

539.12.01

МОДЕЛЬ СКИРМА И СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
(К 30-летию создания модели Скирма)

В.Г. Маханьков, Ю.П. Рыбаков, В.И. Санюк

(ОИЯИ, Дубна; Университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1
2. Физические и математические основания модели Скирма	2
2.1. "Вихревые атомы" Кельвина и модель "пионной жидкости" в ядерной физике.	
2.2. Киральная инвариантность. 2.3. Двумеризация, "синус-Гордон" и идея топологических зарядов. 2.4. Структура модели Скирма.	
3. Солитоны в модели Скирма	13
3.1. Киральные солитоны и топологическая устойчивость. 3.2. Теорема Коулмена—Пале и размерная редукция. 3.3. "Ежовый" анзац Скирма (скирмион) и абсолютный минимум энергии. 3.4. Прямые методы минимизации и доказательство существования скирмиона. 3.5. Структура топологических солитонов в высших гомотопических классах. 3.6. Вращающийся скирмион. 3.7. Тороидальные и струнные (вихревые) решения. Связь модели Скирма с S^2 -нелинейной сигма-моделью Фаддеева.	
4. Модель Скирма и физика адронов	30
4.1. Низкоэнергетическая область КХД: методы изучения и открытые вопросы. 4.2. $1/N_c$ -разложение t' Хофта—Виттена и ренессанс идей Скирма. 4.3. Бозонизация Андрианова—Новожилова и другие подходы к выводу эффективных лагранжианов из КХД. 4.4. Гибридные модели: кварковые мешки и скирмионы. 4.5. Фаза Берри и скирмион как фермион. 4.6. Взаимодействие скирмионов и межнуклонные силы. 4.7. Мезон-барионные процессы. 4.8. Модель Скирма и ядерная материя.	
5. Заключение	57
Краткие биографические сведения о Т.Х.Р. Скирме	58
Список литературы	58

1. Введение

Английский физик Тони Хилтон Роил Скирм (1922 — 1987) оставил чрезвычайно яркий след в современной ядерной физике. До 1982 г. он в основном

был известен как автор теоремы Бете—Роуза—Эллиотта—Скирма в оболочечной теории ядра и феноменологических скирмовских сил в теории ядерной материи. Но главное его творение, которому он посвятил все свои помыслы, — модель барионов как топологических солитонов. Подход, предложенный Скирмом, спирался на глубокие топологические идеи, непривычные для физиков, чем, пожалуй, и объясняется тот факт, что более двух десятилетий это направление развивалось лишь самим Скирмом и немногочисленными его последователями. Ситуация резко изменилась в начале 80-х годов, когда было установлено, что модель Скирма может рассматриваться как предельный случай квантовой хромодинамики, что инициировало повышенный интерес к модели. Выяснилось, что в пределе большого числа цветов квантовая хромодинамика эквивалентна эффективной мезонной теории, аппроксимируемой в низкоэнергетическом приближении нелинейной сигма-моделью. Обиходным стал термин "скирмион", символизирующий образ протяженного бариона, рассматриваемого как топологический солитон, построенный из бозонов и обладающий фермионными свойствами. Топологический заряд интерпретировался Скирмом как барионный.

Модель Скирма оказалась очень удачным образом низкоэнергетической физики сильных взаимодействий. В ее рамках удастся удовлетворительно описать взаимодействие нуклонов и основные статические характеристики барионов. Исключительный интерес к модели Скирма объясняется тем, что это первая реалистическая модель, которая, будучи относительно простой, в целом верно схватывает симметричные и структурные свойства адронов.

По вопросам практического использования модели Скирма для описания свойств барионов и их взаимодействий имеется обширная литература, в том числе и обзорного характера [60, 72, 111, 120, 121, 124]. Поэтому мы в основном сосредоточимся на идейном содержании подхода Скирма и методах изучения существенно нелинейных моделей, которые могут найти применение и в других областях нелинейной физики.

2. Физические и математические основания модели Скирма

Как отмечалось во введении, предложенный Т. Скирмом подход к описанию ядерной материи разительно отличался от общепринятых в начале 50-х годов схем. Поэтому представляется уместным прежде, всего остановиться на физических идеях, положенных Скирмом в основу модели нуклона, и по возможности выявить их истоки. Далее мы проследим за эволюцией первоначальных представлений вплоть до итоговой формулировки модели. Попутно будем отмечать оригинальные гипотезы, идеи и догадки, содержащиеся в ранних работах Скирма [1 — 6] и вошедшие в арсенал современной физики элементарных частиц. Среди них гипотезы "ядерной демократии" и "супер-демократии", идея солитонного механизма, позволяющего строить массивные фермионные состояния из бозонных полей, и др. Весь этот материал не получил пока должного отражения в обзорах по модели Скирма, и мы надеемся восполнить этот пробел.

2.1. "Вихревые атомы" Кельвина и модель "пионной жидкости" в ядерной физике. Как можно заключить из работ Скирма [1, 2], к модельным представлениям о структуре ядра он обратился в связи со следующей проблемой, возникшей в ядерной физике в начале 50-х годов. Расчеты радиусов ядер на основе экспериментов по α -распаду и рассеянию тяжелых ядер показывали, что $R = 1,5A^{1/3}$ фм (здесь A — число нуклонов в ядре), тогда как данные по рассеянию быстрых электронов на ядрах давали

существенно меньшее значение: $R' = 1,2A^{1/3}$ фм. В работе [1] Скирму удалось качественно объяснить наблюдаемое различие на основе следующих модельных представлений:

— ядро представляет собой каплю несжимаемой электрически нейтральной "пионной жидкости" радиуса R , т.е. в каждой точке плотности π^+ - и π^- -компонентов этой жидкости одинаковы. В соответствии с обычным гидродинамическим описанием "пленную жидкость" можно характеризовать плотностью и некоторым вектором, заданным в изотопическом пространстве;

— нуклонные источники погружены в "пионную жидкость" и занимают в ядре область меньшего радиуса R' .

