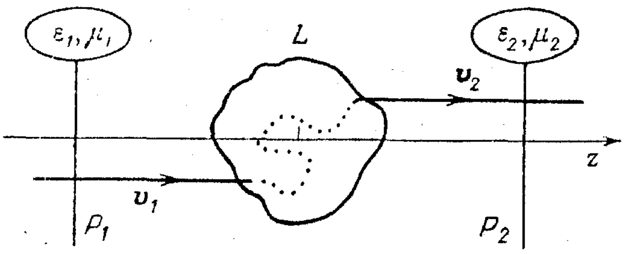

Рис. 4

Пусть теперь среда не является однородной. Рассмотрим случай, когда свойства среды меняются вдоль оси z, так что при $z \to -\infty$ диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость стремятся к некоторым предельным значениям ε_1 и μ_1, а при $z \to \infty$ существуют другие предельные значения ε_2 и μ_2. Закон движения заряда выберем такой же, как и раньше, т.е. будем стью $\mathbf{v}_2$, дальше уже движется равномерно. Картина движения схематически изображена на рис. 4. Различие со случаем, изображенным на рис. 1, заключается в том, что заряд при своем движении выходит из области с постоянными ε_1, μ_1 и входит в область с постоянными ε_2, μ_2, причем на пути заряда диэлектрическая постоянная ε и магнитная проницаемость μ меняются от одного предельного значения до другого. Это изменение может быть и скачкообразным, если на пути заряда имеется резкая граница раздела.

Проведем плоскости P_1 и P_2 следующим образом: эти плоскости перпендикулярны оси z. Плоскость P_1 расположена в практически однородной среде, у которой значения ε и μ равны предельным значениям ε_1 и μ_1. Плоскость P_2 расположена в практически однородной среде, у которой значения ε и μ равны предельным значениям ε_2 и μ_2. Обе плоскости расположены на таком большом расстоянии от области L, что при соответствующих значениях z поле излучения $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ не интерферирует с увлекаемыми полями $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. В рассматриваемом случае увлекаемое поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ — это поле заряженной частицы, равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}_1$ в безграничной однородной среде с постоянными ε_1, μ_1. Соответственно, увлекаемое поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — это поле заряженной частицы, равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}_2$ в безграничной среде с постоянными ε_2, μ_2. Мы здесь считаем, что поглощение отсутствует. Отметим здесь, что в пустоте поле излучения рано или поздно, но всегда расходится с увлекаемым полем заряда. Это объясняется тем, что скорость пакета излучения равна скорости света в пустоте, т.е. всегда превосходит скорость заряда. В среде же разделение поля излучения с увлекаемым полем происходит не всегда, потому что фазовая скорости, волн излучения равна $c/(\varepsilon\mu)^{1/2}$ и она может оказаться равной скорости заряда или даже меньше скорости заряда. В этом случае существуют такие направления, в которых распространяющееся излучение может не разойтись с полем заряда на сколь угодно большом пути. Мы пока будем отвлекаться от такой возможности.

Выбрав плоскости P_1 и P_2, так что они удовлетворяют всем поставленным требованиям, обозначим объем, заключенный между P_1 и P_2 через V. Тогда совокупность плоскостей P_1 и P_2 образует поверхность S, ограничивающую объем V.

Для этого случая закон сохранения энергии можно записать в виде (19) или, в компонентах Фурье, в виде (33). Однако следует помнить, что смысл некоторых из входящих в эти соотношения величин меняется. Так, например, W_1 в случае преломляющей среды есть энергия увлекаемого поля частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_1$ в среде ε_1, μ_1. Аналогично, W_2 есть энергия увлекаемого поля частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_2$ в среде ε_2, μ_2. Сами эти увлекаемые поля равны соответственно $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Величина W_1 вычисляется в одной среде, а величина W_2 — в другой. Поэтому даже при равенстве скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ эти две величины могут отличаться друг от друга. Один и тот же по величине заряд, движущийся с одной и той же скоростью, создает в разных средах разные поля. Полная энергия увлекаемого поля поэтому различна в различных средах, даже если величина заряда и скорость его движения одинаковы. Можно подчеркнуть это обстоятельство, обозначив через $W_1(v_1)$ энергию увлекаемого поля в среде ε_1, μ_1, а через $W_2(v_2)$ — энергию увлекаемого поля в среде ε_2, μ_2. Тогда закон сохранения (19) примет вид

$$\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,[\mathbf{E}'\mathbf{H}']\,d\mathbf{S} = -\int_{-\infty}^{\infty} dt \int \mathbf{jE}\,dV + W_1(v_1) - W_2(v_2); \tag{35}$$

здесь $\mathbf{E}$ — полное поле на пути частицы.

