Февраль 1992 г. Том 162, № 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.871+539.12.01

ИЗЛУЧЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ТЕОРИИ ЯНГА—МИЛЛСА

Б.П. Косяков

(Всесоюзный научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Арзамас, Нижегородская обл.)

СОДЕРЖАНИЕ

Mehr Light!
(Больше света!)
(Предсмертные слова Гёте)

1. Введение

В представлении человека с физическим образованием излучение — это некий "волновой" процесс, распространяющийся со скоростью света и передающий энергетическое воздействие (сигнал) на дальние расстояния от источника; излучение содержит только "поперечные" степени свободы поля и "динамически независимо" от других степеней свободы.

Точного общепринятого определения излучения до сих пор не сформировалось. В электродинамике сосуществуют три разных определения. Традиционно в учебниках (см., например, [1 — 5]) под электромагнитным излучением понимается "дальнодействующая" часть поля Лиенара—Вихерта, убывающая в пространстве как $1/r$. Плотность энергии этой части ведет себя как $1/r^2$; при умножении на площадь сферы $4\pi r^2$ получается поток энергии, не меняющийся с расстоянием. В этом усматривается возможность передачи сигнала на дальние расстояния.

Но "дальнодействующая" часть поля не является решением уравнений свободного поля; значит, для нее не выполнен критерий "динамической независимости" излучения. Это упущение удалось исправить Дираку, который определил [6] излучение как разность запаздывающего и опережающего полей. Такая комбинация удовлетворяет волновому уравнению и при определенных условиях убывает в пространстве как $1/r$.

И дираковское определение не безупречно, если речь идет об универсальном понятии излучения; в неабелевых калибровочных теориях оно не соответствует свободному полю.

В определении, предложенном Тейтельбоймом [7], излучение отождествляется не с частью поля, а с частью полевой плотности энергии-импульса, характеризуемой зависимостью $1/r^2$. Как выясняется, такое определение наиболее полно учитывает интуитивные признаки излучения и в абелевом, и в неабелевом случаях.

Каждое из указанных определений анализируется в разделе 2 в контексте проблемы в классической электродинамике самодействия с точечным источником.

Следует, вероятно, пояснить, зачем вообще нужно разбиение исходной системы на две "динамически независимые" подсистемы, одна из которых отождествляется с излучением. По существу мы пытаемся проявить структуру самодействия. Не говоря о принципиальной стороне, понимание этой структуры важно в практическом смысле. Так, при получении "вслепую" уравнения Лоренца—Дирака (учитывающего конечные эффекты самодействия) мы встречаем ряд трудностей и парадоксов, трактовка и способы преодоления которых могут заметно отличаться, что иногда приводит к различию и в результатах конкретных вычислений. Представленные в разделе 2 сведения о структуре электромагнитного самодействия позволяют заключить, что уравнение Лоренца—Дирака свободно от приписываемых ему трудностей; этим определяется специфика намеченного подхода к решению конкретных задач.

Раздел 3 посвящен проблеме излучения в классической теории Янга—Миллса. Обсуждение базируется на полученном в работе [8] точном решении уравнений Янга—Миллса с током, образованным цветным зарядом при его движении по произвольной мировой линии. Это решение, выраженное через вектор-потенциал, содержит член, линейно растущий с расстоянием. В хромодинамике такое поведение вектор-потенциала интерпретируется как условие конфайнмента (см., например, [9 — 11]). Считается, что линейный рост вектор-потенциала обусловлен сжатием глюонных силовых линий в тонкую трубку-струну. Отметим, однако, что непосредственно в хромодинамике струноподобных решений не обнаружено, такие решения известны только для более простых моделей [12]. В представленном решении силовые линии линейно растущего члена вектор-потенциала распределены изотропно. По-видимому, это не препятствует возможности конфайнмента. Согласно вильсоновскому критерию — закону площадей для контурного среднего [13] — линейный рост вектор-потенциала независимо от прочих деталей (в частности, от того, изотропно или струноподобно распределены силовые линии) обеспечивает удержание неподвижных кварков.

Если на время забыть о квантовой природе хромодинамических явлений и допустить, что излучение и конфайнмент обусловлены классическим янг-миллсовским самодействием, то возникает условный классический мир с довольно любопытной проблематикой. Предотвращает ли конфайнмент излучение? Если да, то чем ускоренный цветной заряд принципиально отличается от ускоренного электрического заряда как источник излучения? Восстанавливается ли режим излучения в фазе деконфайнмента? Какие волны калибровочного поля порождает цветной заряд, ускоряемый силами не янг-миллсовской природы, — запаздывающие, опережающие, цветные, бесцветные? Как свойства этих волн сказываются на том, реализуется ли режим излучения или нет? Соблюдается ли закон Гаусса при наличии цветных степеней свободы, равномерно распределенных по всему пространству? Является ли энергия глюонного поля конечной или инфракрасно-расходящейся величиной?

Эти вопросы обсуждаются в разделе 3. Подчеркнем еще раз, что речь идет о классической модели, отношение которой к хромодинамической реальности не вполне ясно. Термин "конфайнмент" употребляется для обозначения ситуации, характеризуемой наличием линейно растущего члена в вектор-потенциале и, как будет показано, осуществлением режима поглощения глюонного поля, что, очевидно, препятствует обнаружению ускоренного цветного заряда. Напротив, "деконфайнмент" соответствует ситуации, в которой отсутствует линейно растущий член в вектор-потенциале, и все явления происходят в полной аналогии с электродинамическими. В целом модель вполне содержательна и не противоречит каким-либо фундаментальным физическим принципам. Цветные степени свободы, равномерно распределенные во всем пространстве, не сказываются на соблюдении закона Гаусса, не дают вклада в интегральные величины типа 4-импульса и, следовательно, не излучаются и не поглощаются.

