Март 1992 г. **Том 162, № 3**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

532.591

СТАТИСТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В.И. Кляцкин, А.И. Саичев

(Институт физики атмосферы РАН, Москва,
Нижегородский архитектурно-строительный институт, Нижний Новгород)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В последние годы усиленно дискутируется проблема локализации волнового поля в хаотически слоистых средах при наличии и отсутствии поглощения в среде (см. обзоры [1—3]). При этом не всегда дается однозначный ответ о существовании локализации в той или иной физической ситуации. Последнее обусловлено тем, что реализации поля внутри среды обладают сложной пространственной структурой. А именно, убывание интенсивности волны при удалении от источника в глубь среды может чередоваться все более редкими, но и более сильными выбросами интенсивности за счет когерентного сложения многократно рассеянных в среде волн. В итоге может оказаться так, что практически в каждой конкретной экспериментально полученной реализации поля будет наблюдаться локализация» в то время как поведение статистических средних, например средней интенсивности и ее высших моментов, указывают на отсутствие локализации. Поэтому целесообразно ввести два, вообще говоря, не совпадающих понятия: *динамической локализации*, присущей отдельным реализациям поля, а также понятие *статистической энергетической локализации*, то есть локализации средней интенсивности волны, выражающей свойства всего статистического ансамбля реализаций.

Примером, наглядно иллюстрирующим различие между статистической и динамической локализацией, служит задача о нормальном падении плоской волны на полупространство, заполненное хаотически слоистой непоглощенной средой. Средняя интенсивность волны внутри такой среды всюду одинакова, а высшие моменты интенсивности даже неограниченно экспоненциально возрастают по мере углубления в среду, что свидетельствует о безусловном отсутствии статистической локализации волны [4, 5]. Тем не менее, как будет показано в данной работе, здесь можно говорить о динамической локализации проявляющейся, в частности, в том, что с вероятностью единица (то есть во всех реализациях за исключением реализаций меры нуль) полная энергия волны, проникшей в хаотически-неоднородную среду, конечна, а каждая реализация интенсивности ограничена сверху экспоненциально спадающей в глубь среды мажорантной кривой. Подробному обсуждению взаимно дополняющих понятий статистической и динамической локализации на примере плоских волн, излученных в хаотически слоистых средах, и посвящена данная работа.

Понятие локализации возникло в физике неупорядоченных систем (см., например, [8]), описываемых уравнением *Шрёдингера* (стационарным или нестационарным) со случайным потенциалом и по внешнему виду совпадающему с *уравнением Гельмгольца* со случайным показателем преломления. Однако такое совпадение является чисто внешним проявлением математического аппарата для описания статистических явлений в рассматриваемых случаях. В физике неупорядоченных систем основным объектом являются *самоусредняющиеся величины*, так как они позволяют изучать статистические характеристики объекта по одной достаточно большой реализации (ввиду, вообще говоря, отсутствия ансамбля объектов), и основным математическим аппаратом (принципиально характерным для квантовомеханических систем) является спектральное разложение по собственным функциям соответствующей краевой задачи для уравнения Шрёдингера. В задачах же распространения волн в случайно-неднеродных средах на первый план выдвигаются задачи, основанные на усреднении по ансамблю реализаций параметров среды, и математическим аппаратом является обычная классическая теория волновых процессов. Поэтому попытки решать задачи распространения волн в случайных средах методами квантовой физики, как это делается в некоторых работах последнего времени (см., например, [2]), вызывает чувство неудовлетворения и напоминает, образно говоря, "чесание левого уха правой рукой". Кроме того, для задач распространения волн в случайных средах принципиальную роль играет поглощение волны в среде (хотя бы и сколь угодно малое). А именно, в ряде случаев статистические характеристики являются *сингулярными* по поглощению. При этом с помощью классического приема — аналитического продолжения в комплексную плоскость по параметру, связанному с поглощением решения стационарной задачи, мы можем получить решение более сложных задач таких, например, как нестационарных или о волнах в слоистых средах в трехмерных задачах. В то же время в подходе, основанном на квантовомеханической аналогии, диссипация отсутствует изначально. Поэтому при решении упомянутых выше более сложных задач приходится начинать "с нуля", не используя богатую информацию, заложенную в решении стационарных задач (см., например, [2]). Мы уж не говорим о тех случаях, когда предельные переходы — исчезающе малое поглощение и переход к бесконечному полупространству (или пространству) просто не перестановочны. Все это не позволяет относиться к результатам, полученным на основе квантовомеханической аналогии с должной степенью доверия.

Изложение подхода, основанного на классическом волновом анализе, также обсуждается в данной работе.

2. Постановка задачи о рассеянии волн, излученных в хаотически слоистой среде

Пусть слой хаотически слоистой среды занимает часть пространства $L_0 \le x \le L$, в точке x_0 ($L_0 < x_0 < L$) расположен источник плоских волн (рис. 1). Тогда поле волны внутри слоя описывается уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, x_0) + k^2(1 + \varepsilon(x))\times$$
$$\times G(x, x_0) = 2ik\delta(x - x_0); \qquad (1)$$

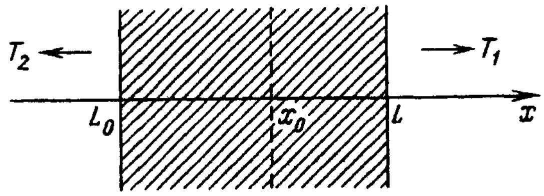

Рис. 1. Схема распространения волны, излучаемой источником внутри слоя среды

здесь $\varepsilon(x)$ описывает влияние хаотических неоднородностей и поглощения в среде на поле излучаемой волны. Будем считать вне слоя $\varepsilon(x) \equiv 0$, а внутри него $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ учитывает хаотические неоднородности среды, а γ — слабое поглощение волны в слое.

Вне слоя поле имеет вид выходящих из слоя плоских волн:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} T_1 \exp[ik(x - L)], & x \geq L, \\ T_2 \exp[-ik(x - L_0)], & x \leq L_0, \end{cases}$$

где $T_{1,2}$ — комплексные коэффициенты излученных из слоя волн, а краевыми условиями к уравнению (1) служат условия непрерывности поля и его производной на границах слоя, которые сводятся к следующим двухточечным граничным условиям:

$$G(L, x_0) + \frac{i}{k}\frac{d}{dx}G(x, x_0)\Big|_{x=L} = 0, \qquad G(L_0, x_0) - \frac{i}{k}\frac{d}{dx}G(x_0, x)\Big|_{x=L_0} = 0. \qquad (2)$$

Кроме того, производная поля в точке источника терпит разрыв:

$$\frac{d}{dx}G(x, x_0)\Big|_{x=x_0+0} - \frac{d}{dx}G(x, x_0)\Big|_{x=x_0-0} = 2ik, \qquad (3)$$

а само поле источника $G(x, x_0)$ непрерывно в точке x_0. Таким образом, поле источника в хаотически сложной поглощающей среде описывается краевой задачей (1) — (3), решение которой, как известно, имеет вид [4]

$$G(x, x_0) = G(x_0, x_0)\begin{cases} \exp\left(ik\int\limits_x^{x_0} d\xi \psi_1(\xi)\right), & x \leq x_0, \\ \exp\left(ik\int\limits_{x_0}^{x} d\xi \psi_2(\xi)\right), & x \geq x_0, \end{cases}$$

где $G(x_0, x_0) = 2/(\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0))$, а функции $\psi_j(x)$ удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\frac{d}{dx}\psi_{1,2}(x) = \pm ik(\psi_{1,2}^2(x) - 1 - \varepsilon(x)), \qquad \psi_1(L_0) = \psi_2(L) = 1.$$

Введем вместо функций $\psi_j(x)$ вспомогательные функции $R_j(x)$

$$\psi_j(x) = \frac{1 - R_j(x)}{1 + R_j(x)}, \qquad j = 1, 2.$$

Тогда волновое поле источника в области $x \leq x_0$ запишется в виде

$$G(x, x_0) = \frac{(1 + R_1(x_0))(1 + R_2(x_0))}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp\left(ik \int\limits_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right), \qquad (4)$$

где $R_1(x)$ подчиняется уравнению Риккати

$$\frac{d}{dx} R_1(x) = 2ikR_1(x) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x)(1 + R_1(x))^2, \quad R_1(L_0) = 0. \qquad (5)$$

Из волнового уравнения (1) следует также важное для дальнейшего соотношение

$$k\gamma I(x, x_0) = \frac{d}{dx} S(x, x_0), \qquad (6)$$

где $I(x, x_0) = |G(x, x_0)|^2$ интенсивность волны, а $S(x, x_0)$ плотность потока энергии, определяемая соотношением

$$S(x, x_0) = \frac{1}{2ik} \left(G(x, x_0) \frac{d}{dx} G^*(x, x_0) - G^*(x, x_0) \frac{d}{dx} G(x, x_0)\right).$$

Используя равенство (4), для $S(x, x_0)$ легко получить выражение

$$S(x, x_0) = S(x_0, x_0) \exp\left(-k\gamma \int\limits_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_1(\xi)|^2}{1 - |R_1(\xi)|^2} \right), \qquad (7)$$

$$S(x_0, x_0) = \frac{(1 - |R_1(x_0)|^2)|1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0)R_2(x_0)|^2}.$$

В дальнейшем нас будет в основном интересовать поведение волн в неограниченном ($L_0 \to -\infty$, $L \to \infty$) и в полуограниченном пространстве ($L_0 \to -\infty$) при исчезающе малом поглощении ($\gamma \to 0$). Из (6) видно, что, вообще говоря, эти предельные переходы не перестановочны. В самом деле, если сразу положить $\gamma = 0$, то из (6) следует сохранение потока энергии волны $S(x, x_0)$ во всем полупространстве $x \leq x_0$, в то время как при наличии конечного, но сколь угодно малого поглощения, интегрируя (6) по всем $x \leq x_0$, получим ограничение на величину энергии, заключенной в этом полупространстве:

$$\frac{k\gamma}{D} E = S(x_0, x_0) \quad \left(E = D \int\limits_{-\infty}^{x_0} dx I(x, x_0)\right), \qquad (8)$$

где величина D имеет размерность $1/x$ и является коэффициентом диффузии для данной задачи (см. ниже). Ниже, при вычислении предельных значений, соответствующих, например, $L_0 \to -\infty$ и $\gamma \to 0$, мы будем вначале вычислять предел при $L_0 \to -\infty$, а уже затем предел $\gamma \to 0$, поскольку наличие сколь угодно малого, но конечного затухания автоматически обеспечивает при $L_0 = -\infty$ выполнение условия излучения.

Помимо общей краевой задачи (1) — (3) о рассеянии волны источника, расположенного внутри неоднородного слоя, физический интерес применительно к проблеме локализации представляют и некоторые ее частные случаи. Так, если $x_0 = L$, то краевая задача (1), (2) вместе с условием скачка (3) переходит в краевую задачу для поля $u(x; L) = G(x, L)$

$$\frac{d^2}{dx^2}u + k^2(1 + \varepsilon(x))u = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}u(x;\, L)\Big|_{x=L_0} = -iku(L_0;\, L), \quad \frac{d}{dx}u(x;\, L)\Big|_{x=L} = ik(u(L;\, L) - 2),$$

описывающую падение плоской волны $\exp[-ik(x - L)]$ на слой среды из области $x > L$. В этом случае поле вне слоя, при $x > L$, имеет структуру

$$u(x;\, L) = \exp[-ik(x - L)] + R(L)\exp[ik(x - L)],$$

где $R(L)$ — комплексный коэффициент отражения волны от слоя, связанный с решением краевой задачи (9) равенством $R(L) = u(L;\, L) - 1$. В области же $x < L_0$ поле имеет структуру уходящей волны

$$u(x;\, L) = T(L)\exp[-ik(x - L_0)],$$

где $T(L) = u(L_0;L)$ — комплексный коэффициент прохождения волны через слой среды (рис. 2). Выражение (4) для поля внутри среды переходит в рассматриваемом случае $x_0 = L$ в

$$u(x;\, L) = (1 + R_1(L))\exp\left(ik\int\limits_x^L d\xi\frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)}\right). \tag{10}$$

Отсюда и из сказанное выше следует, что $R_1(L) = R(L)$. Соответственно $R_1(x_0)$ в формулах (4), (7) может быть интерпретирован как коэффициент отражения от слоя неоднородной среды $(L_0,\, x_0)$ плоской волны, падающей из свободного пространства $x > x_0$. Аналогичный физический смысл коэффициента отражения волны, падающей на слой $(x_0,\, L)$ слева, имеет и $R_2(x_0)$. С помощью (10) общее выражение для поля (4) представимо в виде

$$G(x,\, x_0) = \frac{1 + R_2(x_0)}{1 + R_1(x_0)R_2(x_0)}u(x;\, x_0) \quad (x < x_0), \tag{11}$$