Поэтому в экспериментах первого типа, в которых существенно пионное взаимодействие, для радиуса ядра получаем значение R , а в опытах с электрически заряженными частицами, когда проявляется лишь область источников, — среднеквадратичный зарядовый радиус R' . Динамику модели "пионной жидкости" Скирм описывает [2] плотностью лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})^2 - \frac{k^2}{2}\vec{\phi}^2 + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + ig\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\phi})\Psi, \quad (2.1.1)$$

где $\vec{\phi}$ — изовекторное псевдоскалярное пионное поле, $\vec{\tau}$ — изоспиновые матрицы Паули, g — константа связи пион—нуклон, а спинор-изоспинор Ψ описывает поля нуклонов. Заметим, что в отличие от стандартных лагранжианов псевдоскалярных мезонных теорий [7] в (2.1.1) отсутствует массовый член "голых" нуклонов. Это отличие имеет принципиальный характер, так как по Скирму масса нуклона имеет пионное происхождение, возникая за счет флуктуаций плотности "пленной жидкости". По сути, это одно из первых высказываний идеи "солитонного механизма", наиболее отчетливо сформулированной спустя 20 лет Л.Д. Фаддеевым [8]:

— сильно взаимодействующие массивные частицы в рамках нелинейной теории поля могут быть описаны как коллективные возбуждения в системе слабо связанных фундаментальных полей;

— теория должна допускать существование частицеподобных (солитонных) решений, описывающих всю иерархию наблюдаемых частиц.

Модель Скирм и была задумана как попытка реализовать эти требования. Однако вернемся к идеям, которые, по собственному свидетельству автора модели [9], действительно его вдохновляли.

Во-первых, Скирм с достаточной осторожностью относился к понятию фермионного состояния, не имеющего аналога в классической физике, и рассматривал фермионы лишь как удобное средство математического описания. Нахождение способа построения фермионных состояний (нуклонов) из бозонных полей (пионов) позволило бы, по его мнению, показать, что схема слияния де Бройля—Гейзенберга (бозоны из фермионов) допускает альтернативу. Во-вторых, Скирм считал мало пригодным рассмотрение точечных частиц, а теорию перенормировок — временной и вынужденной уступкой, позволяющей нам оставаться в неведении об истинном характере процессов на малых расстояниях. Описание же частиц как протяженных объектов, как известно, возможно лишь в рамках нелинейных теорий поля.

По-видимому, решающую роль в реализации перечисленных выше идей сыграло для Скирм обращение к трудам У. Томсона (лорда Кельвина) по вихревой модели атомов [10]. Напомним, что Кельвин вслед за Г. Гельмгольцем рассматривал атомы как вихревые кольца в эфире, заполняющем Вселенную и обладающем свойством идеальной жидкости. Он одним из первых

привлек топологические соображения, объясняя различия между атомами разным числом узлов у замкнутых вихревых линий. Существует даже мнение [11], что Кельвин был первым, кто пытался построить "солитонную (по нынешним представлениям) теорию частиц". Любопытно, что им же впервые был введен термин "киральность", которым он пользовался для описания ориентацию вихрей ("овалов" Кельвина). В последующих разделах мы продемонстрируем, как Скирм использовал идеи и находки Кельвина в процессе модификации модели "пионной жидкости", и поясним, в каком смысле барион Скирма можно рассматривать как вихрь в пионной жидкости.

2.2. Киральная инвариантность. Для реализации идеи о пионном происхождении массы нуклона Скирм [2] воспользовался унитарным преобразованием полей Ψ вида

$$\Psi' = (1/\sqrt{2})(1 + i\gamma_5 \vec{\tau} \mathbf{n})\Psi, \quad (2.2.1)$$

где $\mathbf{n} = \vec{\phi}/|\vec{\phi}|$ — единичный псевдовектор в изотопическом пространстве. По мысли Скирма, именно к такому преобразованию должен эффективно приводить учет пионных флуктуаций. В результате нуклонная часть лагранжевой плотности (2.1.1) приобретает "массовую" добавку $g\vec{\phi}\vec{\tau}\Psi$:

$$L_N = \bar{\Psi}[\dot{\gamma}^\mu \partial_\mu - g\vec{\phi} + \frac{1}{2}(\gamma_5 + i\vec{\tau}\mathbf{n})\gamma^\mu \partial_\mu (\vec{\tau}\mathbf{n})]\Psi. \quad (2.2.2)$$

Киральное преобразование (2.2.1) можно рассматривать как безмассовое преобразование Фолди или как преобразование метода сильной связи, диагонализующее взаимодействие. Последовавшие вскоре (1956, 1957 гг.) открытия "странных" частиц — К-мезонов (разрешение " θ - τ -парадокса") и несохранения четности в слабых распадах привели к осознанию необходимости расширения изоспиновой симметрии в физике адронов. Помимо трех SU(2)-генераторов изотопических вращений T_i , не изменяющих четности состояний, расширенная группа внутренней симметрии адронов должна была включать в себя преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью (подробности можно найти в дополнении А к лекциям [12]). Такое расширение изотопической симметрии обсуждалось в исследованиях В. Паули и Ч. Янга, А. Пайса, Ю. Швингера, Р. Фейнмана и М. Гелл-Манна [13 — 15] и получило название киральной симметрии адронов. В работе [4] Скирм предложил кирально-инвариантную модификацию модели "пионной жидкости", одну из первых нелинейных реализаций киральной SU(2)⊗SU(2)-группы — нелинейную σ -модель.

Так как группа $G = \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$ является шестипараметрической (три генератора изотопических поворотов T_i и три генератора киральных поворотов (бустов) K_i) и не существует линейной реализации G в трехмерном пространстве, то можно либо расширить пространство до четырехмерного, либо строить нелинейную реализацию в 3-пространстве. Выбирая первую возможность, поступаем по аналогии с тем, как группа вращений SO(3) расширяется до однородной группы Лоренца (см. [16], гл. 5): к 3-изовектору $\vec{\phi}$ добавляем четвертую компоненту ϕ_0 и рассматриваем $(\phi_0, \vec{\phi})$ как вектор в 4-пространстве. Генераторы изоповоротов T_i будут перемешивать лишь компоненты $\vec{\phi}$ и оставлять без изменения ϕ_0 , в то время как генераторы киральных бустов K_i будут перемешивать ϕ_0 с компонентами $\vec{\phi}$. Алгебра генераторов задается соотношениями

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k, \quad [T_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k \quad (2.2.3)$$

и локально изоморфна алгебре Ли группы $O(4)$. Вводя левые и правые генераторы вида

$$L_i = \frac{1}{2}(T_i - K_i), \quad R_i = \frac{1}{2}(T_i + K_i), \quad (2.2.4)$$

получаем коммутационные соотношения

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [R_i, R_j] = i\varepsilon_{ijk}R_k, \quad [L_i, R_j] = 0, \quad (2.2.5)$$

свидетельствующие о расщеплении исходной алгебры (2.2.3) на две независимые $SU(2)$ -подалгебры (отсюда и происходит обозначение $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ для киральной группы).