2. Электродинамика

Рассмотрим поле электрического заряда e, движущегося по произвольной мировой линии $z^\mu(\tau)$, параметризованной собственным временем τ. Обозначим 4-скорость $v^\mu \equiv \dot z^\mu \equiv \mathrm{d}z^\mu/\mathrm{d}\tau$, 4-ускорение $a^\mu \equiv \dot v^\mu$. Метрический тензор выберем в виде $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+\ -\ -\ -)$. Примем гауссову систему единиц, скорость света положим равной 1. Определим *проектор* $b(\perp)$ на гиперплоскость, ортогональную неизотропному вектору b^μ, *формулой*

$$b(\perp)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (b_\nu b_\nu/b^2).$$

Запаздывающее решение неоднородного волнового уравнения

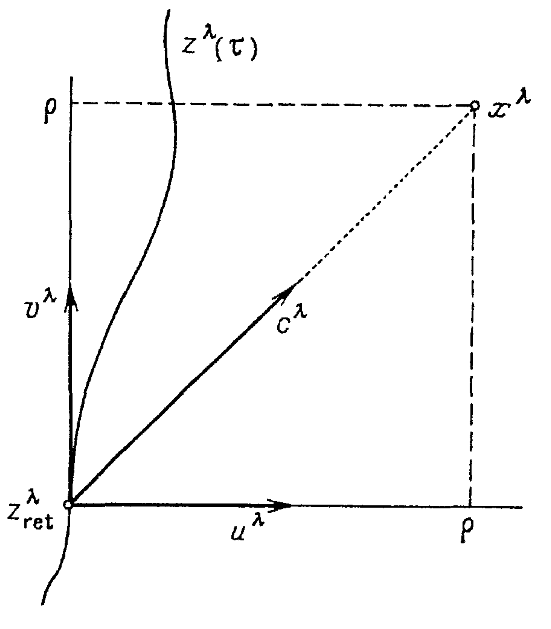
$$\Box A_\mu(x) = 4\pi e\int v_\mu(\tau)\delta^4(x - z(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

представляется [6, 3 — 5] в виде

$$A^\mu(x) = e\,\frac{v^\mu}{(x-z)v},$$

где кинематические величины относятся к запаздывающему моменту τ_{ret}, определяемому из условий $(x - z(\tau_{\mathrm{ret}}))^2 = 0,\ x^0 > z^0(\tau_{\mathrm{ret}})$.

Напомним некоторые элементы техники ковариантных запаздывающих величин [4]. Обозначим $R^\mu \equiv x^\mu - z^\mu(\tau_{\mathrm{ret}})$. В плоскости, натянутой на векторы R^μ и v^μ, построим мнимоединичный вектор u^μ, ортогональный v^μ, и изотропный вектор $c^\mu = v^\mu + u^\mu$ (см. рисунок). Аналитически это выразится в виде



$$v^2 = 1,\quad u^2 = -1,\quad c^2 = 0,$$

$$vu = 0,\quad cv = -cu = 1, \tag{2}$$

$$R^\mu = \rho c^\mu, \tag{3}$$

$$\rho = -Ru = Rv. \tag{4}$$

Инвариант ρ имеет смысл расстояния между точками испускания и приема сигнала в системе отсчета со стрелой времени v^{μ} (см. рисунок).

С изменение точки x^{μ} **точка** $z^{\mu}(\tau_{\rm ret})$ также меняется согласно условию $R^2 = 0$. Его дифференцирование $R^{\lambda}(\eta_{\lambda\mu} - v_{\lambda}\tau_{,\mu}) = 0$ с учетом (2) — (4) дает

$$\tau_{,\mu} = c_{\mu}. \tag{5}$$

Отсюда находятся производные кинематических величин, например $v_{\lambda,\mu} = a_{\lambda}c_{\mu}$. Дифференцируя второе равенство (4) с учетом (2) — (5) получаем

$$\rho_{,\mu} = -u_{\mu} + \rho(ac)c_{\mu}. \tag{6}$$

Теперь все готово, чтобы путем простых вычислений представить поле Лиенара—Вихерта $F = \mathrm{d}A$ в виде

$$F = \frac{e}{\rho^2} c \wedge V, \tag{7}$$

где

$$V_{\mu} = v_{\mu} + \rho(u(\perp)a)_{\mu}. \tag{8}$$

Обратим внимание на разложимость 2-формы F, т.е. возможность записать ее в виде внешнего произведения c^{μ} и V^{μ}. Этот факт можно выразить иначе. Площадь параллелограмма, построенного из векторов c^{μ} и V^{μ}, есть $s = [-V^2(V(\perp)c)^2]^{1/2}$; с учетом (8) $s = 1$. Отсюда следует, что выражение (7) не меняется при замене c^{μ} и V^{μ} на любые два вектора, лежащие в той же плоскости и образующие параллелограмм единичной площади; поле Лиенара—Вихерта зависит не от c^{μ} и V^{μ} непосредственно, а лишь от ориентации (c, V)-плоскости. Другими словами, величина F инвариантна относительно группы $\mathrm{Sp}(1, R)$ симплектических преобразований (c, V)-плоскости, сохраняющих площадь и ориентацию параллелограмма.

Двум слагаемым в (8) соответствуют две части поля

$$F_{\rm I} = \frac{e}{\rho^2} c \wedge v \quad \text{и} \quad F_{\rm II} = \frac{e}{\rho} c \wedge (u(\perp)a),$$

которые традиционно интерпретируются как кулоновская и излучаемая составляющие (см., например, [1 — 5]).

Величина $F_{\rm II}$ "поперечна" в следующем смысле. Из равенств $F^{\mu\nu}_{\rm II} v_{\mu}u_{\nu} = 0$, ${}^*F^{\mu\nu}_{\rm II} v_{\mu}u_{\nu} = 0$ видно, что в системе отсчета со стрелой времени v^{μ}, в которой $v^{\mu} = \{1, 0, 0, 0\}$, $u^{\mu} = \{0, \mathbf{n}\}$, напряженности $\mathbf{E}_{\rm II}$ и $\mathbf{B}_{\rm II}$ (временные компоненты $F^{\mu\nu}_{\rm II} v_{\mu}$ и ${}^*F^{\mu\nu}_{\rm II} v_{\mu}$) ориентированы поперек направления $\mathbf{n}$ распространения фронта волны. Величина $F_{\rm I}$, напротив, содержит "продольные" степени свободы: $F^{\mu\nu}_{\rm I} v_{\mu}u_{\nu} = e/\rho^2$.