где $u(x;\, x_0)$ задается равенством (10). Влияние другой части слоя $(x_0,\, L)$ учитывается только коэффициентом $R_2(x_0)$. В приложениях представляет также интерес задача о поле источника, расположенного вблизи отражающей границы (рис. 3). В частности для границы в точке $x = x_0 + 0$, на которой выполнено условие полного отражения $dG/dx\big|_{x=x_0} = 0$ имеем $R_2(x_0) = 1$, и, следовательно,

$$u_{\text{отр}}(x;\, x_0) = \frac{2}{1 - R_1(x_0)}u(x;\, x_0). \tag{12}$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что *во всех перечисленных физических ситуациях пространственное поведение поля волны внутри неоднородной среды описывается одной и той же функцией* $u(x;\, x_0)$ (10). Отличаются поля (10) — (12) только коэффициентами при $u(x;\, x_0)$, описывающими резонансные свойства стохастического резонатора, образованного хаотически неоднородным слоем. Тем не менее в дальнейшем выясняется, что хотя для каждой реализации $\varepsilon_1(x)$ хаотически слоистой среды соответствующие реализации поля во всех перечисленных задачах одинаково меняются в

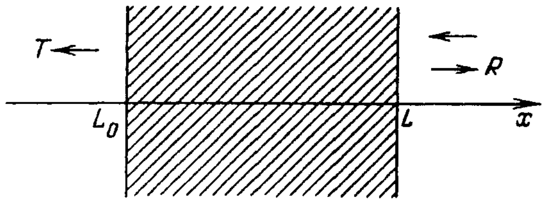

Рис. 2. Схема распространения волны, падающей на слоистую среду

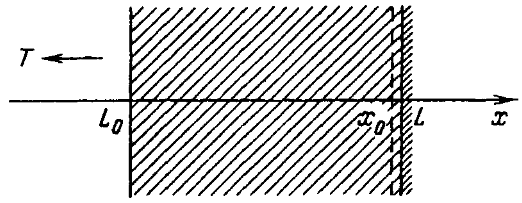

Рис. 3. Схема распространения волны, излучаемой источником, расположенным вблизи отражающей границы

пространстве, наличие разных резонансных коэффициентов при случайных реализациях $u(x;\, x_0)$ приводит к тому, что статистические свойства перечисленных полей оказываются качественно различными.

Как следует из метода погружения [5], поле $u(x;\, L)$ и $R(L)$ как функции параметра L удовлетворяют задачам с начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x;\, L) = iku(x;\, L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_1(L))u(x;\, L), \tag{13}$$

$$u(x;\, x) = 1 + R_1(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial L}R_1(L) = 2ikR_1(L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_1(L))^2, \quad R_1(L_0) = R_0. \tag{14}$$

Отметим еще, что в рассматриваемом выше случае согласованного с однородным пространством слоя в качестве начального условия к уравнению (14) следует брать $R_0 = 0$. Если же при $x \le L_0$ волновое число равно $k_1 \ne k$, то в начальном условии (14) нужно положить $R_0 = (k - k_1)/(k + k_1)$. В частности, если граница L_0 полностью отражающая, то $R(L_0) = \pm\, 1$.

В последующих разделах статьи мы будем исследовать не само поле, а его интенсивность. Поэтому выпишем следующее из (13) уравнение для интенсивности волны $J(x;\, L) = |u(x;\, L)|^2$ во вспомогательной задаче о падении волны на слой среды

$$\frac{\partial J(x;\, L)}{\partial L} = -\frac{k\gamma}{2}(2 + R_1(L) + R_1^*(L))J(x;\, L) + \frac{ik}{2}(R_1(L) - R_1^*(L)J(x;\, L), \tag{15}$$

$$J(x;\, L) = |1 + R_1(x)|^2.$$

В интересующем нас случае $|\varepsilon(x)| \ll 1$ волновое поле представимо в виде суперпозиции встречных волн.

$$u(x;\, L) = a_1(x;\, L)e^{-ikx} + a_2(x;\, L)e^{ikx},$$

комплексные амплитуды которых $a_j(x;\, L)$ мало меняются в масштабе длины волны, а интенсивности $Y_j(x;\, L) = |a_j(x;\, L)|^2$ удовлетворяют тому же уравнению (15), что и полная интенсивность, но со своими начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial L}Y_j(x;\, L) = -\frac{k\gamma}{2}(2 + R_1(L) + R_1^*(L))Y_j(x;\, L) +$$

$$+ \frac{ik}{2}(R_1(L) - R_1^*(L))Y_j(x;\, L), \quad Y(x;\, x) = 1, \quad Y_2(x;\, x) = |R_1(x)|^2. \tag{16}$$

3. Статистическое описание волн в хаотически слоистой среде

Перейдем к обсуждению статистических свойств поставленных выше краевых задач, считая для определенности $\varepsilon_1(x)$ гауссовым полем с нулевым средним и заданной функцией корреляции

$$\langle \varepsilon_1(x)\varepsilon_1(x')\rangle = B_\varepsilon(x - x').$$

При этом влияние хаотических неоднородностей на статистические свойства интенсивности количественно выражается коэффициентом диффузии [5]

$$D = \frac{k^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s B_\varepsilon(s)\cos(2ks).$$

Исследуем вначале статистические характеристики коэффициента отражения $R(L)$, удовлетворяющего уравнению Риккати (14). Введем величину $W(L) = |R(L)|^2$, удовлетворяющую, как следует из (14), стохастическому уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}W = -2k\gamma W - i\frac{k}{2}\varepsilon_1(L)(R(L) - R^*(L))(1 - W), \qquad W(L_0) = W_0 = |E_0|^2. \tag{17}$$

В диссипативном члене здесь упущены быстроосциллирующие слагаемые, не дающие заметного вклада в накапливающиеся с увеличением толщины слоя эффекты. Перейдя от (17) к уравнению Лиувилля относительно функции $\Phi(W; L) = \delta(W(L) - W)$:

$$\frac{\partial}{\partial L}\Phi = 2k\gamma\frac{\partial}{\partial W}(W\Phi) + \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)\frac{\partial}{\partial W}[(1 - W)(R - R^*)\Phi],$$

и усреднив последнее по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon_1(L)$, получим уравнение для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения $P(W; L) = \langle\Phi(W; L)\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial L}P = 2k\gamma\frac{\partial}{\partial W}(WP) - 2D\frac{\partial}{\partial W}[W(1 - W)P] + D\frac{\partial}{\partial W}(1 - W)^2 W\frac{\partial}{\partial W}P, \tag{18}$$

$$P(W; L_0) = \delta(W - W_0).$$

При выводе этого и всех последующих уравнений для статистических средних используется диффузионное приближение, заключающееся в предположении о малости влияния $\varepsilon_1(x)$ на волновое поле в масштабе радиуса корреляции l_0 поля $\varepsilon_1(x)$ [6]. Диффузионное приближение справедливо, пока $Dl_0 \ll 1$. Кроме того, в (18) учитывается, что $D/k \ll 1$, а фаза $\varphi(L)$ коэффициента отражения $R(L) = (W(L))^{1/2}\exp(i\varphi(L))$ быстро (с масштабом $\lambda/2$) осциллирует по сравнению с медленно меняющейся в масштабе длины волны функцией $W(L)$. Это делает правомерным использованное при выводе уравнения (18) и подобных ему уравнений дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям $R(L)$.

В целях дальнейшего анализа удобно представить функцию $W(L)$ в виде

$$W(L) = \frac{u(L) - 1}{u(L) + 1}, \quad u(L) = \frac{1 + W(L)}{1 - W(L)} \tag{19}$$

$$(u(L) \geq 1).$$

При этом плотность вероятностей случайной величины $u(L)$: $P(u; L) = \langle\delta(u(L) - u)\rangle$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial L}P = k\gamma\frac{\partial}{\partial u}[(u^2-1)P] + D\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u}P, \quad P(u; L_0) = \delta(u - u_0), \tag{20}$$

где $u_0 = (1 + W_0)/(1 - W_0)$ и при $W_0 = 0$ — $u_0 = 1$. Если поглощение волны средой отсутствует, т.е. если $\gamma = 0$, уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}P(u; \tau) = \frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u}P(u; \tau), \tag{21}$$

$$P(u; 0) = \delta(u - 1).$$

Здесь введена безразмерная толщина слоя $\tau = D(L - L_0)$ и принято $u_0 = 1$. Решение уравнения (21) легко находится с помощью интегрального преобразования Мелера—Фока [7]

$$P(u; \tau) = \int_0^\infty d\mu\mu\,\mathrm{th}(\mu\pi)\exp\left[-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tau\right]P_{-(1/2)+i\mu}(u), \tag{22}$$

где $P_{-1/2+i\mu}(u)$ функция Лежандра первого рода (функция конуса). Используя представление (22), можно вычислить при $\gamma = 0$ статистические характеристики квадратов модулей коэффициента отражения и прохождения $|T|^2 = 1 - W = 2(u + 1)$ и, в частности, получить выражение [4, 5]

$$\langle|T|^{2n}\rangle = 2^n\pi\int_0^\infty d\mu\frac{\mu\,\mathrm{sh}(\mu\pi)}{\mathrm{ch}^2(\mu\pi)}K_n(\mu)\exp\left[-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tau\right], \tag{23}$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n}\left[\mu^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right]K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1.$$

Из (23) при $\tau \gg 1$ следует асимптотическая формула

$$\langle|T|^{2n}\rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2\pi^2\sqrt{\pi}}{2^{(2n-1)}(n-1)!}\tau^{-3/2}\exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \tag{24}$$

Таким образом, асимптотическая зависимость любого момента коэффициента прохождения и отражения от толщины слоя τ имеет универсальный характер, меняется лишь численный коэффициент. Стремление к нулю всех моментов $|T|$ при увеличении толщины слоя означает, что модуль коэффициента отражения $|R| = W^{1/2} \to 1$ с вероятностью единица. Следовательно, полупространство хаотически слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну.

При наличии поглощения решить уравнение (20) для слоя конечной толщины τ не представляется возможным. Однако для полупространства ($L_0 \to -\infty$, $\tau \to \infty$) существует "стационарное", не зависящее от L и τ распределение вероятностей для $W(L) = |R(L)|^2$ и $u(L)$

$$P_\infty(W) = \frac{2\beta}{(1-W)^2}\exp\left(-\frac{2\beta W}{1-W}\right), \tag{25}$$

$$P_\infty(u) = \beta\exp[-\beta(u-1)],$$

где $\beta = k\gamma/D$ — безразмерный коэффициент поглощения. Физический смысл плотностей вероятностей (25) очевиден: они описывают статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой. С помощью распределений (25) можно вычислить все моменты величины $W(L) = |R(L)|^2$. В частности, справедливы асимптотические формулы

$$\langle W(L)\rangle = \begin{cases} 1 - 2\beta\ln(1/\beta), & \beta \ll 1, \\ 1/2\beta, & \beta \gg 1, \end{cases} \tag{26}$$

а также рекуррентное соотношение для моментов более высокого порядка

$$n\langle W^{n+1}\rangle - 2(\beta + n)\langle W^n\rangle + n\langle W^{n-1}\rangle = 0 \tag{26'}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Укажем еще, что для рассматриваемой задачи о падении волны на полупространство хаотически слоистой среды средние значения потока энергии и интенсивности волнового поля на границе полупространства определяются при $\beta \ll 1$ асимптотическими выражениями

$$\begin{gathered} \langle S(L, L)\rangle = 1 - \langle W(L)\rangle = 2\beta\ln(1/\beta), \\ \langle I(L, L)\rangle = 1 + \langle W(L)\rangle = 2. \end{gathered} \tag{27}$$

Если источник плоских волн находится внутри пространства, заполненного хаотически слоистой средой, то волновое поле и плотность потока энергии в точке расположения источника описываются формулами (7), (11). В используемом диффузионном приближении коэффициенты отражения $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ можно считать статистически независимыми в силу того, что они описываются стохастическими уравнениями в непересекающихся областях пространства, хаотические неоднородности $\varepsilon_1(x)$среды в которых практически статистически независимы. С учетом этого обстоятельства для неограниченного пространства $(L_0 \to -\infty, L \to \infty)$, используя распределение (25), получаем

$$\langle I(x_0, x_0)\rangle = 1 + \beta^{-1}, \quad \langle S(x_0, x_0)\rangle = 1. \tag{28}$$

Отсюда видно, что *средняя плотность потока энергии в точке источника x_0 не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает со случаем источника в свободном пространстве*. Неограниченный же рост средней интенсивности при $\beta \to 0$ свидетельствует о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде.

Аналогичным образом при расположении источника на полностью отражающей границе $x_0 = L$, используя формулу (12) и распределение (25), имеем

$$\langle I_{\text{отр}}(L; L)\rangle = 4[1 + (2/\beta)], \quad \langle S(L, L)\rangle = 4. \tag{29}$$

Таким образом, и здесь плотность потока энергии на отражающей границе также не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает с плотностью потока в случае однородного пространства.