С оператором четности P генераторы изовращений T_i коммутируют, а генераторы киральных поворотов K_i антикоммутируют:

$$[P, T_i] = 0, \quad [P, K_i]_+ = 0, \quad (2.2.6)$$

Приведем еще перестановочные соотношения генераторов $SU(2) \otimes SU(2)$ -группы в векторном представлении с компонентами 4-изовектора $(\phi_0, \vec{\phi})$:

$$[T_i, \phi_j] = i\varepsilon_{ijk}\phi_k, \quad [T_i, \phi_0] = 0, \quad (2.2.7a)$$

$$[K_i, \phi_j] = -i\delta_{ij}\phi_0, \quad [K_j, \phi_0] = i\phi_j, \quad (2.2.7b)$$

и соответственно для левых и правых киральных генераторов (2.2.4):

$$[L_j, \phi_0] = -\frac{i}{2}\phi_j, \quad [L_i, \phi_j] = \frac{i}{2}(\delta_{ij}\phi_0 + \varepsilon_{ijk}\phi_k), \quad (2.2.8a)$$

$$[R_j, \phi_0] = \frac{i}{2}\phi_j, \quad [R_i, \phi_j] = -\frac{i}{2}(\delta_{ij}\phi_0 - \varepsilon_{ijk}\phi_k); \quad (2.2.8b)$$

здесь в классической теории скобка $[,]$ понимается как скобка Пуассона, деленная на i , а в квантовой теории — как коммутатор; T_i и K_i — интегралы движения, т.е. функционалы от полей и канонических импульсов, структура которых определяется теоремой Нётер. Соотношения (2.2.7), (2.2.8) можно переписать в компактном виде, пользуясь кватернионной записью 4-изовектора

$$U = \phi_0 + i\vec{\phi}\vec{\tau}, \quad (2.2.9)$$

например

$$[L_j, U] = -\frac{1}{2}\tau_j U, \quad [R_j, U] = \frac{1}{2}U\tau_j. \quad (2.2.10)$$

Изоспинорное поле Ψ удобно предварительно разделить на левую и правую компоненты

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi, \quad \Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi, \quad (2.2.11)$$

преобразующиеся по фундаментальным представлениям группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Действуя на них левыми и правыми генераторами, имеем

$$[L_i, \Psi_L] = -\frac{1}{2}\tau_i\Psi_L, \quad [R_i, \Psi_L] = 0, \quad (2.2.12a)$$

$$[R_i, \Psi_R] = -\frac{1}{2}\tau_i\Psi_R, \quad [L_i, \Psi_R] = 0. \quad (2.2.126)$$

При построении нелинейной реализации $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -киральной симметрии на компоненты 4-изовектора $\phi_\alpha = (\phi_0, \vec{\phi})$ накладывается дополнительное условие

$$\phi_0^2 + \vec{\phi}^2 = 1, \quad (2.2.13)$$

оставляющее независимыми лишь три компоненты ϕ_i , которые, согласно С. Вайнбергу [17], преобразуются при киральных бустах следующим образом:

$$[K_i, \phi_j] = -i\delta_{ij}f(\vec{\phi}^2) - i\phi_i\phi_jg(\vec{\phi}^2); \quad (2.2.14)$$

здесь $f(\vec{\phi}^2)$ — произвольная регулярная функция, а $g(\vec{\phi}^2)$ выражается через $f(\vec{\phi}^2)$ в соответствии с тождеством Якоби для коммутаторов:

$$g(\vec{\phi}^2) = \frac{1 + 2f(\vec{\phi}^2)f'(\vec{\phi}^2)}{f(\vec{\phi}^2) - 2\vec{\phi}^2f'(\vec{\phi}^2)}. \quad (2.2.15)$$

Соотношения (2.2.3) и (2.2.7а) остаются без изменений, а спинорные поля коммутируют с K_i по правилу

$$[K_i, \Psi] = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{ijk}\tau_j\phi_k}{f(\vec{\phi}^2) - (f^2 + \vec{\phi}^2)^{1/2}} \Psi. \quad (2.2.16)$$

Здесь мы затронули лишь алгебраические аспекты киральной симметрии, не касаясь ее физического содержания, что удобнее будет сделать в разделе 4 с учетом современных представлений о кварковой структуре адронов. Теперь мы готовы вернуться к кирально-инвариантной модификации модели "пионной жидкости". Как уже отмечалось, Скимр [4] избрал вариант нелинейной реализации, наложив на ϕ_α условие (2.2.13). Но при этом оказывается лишним естественное обобщение пионного массового члена в лагранжиане (2.1.1):

$$\frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^3 \phi_i^2 \rightarrow \frac{k^2}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \phi_\alpha^2 = \text{const.}$$

Возникшую трудность можно устранить двумя путями: либо ввести в лагранжиан член четвертого порядка $\gamma^2\phi_\alpha^4/4$, $\gamma = \text{const}$, либо считать, что масса пионов генерируется в результате их взаимодействия с нуклонами. Эта идея, рассматривавшаяся Скимром в работе [4] в совокупности с ранее высказанным предположением о пионном происхождении массы нуклонов, была впоследствии сформулирована другими авторами в виде гипотезы о "ядерной демократии": флуктуации пионных полей порождают массы нуклонов, а пионы приобретают массу в результате взаимодействия с нуклонами.

В работах [4, 5] Скимр останавливается на введении в лагранжиан члена 4-го порядка и приходит к модифицированному лагранжиану вида

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 [(\partial_\mu \phi_\alpha)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\phi_\alpha^4] + \bar{\Psi}[\not{\partial}_\mu + g(\phi_0 + \not{\gamma}_5 \vec{\tau} \vec{\phi})]\Psi, \quad (2.2.17)$$

который качественно правильно воспроизводит взаимодействие пионов и нуклонов. Далее Скимр переходит к исследованию возможных упрощений мо-

дели. Если ограничиться лишь двумя компонентами поля ϕ_0 и ϕ_1 , зависящими только от одной пространственной переменной x и времени t , то такая двумеризованная модель оказывается весьма интересной, в чем мы и убедимся в следующем пункте 2.3.