Убывание $F_{\rm II}$ как $1/\rho$ — основной довод для отождествления этой величины с излучением. Но насколько он состоятелен? Значения инвариантов поля Лиенара—Вихерта ${}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\mathbf{EB} = 0$, $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = 2e^2/\rho^4$ свидетельствуют о том, что имеется система отсчета (своя для каждой точки наблюдения x^{μ}), в которой $\mathbf{B} = 0$, $|\mathbf{E}| = e/\rho^2$, т.е. $1/\rho$-зависимость исключена. Можно указать эту систему отсчета явным образом. Из тождества $c \wedge V = (V(\perp)c) \wedge V$ следует, что при $V^2 > 0$ поле F оказывается чисто кулоновским в системе отсчета со стрелой времени V^{μ}, а при $V^2 < 0$ стрелой времени может служить $(V(\perp)c)^{\mu}$. Тождество $c \wedge V = U \wedge (U(\perp)V)$, где $U = V + c$, и соотношения $U^2 = 2 + V^2$, $(U(\perp)V)^2 = -1/U^2$ показывают, что при $V^2 = 0$ в качестве стрелы времени подходит U^{μ}.

Наличие $1/\rho$-зависимости в F есть артефакт, связанный с использованием глобальной лоренцевской системы отсчета. Информация о "дальнодействии" заключена не в самой 2-форме F, а в совокупности 2-формы F и системы отсчета.

Этим объясняется то обстоятельство, что F_{I} и F_{II} не удается придать смысл "динамически независимых" величин. Их можно было бы считать таковыми, если бы, например, они, подобно F, удовлетворяли вне мировой линии источника однородным уравнениям Максвелла $\mathrm{d}^*F=0$, $\mathrm{d}F = 0$. Вместо этого $F^{\mu\nu}_{\mathrm{I},\mu} = -F^{\mu\nu}_{\mathrm{II},\mu} = 2e(ac)c^{\nu}/\rho^2$.

Таким образом, трактовка F_{II} как излучения несостоятельна, что связано с симплектической инвариантностью (разложимостью) 2-формы F. Это свойство, в свою очередь, обусловлено тремя факторами: запаздывающим характером распространения поля, четырехмерностью рассматриваемого континуума и времениподобностью мировой линии источника. Действительно, перечисленные факторы (однозначно учитываемые формулами (2) — (6)) позволяют заключить, что для конструирования 2-формы F как суммы линейно независимых внешних произведений в нашем распоряжении всего три линейно независимых вектора: u^{μ}, c^{μ}, a^{μ}.

Заметим, что указанное свойство F сохраняется, если условие запаздывания заменить на условие опережения. С любым другим условием, например линейной комбинацией запаздывающего и опережающего условий, 2-форма F перестает быть разложимой.

Дирак определил [6] излучение как величину

$$A_{\mathrm{rad}} = A_{\mathrm{ret}} - A_{\mathrm{adv}}, \tag{9}$$

где A_{ret} и A_{adv} — запаздывающее и опережающее решения уравнения (1). Так как

$$\Box A_{\mathrm{rad}} = 0,$$

то A_{rad} — свободное поле. Тем самым обеспечивается "динамическая независимость" членов разложения

$$A_{\mathrm{ret}} = \frac{1}{2}(A_{\mathrm{ret}} - A_{\mathrm{adv}}) + \frac{1}{2}(A_{\mathrm{ret}} + A_{\mathrm{adv}}),$$

интерпретируемых как "свободная" и "связанная" части запаздывающего поля.

Дираковское определение излучения лежит в основе теории действия на расстоянии Уилера—Фейнмана [14] (см. современный обзор [15], где содержатся ссылки на работы в этом направлении), претендующей на описание электромагнетизма без электромагнитного поля вообще.

Разбиение на "продольные" и "поперечные" компоненты производится теперь по иному принципу: A^μ разлагается в интеграл Фурье, т.е. по "волнам" $\exp(ikx)$, продольным и поперечным относительно направления "волнового" вектора k^μ. Поперечные компоненты выделяются калибровочным условием Лоренца $A^\mu{}_{,\mu} = 0$. Часто, однако, "поперечность" понимается в аналогичном трехмерном смысле, как соблюдение кулоновской калибровки $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

Подчеркнем, что математические особенности A_{rad}, выражающие свойства свободного поля, целиком обусловлены линейностью уравнений Максвелла. В неабелевых калибровочных теориях линейная комбинация запаздывающего и опережающего решений перестает играть роль свободного поля. Поэтому определение (9) имеет смысл обсуждать лишь в рамках электродинамики.

Если мировая линия источника состоит из двух прямых лучей, соединенных криволинейным звеном, то с удалением от искривленного участка по образующей верхней полы светового конуса асимптотически "выживает" только F_{rad}, причем $F_{\mathrm{rad}} \to F_{\mathrm{II}}$. В этой ситуации дираковское и традиционное определения излучения асимптотически эквивалентны. Заметим, что в области совпадения F_{rad} и F_{II} обе эти величины одновременно могут быть устранены подходящим выбором системы отсчета.

Поле $F_{\mathrm{rad}}/2$ не сингулярно на мировой линии источника. Подстановка его в выражение для силы Лоренца дает (см. [4 — 6]) вектор Абрагама $\Gamma^\mu \equiv (2/3)e^2(\dot a^\mu + v^\mu a^2)$, который фигурирует в уравнении Лоренца—Дирака

$$ma^\mu - \frac{2}{3}e^2(\dot a^\mu + v^\mu a^2) - f^\mu = 0 \tag{10}$$

как сила реакции излучения. Это послужило решающим доводом для принятия дираковского определения излучения. Между тем такая интерпретация Γ^μ ошибочна [7].

Действительно, учитывая, что $av = 0$, $\dot a v = -a^2$, представим уравнение (10) в виде

$$v(\perp)(\dot p - f) = 0, \tag{11}$$

где

$$p^\mu = mv^\mu - \frac{2}{3}e^2 a^\mu. \tag{12}$$

Заметим, что 2-й закон Ньютона для нейтральной частицы записывается в терминах геометрии пространства Минковского как раз в виде (11), при этом $p^\mu = mv^\mu$. Наличие $v(\perp)$ в (11) указывает на то, что в любой мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета соблюдается 2-й закон Ньютона в его ортодоксальной форме: $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}$.

Математически необходимость $v(\perp)$ следует из инвариантности затравочного действия

$$S = -m_0\int (v_\mu v^\mu)^{1/2}\mathrm{d}\tau - e\int A_\mu \mathrm{d}z^\mu - \frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \tag{13}$$

относительно группы репараметризационных преобразований $\delta\tau = \varepsilon$, $\delta z^\mu = v^\mu \delta\tau$, где $\varepsilon(\tau)$ — произвольная положительная инфинитезимальная функция. Согласно 2-й теореме **Нётер** [16] эта инвариантность порождает тождество $v_\mu \delta S/\delta z^\mu = 0$, которое означает, что эйлериан $\delta S/\delta z^\mu$ содержит фактор $v(\perp)$. Запись уравнения Лоренца—Дирака в виде (11) свидетельствует о том, что в использованной для его вывода регуляризационно-перенормировочной процедуре не нарушена репараметризационная инвариантность.