4. Статистическая локализация волны в хаотически слоистой среде

Приступим к анализу возможности статистической локализации волны в хаотически слоистой среде. При этом всюду ниже мы будем полагать $D = 1$, что физически соответствует переходу к безразмерной координате $\tilde{x} = Dx$. Полученные выше выражения (27) — (29) определяют значения средних интенсивности волны и потока энергии лишь в фиксированных точках пространства (на границе хаотически слоистой среды либо в точке расположения источника). Однако установленная выше связь между потоком S и энергией волны E, согласно которой

$$\langle E\rangle = \langle S(x_0, x_0)\rangle/\beta, \tag{30}$$

позволяет на основе (27) — (29) сделать общие полукачественные заключения и относительно поведения средней интенсивности внутри случайно-неоднородной среды. Так, для падающей на полупространство $x \leq L$ волны в силу (27) получаем при $\beta \ll 1$

$$\langle E\rangle = 2\ln(1/\beta), \quad \langle I(L; L)\rangle = 2,$$

и, следовательно, основная доля энергии волны сосредоточена в области пространства толщиной

$$l_\beta \approx \langle E\rangle/\langle I\rangle = \ln(1/\beta), \tag{31}$$

то есть имеет место статистическая локализация волны, связанная с поглощением волны средой. Отметим, что $l_\beta \ll l_п$, т.е. длина локализации l_β при $\beta \ll 1$ много меньше $l_п = 1/\beta$ длины поглощения волны в однородной поглощающей среде. Последнее обусловлено тем, что при $\beta \ll 1$ поглощение сопровождается многократным рассеянием волны на случайных неоднородностях среды. В результате волна, попадающая в точку x, проходит в среде эффективный путь, много больший $(L - x)$, а следовательно, и испытывает поглощение более сильное, чем в однородной среде. При $\beta \to 0$ величина $l_\beta \to \infty$ и в предельном случае отсутствия поглощения статистическая локализация волны пропадает.

Для источника в неограниченном хаотически слоистом пространстве из (28), (30) имеем

$$\langle E\rangle = 1/\beta, \quad \langle I\rangle = 1 + (1/\beta), \tag{32}$$

и, следовательно, при $\beta \to 0$ имеет место статистическая локализация энергии в окрестности источника размером порядка $l \sim 1$. В отличие от предыдущего случая локализация здесь сохраняется и в отсутствие поглощения, а длина локализации примерно равна толщине слоя хаотически слоистой среды, практически полностью отражающего падающую на него волну.

Для источника, расположенного на отражающей границе, имеем соответственно

$$\langle E\rangle = 4/\beta, \quad \langle I_{отр}\rangle = 4[1 + (2/\beta)] \tag{33}$$

и, следовательно, при малом β имеет место локализация волны в области толщиной $l \sim 1/2$.

Еще раз обратим внимание, что такое отличие в поведении средней интенсивности для разных краевых задач обусловлено статистическим усреднением по ансамблю, поскольку для каждой отдельной реализации случайных неоднородностей среды $\varepsilon_1(x)$ согласно формулам (11), (12) соответствующие реализации волнового поля имеют одинаковую пространственную структуру и отличаются лишь постоянным случайным множителем, различным, однако, для разных реализаций $\varepsilon_1(x)$. Следовательно, указанное принципиальное различие поведения средней интенсивности волны, падающей на хаотически слоистое полупространство и возбужденной источником, например, в безграничной хаотически слоистой среде, порождается корреляцией этих постоянных множителей, ответственных за резонансные свойства хаотически слоистой среды с основной пространственной структурой поля.

5. Падение волны на хаотически слоистое пространство

Перейдем к более подробному количественному анализу поведения средней интенсивности волны в хаотически слоистой среде и вопроса о статистической локализации волны. Остановимся вначале на случае падения волны на хаотически слоистое полупространство (рис. 2). Введем функцию

$$Q_{\lambda,\mu}(x, L, W) = \langle Y_1^{\lambda-\mu}(x; L) Y_2^{\mu}(x; L)\delta(|R_1^2(L)| - W)\rangle, \tag{34}$$

где интенсивности встречных волн $Y_{1,2}(x; L)$ и модуль квадрата коэффициента отражения $|R_1^2(L)|$ удовлетворяют стохастическим уравнениям (16), (17). Функция $Q_{\lambda,\mu}$, описывающая корреляцию интенсивностей встречных волн и модуля коэффициента отражения, усредненная по быстрым осцилляциям коэффициента отражения, в диффузионном приближении удовлетворяет уравнению [4, 5]

$$\frac{\partial}{\partial L} Q_{\lambda,\mu}(x, L, W) = -\beta\left(\lambda - 2\frac{\partial}{\partial W} W\right) Q_{\lambda,\mu} - \\ - \left[\lambda + \frac{\partial}{\partial W}(1 - W)\right] Q_{\lambda,\mu} + \left[\lambda + \frac{\partial}{\partial W}(1 - W)\right]^2 W Q_{\lambda,\mu}, \tag{35}$$

$$Q_{\lambda,\mu}(x, x, W) = W^{\mu} P_{\infty}(W),$$

где вероятностное распределение $P_{\infty}(W)$ описывается формулой (25). В частности, при отсутствии поглощения в среде $(\beta = 0)$, когда $P_{\infty}(W) = \delta(W - 1)$, решение уравнения (35) имеет вид

$$Q_{\lambda,\mu}(x, L, W) = \delta(W - 1)\exp[\lambda(\lambda - 1)(L - x)],$$

и, следовательно,

$$\langle Y_1^{\lambda-\mu}(x; L) Y_2^{\mu}(x; L)\rangle = \exp[\lambda(\lambda - 1)(L - x)]. \tag{36}$$

В силу произвольности параметров λ, μ соотношение (36) свидетельствует о том, что с вероятностью единица $Y_1(x; L) = Y_2(x; L) = Y(x; L)$ — интенсивности встречных волн совпадают, а каждая из них представима в виде [4, 5]

$$Y(x; L) = \exp(\eta(L; 1) - \eta(x; 1)), \tag{37}$$

где $\eta(\xi; \alpha)$ — гауссова случайная функция, задаваемая равенством (П.3). Ее статистические свойства полностью определяются плотностью вероятностей (П.6). Следовательно, как указано в приложении, сами интенсивности встречных волн распределены по логарифмически-нормальному закону, а моменты интенсивности, отвечающие целочисленным значениям параметров λ и μ, экспоненциально растут по мере углубления внутри хаотически слоистой среды:

$$\langle Y(x; L)\rangle = 1, \quad \langle Y^n(x; L)\rangle = \exp[n(n - 1)(L - x)]. \tag{38}$$

Заметим еще, что, как указано в приложении, случайная функция $Y(x; L)$ (37) статистически эквивалентна случайному процессу

$$y(\xi) = \exp \eta(\xi, 1),$$

где $\xi = L - x$. Из структуры логарифмически нормального процесса $y(\xi)$, проанализированной в приложении, следует, что реализации интенсивности встречных волн могут иметь редкие, но сильные выбросы за средний уровень $\langle Y\rangle = 1$, происходящие на фоне экспоненциального спадания в глубь среды функции

$$\exp(\langle \ln Y(x;\, L)\rangle) = \exp(-\xi), \tag{39}$$

которую в физике неупорядоченных систем называют типичной реализацией случайной функции $Y(x;\, L)$. Экспоненциальное спадание с ростом ξ типичной реализации (39) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством локализации [8, 9]. Как видно из формул (П.57), (П.26) приложения, термин типичная реализация в приложении к функции (39) оправдан тем, что (39) — изовероятностная кривая случайной функции $Y(x;\, L)$, отвечающая значению $p = 1/2$. Другими словами, в любом интервале на оси $\xi = L - x$ функция $Y(x;\, L)$ в среднем половину интервала проводит под типичной реализацией и половину интервала над ней. Из формулы (П.26) при $\alpha = 1$ вытекает, что изовероятностные кривые случайной функции $Y(x;\, L)$ при любом $p < 1$ задаются равенством

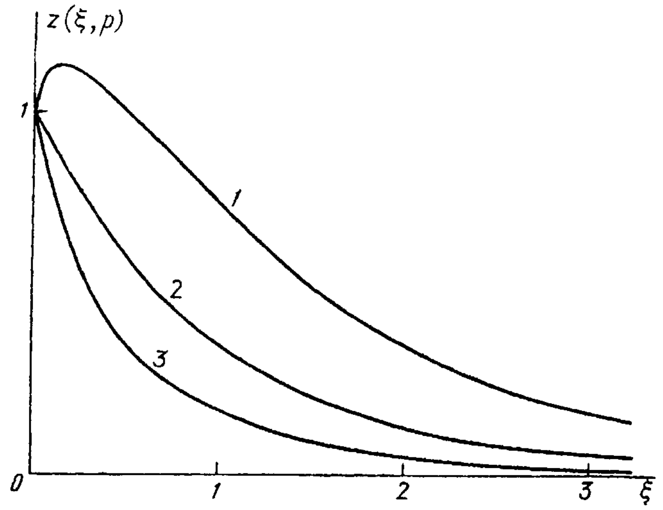

Рис. 4. Графики изовероятностных кривых случайной функции $Y(x,\, L)$: *1* — $p > 0{,}5$, *2* — $p = 0{,}5$, *3* — $p<0{,}5$

$$z(\xi,\, p) = \exp[-\xi + r(2\xi)^{1/2}], \tag{40}$$

где r — корень уравнения $\Phi(r) = p$, а $\Phi(z)$ определена формулой (П.8). На рис. 4 изображены изовероятностные кривые (40) при $p > 0{,}5$ (1), $p = 0{,}5$ (2) и $p < 0{,}5$ (3). Из графиков и из (40) видно, что при любом сколь угодно близком к единице заданном значении $p < 1$ изовероятностная кривая при достаточно большом $\xi \gg 1$ экспоненциально стремится к нулю. Таким образом характер поведения изовероятностных кривых еще раз подкрепляет вывод о том, что интенсивность волны локализуется вблизи границы хаотически-слоистого пространства. Отметим еще, что $\ln\, Y(x;\, L)$ является аддитивной *самоусредняющейся случайной функцией,* образованной из случайной интенсивности $Y(x;\, L)$ [8, 9], что с другой точки зрения оправдывает термин типичная реализация в приложении к экспоненте (39).

Исследованные выше статистические характеристики случайной интенсивности $Y(x;\, L)$ волн в хаотически слоистом полупространстве приводят к противоречивым выводам. С одной стороны, из анализа изовероятностных кривых следует вывод о локализации волны вблизи границы среды. С другой стороны, поведение статистических моментов интенсивности волны свидетельствует о безусловном отсутствии локализации. Дело в том, что поведение с ростом моментов интенсивности волны внутри хаотически слоистой среды определяется в первую очередь редкими, но сильными выбросами интенсивности. В результате этого, например, средняя интенсивность волны внутри среды одинакова на любых расстояниях от ее границы. И только при наличии конечного (сколь угодно малого) поглощения экспоненциальный рост моментов интенсивности на достаточно больших расстояниях от границы прекращается и сменяется резким затуханием. В частности, при

$$\xi \gg 4[n - (1/2)]\ln(n/\beta)$$

моменты $\langle Y^n(x;\, L)\rangle$ выходят на универсальную локализационную зависимость [9]

$$\langle Y^n(x;\, L)\rangle \approx A_n \xi^{-3/2} \exp(-\xi/4) \beta^{-(n-1/2)} \ln(1/\beta), \tag{41}$$

обусловленную диффузионным оператором

$$\frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1)\frac{\partial}{\partial u}$$

в соответствующих уравнениях Фоккера—Планка (см., например, (20)).

Подчеркнем, однако, что описанное поведение статистических моментов интенсивности, в частности, их экспоненциальный рост внутри непоглощающей хаотически слоистой среды не отражает распределения энергии реализаций волн в хаотически слоистом полупространстве. Оказывается, определяющие поведение моментов интенсивности резкие выбросы содержат сравнительно малую энергию, в результате чего с любой заданной вероятностью $p < 1$ полная энергия волны внутри хаотически слоистого полупространства ограничена. Например, как показано в приложении, вероятностное распределение $\mathcal{P}(G)$ полной энергии

$$G = \int\limits_{-\infty}^{L} \mathrm{d}x Y(x;\, L) \tag{42}$$

одной из встречных волн в хаотически слоистом полупространстве задается формулой (П.48). График этой плотности вероятностей изображен на рис. 5.