2.3. Двумеризация, "синус-Гордон" и идея топологических зарядов. В случае двух компонент поля ϕ_a аналог условия (2.2.13) удовлетворяется, если перейти к угловой переменной $\theta(x, t)$:

$$\phi_0 = \cos \theta, \quad \phi_1 = \sin \theta. \quad (2.3.1)$$

Мезонная часть лагранжевой плотности (2.2.17) при соответствующем переобозначении переменных приобретает вид

$$L_M = \frac{\varepsilon}{2} [(\partial_t \theta)^2 - (\partial_x \theta)^2] - \varepsilon k^2 (1 - \cos \theta), \quad (2.3.2)$$

где ε — константа, задающая энергетический масштаб, k — обратная длина. Соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\partial_{xx}^2 \theta - \partial_{tt}^2 \theta = k^2 \sin \theta, \quad (2.3.3)$$

известное под названием синус-Гордон-уравнения, является вполне интегрируемым. Уравнение (2.3.3) описывает множество явлений нелинейной физики. Методы его решения и приложения хорошо освещены в литературе [18 — 22]. Мы отметим только вклад Скирма в исследование его свойств и выводы, к которым он пришел. Не зная геометрических работ Бэклунда, Штойрвальда и др., Скирм [4, 6, 23] независимо находит три типа решений этого уравнения (в современной терминологии они соответствуют **2 π -кинку**, **4 π -кинку** и **бризеру**). Кроме того, в работе [23] Перринг и Скирм рассмотрели лобовое столкновение двух кинков, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями, и обнаружили "частицеподобное" поведение: кинки не разрушались и не рассеивались, а проходили друг сквозь друга без изменения формы и скорости. Любопытно, что этот результат был получен за несколько лет до выхода знаменитой работы Забуски и Круекала [24], с которой начался солитонный бум.

В работе [6] в рамках двумерной модели Скирм делает первый шаг к пониманию механизма построения фермионных состояний из бозонных. Ему удается показать, что квантовые солитоны синус-Гордона, возникающие в существенно бозонной полевой модели, ведут себя как фермионы, участвующие в четырехфермионном взаимодействии. Спустя 14 лет С. Коулмен [25] строго установил в рамках теории возмущений эквивалентность квантовой синус-Гордон-модели сектору с нулевым фермионным зарядом массивной модели Тирринга.

Еще одной находкой, пожалуй наиболее впечатляющей, было обнаружение Скирмом сохраняющегося тока j^μ ($\mu = 0; 1$) с компонентами

$$j^0 = \frac{1}{2\pi} \partial_x \theta, \quad j^1 = -\frac{1}{2\pi} \partial_t \theta. \quad (2.3.4)$$

При этом закон сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$ выполняется независимо от уравнения (2.3.3), только в силу непрерывности угловой переменной $\theta(x, t)$. Интегральную сохраняющуюся величину

$$Q = \int j^0 dx = \frac{1}{2\pi} \int \partial_x \theta dx = \frac{1}{2\pi} (\theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t)) \quad (2.3.5)$$

Скирм предложил интерпретировать как "число частиц" по аналогии с классической механикой, где закон сохранения числа частиц можно связать с непрерывностью траекторий частиц. Практически одновременно с Д. Финкельштейном и Ч. Мизнером [26] Скирм ввел в физический обиход топологическую классификацию решений уравнений поля и новый тип законов сохранения, получивших название топологических или гомотопических. Сохраняющаяся величина (2.3.5) была названа *топологическим зарядом*.

Смысл сохраняющихся топологических характеристик (зарядов) можно понять как в рамках алгебраического подхода [22], так и геометрически, используя для этого основные положения теории гомотопий [27 — 30]. Мы выберем вторую возможность, рассматривая синус-Гордон-модель как теорию скалярных полей $\phi(x, t) = \exp(i\theta(x, t))$, в силу условия (2.2.13) принимающих значения на окружности S^1 — полево многообразии модели. В любой фиксированный момент времени эти поля можно представить как отображения

$$\phi(x): \mathbf{R}^1 \rightarrow S^1. \quad (2.3.6)$$

Если потребовать, чтобы энергия поля, соответствующая лагранжиану (2.3.2), имела конечное значение, то приходим к граничному условию

$$\theta(x) \rightarrow 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.3.7)$$

В данном условии, во-первых, отражена неоднозначность в определении угловой переменной $\theta(x)$, которую можно устранить, отождествив углы, различающиеся на $2\pi n$, где n — целое число; во-вторых, из него следует естественная компактификация вещественной оси $\mathbf{R}^1$, так как точки $x = \pm \infty$ отображаются в "северный полюс" окружности S^1 . Следовательно, отображение (2.3.6) с граничным условием (2.3.7) в силу того, что $\mathbf{R}^1 \cup \{\infty\} = S^1$, можно заменить на эквивалентное отображение окружностей:

$$\phi(\alpha(x)) = \exp(i\theta(\alpha(x))): S^1 \rightarrow S^1, \quad (2.3.8)$$

где $\alpha(x)$ — обратная стереографическая проекция $\mathbf{R}^1 \rightarrow S^1$, параметризующая "пространственную" окружность S^1 . Два последовательных состояния системы в моменты времени t_1 и t_2 , описываемые полями $\phi_1 = \phi(x, t_1)$ и $\phi_2 = \phi(x, t_2)$, должны быть связаны между собой временной эволюцией — решением $\phi(x, t)$ полевого уравнения. Этот естественный физический факт на языке теории гомотопий звучит следующим образом: два отображения ϕ_1 и ϕ_2 гомотопны между собой ($\phi_1 \sim \phi_2$), если существует непрерывная функция $\phi(x, t)$ — гомотопия, принимающая значение ϕ_1 при $t = t_1$ и значение ϕ_2 при $t = t_2$. Так как задание гомотопий на множестве отображений равносильно заданию отношения эквивалентности, то это означает, что все пространство отображений (2.3.6) $\text{Map}(\mathbf{R}^1, S^1)$ можно разбить на классы эквивалентности, или гомотопические классы, т.е. $\text{Map}(\mathbf{R}^1, S^1) = \bigcup_i [\mathbf{R}^1, S^1]_i$, где для

i -го гомотопического класса принято стандартное обозначение $[\mathbf{R}^1, S^1]_i$. Если такое разбиение существует (а это устанавливается хорошо развитыми ме-

тодами теории гомотопий) и начальная функция состояния системы принадлежит одному из гомотопических классов, то во все последующие моменты времени функция состояния будет принадлежать тому же классу. В этом смысле задача об отыскании гомотопий эквивалентна задаче нахождения эволюционных решений уравнения поля.