Таким образом, уравнение Лоренца—Дирака есть выражение 2-го закона Ньютона для объекта, обладающего 4-импульсом p^μ с несколько необычной зависимостью (12) от кинематических величин. Ньютонов характер этого объекта (который ниже именуется электромагнитным комплексом) означает, в частности, что он подвергается воздействию только внешней силы f^μ.

Более привычная точка зрения состоит в том, что уравнение (10) описывает объект с 4-импульсом $p^\mu = mv^\mu$, представляемый в образе "частицы". Поведение такой "частицы" не подчиняется 2-му закону Ньютона, и это служит источником многих недоразумений и парадоксов.

Возьмем, к примеру, парадокс равноускоренного движения [2, 4]. Релятивистское условие равноускоренности $v(\perp)\dot{a} = 0$ с учетом равенства $\Gamma^\mu = (2/3)e^2(v(\perp)\dot{a})^\mu$ означает, что при таком движении "частица" не ощущает никакой реакции излучения. В отношении комплекса этот парадокс не возникает: комплекс вообще не испытывает реакции излучения, случай равноускоренного движения здесь ничем не выделен.

Другой впечатляющий пример — проблема "противоускорения", показывающая, что нарушение 2-го закона Ньютона для "частицы" не обязательно ограничено малой поправкой. При одномерном движении $v^\mu = \{\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{sh}\alpha, 0, 0\}$, $f^\mu = f\{\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{ch}\alpha, 0, 0\}$, и уравнение (10) сводится к

$$\dot{\alpha} - \tau_0\ddot{\alpha} = f/m,$$

где $\tau_0 = 2e^2/3m$. Этому уравнению удовлетворяет решение

$$\dot{\alpha}(\tau) = e^{\tau/\tau_0}\Big(B - \frac{1}{m\tau_0}\int_0^\tau e^{-s/\tau_0} f(s)\,\mathrm{d}s\Big),$$

где B — произвольное начальное значение $\dot{\alpha}$ в момент $\tau = 0$. Полагая $B = 0$, обнаружим, что ускорение $\dot{\alpha}(\tau)$ и сила $f(\tau)$ направлены в противоположные стороны.

Исходя из понятия комплекса, мы не усмотрим скобой проблемы в "противоускорении". Поведение комплекса управляется 2-м законом Ньютона, но отсюда вовсе не следует, что ускорение и сила должны быть одинаково направленными, поскольку зависимость $p^\mu = mv^\mu$ не имеет места.

Таким образом, довод в пользу дираковского определения излучения, основанный на интерпретации Γ^μ как силы реакции излучения, следует признать неубедительным.

Система с действием (13) характеризуется симметричным тензором энергии-импульса вида $T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, где

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_\alpha^{\ \nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right), \qquad (14)$$

$$t^{\mu\nu} = m_0\int v^\mu(\tau)v^\nu(\tau)\delta^4(x - z(\tau))\mathrm{d}\tau. \qquad (15)$$

Подставим в (14) общее решение полевых уравнений $F = F_{\rm in} + F_{\rm ret}$, где

$F_{\rm in}$ — решение однородных уравнений с произвольным начальным условием, заданным в момент далекого прошлого, $F_{\rm ret}$ — запаздывающее решение Лиенара—Вихерта; получим $\Theta = \Theta_{\rm in} + \Theta_{\rm mix} + \Theta_{\rm ret}$, причем каждый член удовлетворяет вне мировой линии уравнению непрерывности:

$$\Theta^{\mu\nu}_{{\rm in},\,\mu} = 0, \quad \Theta^{\mu\nu}_{{\rm mix},\,\mu} = 0, \quad \Theta^{\mu\nu}_{{\rm ret},\,\mu} = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим $\Theta_{\rm ret}$. С учетом (7) и (8)

$$\Theta^{\mu\nu}_{\rm ret} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(c^\mu V^\nu + c^\nu V^\mu - V^2 c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right).$$

Это выражение не инвариантно относительно Sp(1, R)-преобразований в (c, V)-плоскости. В нем содержится информация не только о 2-форме $F_{\rm ret}$, но и о системе отсчета[1*]. Поэтому преобразование системы отсчета не может обратить в 0 какой-либо член в $\Theta_{\rm ret}$. С учетом равенства $V^2 = 1 + \rho^2(u\,(\perp)a)^2$ величина $\Theta_{\rm ret}$ разлагается на сумму двух членов: $\Theta_{\rm ret} = \Theta_{\rm I} + \Theta_{\rm II}$, где

$$\Theta^{\mu\nu}_{\rm I} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(c^\mu V^\nu + c^\nu V^\mu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right), \tag{17}$$

$$\Theta^{\mu\nu}_{\rm II} = \frac{e^2}{4\pi\rho^2}(u(\perp)a)^2 c^\mu c^\nu. \tag{18}$$

Согласно определению Тейтельбойма [7] $\Theta^{\mu\nu}_{\rm II}$ есть излучение. Оно убывает с расстоянием как $1/\rho^2$. Поток величины $\Theta^{\mu\nu}_{\rm II}$ через верхнюю полу светового конуса (элемент поверхности $d\sigma_\mu = c_\mu\,\rho^2 d\rho d\Omega$) равен 0. Это означает, что данная часть полевой энергии-импульса удаляется от источника в виде расходящейся сферической волны, передний и задний фронты которой движутся со скоростью света. Такое поведение $\Theta^{\mu\nu}_{\rm II}$ обеспечивает передачу сигнала на дальние расстояния от источника.

Поскольку $\Theta^{\mu\nu}_{\rm II}$ образуется целиком от $F^{\mu\nu}_{\rm II}$, а $F^{\mu\nu}_{\rm II}$ — "поперечная" часть поля Лиенара—Вихерта, в $\Theta^{\mu\nu}_{\rm II}$ содержатся одни "поперечные" степени свободы.

Член $\Theta^{\mu\nu}_{\rm I}$ Тейтельбойм истолковал [7] как увлекаемую источником часть энергии-импульса. Из (17) следует, что поток от $\Theta^{\mu\nu}_{\rm I}$ через верхнюю полу светового конуса отличен от 0. Поэтому данная часть энергии-импульса переносится во времениподобном направлении, однозначно связанном с направлением мировой линии источника.