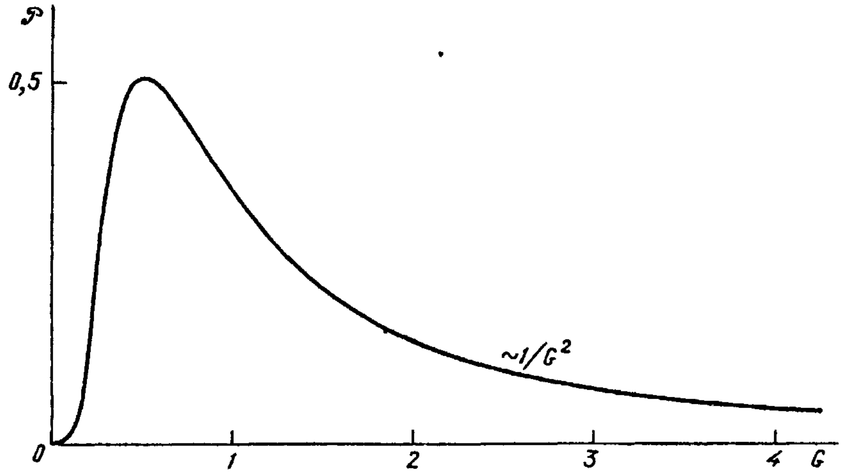

Рис. 5. Плотность вероятностей площади под кривой $Y(x,\, L)$ при всех $x < L$

Заметим, что все моменты плотности вероятностей $\mathcal{P}(G)$, начиная с первого, равны бесконечности. Этот вывод можно было сделать заранее, вспомнив, что $\langle Y(x;\, L)\rangle = 1$, а значит,

$$\langle G\rangle = \int\limits_{-\infty}^{L} \mathrm{d}x \langle Y(x;\, L)\rangle = \infty.$$

Тем не менее из формул приложения (П.48) вытекает, что площадь под реализацией $Y(x;\, L)$ при $x < L$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$ ограничена неравенством

$$G < 1/\ln(1/p). \tag{43}$$

Величина G (42) равна энергии, запасенной конкретной реализацией волны во всем хаотически слоистом полупространстве. Более детальную вероятностную информацию о пространственном перераспределении энергии в глубине среды несет интегральная функция распределения энергии волны, запасенной в полупространстве $x' < x$ $(x < L)$:

$$G(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx' Y(x'; L) \quad (G(L) = G). \tag{44}$$

Как показано в приложении, интегральная функция распределения $F(G; \xi)$ случайной величины энергии (44) описывается выражением (П.55). Из этого выражения, в частности, следует, что вероятность выполнения неравенства $G(x) < G_0$, где G_0 наперед заданная величина энергии, с ростом ξ монотонно стремится к единице.

Хотя, как было выяснено выше, поле интенсивности волны внутри хаотически слоистой среды имеет достаточно сложную тонкую структуру; в качестве грубой количественной характеристики области локализации удобно ввести эффективный коэффициент затухания интенсивности волны внутри слоя

$$\mu = \langle Y(L; L)\rangle \left(\int\limits_{-\infty}^{L} dx Y(x; L) \right) = G^{-1},$$

основанной на аппроксимации поведения волны в среде экспоненциальной функцией

$$Y(x; L) \sim \langle Y(L; L)\rangle \exp(-\mu\xi) \quad (\xi = L - x > 0).$$

Как следует из (П.48), плотность вероятностей случайной величины μ имеет вид

$$\mathcal{P}(\mu) = \exp(-\mu),$$

а его среднее и дисперсия равны $\langle\mu\rangle = \sigma_\mu^2 = 1$. В качестве эффективной толщины области локализации волны при этом можно взять $l = 1/\langle\mu\rangle = 1$.

Как уже говорилось раньше, наличие поглощения в хаотически слоистой среде $(\gamma > 0)$ приводит к качественному изменению поведения моментов интенсивности волны внутри среды. Так, предсказанный выше экспоненциальный рост моментов интенсивности (38), сменяется, в конце концов, их резким затуханием (41). Тем не менее при достаточно слабом поглощении $(\beta \ll 1)$ реализация интенсивности волн внутри среды ведут себя примерно так же, как и в непоглощающей среде, их вероятностные свойства мало отличаются от изученных выше. Подкрепим эти полукачественные выводы количественным расчетом. Для этого воспользуемся равенством, аналогичным (8)

$$\beta E = S(L, L), \tag{45}$$

где E, как и раньше, запасенная хаотически слоистым полупространством энергия. Отметим, что в отличие от G (42), равной энергии одной из встречных волн в хаотически слоистой среде, E описывает полную энергию, содержащуюся в обеих волнах. В дальнейшем выяснится, что статистика E, по крайней мере в среде без поглощения, совпадает со статистикой $2G$. Это означает, что хотя интенсивности встречных волн в каждой точке среды одинаковы: $Y_1(x; L) = Y_2(x; L)$, их фазы некоррелированы, когерентные эффекты отсутствуют, а полная интенсивность, усредненная по быстроменяющейся в пространстве разности фаз, равна сумме интенсивностей встречных волн.

Вернемся к равенству (45), связывающему полную энергию волны, запасенную в хаотически слоистом полупространстве, с потоком интенсивности на его границе. В рассматриваемом случае падения волны на хаотически слоистое полупространство $S = 1 - W$, так что равенство (45) принимает вид

$$\beta E = 1 - W.$$

Отсюда, используя вероятностное распределение (25) квадрата модуля коэффициента отражения от хаотически слоистого поглощающего полупространства, нетрудно найти вероятностное распределение E:

$$\mathcal{P}_\beta(E) = \frac{2}{E^2}\exp\left[-2\left(\frac{1}{E} - \beta\right)\right]\theta\left(\frac{1}{\beta} - E\right), \tag{46}$$

допускающее при $\beta \to 0$ предельный переход к распределению

$$\mathcal{P}(E) = \frac{2}{E^2}\exp\left(-\frac{2}{E}\right),$$

совпадающему, с учетом равенства $E = 2G$, с вероятностным распределением (П.48). В формуле (46) $\theta(z)$ — единичная функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$.

Заметим в заключение, что приведенный выше вероятностный анализ запасенной в хаотически слоистой среде энергии волны, падающей на хаотически слоистое полупространство, можно применить и к волнам, возбужденным источником в хаотически слоистой среде. Вычислим, к примеру, вероятное распределение энергии волны, возбужденной источником, расположенным вблизи идеально отражающей границы (см. рис. 3). Воспользовавшись формулами (7), (8) и учитывая, что в данном случае $R_2 = 1$, для энергии волны в случайно-неоднородной среде имеем

$$\beta E/4 = (1 - W)/|1 - R|^2 \tag{47}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P}_\beta(E) = \left(\frac{2}{\pi E^3}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{2}{E}\left(1 - \frac{\beta E}{4}\right)^2\right]. \tag{48}$$

График этой плотности вероятностей для случаев $\beta = 1$ и $\beta = 0{,}1$ приведен на рис. 6. Как и в случае (46), данное вероятностное распределение допускает предельный переход при $\beta \to 0$:

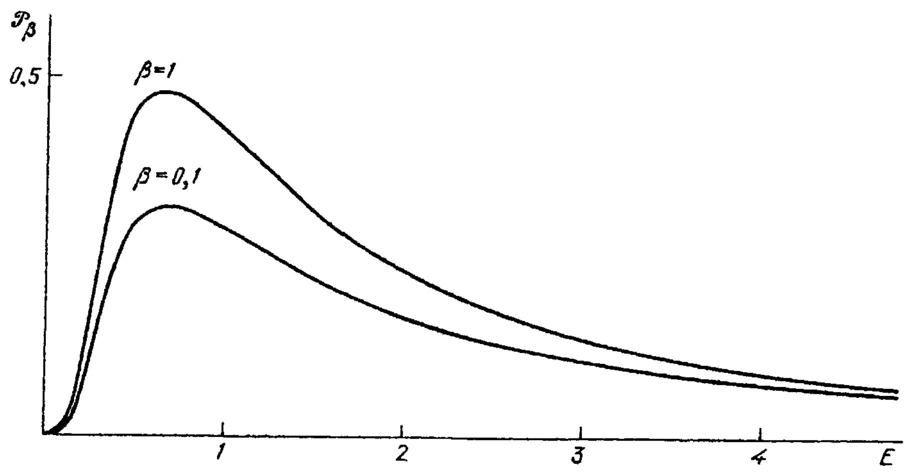

Рис. 6. Плотность вероятностей энергии волны, излучаемой источником вблизи отражающей границы хаотически слоистого полупространства

$$\mathcal{P}(E) = \left(\frac{2}{\pi E^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2}{E}\right). \qquad (49)$$

Обратим внимание на то, что хотя в непоглощающей среде средняя интенсивность волны и средняя энергия волны (33) обращаются в бесконечность, полная энергия в каждой конкретной реализации волны, возбужденной источником в среде с вероятностью единица, ограничена, а основная вероятностная масса сосредоточена в области энергий $E \sim 1$.

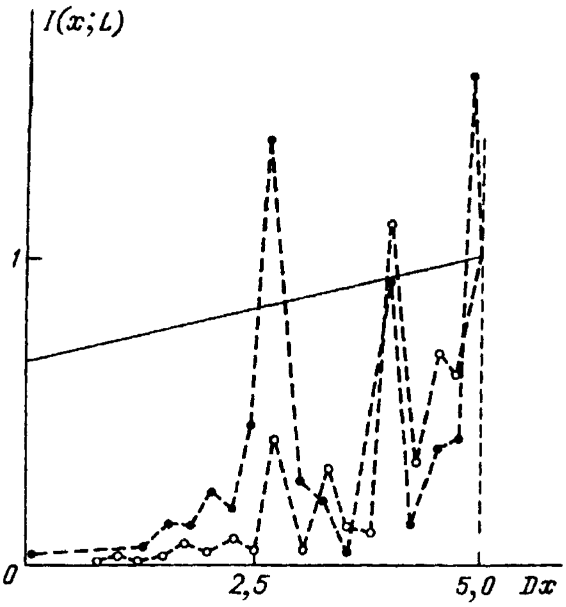

Рис. 7. Графики реализаций интенсивности волны $I(x, L)$ в слое среды при $\beta = 0{,}08$, полученные с помощью численного счета (светлые кружки). Темные кружки соответствуют случаю, когда на отрезке порядка длины волны $\varepsilon_1(x)$ заменялась на $-\varepsilon_1(x)$. Непрерывная кривая соответствует случаю отсутствия неоднородностей среды

Выявленные выше с помощью статистического анализа особенности поведения воля, многократно рассеянных в хаотически слоистой среде, а именно тонкую структуру поля интенсивности, заключающуюся в чередовании "темных" областей и резких выбросов интенсивности, а также тенденцию к локзлиззции поля, наглядно иллюстрируют изображенные на рис. 7 типичные реализации волнового поля, взятые из работ [11]. На этом рисунке приведены полученные с помощью численного счета графики $I(x; L)$ в достаточно толстых слоях $D(L - L_0) = 5$ для одной реализации случайных неоднородностей среды $\varepsilon_1(x)$ (белые кружочки) и значении параметра $\beta = 0{,}08$. Черные кружочки соответствуют случаю, когда на отрезке порядка длины волны функция $\varepsilon_1(x)$ заменялась на $-\varepsilon_1(x)$. Непрерывная кривая соответствует отсутствию флуктуаций во всем слое, т.е. $\varepsilon_1(x) \equiv 0$. Приведенные графики несут полукачественную информацию, поскольку на них отмечены значения реализаций $I(x; L)$ через сравнительно большие расстояния (порядка десяти длин волн). Истинные же графики $I(x; L)$ гораздо более изрезаны и. имеют существенно большее число выбросов. Однако даже на этих сглаженных рисунках видны сильные выбросы $I(x; L)$. Величина этих выбросов увеличивается с уменьшением параметра поглощения β. На рис. 7 видно также, что выбросы интенсивности волнового поля происходят на фоне быстрого спадания, которое можно отождествить с проявлением локализации данных реализаций.