Из всех возможных отображений из пространства $\text{Map}(\mathbf{R}^1, S^1)$ мы будем интересоваться лишь теми, которые удовлетворяют условию (2.3.7), т.е. ограничимся подпространством $\text{Map}^0(\mathbf{R}^1, S^1)$, и дадим наглядную картину разбиения последнего на гомотопические классы. Если $\theta(x)$ принимает в точках $x = \pm \infty$ нулевые значения, то соответствующее решение синус-Гордон-уравнения будет иметь тип бегущей волны или бризера, и образом $\mathbf{R}^1$ на S^1 при отображении (2.3.6) будет замкнутая петля, не охватывающая S^1 полностью и стягиваемая непрерывным образом в точку (рис. 1,а). В случае $\theta(-\infty) = 0, \theta(+\infty) = 2\pi$ образом $\mathbf{R}^1$ будет петля, охватывающая S^1 полностью, и при этом ее нельзя уже непрерывным образом деформировать в точку (рис. 1,б). Такие отображения отвечают **2 π -кинковому** решению. При выборе условий $\theta(-\infty) = 0, \theta(+\infty) = 4\pi$ образ оси $\mathbf{R}^1$ дважды "наматывается" на S^1 , и такое отображение не может быть непрерывно переведено ни в одно из предыдущих. Соответствующая ситуация отражена на рис. 1,в и отвечает двум разведенным кинкам (бион).

Понятно, что рассмотренные решения принадлежат разным гомотопическим классам, для которых в качестве характеристики Q (топологического заряда) естественно взять число "наматываний" образа $\mathbf{R}^1$ на S^1 при отображении (2.3.6). Задавая отображение в виде (2.3.8), нетрудно переписать вы-

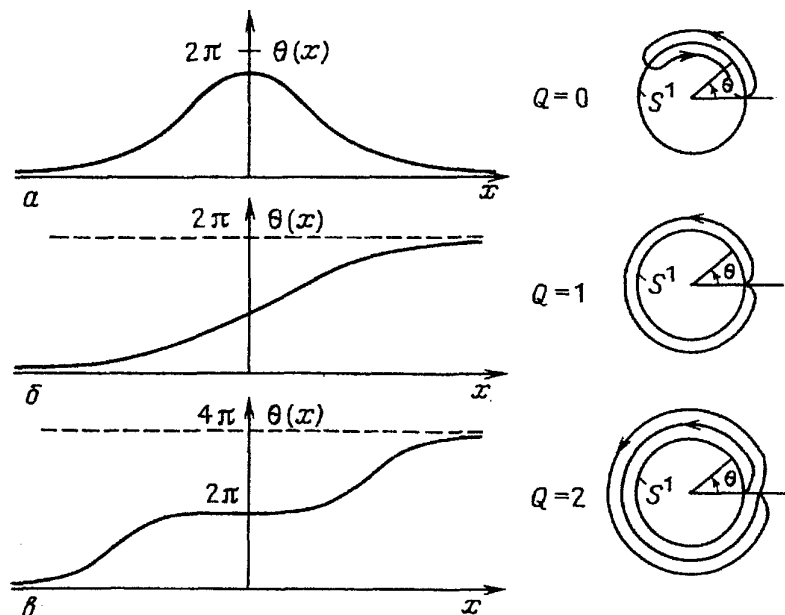


Рис. 1

ражение (2.3.5) для топологического заряда иначе:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (2.3.9)$$

где под интегралом стоит якобиан перехода от координаты $\alpha(x)$ на "пространственной" окружности S^1 к координатам $\theta(x)$ на полевого многообразии S^1 . Легко устанавливается, что (2.3.9) есть частный случай известного в математике понятия степени отображения, или степени Брауэра гладкого отображения $f: M^n \rightarrow N^n$ двух связных ориентированных многообразий в регулярной точке $q \in N^n$. При этом полный прообраз $f^{-1}(q)$ состоит из конечного числа точек p_i , определяемого формулой [31]

$$Q = \deg_q(f) = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \text{sgn} \det \frac{\partial x^\alpha}{\partial y_i^\beta}. \quad (2.3.10)$$

Тот факт, что в синус-Гордон-модели топологический заряд Q принимает определенные целочисленные значения в каждом из гомотопических классов, в данном простом случае очевиден. Однако с целью дальнейших обобщений это понятие можно формализовать, наделив множество гомотопических классов $\{[S^1, S^1]\}$ групповой структурой. Для этого достаточно задать алгебраический закон композиции гомотетий (см., например, дополнение Б к лекциям [12]), превращающий гомотопические классы в элементы фундаментальной группы Пуанкаре $\pi_1(S^1)$ многообразия S^1 (первой гомотопической группы). Вычисление этой группы сводится к установлению ее изоморфизма с группой (или подгруппой) целых чисел $\mathbf{Z}$. Топологический заряд (2.3.5) или (2.3.9) как раз и реализует этот изоморфизм: $Q: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbf{Z}$.

2.4. Структура модели С кирма. Появление в двумеризованной модели величины Q , сохраняющейся независимо от динамики модели и допускающей интерпретацию типа разности числа "частиц" и "античастиц", побудило С кирма к дальнейшим модификациям исходной $(3 + 1)$ -мерной модели (2.2.17). В случае успеха аналогичную величину можно было бы интерпретировать как барионный заряд и предложить объяснение экспериментально установленного факта сохранения разности чисел барионов и антибарионов во всех известных процессах. Закон сохранения барионного числа, эмпирически введенного Е. Вигнером и Э. Штюкельбергом по аналогии с законом сохранения электрического заряда, обычно связывают с симметрией лагранжиана относительно $U(1)$ -преобразований. Формальность такого подхода с очевидностью следует из физических различий между электрическим зарядом и барионным числом. Если электрический заряд e входит в определение константы $e^2/\hbar c$ электромагнитных взаимодействий, то константы сильных взаимодействий $g_{\pi NN}, g_{\pi N\Delta}, \dots$ не зависят от значения барионного числа, т.е. барионное число не определяет динамику барионов. Требование сохранения барионного числа лишь ограничивает типы реакций в сильных взаимодействиях.