С помощью (2) — (6) можно проверить, что вне мировой линии

$$\Theta^{\mu\nu}_{{\rm I},\,\mu} = 0, \quad \Theta^{\mu\nu}_{{\rm II},\,\mu} = 0. \tag{19}$$

Тейтельбойм интерпретировал локальные законы сохранения (16) и (19) как проявление "динамической независимости" величин $\Theta_{\rm in}$, $\Theta_{\rm mix}$, $\Theta_{\rm I}$, $\Theta_{\rm II}$. Отметим, что данная трактовка "динамической независимости" не связана с требованием, чтобы поле, из которого образованы эти плотности энергии-импульса, было свободным.

Рассмотрим 4-импульс поля, определяемый как интеграл от $\Theta^{\mu\nu}$ по гиперповерхности Σ, ортогональной к мировой линии в точке их пересечения, с вырезанным вокруг этой точки отверстием малого радиуса ε [4, 7]. Вырезание отверстия требуется для регуляризации расходящегося выражения, а чтобы регуляризация оказалась лоренц-инвариантной, отверстие должно описываться лоренц-инвариантным образом, в частности гиперплоскость Σ следует задать без ссылки на систему отсчета. По этой причине гиперплоскость выбрана жестко привязанной к геометрии мировой линии.

Поскольку Θ_{in} не зависит от e, интеграл от Θ_{in} не меняется вдоль мировой линии заряда; его вид для нас не существенен.

Интеграл от Θ_{mix} легко вычисляется:

$$P^{\lambda}_{\text{mix}} = \int_{\Sigma} \Theta^{\lambda\mu} \mathrm{d}\sigma_{\mu} = -e \int_{-\infty}^{\tau} F^{\lambda\mu}_{\text{in}} v_{\mu} \mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Это выражение можно понимать как 4-импульс, поглощаемый из внешнего поля F_{in} за всю историю пути заряда из далекого прошлого до момента τ.

Интегралы от Θ_{I} и Θ_{II} найдены в [7]:

$$P^{\lambda}_{\text{I}} = \int_{\Sigma} \Theta^{\lambda\mu}_{\text{I}} \mathrm{d}\sigma_{\mu} = \frac{e^2}{2\varepsilon} v^{\lambda} - \frac{2}{3} e^2 a^{\lambda}, \tag{21}$$

$$P^{\lambda}_{\text{II}} = \int_{\Sigma} \Theta^{\lambda\mu}_{\text{II}} \mathrm{d}\sigma_{\mu} = -\frac{2}{3} e^2 \int_{-\infty}^{\tau} a^2 v^{\lambda} \mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

Из (21) видно, что увлекаемый 4-импульс P^{λ}_{I} действительно переносится вдоль пути, близкому к мировой линии заряда. Выражение (22) показывает, что P^{λ}_{II} есть 4-импульс излучения, образующийся (в соответствии с известной формулой Лармора) за всю историю вплоть до момента τ.

Тензор $t^{\mu\nu}$, определяемый согласно (15), также имеет нулевую дивергенцию вне мировой линии. Объединяя $t^{\mu\nu}$ и $\Theta^{\mu\nu}_{\text{I}}$, получим новую "динамически независимую" величину. Ей соответствует интеграл $p^{\lambda} = m_0 v^{\lambda} + P^{\lambda}_{\text{I}}$, который оказывается совпадающим с 4-импульсом комплекса (12), если конечную величину m определить как

$$m = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(m_0(\varepsilon) + \frac{e^2}{2\varepsilon} \right). \tag{23}$$

Закон сохранения 4-импульса системы выражается соотношениями

$$\dot{P}^{\lambda}_{\text{in}} = 0,$$

$$\dot{p}^{\lambda} + \dot{P}^{\lambda}_{\text{II}} + \dot{P}^{\lambda}_{\text{mix}} = 0. \tag{24}$$

Подстановка (12), (20), (22) во второе из этих соотношений превращает его в уравнение (10), где $f^{\lambda} = -\dot{P}^{\lambda}_{\text{mix}} = eF^{\lambda\mu}_{\text{in}} v_{\mu}$. Таким образом, уравнение Лоренца—Дирака оказывается выражением локального баланса 4-импульса перенормированной системы: поглощенный из внешнего электромагнитного поля 4-импульс $\mathrm{d}P^{\lambda}_{\mathrm{mix}}$ расходуется на приращение 4-импульса комплекса $\mathrm{d}\,p^{\lambda}$ и на создание излучаемого 4-импульса $\mathrm{d}P^{\lambda}_{\mathrm{II}}$.

С точки зрения динамики "частицы" уравнение Лоренца—Дирака не выражает баланса 4-импульса. Этому препятствует наличие члена $-(2/3)e^2\dot{a}^{\mu}$. Чтобы от него избавиться, уравнение (10) можно проинтегрировать в бесконечных пределах, налагая асимптотические условия $a^{\mu}(\tau) \to 0$, $\tau \to \pm\infty$:

$$mv^{\mu}(\infty) - mv^{\mu}(-\infty) - \frac{2}{3}e^2\int_{-\infty}^{\infty} a^2v^{\mu}\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\mu}\mathrm{d}\tau.$$

Этим равенством выражается глобальный баланс энергии-импульса. Такого рода результаты дают повод для заключений о "нелокальной природе электромагнитных взаимодействий" [17, 18]. В действительности же, локальный баланс был нарушен вследствие искусственного и ничем не обоснованного выделения члена mv^{μ} из выражения (12). Соответствующая этому члену плотность не удовлетворяет уравнению (19) и не представляет собой "динамически независимой" величины.

Таким образом, самодействие в классической электродинамике производит существенную перекомпоновку степеней свободы по сравнению с тем порядком, который представлен в затравочном действии. Вместо затравочной частицы и электромагнитного поля в исходном неразделенном состоянии возникают перенормированные объекты — комплекс и излучение. Тейтельбоймовский анализ [7] показал, что корректный учет перекомпоновки должен производиться без нарушения локальных законов сохранения и симметрии затравочного действия. Полученное при этом динамическое уравнение оказывается, с одной стороны, выражением 2-го закона Ньютона для комплекса, а с другой, — локальным балансом 4-импульса перенормированной системы. Иные варианты перекомпоновки степеней свободы с разбиением поля Лиенара—Вихерта на "кулоновскую" и "дальнодействующую" или на "свободную" и "связанную" составляющие, а также выделение объекта, обладающего 4-импульсом $p^{\mu} = mv^{\mu}$, не учитывают математической структуры теории, приводя тем самым к различным физически нелепым результатам.