6. Источник в неограниченном хаотически слоистом пространстве

Перейдем теперь к анализу статистической локализации волны, возбужденной источником в неограниченной хаотически слоистой среде ($L_0 \to -\infty$, $L \to \infty$) (см. рис. 1). Из формул (6), (7) вытекает следующее соотношение для средней интенсивности волны в области:

$$\beta\langle I(x, x_0)\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\langle\psi(x, x_0)\rangle,$$

где функция $\psi(x, x_0)$, как функция параметра x_0, удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\psi(x, x_0) = -\beta\frac{|1 + R_1(x_0)|^2}{1 - |R_1(x_0)|^2}\psi(x, x_0), \quad \psi(x_0, x_0) = 1. \tag{50}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x, x_0; u) = \langle\psi(x, x_0)\delta(u(x_0) - u)\rangle,$$

где $u(L)$ определяется равенством (19). В принятых в данной работе приближениях функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\xi, u) = -\beta u\Phi + \beta\frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1)\Phi + \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1)\frac{\partial}{\partial u}\Phi,\\ \Phi(0, u) = P_\infty(u) = \beta\exp[-\beta(u - 1)], \quad \xi = D|x - x_0|.\end{gathered} \tag{51}$$

Искомая средняя интенсивность волны выражается через Φ с помощью равенств

$$\beta\langle I(x, x_0)\rangle = -\frac{\partial}{\partial\xi}\int_1^\infty \mathrm{d}u\Phi(\xi, u) = \int_1^\infty \mathrm{d}uu\Phi(\xi, u). \tag{52}$$

При $\beta \ll 1$ множитель β в левой части этого равенства выполняет роль нормировки на среднюю интенсивность волны в точке источника (28). Поэтому при $\beta \to 0$ естественно назвать *локализационной кривой*, описывающей статистическую локализацию волны в непоглощающей среде, предельную кривую

$$\Phi_{\text{лок}}(\xi) = \lim_{\beta\to 0}(\beta\langle I(x, x_0)\rangle) = \lim_{\beta\to 0}\langle I(x, x_0)\rangle/\langle I(x_0, x_0)\rangle. \tag{53}$$

Нетрудно показать, что локализационная кривая задается выражением

$$\Phi_{\text{лок}}(\xi) = \int_1^\infty \mathrm{d}uu\tilde{\Phi}(\xi, u),$$

где $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{\Phi}(\xi, u) = -u\tilde{\Phi} + \frac{\partial}{\partial u}(u^2\tilde{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial}{\partial u}\tilde{\Phi}\right),\\ \tilde{\Phi}(0, u) = e^{-u}.\end{gathered} \tag{54}$$

Решив уравнение (54) с помощью интегрального преобразования Канторовича—Лебедева [7], в результате получаем [3]

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{лок}}(\xi) &= -2\pi\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\frac{\tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}{\mathrm{ch}^2(\pi\tau)}\exp\left[-\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\xi\right] =\\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\langle|T^2(\xi)|\rangle,\end{aligned} \tag{55}$$

где $|T(\xi)|^2$ — квадрат модуля коэффициента прохождения слоя толщиной ξ при падении на него плоской волны (см. формулу (23)). При малых значениях ξ локализационная кривая спадает довольно быстро, как $\exp(-2\xi)$, а при больших ξ ($\xi \gg \pi^2$) существенно медленнее, по универсальному закону

$$\Phi_{\text{лок}}(\xi) \approx \frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{8}\xi^{-3/2}\exp\left(-\frac{\xi}{4}\right), \tag{56}$$

так что общее значение площади под локализационной кривой равно $\int\limits_0^\infty d\xi\Phi_{\text{лок}}(\xi) = 1$. На рис. 8 изображен график локализационной кривой. Там

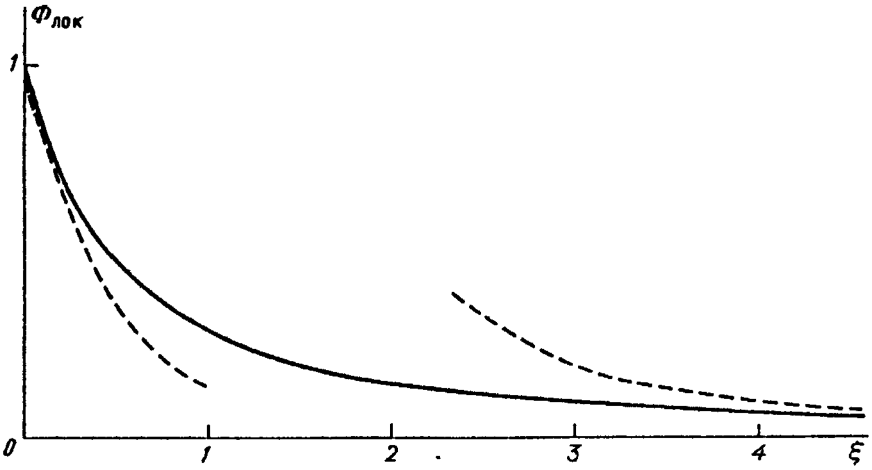

Рис. 8. График локализационной кривой. Штриховыми линиями изображены графики асимптотических формул локализационной кривой, справедливых при $\xi \ll 1$ и $\xi \gg 1$

же, для сравнения, штриховыми линиями приведены указанные выше асимптотические кривые. Подчеркнем тот принципиально важный факт, что локализационная кривая соответствует двойному пределу

$$\Phi_{\text{лок}}(\xi) = \lim_{\beta\to 0} \lim_{\substack{L_0\to -\infty,\\ L\to\infty}} \langle I(x, x_0)\rangle / \langle I(x_0, x_0)\rangle, \tag{57}$$

причем, как легко в данном случае показать, *эти пределы не перестановочны*, а предельный переход, выполненный в обратном порядке, приводит к результату

$$\lim_{\substack{L_0\to -\infty,\\ L\to\infty}} \lim_{\beta\to 0} \langle I(x, x_0)\rangle / \langle I(x_0, x_0)\rangle = (2/3)(D|x - x_0| \gg 1),$$

аналогичному случаю падения плоской волны на слой хаотически неоднородной среды, для которого эти пределы перестановочны. Напомним, что порядок вычисления пределов, принятый в (57), соответствует физическому смыслу поставленной задачи, поскольку наличие сколь угодно малого, но конечного поглощения при $L_0 \to -\infty$, $L \to \infty$ автоматически обеспечивает выполнение условия излучения.

Заметим, что подобная ситуация имеет место и в случае расположения источника на отражающей границе (см. рис. 3). Причем можно показать, что на расстояниях $\xi = D(L - x) \gtrsim 1/3$ от отражающей границы локализационная кривая задается равенством

$$\lim_{\beta\to 0} \langle I_{\text{отр}}(x; L)\rangle / \langle I_{\text{отр}}(L; L)\rangle = \frac{1}{2}\Phi_{\text{лок}}(\xi),$$

а на меньших расстояниях от отражающей границы $\xi \lesssim 1/3$ локализации кривая имеет осцилляторный характер, обусловленный интерференцией взаимно когерентных вблизи границы падающей и отраженной волн. Напомним еще, что о наличии локализации волны, возбужденной вблизи отражающей границы в хаотически слоистом полупространстве, свидетельствует вероятностное распределение (49) энергии такой волны, согласно которому с вероятностью единица энергия каждой конкретной реализация волны конечна. Последнее означает еще, что в непоглощающей хаотически слоистой среде, ограниченной идеально отражающим зеркалом, происходит эффективное взаимное гашение многократно рассеянных волн.

7. Нестационарные волновые задачи

До сих пор мы обсуждали пространственное поведение в хаотически слоистой среде интенсивности волны, излучаемой монохроматическим источником. Более непосредственное отношение к проблеме локализации имеют нестационарные волновые задачи об излучении или падении на среду волнового импульса. В случае импульсного источника плоских волн, находящегося в слое среды в точке x_0, поле волны $u(x,\ x_0;\ t)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma}\right)^2\right] u(x,\ x_0;\ t) = -\frac{2}{c}\delta(x - x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\varphi}(t), \tag{58}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\ x_0;\ t)\Big|_{x=L} = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\ x_0;\ t)\Big|_{x=L_0} = 0,$$

где правая часть уравнения описывает генерацию волнового импульса. В частности, в однородной ($c(x) = c = \mathrm{const}$) и непоглощающей ($\tilde{\gamma} = 0$) среде слева от источника генерируется волновой импульс $\tilde{\varphi}(t + [(x - x_0)/c])$ $(x < x_0)$. При анализе нестационарной волновой задачи удается использовать результаты предыдущих разделов работы, применив спектральный подход, согласно которому решение краевой задачи (58) представимо в виде

$$u(x,\ x_0;\ t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega G_\omega(x,\ x_0)\varphi(\omega)e^{-i\omega t}, \tag{59}$$

где $G_\omega(x,\ x_0)$ — решение краевой задачи (1), (2) с параметрами $k = \omega/c$, $\gamma = \tilde{\gamma}/\omega$, $\varepsilon_1(x) = (c^2(x) - c^2)/c^2$, а $\varphi(\omega)$ — Фурье образ временного импульса $\tilde{\varphi}(t)$.

Как и прежде, нас будет интересовать поведение в пространстве и времени интенсивности волнового поля

$$I(x,\ x_0;\ t) = u^2(x,\ x_0;\ t).$$

Используя спектральное представление поля (59), запишем следующее выражение для интенсивности:

$$I(x,\ x_0;\ t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\psi I_{\omega,\psi}(x,\ x_0)\varphi\left(\omega + \frac{\psi}{2}\right)\varphi^*\left(\omega - \frac{\psi}{2}\right)e^{-i\psi t}. \tag{60}$$

В этой формуле введен двухчастотный аналог интенсивности плоских монохроматических волн:

$$I_{\omega,\psi}(x, x_0) = G_{\omega+(\psi/2)}(x, x_0)G^*_{\omega-(\psi/2)}(x, x_0). \tag{61}$$

Вопрос о возможной локализации волнового импульса в хаотически слоистой среде решается анализом асимптотического поведения его интенсивности при $t \to \infty$. При этом поведение средней интенсивности определяется поведением подынтегрального выражения в (6) при малых значениях ψ, а само выражение для средней интенсивности можно описывать упрощенным выражением

$$\langle I(x, x_0; t)\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, |\varphi(\omega)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\psi \langle I_{\omega,\psi}(x, x_0)\rangle e^{-i\psi t}. \tag{62}$$

Исходя из уравнения (1) для двухчастотной интенсивности $I_{\omega,\psi}$ нетрудно получить при малых ψ и $\tilde{\gamma}$ соотношение, аналогичное (6):

$$\frac{d}{dx}S_{\omega,\psi}(x, x_0) = \frac{1}{c}(\tilde{\gamma} - i\psi)I_{\omega,\psi}(x, x_0), \tag{63}$$

где $S_{\omega,\psi}(x, x_0)$ — двухчастотный аналог плотности потока энергии. Интегрируя (63) по хаотически слоистому полупространству $-\infty < x < x_0$ и учитывая выражение (62), для заключенной в этом полупространстве энергии имеем

$$E(t) = \int\limits_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x, x_0; t)\rangle =$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, |\varphi(\omega)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\tilde{\gamma} - i\psi} \langle S_{\omega,\psi}(x_0, x_0)\rangle e^{-i\psi t}. \tag{64}$$

Рассмотрим теперь статистическое описание величин $S_{\omega,\psi}$ и $I_{\omega,\psi}$. Эти величины согласно их определению связаны с двухчастотным аналогом квадрата модуля коэффициента отражения $W_{\omega,\psi} = R_{\omega+(\psi/2)}R^*_{\omega-(\psi/2)}$. Таким образом, для вычисления средних (62), (64) необходимо знание статистики величин $W_{\omega,\psi}$. При малых $\tilde{\gamma}$ и ψ она подчиняется стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dx}W_{\omega,\psi} =$$

$$= -\frac{2}{c}(\tilde{\gamma} - i\psi)W_{\omega,\psi} - i\frac{\omega}{2c}\varepsilon_1(x)(R_{\omega+(\psi/2)} - R^*_{\omega-(\psi/2)})(1 - W_{\omega,\psi}), \tag{65}$$

где R_ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}R_\omega = \frac{2i}{c}\left(\omega + i\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)R_\omega + i\frac{\omega}{2c}\varepsilon_1(x)(1 + R_\omega)^2,$$

$$R_\omega(-\infty) = 0.$$

Подчеркнем, что уравнение (65) для $W_{\omega,\psi}$ линейно относительно $\tilde{\gamma}$, ψ и $\varepsilon_1(x)$. Из (65), (66) следует, что моменты $W_{\omega,\psi}$: $W^{(n)}_{\omega,\psi} = \langle (W_{\omega,\psi})^n\rangle$ связаны цепочкой уравнений

$$\frac{d}{dx}W^{(n)}_{\omega,\psi} = -\frac{2n}{c}(\tilde{\gamma} - i\psi)W^{(n)}_{\omega,\psi} + D(\omega)n^2(W^{(n+1)}_{\omega,\psi} - 2W^{(n)}_{\omega,\psi} + W^{(n-1)}_{\omega,\psi}),$$

которая в случае безграничной хаотически слоистой среды переходит в

$$\frac{2}{c}(\tilde{\gamma} - i\psi)W^{(n)}_{\omega,\psi} = D(\omega)n(W^{(n+1)}_{\omega,\psi} - 2W^{(n)}_{\omega,\psi} + W^{(n-1)}_{\omega,\psi}). \tag{66}$$

Здесь и выше явно учтена зависимость коэффициента диффузии случайных неоднородностей среды $D(\omega)$ от частоты ω. В частности, если $\varepsilon_1(x)$ — белый шум с корреляционной функцией $\langle\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(x')\rangle = 2\sigma^2 l_0\delta(x - x')$, коэффициент диффузии равен: $D(\omega) = \sigma^2 l_0\omega^2/2c^2$.