Если частица движется равномерно в неоднородной среде, то в правой части равенства (35) стоит разность $W_1(v) - W_2(v)$, где v — скорость частицы. Эту величину часто сводят к изменению массы движущейся частицы. Обозначим

$$W_1(v) - W_2(v) = c^2\Delta m. \tag{36}$$

Тогда Δm есть изменение массы, связанной с увлекаемым полем. Это изменение происходит при переходе равномерно движущейся заряженной частицы из одной среды в другую [1]. Гарибян вычислил величины $W_1(v)$ и $W_2(v)$, т.е. энергию поля, сопровождающего частицу с зарядом q и со скоростью v в первой среде $W_1(v)$ и во второй среде $W_2(v)$.

Основной вклад в это выражение дает поле на высоких частотах. В обеих средах диэлектрическая постоянная на высоких частотах имеет сходный вид:

$$\varepsilon_{12}(\omega) = 1 - (\omega_{12}^2/\omega^2) \quad (\omega \gg \omega_{12}), \tag{37}$$

где для среды 1 константа ω_1 выражается через число n_1 электронов в единице объема среды 1:

$$\omega_1^2 = 4\pi n_1 e^2/m; \tag{38}$$

e и m — заряд и масса электрона. Константа ω_1 имеет размерность частоты. Это собственная частота колебаний электронной плазмы с плотность n_1.

Аналогично, константа ω_2 в выражении для диэлектрической постоянной второй среды имеет вид

$$\omega_2^2 = 4\pi n_2 e^2/m\,, \tag{39}$$

где n_2 — плотность электронов во второй среде.

Для случая точечного заряда величины W_1 и W_2 оказываются бесконечно большими. Поле точечного заряда неограниченно растет по мере приближения к заряду, и плотность энергии, связанная с полем возрастает настолько быстро, что интеграл по объему от плотности энергии расходится. Интеграл можно сделать конечным, если принять, что заряд, создающий поле, не точечный, а протяженный, скажем, — равномерно распределен в шарике радиуса r_0. Тогда в интеграле от плотности энергии появится обрезание со стороны малых расстояний, и величина $W_{1,2}$ станет конечной. Если электромагнитное поле движущегося заряда представлено в виде совокупности волн, то переход от точечного заряда к протяженному приводит к тому, что следует учитывать лишь те волны, у которых длина превышает "размер" заряда r_0. Соответственно волновые вектора у тех волн, которые оказываются существенными, должны быть меньше некоторой предельной величины

$$\varkappa_0 \sim 1/r_0\,, \tag{40}$$

где r_0 — радиус заряда (или, что то же самое, — линейные размеры того объема, в котором распределен заряд q). Очевидно, что в этом случае все интегралы в представлении Фурье должны обрезаться сверху на величине $\varkappa_0$. Тогда для величины $W_{1,2}$ получаются выражения

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{q^2}{c[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\varkappa_0 c - \omega_1\right), \\ W_2 &= \frac{q^2}{c[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\varkappa_0 c - \omega_2\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Напомним, что W_1 — это полная энергия поля, сопровождающего частицу в первой среде (среда считается безграничной), а W_2 — аналогичная величина для второй среды. Свойства среды входят в выражения (41) через константы ω_1 (37) и ω_2 (38).

Если, скажем, первой средой является пустота, то $n_1 = 0$, $\omega_1 = 0$, и W_1 принимает вид

$$W_1 = \frac{q^2}{c[-(v^2/c^2)]^{1/2}}\cdot\frac{1}{2}\varkappa_0\,. \tag{42}$$

Следует помнить, что приближение точечного заряда отвечает пределу $\varkappa_0 \to \infty$, и тогда величина (42) расходится, а с нею вместе расходятся и величины W_1 и W_2 (41). Видно, что характер расходимости для среды определяется особенностями поля в пустоте.

Сравнение (41) и (42) показывает, что учет среды вносит вполне определенную и конечную поправку и, вообще говоря, неопределенную и бесконечную в пределе точечного заряда величину W. Поправка эта оказывается всегда отрицательной, что, возможно, объясняется тем, что наличие среды приводит к экранировке поля зрения.

Разность $W_1(v) - W_2(v)$ оказывается конечной и не зависит от параметра обрезания $\varkappa_0$:

$$W_1(v) - W_2(v) = \frac{q^2}{c[-(v^2/c^2)]^{1/2}}(\omega_2 - \omega_1)\,. \tag{43}$$

Эта величина определяет разность между полной энергией переходного излучения и той работой, которую поле излучения производит над частицей. Отметим, что диэлектрическая постоянная может изменяться не только в пространстве (неоднородная среда), но и во времени (нестационарная среда). В последнем случае в энергетическом балансе также необходимо учитывать перенормировку [2].

Авторы благодарны безвременно ушедшему Г.М. Гарибяну за проясняющие дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарибян Г.М.*//ЖЭТФ. Т. 37. С. 527. 1959.
См. также: *Гарибян Г.М., Ян Ши.* Рентгеновское переходное излучение. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983.
2. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1981,
Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.—§§2.5, 2.6.

Статья поступила 26.11.91 г.