3. Теория Янга—Миллса

Классическое поле Янга—Миллса, порождаемое точечным произвольно движущимся цветным зарядом Q^a, описывается уравнениями [19]

$$D^{ab}_{\mu}F^{\mu\nu}_{b}(x) = 4\pi\int Q^a(\tau)v^{\nu}(\tau)\delta^4(x - z(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

$$\dot{Q}^a = gf^{abc}Q_bA^{\mu}_{c}v_{\mu}, \tag{26}$$

где $D^{ab}_{\mu} = \delta^{ab}\partial_{\mu} - gf^{abc}A^c_{\mu}$ — ковариантная производная, $F^a_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^a_{\nu} - \partial_{\nu}A^a_{\mu} + gf^{abc}A^b_{\mu}A^c_{\nu}$ — тензор поля Янга—Миллса, f^{abc} — структурные константы калибровочной группы (для случая группы $O(3)$, рассмотрением которой мы здесь ограничимся, $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$).

Определим единичный изовектор $\hat{\Gamma}^a_1 = Q^a/\sqrt{Q^2}$. Можно подобрать два других единичных изовектора $\hat{\Gamma}^a_2$ и $\hat{\Gamma}^a_3$, ортогональных друг другу и $\hat{\Gamma}^a_1$, так, чтобы выполнялись соотношения $\varepsilon_{abc}\hat{\Gamma}^a_i\hat{\Gamma}^b_j = \varepsilon_{ijk}\hat{\Gamma}^k_c$. Базис в изопространстве удобно задать набором векторов $\hat{\Gamma}^a_1$, $\hat{\Gamma}^a_+$, $\hat{\Gamma}^a_-$, где $\hat{\Gamma}^a_\pm = \hat{\Gamma}^a_3 \pm i\hat{\Gamma}^a_2$.

Запаздывающее решение уравнений (25) и (26) записывается [8] в виде

$\hat{\Gamma}^a_i(\tau) = \text{const}$,

$$A^a_\mu = \pm\,\frac{2i\hat{\Gamma}^a_1}{g}\frac{v_\mu}{\rho} + \varkappa\hat{\Gamma}^a_\pm R_\mu, \tag{27}$$

где $\varkappa$ — произвольный ненулевой вещественный параметр размерности l^{-2}. Как видим, кроме обобщенного лиенар-вихертовского члена в A^a_μ присутствует член, линейно растущий с расстоянием. В электродинамике такой член возникнуть не мог; поскольку $\Box R^\mu = -2v^\mu/\rho$, этот член специфичен для неабелевой теории.

Из (27) вычисляется тензор поля Янга—Миллса:

$$F = c \wedge W, \tag{28}$$

$$W^a_\mu = \pm\,\frac{2i\hat{\Gamma}^a_1}{g}\frac{V_\mu}{\rho^2} + \varkappa\hat{\Gamma}^a_\pm v_\mu, \tag{29}$$

вектор V_μ определяется согласно (8).

Обратим внимание на мнимую единицу перед $\hat{\Gamma}^a_1$ в (27) и (29). Она возникла из условия

$$g^2Q^2 = -4, \tag{30}$$

которым обеспечивается совместность системы уравнений в случае $\varkappa \neq 0$ (подробности см. в [8]). Если же $\varkappa = 0$, то условие (30) отсутствует и вместо (27) получается вещественное решение $A^a{}_\mu = Q^a v_\mu/\rho$.

Тензор $F^a{}_{\mu\nu}$ содержит постоянный член, благодаря чему цветные степени свободы, характеризуемые фактором $\hat{\Gamma}^a_\pm$, распределены равномерно в пространстве. Это может вызвать сомнение в соблюдении закона Гаусса(2*). Формально разрешить сомнение довольно просто. Если $F^a_{\mu\nu}$ — решение уравнений (25), то подстановка $F^a_{\mu\nu}$ в эти уравнения превращает их в тождества. Интегрируя левую часть тождеств по объему, содержащему источник, получим $4\pi Q^a$, так как этот результат следует из интегрирования правой части. Заметим, однако, что величина $4\pi Q^a$ возникает от одного из дивергентных членов левой части, остальные члены должны взаимно сократиться. Вот за этим сокращением мы и предлагаем проследить.

Выберем на мировой линии произвольную точку z^μ и проведем через нее гиперплоскость Σ с вектором нормали v^μ. Зададим на Σ область $\mathscr{B}$ с границей $\partial\mathscr{B}$, образуемой в результате пересечения Σ с гиперповерхностью $\mathscr{T}$, описываемой уравнением $\rho = L = \text{const}$. Согласно теореме Гаусса

$$\int_{\mathscr{B}} v_\nu F^{\mu\nu}_{a\,,\mu}\,\mathrm{d}^3x = \int_{\partial\mathscr{B}} v_\nu F^{\mu\nu}_a \rho_{,\mu}\,\mathrm{d}^2x, \tag{31}$$

где ρ_μ — вектор нормали к $\mathcal{T}$. Подынтегральное выражение справа при подстановке (8), (28) и (29) принимает вид

$$v_\mu F_a^{\mu\nu}\rho_\mu = \left(\pm\frac{2i\hat{\Gamma}_1^a}{g\rho^2} + \varkappa\hat{\Gamma}_\pm^a\right)(1-\rho au). \tag{32}$$

Элемент меры на $\partial\mathcal{B}$ есть $d^2x = L^2 d\Omega$. Интегрирование по телесному углу Ω выражений, содержащих нечетную степень вектора u^μ, дает 0. Поэтому член ρau в (32) можно опустить. В итоге для (31) получается выражение

$$4\pi\left(\pm\frac{2i}{g}\right)\hat{\Gamma}_1^a + 4\pi L^2\hat{\Gamma}_\pm^a, \tag{33}$$

первый член которого с учетом (30) есть $4\pi Q^a$.