Заметим, что рекуррентное соотношение (26'), вытекающее из вероятностного распределения $P_\infty(W)$ (25), после замены β на $(\tilde{\gamma} - i\psi)/cD$ переходит в цепочку уравнений (66). Это означает, в частности, что статистические свойства $W_{\omega,\psi}$ в безграничной хаотически слоистой среде при отсутствии поглощения $(\tilde{\gamma} = 0)$ можно найти с помощью распределения (25), аналитически продолженного в комплексную плоскость [12]

$$\beta \to (0 - i\psi)/cD. \tag{67}$$

В результате при $\tilde{\gamma} = 0$ и $t \to \infty$, т.е. при малых значениях ψ, получаем

$$\langle S_{\omega,\psi}(x_0, x_0)\rangle = 1, \quad \langle I_{\omega,\psi}(x_0, x_0)\rangle = i\frac{D(\omega)c}{\psi + i0},$$

и, следовательно, формулы (62), (64) приводят к выражениям

$$\langle I(x_0, x_0; \infty)\rangle = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega)|\varphi(\omega)|^2, \quad E(\infty) = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\varphi(\omega)|^2. \tag{68}$$

Таким образом, в случае существования интегралов (68) средняя интенсивность поля в точке источника и полная энергия волны в полупространстве конечны, что означает наличие пространственной локализации для средней интенсивности волнового поля в среде. Длина локализации при этом будет, очевидно, определяться равенством

$$l = E/\langle I\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\varphi(\omega)|^2 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega)|\varphi(\omega)|^2\right)^{-1}.$$

Аналогично, с использованием равенства (53) можно показать, что форма локализационной кривой волнового импульса такова:

$$\langle I(x, x_0; \infty)\rangle = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega)|\varphi(\omega)|^2\Phi_{\text{лок}}(\xi), \tag{69}$$

$$\xi = D(\omega)|x - x_0|,$$

где $\Phi_{\text{лок}}(\xi)$ — локализационная кривая (55) стационарной задачи. В частности, для модели белого шума $\varepsilon_1(x)$ и генерируемого "видеоимпульса" $\tilde{\varphi}(t)$, характеризуемого только одним параметром — шириной импульса, из (69) имеем

$$\langle I(x, x_0; \infty)\rangle \sim |x - x_0|^{-3/2}.$$

Если же генерируется импульс с высокочастотным заполнением, спектр которого сосредоточен в малой полосе $\Delta\omega$ вокруг центральной частоты ω_0 ($\omega_0 \gg \Delta\omega$), то асимптотической формой локализационной кривой будет

$$\langle I(x, x_0; \infty)\rangle \sim \Phi_{\text{лок}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega_0)|x - x_0|).$$

Асимптотическое выражение (69) для локализационной кривой волнового импульса (69) допускает простую физическую интерпретацию. На достаточно больших временах поле многократно рассеянного импульса представимо в виде суперпозиции статистически взаимно независимых волновых пакетов каждый шириной $\Delta\omega$. Причем при $t \to \infty$ $\Delta\omega \to 0$, а поле каждого волнового пакета локазируется в пространстве по законам, описанным в случае стационарной задачи. Образно говоря, при $t \to \infty$ происходит полная хаотизация фаз всех временных гармоник импульса, а каждая из гармоник независимо локализуется в пространстве. В результате при $t \to \infty$ локализованное поле импульса в каждой точке области локализации представляет собой стационарный случайный процесс, форма спектральной плотности которого $\sim D(\omega)|\varphi(\omega)|^2$ определяется формой спектра генерируемого импульса.

Отметим в заключение, что в случае падения временного импульса на полупространство для асимптотического поведения интенсивности обратнорассеянного сигнала при больших t справедливо выражение [13]

$$\langle I(L, L; t)\rangle = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\varphi(\omega)|^2 \frac{D(\omega)}{(2 + D(\omega)ct)^2}, \tag{70}$$

откуда получаем для импульсов без высокочастотного заполнения и с высокочастотным заполнением соответственно

$$\langle I(L, L; t)\rangle \sim t^{-3/2} \text{ и } \langle I(L, L; t)\rangle \sim t^{-2}.$$

Аналогичным образом для полной энергии в полупространстве получаем при больших t выражение

$$E(t) = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\varphi(\omega)|^2 \frac{1}{2 + D(\omega)ct}. \tag{71}$$

Из выражений (70), (71) следует, что при $t \to \infty$ излучение полностью высвечивается из случайно-неоднородной среды.

Выше мы рассмотрели статистическое описание волнового импульса в хаотически слоистой среде. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу о пространственно-временном пакете в случайно-неоднородной среде. При этом ясно, что свойство локализации, описанное в данной работе, будет сохраняться и для этого случая, что можно трактовать как существование стохастического волновода в плоскости, перпендикулярной оси x [2].

8. Заключение

В заключение мы хотим обратить внимание на то, что анализ локализации волн в хаотически слоистых средах по сути свелся к исследованию статистических и динамических свойств реализаций логарифмически-нормального процесса, равного экспоненте от процесса Винера. Этот факт замечателен тем, что подобные логарифмически-нормальные процессы возникают практически во всех областях физики, где требуется описать характеристики положительно определенных физических величин, процессов и полей. Сюда относятся, к примеру, описанию флуктуаций интенсивности оптических и радиоволн в турбулентных средах, анализ поведения амплитуды радиофизических систем, испытывающих флуктуации параметров. В этих и во многих других задачах физики логарифмически нормальный процесс возникает как простейшая адекватная модель, правильно учитывающая принципиальные свойства рассматриваемых явлений — положительную определенность, законы сохранения, параметрическую неустойчивость, чередование областей "замирания сигнала" с резкими большими выбросами в узких областях.

По этой причине значение изложенного в данной работе анализа статистических и динамических свойств логарифмически-нормального процесса выходит далеко за рамки хотя и важной, но сравнительно узкой физической проблемы, которой посвящена данная статья.

В то же время до сих пор незаслуженно мало изучены многие замечательные свойства подобных процессов, позволяющие глубже понять принципиальные свойства разнообразных физических явлений, где логарифмически-нормальный процесс возникает в качестве простейшей адекватной физической модели. Поэтому одной из главных целей нашей статьи мы считаем привлечение более пристального внимания исследователей из разных областей физики к логарифмически-нормальным процессам, к нетрадиционным подходам к анализу подобных процессов, предложенным в данной статье. В частности, к новым понятиям изовероятностных и мажорантных кривых, статистике площадей под реализациями, фрактальным свойствам, понятиям динамической и статистической локализации, которые должны непременно возникать, в том или ином физическом контексте, в самых разнообразных физических проблемах.

9. Приложения

9.1. Статистические и динамические свойства винеровского и логарифмически-нормального процесса. Рассмотрим случайную функцию $\omega(\xi)$, зависящую от аругмента ξ, который для определенности назовем временем. Пусть $\omega(\xi)$ непрерывный гауссов случайный процесс с независимыми приращениями. Последнее означает, что если интервалы (ξ_1, ξ_2) и (ξ_3, ξ_4) не перекрываются, то приращения процесса $\omega(\xi)$ на этих интервалах

$$\Delta\omega(\xi_i, \xi_{i+1}) = \omega(\xi_{i+1}) - \omega(\xi_i), \quad i = 1, 3,$$

статистически независимы. Как и сам процесс $\omega(\xi)$, его приращения обладают гауссовой статистикой, а их статистические свойства полностью задаются первыми двумя моментами:

$$\langle\Delta\omega\rangle = 0, \quad \langle(\Delta\omega(\xi, \xi + \Delta))^2\rangle = 2|\Delta|. \tag{П.1}$$

Хотя это и не принципиально, будем полагать, что процесс $\omega(\xi)$ "привязан к нулю":

$$\omega(0) = 0. \tag{П.2}$$

Процесс $\omega(\xi)$ с перечисленными выше свойствами называют *винеровским процессом*. Типичная реализация винеровского процесса изображена на рис. 9.

Обратим внимание на характерные особенности динамического поведения реализаций винеровского процесса. Он обладает свойством однородности по

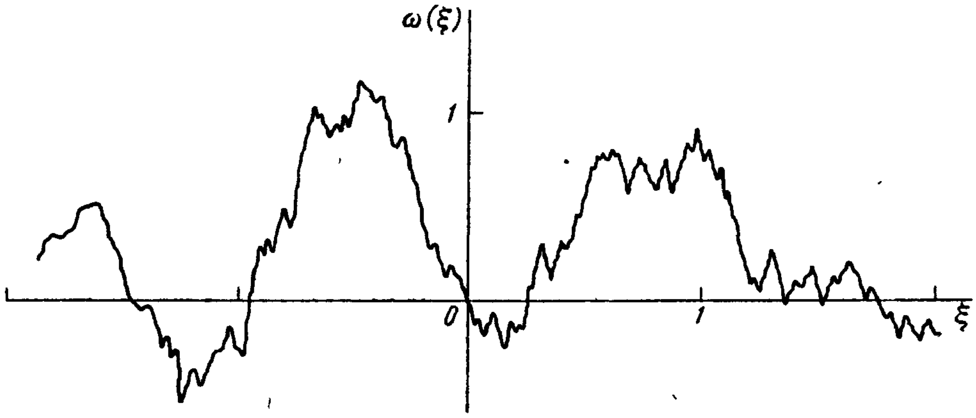

Рис. 9. Типичная реализация винеровского процесса $\omega(\xi)$

ξ в том смысле, что реализации процессов $\omega(\xi)$ и $\Delta\omega(\xi_0, \xi_0+\xi)$ как функции ξ при любом заданном параметре ξ_0, статистически эквивалентны. Образно говоря, по виду реализации этих процессов нельзя сказать, какому из процессов они принадлежат. Статистически эквивалентны и процессы $\omega(\xi)$ и $\omega(-\xi)$, и, значит, винеровский процесс обратим во времени в указанном выше смысле. Реализациям винеровского процесса присуще еще одно замечательное — фрактальное — свойство. Согласно ему сжатые (при $a > 1$) во времени реализации винеровского процесса $\omega(a\xi)$ статистически эквивалентны растянутым по вертикали реализациям $a^{1/2}\omega(\xi)$. Фрактальное свойство винеровского процесса можно еще трактовать как свойство статистической эквивалентности реализаций $\omega(\xi)$ и сжатого по ξ и по вертикальной координате процесса $\omega(a\xi)/a^{1/2}$.

Обсудим более общий процесс

$$\eta(\xi; \alpha) = \omega(\xi) - \alpha\xi, \tag{П.3}$$

удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha = f(\xi), \tag{П.4}$$

где $f(\xi)$ — гауссов белый шум с корреляционной функцией

$$\langle f(\xi) f(\xi + s)\rangle = 2\delta(s).$$

Как и винеровский процесс, процесс $\eta(\xi; \alpha)$ однороден во времени и обладает статистически независимыми приращениями по ξ. Вследствие независимости приращений, процесс $\eta(\xi; \alpha)$ является марковским, а его плотность вероятностей

$$\mathcal{P}(\eta; \xi, \alpha) = \langle\delta(\eta - \eta(\xi; \alpha))\rangle$$

удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{P} = \alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{P} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\mathcal{P}, \tag{П.5}$$

$$\mathcal{P}(\eta; 0, \alpha) = \delta(\eta),$$

которое можно получить как следствие стохастического уравнения (4). Решение уравнения (5) имеет вид

$$\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}}\exp\left[-\frac{(\eta+\alpha\xi)^2}{4\xi}\right]. \qquad (\text{П.6})$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что $\eta(\xi;\alpha)<\eta$, равна

$$F(\eta;\xi,\alpha)=P(\eta(\xi,\alpha)<\eta)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\eta}\mathrm{d}\eta\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha)=\Phi\left(\frac{\eta}{(2\xi)^{1/2}}+\alpha\left(\frac{\xi}{2}\right)^{1/2}\right), \qquad (\text{П.7})$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{d}y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \qquad (\text{П.8})$$

Дополним уравнение (5), помимо начального, еще и граничным условием

$$\mathcal{P}(\eta=h;\xi,\alpha)=0\ \ (\xi>0), \qquad (\text{П.9})$$

обрывающим реализации процесса $\eta(\xi;\alpha)$ в момент достижения ими границы h. Решение краевой задачи (П.5), (П.9), которое обозначим $\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)$ описывает при $\eta<h$ вероятностное распределение значений тех реализаций процесса $\eta(\xi;\alpha)$, которые "выжили" к моменту ξ, то есть за весь интервал времени ни разу не достигли границы h. Соответственно, плотность вероятностей $\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)$ нормирована не на единицу, а на вероятность того, что $\xi>\xi^*$, где ξ^* — момент первого достижения процессом $\eta(\xi;\alpha)$ границы h:

$$\int_{-\infty}^{h}\mathrm{d}\eta\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)=P(\xi<\xi^*). \qquad (\text{П.10})$$

Введем интегральную функцию распределения и плотность вероятностей случайного момента первого достижения:

$$F(\xi;\alpha,h)=1-P(\xi<\xi^*)=1-\int_{-\infty}^{h}\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)\mathrm{d}\eta, \qquad (\text{П.11})$$

$$\mathcal{P}(\xi;\alpha,h)=\frac{\partial F}{\partial\xi}=-\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)\Big|_{\eta=h}. \qquad (\text{П.12})$$

При $\alpha>0$, когда процесс $\eta(\xi;\alpha)$ с ростом ξ в среднем сносится от границы h и при $\xi\to\infty$ вероятность $P(\xi<\xi^*)$ (П.10) стремится к вероятности того, что процесс $\eta(\xi;\alpha)$ никогда не достигает границы h. Другими словами предел

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{h}\mathrm{d}\eta\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)=P(\eta_{\mathrm{M}}<h) \qquad (\text{П.13})$$