Для обобщения понятия топологического заряда Q на $(3 + 1)$ -мерный случай С кирм [32] воспользовался тем, что в силу условия (2.2.13) поле ϕ_α принимает значения на многообразии трехмерной сферы S^3 , изоморфной группе

SU(2). Поэтому для перехода к "угловым переменным" удобно воспользоваться кватернионным представлением SU(2) с элементами вида (2.2.9), для которых условие (2.2.13) сводится к равенству $UU^+ = I$. Аналогом угловой переменной $\theta(x, t)$ в трехмерном случае будут величины L_μ^a , определяемые соотношениями

$$\partial_\mu U = iU\tau_a L_\mu^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.4.1)$$

в силу которых

$$L_\mu^a = \frac{1}{2i} \text{tr}(\tau^a U^+ \partial_\mu U) = \phi_0 \partial_\mu \phi^a - \phi^a \partial_\mu \phi_0 + \varepsilon^{abc} \phi_b \partial_\mu \phi_c.$$

Величины L_μ^a являются компонентами векторного поля L_μ со значениями в алгебре Ли группы SU(2), получившего название левого кирального тока:

$$L_\mu = U^{-1} \partial_\mu U = i\tau^a L_\mu^a. \quad (2.4.2)$$

Условие согласованности определений (2.4.1) и (2.4.2) требует равенства смешанных производных $\partial_\mu \partial_\nu U = \partial_\nu \partial_\mu U$, откуда

$$\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] = 0, \quad (2.4.3)$$

или в компонентах L_μ^a

$$\partial_\mu L_\nu^a - \partial_\nu L_\mu^a - 2\varepsilon^{abc} L_\mu^b L_\nu^c = 0. \quad (2.4.4)$$

По аналогии с двумерной моделью можно записать сохраняющийся топологический ток:

$$J^\mu = -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon^{abc} L_\nu^a L_\lambda^b L_\rho^c = \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_\alpha \partial_\nu \phi_\beta \partial_\lambda \phi_\gamma \partial_\rho \phi_\delta. \quad (2.4.5)$$

Его временная компонента задает плотность сохраняющегося топологического заряда:

$$Q = \int J^0 d^3x = -\frac{1}{12\pi^2} \int \det L_i^a d^3x. \quad (2.4.6)$$

Лагранжеву плотность Скирм выбрал в виде

$$L = -\frac{1}{4\lambda^2} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{16} \text{tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu]), \quad (2.4.7)$$

где ε, λ — масштабные параметры. Заметим, что в отличие от предыдущих вариантов (2.1.1) и (2.2.17) лагранжиан содержит лишь поля мезонов, т.е. нуклоны в соответствии с ранее высказанными гипотезами должны возникать как коллективные возбуждения — солитоны. Наивный сценарий появления таких возбуждений можно представить себе следующим образом [34, 35]. В рамках гидродинамической аналогии компоненты кирального тока L_μ^a можно трактовать как обобщенную скорость "пионной жидкости", а коммутаторный член в (2.4.7) — как квадрат "обобщенной завихренности". Тогда возникновение коллективного возбуждения — нуклона можно представить себе как возникновение "вихря" в пионной жидкости. На интуитивном уровне

вопрос о существовании таких "вихрей" в нетривиальных гомотопических классах можно прояснить с помощью наглядных топологических соображений. Так как токи L^a_μ задают векторное поле на сфере в изотопическом пространстве, выделенной условием (2.2.13), то, согласно "теореме о волосатом шаре", такое поле должно содержать хотя бы одну особенность (в смысле неопределенности направления). На обыденном языке это означает, что "волосатый шар" нельзя "причесать" таким образом, чтобы в прическе не образовалось ни одной "макушки". В модели Скирма роль "макушки" на сфере в изотопическом пространстве и играет нуклонный источник. Так трансформировались в модели Скирма идеи Кельвина о "вихревых атомах".

Выпишем для модели с лагранжианом (2.4.7) уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\partial_\mu (2L^\mu - \varepsilon^2 \lambda^2 [L_\nu, [L^\mu, L^\nu]]) = 0, \quad (2.4.8)$$

имеющее вид локального закона сохранения. Так как лагранжиан (2.4.7) инвариантен относительно преобразований из группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, то существуют сохраняющиеся нетеровские токи

$$I^a_{\mu,R} = \text{tr} \left\{ i\tau^a \left(\frac{1}{2\lambda^2} L_\mu - \frac{\varepsilon^2}{4} [L^\nu, [L_\mu, L_\nu]] \right) \right\}, \quad (2.4.9a)$$

$$I^a_{\mu,L} = \text{tr} \left\{ i\tau^a \left(\frac{1}{2\lambda^2} R_\mu - \frac{\varepsilon^2}{4} [R^\nu, [R_\mu, R_\nu]] \right) \right\}, \quad (2.4.9b)$$

где $R_\mu = U \partial_\mu U^+$ — правый киральный ток. Сохраняющийся изовекторный ток, связанный с вращениями в изотопическом пространстве, согласно (2.2.4), имеет вид

$$I^a_\mu = I^a_{\mu,R} + I^a_{\mu,L} \equiv V^a_\mu. \quad (2.4.10)$$

Изложенная версия модели бариона как солитона предложена Скирмом в работах [32, 33]. Прежде чем переходить к более подробному рассмотрению модели и выяснению ее связи с современными представлениями в физике сильных взаимодействий, основанными на идеях квантовой хромодинамики (КХД), завершим исторический обзор перечислением важнейших результатов, впервые полученных Скирмом и переоткрытых впоследствии другими исследователями:

1. Для описания нуклона как солитона Скирм предложил "ежовый" анзац

$$\phi_0 = \cos \theta(r), \quad \phi_i = \frac{x_i}{r} \sin \theta(r), \quad \theta(0) = N\pi, \quad (2.4.11)$$

отвечающий топологическому заряду $Q = N$, если $\theta(\infty) = 0$. Как будет показано ниже, на этом анзаце реализуется абсолютный минимум энергии в классе полей с единичным топологическим зарядом: $Q = \pm 1$ (скирмион).

2. Была получена оценка для функционала энергии снизу через заряд Q , позволяющая заключить об устойчивости скирмиона.

3. В работе [33] Скирм рассмотрел задачу о взаимодействии двух скирмионов и предложил для описания двухскирмионных состояний "продакт—анзац" (подробнее см. п. 4.7).

Однако оставался открытым вопрос, волновавший Скирма изначально, —

о фермионных свойствах скирмиона. Скирм вернулся к этому вопросу спустя 10 лет [36] и предложил способ задания коллективных координат для описания движения скирмиона в рамках квазиклассического приближения. Ему удалось показать, что в нижних порядках теории возмущений движение скирмиона описывается уравнением типа уравнения Дирака. (С современным состоянием проблемы и ответом на вопрос, в каких случаях скирмион можно считать фермионом, мы познакомим читателя в п. 4.5.)

3. Солитоны в модели Скирма

3.1. Киральные солитоны и топологическая устойчивость. Согласно основной идее Скирма, нуклон представляется как вихрь в "пионной жидкости", существование которого подсказывается топологическими соображениями о структуре векторных полей на сфере, как это отмечалось ранее. Образ нуклона как кирального солитона оказался привлекательным еще и с точки зрения теории устойчивости. Дело в том, что многомерные солитоны, т.е. в пространстве размерности $D \geq 2$, вообще говоря, неустойчивы [37, 38, 132].