Для нахождения интеграла по $\mathcal{B}$ от $G_\nu^a \equiv g\varepsilon^{abc}A_b^\mu F_{\mu\nu}^c = -2\varkappa\rho^{-1}\hat{\Gamma}_\pm^a V_\nu$ воспользуемся теоремой Гаусса. Четырехмерная область, ограниченная Σ, $\mathcal{T}$ и верхней полой светового конуса C с вершиной в точке z^μ, не содержит источников, поэтому поток вектора G_ν^a через Σ равен сумме потоков через $\mathcal{T}$ и C. Элемент меры $d\sigma_\mu$ на $\mathcal{T}$ есть $\rho_\mu d\tau L^2 d\Omega$, а так как $V^\nu\rho_{,\nu} = \rho au$, то поток через $\mathcal{T}$, содержащий интегрирование u^μ по телесному углу, обращается в 0. Поток через C

$$\int_C G_\nu^a d\sigma^\nu = -\int d\Omega\int_0^L d\rho\rho\cdot 2\varkappa\hat{\Gamma}_\pm^a V_\nu c^\nu = -4\pi\varkappa L^2\hat{\Gamma}_\pm^a.$$

Эта величина сокращается со вторым членом в (33).

Ситуация с $\varkappa \neq 0$ ассоциируется с фазой конфайнмента в хромодинамике. Ситуацию с $\varkappa = 0$, напротив, следовало бы связать с фазой деконфайнмента.

Так как $\hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_\pm = 0$, $\hat{\Gamma}_\pm^2 = 0$, то вклад в тензор энергии-импульса

$$\Theta^{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{a\lambda}{}_\nu F_a^{\nu\mu} + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\mu}F^a_{\rho\sigma}F_a^{\rho\sigma}\right)$$

дает только обобщенный лиенар-вихертовский член. Конфайнмент, как выясняется, не только не требует энергетических затрат; но даже не характеризуется каким-либо неизменным энергетическим показателем, вопреки энергетическим соображениям, лежащим в основе струнных моделей удержания кварков [9 — 11].

Тейтельбоймовский подход почти целиком (кроме пункта о суперпозиции решений) переносится на теорию Янга—Миллса. Поэтому, не повторяя сказанного, отметим лишь особенности неабелевой картины, связанные с наличием мнимой единицы перед $\hat{\Gamma}_1^a$ (3*).

Если цветной заряд ускоряется силами не янг-миллсовской природы, то интенсивность излучаемой энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{3g^2}a^2 \tag{34}$$

имеет "неправильный" знак, т.е. энергия поля Янга—Миллса в фазе конфайнмента не излучается, а поглощается. При этом речь идет о поглощении бесцветных волн, поскольку $\hat{\Gamma}_i^a(\tau) = \mathrm{const}$.

Собственная энергия точечного цветного заряда отрицательна. Если перенормированная масса m положительна, то из (23) следует, что и затравочная масса m_0 положительна.

Уравнение движения цветного комплекса

$$m[a^\mu + \tau_0(\dot{a}^\mu + v^\mu a^2)] - f^\mu = 0, \tag{35}$$

где $\tau_0 = 8/3mg^2$, а f^μ — сила не янг-миллсовской природы, отличается от уравнения (10) знаком перед круглой скобкой и, благодаря этому, не имеет самоускоряющихся решений.

Заметим, что m — плохо определенная величина. Ряд моделей приписывает токовым кваркам небольшую положительную массу (порядка нескольких Мэв), но, например, в модели [20] кварковый пропагатор вообще не имеет полюса и описывается целой функцией. Поэтому на данном этапе не следовало бы исключать возможностей $m < 0$ или $m = 0$. Первая из них ведет к появлению самоускоряющихся решений обычного типа $|a| \sim \exp(\tau/\tau_0)$, вторая означает наличие равномерных самоускорений $|a| = \mathrm{const}$. В первом случае m_0 может оказаться как положительной, так и отрицательной расходящейся величиной, во втором же $m_0 > 0$.

В фазе деконфайнмента все явления описываются формулами электродинамики с заменой e^2 на Q^2. В частности, ускоренный цветной заряд излучает, вместо уравнения (35) получается уравнение Лоренца—Дирака (10).

Уравнения (25) и (26) допускают и опережающее решение. Оно получается из запаздывающего заменой знака перед $\rho(u(\perp)a)_\mu$ в выражении (8) и перед $i\Gamma_2^a$ в (27) и (29). Все итоговые заключения, в частности, уравнения (34) и (35) остаются неизменными. Это подтверждает непричастность дилеммы "запаздывание—опережение" к вопросу о том, реализуется ли режим излучения или поглощения.

Остановимся на проблеме самоускорений. Заметим прежде всего, что самоускоренное движение может сопровождаться как излучением (деконфайнмент), так и поглощением (конфайнментные варианты с $m \leq 0$) энергии-импульса калибровочного поля. В любом случае это не нарушает закона сохранения энергии-импульса. Действительно, уравнение движения цветного комплекса в отсутствие внешних сил можно записать согласно (24) как закон сохранения полного 4-импульса системы:

$$\dot{p}^\lambda + \dot{P}^\lambda_{\mathrm{II}} = 0,$$

где P^λ_{II} обозначает, в зависимости от знака, излученный или поглощенный 4-импульс. Так, разумеется, и должно быть, в силу трансляционной инвариантности, имеющей место в отсутствие внешних сил.

Реальная проблема самоускорений состоит в том, что при наличии мировых линий, отвечающих самоускоренному движению, интегральные величины типа 4-импульса поля оказываются инфракрасно-расходящимися. Это видно, например, из выражения (22), которое расходится при невыполнении асимптотического условия $a^\mu(\tau) \to 0, \quad \tau \to -\infty$.

Аналогичная ситуация возникает в квантовой теории поля из-за наличия унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений и теоремы Хаага; см., например, [21]. Если гамильтониан $\mathcal{H}$ и состояние Ψ трансляционно инварианты, то

$$\|H\Psi\| = \int \langle \Psi, \mathcal{H}(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{y})\Psi\rangle d^3x d^3y = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad H\Psi = 0, \\ \infty & \text{при} \quad H\Psi \neq 0. \end{cases}$$

Мы обычно пользуемся представлением Фока, находя его физически прозрачным и технически удобным. Тем не менее использование "странных" представлений коммутационных соотношений ничуть не противоречило бы каким-либо фундаментальным физическим принципам.