равен вероятности того, что абсолютный максимум процесса

$$\eta_{\mathrm{M}}(\alpha)=\max_{\xi\in(0,\infty)}\eta(\xi;\alpha) \qquad (\text{П.14})$$

меньше h. Таким образом, из (П.13) и (П.10) следует, что интегральная функция распределения значений абсолютного максимума η_{M} равна

$$F(h,\alpha)=P(\eta_{\mathrm{M}}<h)=\lim_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{h}\mathrm{d}\eta\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h). \qquad (\text{П.15})$$

Решив краевую задачу (П.5), (П.9), например методом отражения, получим

$$\mathcal{P}(\eta;\xi,\alpha,h)=$$

$$=\frac{1}{2(\pi\xi)^{1/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(\eta+\alpha\xi)^2}{4\xi}\right]-\exp\left[-h\alpha-\frac{(\eta-2h+\alpha\xi)^2}{4\xi}\right]\right\}. \qquad (\text{П.16})$$

Подставив это выражение в (П.12), найдем плотность вероятностей момента ξ^* первого достижения процессом $\eta(\xi;\alpha)$ границы h:

$$\mathcal{P}(\xi;\alpha,h)=\frac{h}{2\xi(\pi\xi)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(h+\alpha\xi)^2}{4\xi}\right].$$

Наконец, интегрируя (16) по η и устремив $\xi\to\infty$, получим согласно (П.15) интегральную функцию распределения значений абсолютного максимума η_{M}:

$$F(h;\alpha)=1-\exp(-h\alpha). \qquad (\text{П.17})$$

Перейдем к описанию статистических свойств логарифмически нормального процесса

$$y(\tau,\xi;\alpha)=\exp(\eta(\tau;\alpha)-\eta(\xi;\alpha))=\exp[\Delta\omega(\tau,\xi)-\alpha(\tau-\xi)]. \qquad (\text{П.18})$$

Его можно представить еще в виде

$$y(\tau,\xi;\alpha)=y(\tau;\alpha)/y(\xi;\alpha), \qquad (\text{П.19})$$

где

$$y(\tau;\alpha)=e^{\eta(\tau;\alpha)}. \qquad (\text{П.20})$$

Напомним, что процесс в показателе экспоненты $\eta(\tau;\alpha)$ имеет независимые приращения. В физике это свойство называют свойством *аддитивности процесса* $\eta(\tau;\alpha)$. Соответственно, процесс $y(\tau;\alpha)$ обладает *мультипликативным* свойством, согласно которому, в частности, процесс $y(\tau;\alpha)$ представим в виде произведения статистически независимых процессов

$$y(\tau;\alpha)=y(\xi;\alpha)y(\tau,\xi;\alpha), \qquad (\text{П.21})$$

причем реализации процесса $y(\tau,\xi;\alpha)$, как функции аргумента $\varkappa=\tau-\xi$, статистически эквивалентны реализациям процесса $y(\varkappa;\alpha)$. Последнее свойство процесса $y(\tau;\alpha)$ естественно назвать свойством *мультипликативной однородности* по времени.

Обсудим подробнее логарифмически нормальный процесс $y(\tau;\alpha)$ (П. 20). Он удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}+\alpha y=f(\tau)y,\quad y(0)=1. \qquad (\text{П.22})$$

Из него следует, что плотность вероятностей процесса

$$\mathcal{P}(y;\tau,\alpha)=\langle\delta(y(\tau;\alpha)-y)\rangle$$

удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}=\alpha\frac{\partial}{\partial y}(y\mathcal{P})+\frac{\partial}{\partial y}[y\frac{\partial}{\partial y}(y\mathcal{P})], \qquad (\text{П.23})$$

$$\mathcal{P}(y;\, 0,\, \alpha) = \delta(y-1),$$

решением которого является логарифмически-нормальная плотность вероятностей. Ее можно найти, заметив, что вероятность выполнения неравенства

$$y(\tau;\, \alpha) < y \tag{П.24}$$

в точности равна вероятности выполнения неравенства

$$\eta(\tau;\, \alpha) < \ln y. \tag{П.25}$$

Отсюда из (7) получаем, что интегральная функция распределения процесса $y(\tau;\, \alpha)$ равна

$$F(y;\, \tau,\, \alpha) = \\ = \Phi\left(\frac{\ln y}{(2\tau)^{1/2}} + \alpha\left(\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2r^{1/2}}\ln(ye^{\alpha\tau})\right). \tag{П.26}$$

Дифференцируя ее по y и учитывая определение (8), приходим к решению уравнения (П.23)

$$\mathcal{P}(y;\, \tau,\, \alpha) = \frac{1}{2(\pi\tau)^{1/2}y}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\ln^2(ye^{\alpha\tau})\right]. \tag{П.27}$$

График логарифмически нормальной плотности вероятностей (27) при $\tau = 0{,}5$ и $\alpha = 1$ дан на рис. 10. С помощью этой плотности вероятностей, а еще проще непосредственно из уравнения (23), можно найти моменты процесса $y(\tau;\, \alpha)$

$$\langle y^n(\tau;\, \alpha)\rangle = \exp[n(n-\alpha)\tau]. \tag{П.28}$$

В частности, для процесса

$$y(\tau) = y(\tau;\, 1) = \exp(\omega(\tau) - \tau), \tag{П.29}$$

играющего наиболее важную роль в данной статье, моменты равны

$$\langle y^n(\tau)\rangle = \exp[n(n-1)\tau]. \tag{П.30}$$

Причем среднее процесса $y(\tau)$: $\langle y(\tau)\rangle = 1$ одинаково при любых τ, а любые другие моменты $y(\tau)$ сувеличением τ экспоненциальнонарастают.

Экспоненциальный рост высших моментов логарифмически-нормального процесса $y(\tau)$ объясняется медленным спаданием хвостов плотности вероятности (27) при $y \gg 1$. На языке реализаций это означает, что в реализациях процесса $y(\tau)$ с ростом τ должны наблюдаться все более редкие, но и более высокие выбросы, обеспечивающие экспоненциальный рост моментов $y(\tau)$. В то же время, как видно из (27) и из рис. 10, при больших τ основная вероятностная масса плотности вероятностей процесса $y(\tau)$

$$\mathcal{P}(y;\, \tau) = \mathcal{P}(y;\, \tau,\, \alpha = 1)$$

сосредотачивается в области малых значений y. Действительно, согласно (26). вероятность выполнения, например, неравенства $y(\tau) < 1$ равна

$$P(y(\tau) < 1) = F(1;\, \tau,\, 1) = \Phi((\tau/2)^{1/2})$$

и при $\tau \gg 1$ экспоненциально стремится к единице:

$$P(y(\tau) < 1) = 1 - \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \tag{П.31}$$

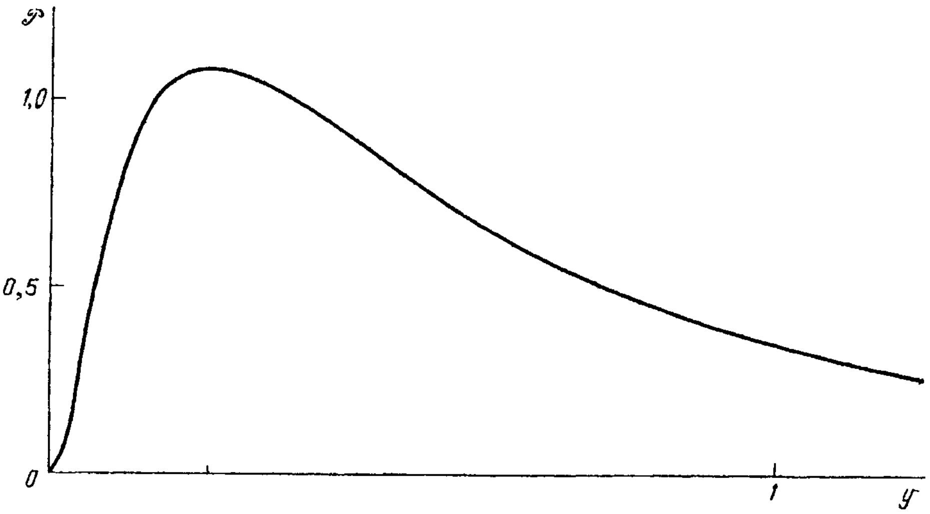

Рис. 10. Логарифмически нормальная плотность вероятностей при $\tau = 0{,}5$, $\alpha = 1$

Таким образом, хотя статистические моменты процесса $y(\tau)$ в основном определяются его большими выбросами, подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(\tau)\rangle = 1$.

Обнаруженное противоречие между характером поведения статистических моментов процесса $y(\tau)$ и его реализаций заставляет более детально исследовать динамику реализаций процесса $y(\tau)$ и более общего процесса $y(\tau;\alpha)$. С этой целью введем понятие *мажорантных кривых*. Назовем мажорантной такую кривую $M(\tau, p, \alpha)$, для которой при любых τ с вероятностью p выполняется неравенство:

$$y(\tau;\alpha) < M(\tau, p, \alpha). \qquad (\text{П.32})$$

Другими словами, под мажорантной кривой $M(\tau, p, \alpha)$ расположены $100\cdot p$ процентов всех реализаций процесса $y(\tau;\alpha)$. Изученная выше статистика абсолютного максимума (П. 14) процесса $\eta(\tau;\alpha)$ позволяет указать достаточно богатый класс мажорантных кривых. В самом деле, пусть *вероятность* того, что абсолютный максимум $\eta_{\text{М}}(\beta)$ вспомогательного процесса $\eta(\tau;\beta)$ с произвольным значением параметра β, лежащим в пределах $0 < \beta < \alpha$, удовлетворяет неравенству

$$\eta_{\text{М}}(\beta) < h = \ln A \qquad (\text{П.33})$$

равна p. Тогда, очевидно, с той же вероятностью p вся реализация процесса $y(\tau;\alpha)$ будет лежать ниже мажорантной кривой

$$M(\tau, p, \alpha, \beta) = A \exp\,[(\beta - \alpha)\tau\,]. \qquad (\text{П.34})$$

Как видно из (П. 17), вероятность, с которой процесс $y(\tau;\alpha)$ нигде не превышает мажорантной кривой (П.34), следующим образом зависит от ее параметров:

$$p = 1 - A^{-\beta}. \qquad (\text{П.35})$$

Применив сказанное к процессу $y(\tau)$ (П.29), укажем, что с вероятностью (П.35) его реализации ограничены сверху мажорантной кривой

$$M = A \exp[(\beta - 1)\tau\,]. \qquad (\text{П.36})$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(\tau)\rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(\tau)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую (при $\beta < 1$) мажорантную кривую (П.36), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(\tau)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, половина реализаций $y(\tau)$ лежит ниже экспоненциально спадающей мажорантной кривой

$$M = 4\exp(-\tau/2). \qquad (\text{П.37})$$

Типичная реализация процесса $y(\tau)$ и мажорантная кривая (П.37) изображены ниже на рис. 11.

Из факта существования экспоненциально спадающих мажорантных кривых вытекает два вывода, полезных для понимания статистики и динамики поведения реализаций процессов $y(\tau;\alpha)$. Во-первых, хотя поведение высших моментов этих процессов обусловлено наличием громадных выбросов в их реализациях, сами эти выбросы наблюдаются не во всех реализациях процесса. Это значит, например, что постоянство среднего $\langle y(\tau)\rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов $y(\tau)$ — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций, среди которых наряду с достаточно быстро спадающими попадаются реализации с громадными вы-

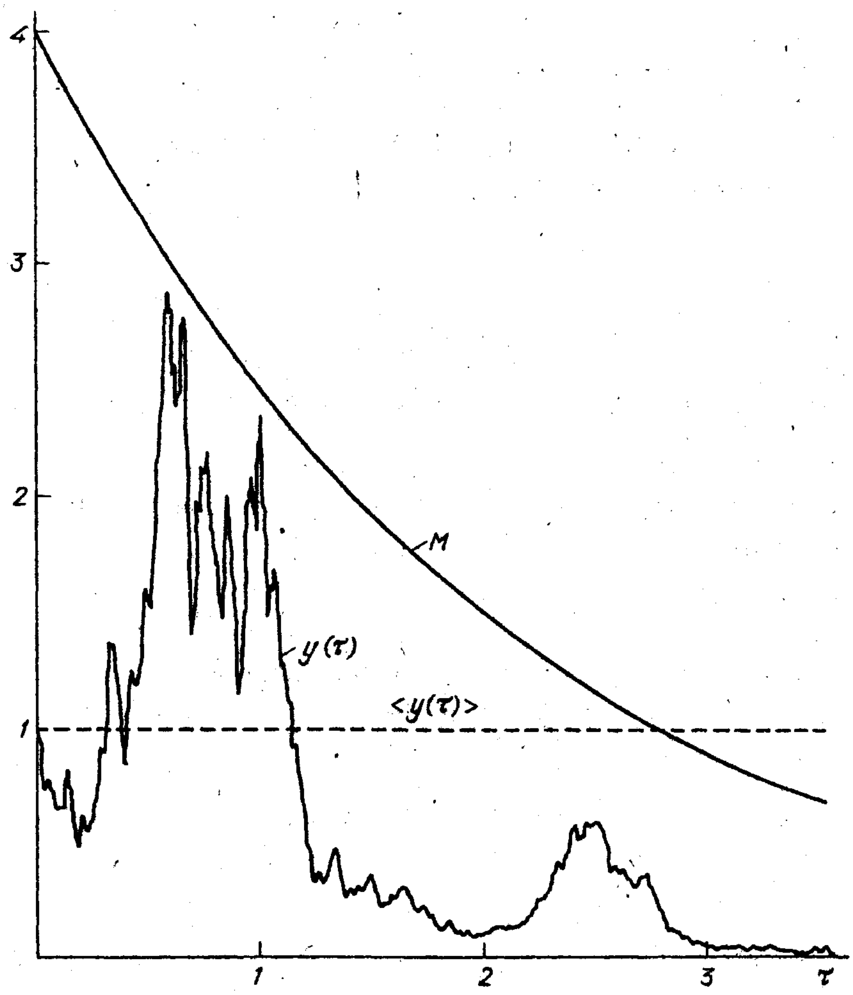

Рис. 11. Типичная реализация процесса $y(\tau)$, а также мажорантной кривой, под которой расположена половина реализаций процесса $y(\tau)$. Штриховой прямой изображено статистическое среднее $\langle y(\tau)\rangle$

бросами. Во-вторых, площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, громадные выбросы, вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций процессов $y(\tau; \alpha)$ также конечна.