Пусть, скажем, поле $\phi = u(\mathbf{r}): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^n$ имеет солитонное поведение, т.е. при $r \rightarrow \infty$

$$|\nabla u| = O[r^{-(3/2+\alpha)}], \quad \alpha > 0, \quad (3.1.1)$$

а функция $u(\mathbf{r})$ является критической точкой гамильтониана

$$H = \int F(\phi, \nabla \phi) d^3x, \quad (3.1.2)$$

т.е. удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа

$$F_s - \partial_i F_s^i = 0, \quad s = \overline{1, n}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1.3)$$

где обозначено

$$F_s = \frac{\partial F}{\partial \phi^s}, \quad F_s^i = \frac{\partial F}{\partial (\partial_i \phi^s)}.$$

Составим вторую вариацию гамильтониана

$$\delta^2 H = \int (F_{sr} \xi^s \xi^r + F^{ik}_{sr} \partial_i \xi^s \partial_k \xi^r + 2F^i_{rs} \partial_i \xi^r \xi^s) d^3x,$$

где $\xi^s = \delta \phi^s$, и возьмем частное возмущение $\xi^s = f^i(\mathbf{r}) \partial_i \mu^s$. Тогда найдем

$$\delta^2 H = \int [\partial_i f^l A^{ik}_{lj} \partial_k f^j + (\partial_i f^l f^j - \partial_i f^j f^l) B^i_{jl}] d^3x, \quad (3.1.4)$$

где обозначено

$$A^{ik}_{lj} = \partial_l \mu^r F^{ik}_{rs} \partial_j \mu^s, \quad 2B^i_{jl} = -2B^i_{lj} = \partial_{[j} F^i_{r] \partial_{l]} \mu^r. \quad (3.1.5)$$

Заметим, что второе слагаемое в (3.1.4) знакопеременно, а в силу уравнений (3.1.3) выполняется равенство

$$\partial_i B^i_{jl} = 0,$$

из которого следует представление

$$2B_{jl}^i = \varepsilon^{ikm} \partial_k a_{mjl}, \quad (3.1.6)$$

где, в свою очередь,

$$a_{mjl} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{mki} \partial^k \int B_{jl}^i(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} d^3x'. \quad (3.1.7)$$

Подставляя (3.1.6) в (3.1.4), после интегрирования по частям найдем

$$\delta^2 H = \int \partial_j^d (A_{lj}^{ik} + \varepsilon^{ikm} a_{mjl}) \partial_k f^j d^3x. \quad (3.1.8)$$

Для изучения знакоопределенности подынтегрального выражения в (3.1.8) рассмотрим асимптотическую область $r \rightarrow \infty$. Тогда из (3.1.1) и (3.1.5) вытекает, что

$$A_{lj}^{ik} = O(r^{-(3+2\alpha)}), \quad B_{jl}^i = O(r^{-(3+2\alpha)}),$$

а из (3.1.7) нетрудно получить оценку

$$a_{mjl} = O(r^{-3}).$$

Таким образом, убеждаемся, что гамильтониан (3.1.2) имеет знакопеременную вторую вариацию в окрестности солитонного решения. Доказательство легко распространяется на случай размерности пространства $D \geq 2$, а также на случай солитонных решений, гармонически зависящих от времени.

Полученный результат является обобщением известного критерия Хобарта—Деррика [39, 40] и говорит о возможности только условной устойчивости многомерных солитонов, т.е. устойчивости при некоторых ограничениях на допустимые возмущения. Подобные ограничения как раз и возникают в случае киральных солитонов, наделенных топологическим зарядом Q .

Вспоминая, что

$$Q = -\frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{ijk} \int \text{tr}(L_i [L_j, L_k]) d^3x, \quad (3.1.9)$$

а статический гамильтониан в модели Скирма

$$\begin{aligned} H &= -\int \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \text{tr} L_i^2 + \frac{\varepsilon^2}{16} \text{tr} [L_k, L_j]^2 \right\} d^3x = \\ &= -\int \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \text{tr} L_i^2 + \frac{\varepsilon^2}{32} \text{tr} (\varepsilon^{ikj} [L_k, L_j])^2 \right\} d^3x, \end{aligned}$$

легко находим оценку

$$H \geq \int \left| \text{tr} \left(\frac{\varepsilon}{4\lambda\sqrt{2}} \varepsilon^{ikj} L_i [L_k, L_j] \right) \right| d^3x,$$

или в соответствии с (3.1.9)

$$H \geq 6\pi^2 \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\lambda} |Q|. \quad (3.1.10)$$

Оценка (3.1.10) означает, что в заданном гомотопическом классе, т.е. при $Q = N \neq 0$, энергия системы имеет нетривиальную нижнюю грань. Если эта грань достигается на некотором солитонном решении, то последнее будет ус-

тойчивым в смысле Ляпунова, так как $\delta^2 H \geq 0$. Заметим, что равенство в (3.1.10) на самом деле никогда не выполняется, так как для этого необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2\lambda} L_i = \pm \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} \varepsilon_{ikj} [L_k, L_j] = \mp \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \varepsilon_{ikj} \partial_k L_j.$$

Однако последнее соотношение нарушено, так как эквивалентно равенству $\partial_i L_i = 0$, противоречащему уравнениям движения (2.4.8).

3.2. Теорема Коулмена—Пале и размерная редукция. При отыскании многомерных солитонов большое значение имеет возможность отделения угловых переменных, т.е. размерная редукция, в уравнениях движения. В благоприятном случае могут получиться обыкновенные дифференциальные уравнения для соответствующих радиальных функций. Во многих физических задачах для проведения размерной редукции часто используется принцип симметрии, наиболее отчетливо сформулированный С. Коулменом (см. [12, 41]).

Пусть гамильтониан $H[\phi]$ инвариантен относительно действия некоторой группы G . Введем понятие инвариантного (точнее, эквивариантного, или ковариантно постоянного) поля $\phi^0(x)$, которое определяется условием

$$\phi^0(x) = T_g \phi^0(g^{-1}x), \quad (3.2.1)$$

в котором T_g — оператор представления группы $G \ni g$. Коулмен предложил искать экстремум гамильтониана в классе инвариантных полей $\Phi_0 = \{\phi^0(x)\}$, а затем проверять, является ли найденная инвариантная конфигурация решением уравнений движения, т.е. истинной экстремалью функционала $H[\phi]$. Оказывается, что для наиболее интересных физических случаев, когда речь идет о преобразованиях симметрии из компактных групп, полупростых групп, а также для унитарных представлений некомпактных групп принцип Коулмена верен, т.е. инвариантные экстремали являются истинными. Это положение было доказано Р. Пале [42] и обобщалось многими авторами (см. [43]).