Галилеевское равномерное движение — это нормальный вариант трансляционно-инвариантного динамического состояния в отсутствие внешних сил. Самоускорение, видимо, следует рассматривать как "странный" вариант этого состояния. Самоускорение не противоречит динамике Ньютона, поскольку описывается решением уравнения (11), выражающего 2-й закон Ньютона. Оно не нарушает иных физических законов и принципов. Полная энергия системы в этом состоянии остается неизменной, ввиду того, что энергия комплекса не является знакоопределенной величиной: ее уменьшение в точности компенсирует прирост энергии излучения, и наоборот, ее увеличение точно покрывает расход энергии поглощения. Ошибочно считать (как это часто делается) самоускорение "нефизическим" состоянием.

В классической теории Янга—Миллса инфракрасная расходимость интегральных величин типа 4-импульса поля возникает лишь в фазе деконфайнмента — в связи с наличием самоускорений. Что касается фазы конфайнмента, то здесь этой проблемы не создают ни линейно растущий потенциал, ни самоускорения (при условии положительности m). Возможно, это проливает новый свет на проблему взаимосвязи конфайнмента с инфракрасным поведением глюонного пропагатора, определенного на фоковском вакууме.

4. Заключение

Формулировка понятия излучения — проблема отнюдь не терминологическая. Это понятие характеризует форму самодействия, при которой происходит разбиение полевой системы на две "динамически независимые" подсистемы — излучаемую и увлекаемую источником. "Динамическая независимость" излучения до Тейтельбойма сводилась к тривиальному условию: излучению сопоставлялось свободное поле. Но, как мы видели, более естественно считать, что "динамическая независимость" подсистемы означает выполнение уравнения непрерывности для плотности энергии-импульса этой подсистемы. Поля, образующие такую подсистему, не обязаны быть свободными. Это существенно с точки зрения неабелевых калибровочных теорий, где "свободное" поле удовлетворяет нелинейным уравнениям, и поэтому качественно не отличается от "взаимодействующего" поля.

Разбиение системы по энергетическому признаку позволяет охарактеризовать и более общую форму самодействия, которая вместо излучаемой может производить поглощаемую подсистему. Такая форма самодействия реализуется в неабелевой калибровочной системе в фазе конфайнмента. Режим поглощения происходит здесь из-за комплексификации поля Янга—Миллса, обусловленной в конечном счете нелинейностью полевых уравнений. В фазе деконфайнмента поле Янга—Миллса оказывается вещественным, и возникает режим излучения. Любопытно, что цветной заряд (приводимый в движение силами не янг-миллсовской природы) излучает или поглощает только бесцветные волны.

Асимметрия в осуществимости расходящихся и сходящихся волновых процессов вызывала удивление и дебаты на протяжении всей истории физического познания. Почему, спрашивается, электрический заряд излучает, но не поглощает световых волн, хотя уравнения Максвелла инвариантны относительно обращения времени?

В квантовой теории такой вопрос не стоит: квант света испустить и поглотить одинаково легко. Это понятно, например, из описания с помощью континуального интеграла. В отличие от классического объекта с его единственным (экстремальным) вариантом поведения, квантовая система имеет континуум вариантов поведения, характеризуемых амплитудами вероятности $\exp(iS/\hbar)$. Испускание и поглощение оказываются симметричными явлениями, именно благодаря богатству поведенческого репертуара квантовых систем.

Тем не менее в классической теории проблема осталась. Исходя из вышеизложенного, можно предложить следующее ее разрешение. Речь нужно вести не о расходящихся или сходящихся (т.е. запаздывающих или опережающих) решениях полевых уравнений, а о том, куда направлен энергетический поток — от источника или к источнику. Направление этого потока не чувствительно к замене запаздывающего условия на опережающее. Оно определяется формой самодействия. В теории Янга—Миллса имеет место самодействие, допускающее, в зависимости от фазового состояния, либо излучение, либо поглощение энергии поля цветным зарядом. Между тем в электродинамике самодействие производит поток энергии, направленный только от источника.

Автор благодарит Л.Б. Окуня за замечания, способствовавшие значительному переосмыслению первоначального варианта статьи. Полезны были обсуждения с И.Я. Арефьевой, А.А. Ансельмом, Г.К. Саввиди и И.Б. Хрипловичем, которым автор выражает свою признательность. Благожелательная критика М.В. Терентьева позволила исправить некоторые упущения и неточности в статье, автор благодарен ему за это.

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Это очевидно из самого определения симметричного тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu} \equiv -\dfrac{2}{(-\det g_{\alpha\beta})^{1/2}}\dfrac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$.

(2) Внимание автора на это обстоятельство обратил И.Б. Хриплович.

(3) Энергия оказывается отрицательной линейно расходящейся величиной. Это служит доводом в пользу устойчивости решения (27) к малым возмущениям: переход к другой конфигурации энергетически не выгоден.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ, 1956.
2. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1-е изд. — 1975, 2-е изд. — 1981, 3-е изд. — 1987.
3. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
4. *Rohrlich F.* Classical Charged Particles. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
5. *Band A.O.* Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles. — London: Collier-Macmillan, 1964.
6. *Dirac P.A.M.*//Proc. Roy. Soc. 1938. V. 167. P. 148.
7. *Teitelboim C.*//Phys. Rev. 1970. V. D1. P. 1512.
8. *Косяков Б.Л.*// ТМФ. 1991. Т. 87. С. 422.
9. *Bander M.*//Phys. Rep. 1981. V. 75. P. 205.
10. *Кройц М.* Кварки, глюоны, решетки. — М.: Мир, 1987.
[11] *Окунь Л.Б.* Физика элементарных частиц. — 2-е изд. — М.: Наука, 1988.
12. *Nielsen H.B., Olesen P.*// Nucl. Phys. 1973. V. B61. P. 45.
Nambu Y.// Phys. Rev. 1974. V. D10. P. 4262.

13. *Wilson K.//* Ibidem. P. 2445.
14. *Wheeler J.A., Feynman R.P.//* Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17.P. 157.
15. *Pegg D.T.//* Rep. Prog. Phys. 1975. V. 38. P. 1339.
16. *Нетер Э.//*Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 611.
Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1972.
17. *Rohrlich F.//*Physical Reality and Mathematical. Description. — Dortrecht; Boston, 1974.
18. *Клепиков Н.П.//*УФН. 1985. Т. 146. С. 317.
19. *Wong S.K.//*Nuovo Cimento 1970. V. A65. P. 689.
20. *Ефимов Г.В., Иванов М.А.//*Физ. ЭЧАЯ. 1981. Т. 12. С. 1220.
21. *Вайтман А.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. — М.: Наука, 1968.

Статья поступила 14.10.91 г.