В связи со сказанным представляется интересным исследовать статистику случайной площади под реализациями процесса

$$G(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y(\tau; \alpha). \tag{П.38}$$

Рассмотрим вспомогательный случайный процесс $G(\tau; \alpha)$, удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$\frac{d}{d\tau}G = 1 - \alpha G + f(\tau)G, \quad G(0; \alpha) = 0. \tag{П.39}$$

Решение уравнения (П.39) таково:

$$G(\tau; \alpha) = \int_0^\tau d\xi y(\tau, \xi; \alpha), \tag{П.40}$$

где подынтегральный процесс задается равенством (П. 19). Из обратимости во времени винеровского процесса следует, что процесс $G(\tau; \alpha)$ (П.40) обладает одномоментной плотностью вероятностей, совпадающей с плотностью вероятностей случайной величины

$$z(\tau; \alpha) = \int_0^\tau d\xi y(\xi; \alpha),$$

равной площади под реализацией $y(\xi; \alpha)$ в интервале $(0, \tau)$. Поэтому, в частности, если мы найдем плотность вероятностей

$$\mathcal{P}(G; \tau, \alpha) = \langle\delta(G(\tau; \alpha) - G)\rangle, \tag{П.41}$$

то в пределе $\tau \to \infty$ она совпадает с плотностью вероятностей площади под всей реализацией процесса $y(\tau; \alpha)$

$$\mathcal{P}(G; \alpha) = \lim_{\tau\to\infty} (G; \tau, \alpha). \tag{П.42}$$

Наконец, при $\alpha = 1$ последняя плотность вероятностей совпадает с плотностью вероятностей площади под реализациями процесса $y(\tau)$ (П.29):

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G; \alpha = 1). \tag{П.43}$$

Зная $\mathcal{P}(G; \alpha)$, нетрудно найти плотность вероятностей $\mathcal{P}_n(G)$ случайных интегралов

$$G_n = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau). \tag{П.44}$$

Действительно, из фрактального свойства винеровского процесса вытекает, что процесс $y^n(\tau)$ статистически эквивалентен сжатому во времени процессу

$y(n^2\tau, 1/n)$. Это означает, в частности, что

$$\mathcal{P}_n(G) = n^2\mathcal{P}(n^2G; 1/n). \tag{П.45}$$

Определенная выше плотность вероятностей $\mathcal{P}(G; \tau, \alpha)$ удовлетворяет вытекающему из (П.39) уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P} + \frac{\partial}{\partial G}\mathcal{P} = \alpha\frac{\partial}{\partial G}(G\mathcal{P}) + \frac{\partial}{\partial G}\left[G\frac{\partial}{\partial G}(G\mathcal{P})\right], \tag{П.46}$$

$$\mathcal{P}(G; 0, \alpha) = \delta(G).$$

При $\tau \to \infty$ решение этого уравнения стремится к стационарной плотности вероятностей $\mathcal{P}(G; \alpha)$ (П.42), подчиняющейся уравнению

$$\mathcal{P} = \alpha G\mathcal{P} + G\frac{d}{dG}(G\mathcal{P}).$$

Решив его, находим

$$\mathcal{P}(G; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{G}\right)^{\alpha+1}\exp\left(-\frac{1}{G}\right). \tag{П.47}$$

Положив затем $\alpha = 1$, получим плотность вероятностей (43) случайной площади под реализацией процесса $y(\tau)$

$$\mathcal{P}(G) = \frac{1}{G^2}\exp\left(-\frac{1}{G}\right). \tag{П.48}$$

Соответствующая интегральная функция распределения равна

$$F(G) = \exp\left(-\frac{1}{G}\right). \tag{П.49}$$

Дополнительную информацию о динамике поведения реализаций процессов $y(\tau, \xi; \alpha)$ и $y(\xi; \alpha)$ во времени несет зависимость вероятностного распределения случайного процесса

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau-\gamma} d\xi y(\tau, \xi; \alpha) \quad (\gamma > 0) \tag{П.50}$$

от времени γ. Нетрудно показать, что этот процесс статистически эквивалентен процессу

$$\int\limits_{\gamma}^{\infty} d\xi y(\xi; \alpha). \tag{П.51}$$

Из мультипликативного свойства процесса $y(\xi; \alpha)$ (21) в свою очередь следует, что одномоментное вероятностное распределение процессов (П.50), (П.51) совпадает с плотностью вероятностей процесса

$$G(\gamma; \alpha) = y(\gamma; \alpha)G(\alpha), \tag{П.52}$$

где $y(\gamma; \alpha)$ и $G(\alpha)$ статистически независимы, а их плотности вероятностей задаются, соответственно, выражениями (П.27) и (П.47). В частности, отсюда вытекает, что интегральная функция распределения случайного процесса

$$G(\tau) = y(\tau)G, \tag{П.53}$$

совпадающая с функцией распределения площади под реализациями процесса $y(\xi)$ в бесконечном интервале (τ, ∞), равна

$$F(G;\tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \exp\left[-\frac{y}{G} - \frac{1}{4\tau}\ln^2(ye^\tau)\right], \tag{П.55}$$

а вероятность выполнения неравенства $G(\tau) < G$ с ростом τ монотонно стремится к единице при любом наперед заданном значении G. Это еще раз свидетельствует о стремлении каждой отдельной реализации процесса $y(\tau)$ к нулю при увеличении τ, несмотря на экспоненциальный рост высших моментов $y(\tau)$, обусловленный громадными выбросами, наблюдающимися в части реализаций $y(\tau)$.

9.2. Изовероятностные кривые. Рассмотрим произвольный случайный процесс $y(\tau)$ с интегральной функцией распределения

$$F(y;\tau) = \langle\theta(y - y(\tau))\rangle, \tag{П.56}$$

где $\theta(z)$ единичная функция, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$. Назовем *изовероятностной кривой* процесса $y(\tau)$ детерминированную функцию $z(\tau; p)$, значение которой в каждый данный момент времени τ определяется из уравнения

$$F(z(\tau;p);\tau) = p. \tag{П.57}$$

Проинтегрировав это равенство в произвольном интервале, получим, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau F(z(\tau;p);\tau) = p(\tau_2 - \tau_1). \tag{П.58}$$

С другой стороны, из определения (П.56) интегральной функции распределения следует, что интеграл в левой части этого равенства равен:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau F(z(\tau;p);\tau) = \langle T(\tau_1, \tau_2)\rangle; \tag{П.59}$$

$$T(\tau_1, \tau_2) = \sum_{k=1}^{N} \Delta\tau_k$$

— полное время, которое в интервале (τ_1, τ_2) реализация процесса $y(\tau)$ проводит под изовероятностной кривой. Соответственно $\Delta\tau_k$ —длительности промежутков времени, на протяжении каждого из которых реализация $y(\tau)$ расположена ниже $z(\tau; p)$ (рис. 12), а N — число таких промежутков времени в интервале (τ_1, τ_2). Сопоставив равенства (58) и (59) найдем, что

$$\langle T(\tau_1, \tau_2)\rangle = p(\tau_2 - \tau_1) \tag{П.60}$$

среднее время, которое процесс $y(\tau)$ проводит в интервале (τ_1, τ_2) под изовероятностной кривой $z(\tau; p)$, пропорционально длительности этого интервала $\tau_2 - \tau_1$. Коэффициент пропорциональности p равен доли времени, в течение которого выполняется неравенство $y(\tau) < z(\tau; p)$. Таким образом, если p до-

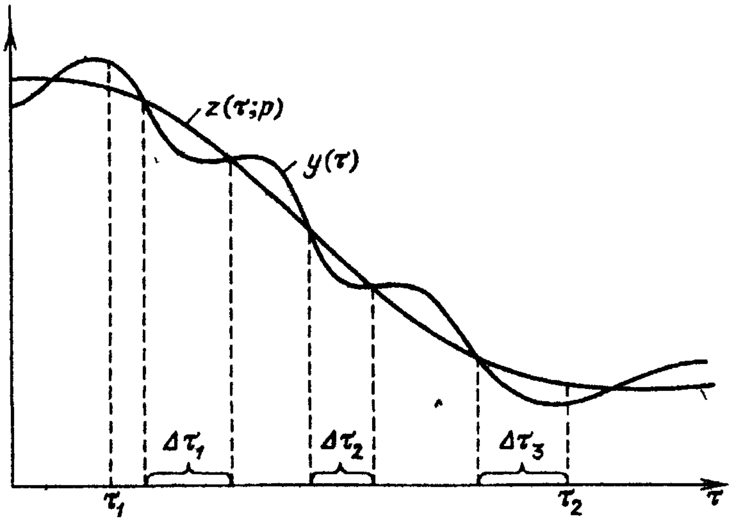

Рис. 12. Графики реализации процесса $y(\tau)$ и соответствующей изовероятностной кривой $z(\tau;\, p)$

статочно близко к единице, графики реализаций процесса $y(\tau)$ в любом интервале $(\tau_1,\, \tau_2)$ практически все время лежат ниже изовероятностной кривой, а если, например, $p = 1/2$, то реализация процесса $y(\tau)$ обвивает изовероятностную кривую, половину времени в среднем проводя над ней, а половину времени под ней. Поэтому изовероятностную кривую $z(\tau;\, 1/2)$ естественно назвать типичной реализацией процесса $y(\tau)$, хотя, конечно, график $z(\tau;\, 1/2)$ может сильно отличаться от графика любой реализации процесса $y(\tau)$. Интерпретация изовероятностных кривых как типичных реализаций, дающих представление о динамическом поведении реализаций соответствующих случайных процессов, подкрепляется сформулированным ниже предельным свойством извероятностных кривых. Как известно, количественной мерой случайности процесса $y(\tau)$ может служить его дисперсия $\sigma^2(\tau) = \langle y^2(\tau)\rangle - \langle y(\tau)\rangle^2$.

При $\sigma \to 0$ процесс $y(\tau)$ стремится к некоторой детерминированной функции $y_0(\tau) = \langle y(\tau)\rangle$. Из определения изовероятностных кривых следует, что в пределе $\sigma \to 0$ и при любом $p < 1$

$$\lim_{\sigma\to 0} z(\tau;\, p) = y_0(\tau),$$

т.е. изовероятностная кривая стягивается к детерминированной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.*//Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media. — Singapure: World Scientific, 1989.

2. *Градескул С.А, Фрейлихер В.Д.*//УФН. 1990. Т. 160, № 2. С. 239.
3. *Кляцкин В.И.*// И з в . АН СССР, Сер. "Физика атмосферы и океана". 1991. Т. 27. С. 45.
4. *Кляцкин В.И.* Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
5. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
6. *Klyatskin V.I.*//Lect. Appl. Math. 1991. V. 27. P. 447.
7. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.

8. *Лифшиц И.М., Градескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
9. *Анцигина Т.Н., Пастур Л.А., Слюсарев В.А.*//ФНТ. 1981. Т. 7. С. 5.
10. *Guzev M.A., Klyatskin V.I.*// Waves in Random Media. 1991. V. 1, № 1. P. 7.
[11] *Ярощук И.О.* Численное моделирование распространения плоской волны в случайных слоистых линейных и нелинейных средах// Диссертация канд. физ.-мат. наук. — Владивосток, ТОИ ДВО АН СССР, 1986.
12. *Шевцов Б.М.*// Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1982. Т. 25. С. 1032.
13. *Burridge R., Papanicolaou G., Sheng P., White B.*//SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. P. 582.

Статья поступила 16.10.91 г.