Для пояснения идеи доказательства Пале введем обозначение для вариационной производной $X \equiv \delta H / \delta \phi[\phi^0]$ и запишем условие экстремальности гамильтониана на инвариантном множестве:

$$\langle X, \delta \phi^0 \rangle = 0 \quad \forall \delta \phi^0 \in \Phi_0, \quad (3.2.2)$$

где угловые скобки использованы для обозначения линейного функционала. С другой стороны, G -инвариантность гамильтониана означает, что

$$\delta H = \langle X, \delta \phi \rangle = \langle X_g, \delta \phi_g \rangle, \quad (3.2.3)$$

где X_g и $\delta \phi_g$ обозначают величины X и $\delta \phi$, преобразованные под действием элементов $g \in G$. В то же время

$$\delta H = H[\phi^0 + \delta \phi_g] - H[\phi^0] = \langle X, \delta \phi_g \rangle. \quad (3.2.4)$$

Учитывая произвольность $\delta \phi_g$, из сравнения (3.2.3) и (3.2.4) найдем, что

$$X_g = X. \quad (3.2.5)$$

Обозначим множество полей X , удовлетворяющих условию инвариантности (3.2.5), через $\tilde{\Phi}_0$. Подчеркнем, что в общем случае множества Φ_0 и сопряженное к нему $\tilde{\Phi}_0$ различны. Условие (3.2.2) означает, что X одновременно принадлежит аннулятору множества Φ_0 , т.е. $X \in \Phi_0^*$. Теперь уже нетрудно заключить, что ϕ^0 будет истинной экстремалью, если $\tilde{\Phi}_0 \cap \Phi_0^* = \emptyset$ — пустое множество, так как в этом случае $X = 0$, или $\delta H = 0$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.2.1. (Коулмен—Пале). Пусть $H[\phi]$ — функционал, инвариантный относительно действия группы G , Φ_0 — множество инвариантных полей, Φ_0^* — его аннулятор, а $\tilde{\Phi}_0$ — сопряженное к Φ_0 множество. Тогда поле $\phi^0 \in \Phi_0$, являющееся экстремалью H на инвариантном множестве, одновременно является истинной экстремалью, т.е. экстремалью и по отношению к неинвариантным вариациям, если выполнено условие Пале

$$\tilde{\Phi}_0 \cap \Phi_0^* = \emptyset. \quad (3.2.6)$$

Важность условия (3.2.6) проиллюстрируем примером, принадлежащим О.А. Ладыженской [43]. Рассмотрим на плоскости $R^2 = \{x^1, x^2\}$ функцию $H = f(x^2)$, инвариантную относительно действия группы $G: \{x^1, x^2\} \rightarrow \{x^1 + \tau x^2, x^2\}$, с параметром $\tau \in \mathbb{R}^1$. Инвариантное множество совпадает в данном случае с $\Phi_0 = \{x^1, 0\}$, т.е. с осью x^1 . Чтобы построить сопряженное множество $\tilde{\Phi}_0$, выясним, как действует группа G в сопряженном пространстве $\{X_1, X_2\} = \{\delta H / \delta x^1, \delta H / \delta x^2\}$. Для этого запишем условие инвариантности (3.2.3):

$$X_1 \delta x^1 + X_2 \delta x^2 = X_1' \delta x'^1 + X_2' \delta x'^2,$$

где $\delta x'^1 = \delta x^1 + \tau \delta x^2$, $\delta x'^2 = \delta x^2$. Отсюда выводим закон преобразования $\{X_1, X_2\} \rightarrow \{X_1, X_2 - \tau X_1\}$ и структуру множества $\tilde{\Phi}_0 = \{0, X_2\}$.

Наконец, аннулятор Φ_0^* находим из условия (3.2.2):

$$X_1 \delta x^1 = 0,$$

откуда $\Phi_0^* = \{0, X_2\} = \tilde{\Phi}_0$. Таким образом, условие (3.2.6) не выполнено, и принцип Коулмена не работает. Действительно, пусть $f'(0) \neq 0$. Тогда $df(0) = f'(0)dx^2 \neq 0$, хотя на инвариантном множестве $\{x^1, 0\}$ имеем $df = \partial_1 f dx^1 \equiv 0$.

Применим теорему Коулмена—Пале к модели Скирма. Зададим главное киральное поле $U \in \text{SU}(2)$ в виде

$$U(\mathbf{r}) = \exp[i(\mathbf{n}\vec{\tau})\theta(\mathbf{r})], \quad (3.2.7)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — единичный вектор, $\theta(\mathbf{r})$ — киральный угол, удовлетворяющий условию на пространственной бесконечности $\theta(\infty) = 0$, благодаря которому все поля (3.2.7) разбиваются на гомотопические классы, задаваемые значением

$Q = N$ топологического заряда (3.1.9). Гамильтониан H модели Скирма допускает группу пространственных поворотов $SO(3)_s$ и группу изотопических поворотов $SO(3)_I$, отвечающих преобразованию $U \rightarrow VUV^{-1}$. Таким образом, группа инвариантности гамильтониана есть

$$G = SO(3)_s \otimes SO(3)_I. \quad (3.2.8)$$

Однако ясно, что полей U , инвариантных относительно преобразований из группы (3.2.8), не существует, и поэтому нужно рассмотреть ее подгруппы

$$G_1 = \text{diag}[SO(3)_s \otimes SO(3)_I], \quad (3.2.9)$$

$$G_2 = \text{diag}[SO(2)_s \otimes SO(2)_I], \quad (3.2.10)$$

в которых diag означает совпадение параметров перемножаемых групп или их пропорциональность, а группы $SO(2)_s$ и $SO(2)_I$ соответствуют поворотам вокруг третьей оси в координатном и изотопическом пространствах соответственно.

Для нахождения G_1 -инвариантных полей запишем условие (3.2.1) в случае бесконечно малых преобразований:

$$-i[\mathbf{r}\nabla]U + \frac{1}{2}[\vec{\tau}, U] = 0. \quad (3.2.11)$$

Умножая векторное соотношение (3.2.11) скалярно на $\mathbf{r}$, получаем $[\tau_r, U] = 0$, где $\tau_r = (\vec{\tau}\mathbf{r})/r$. Отсюда следует, что в (3.2.7) $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Если же взять след от соотношения (3.2.11), то найдем

$$[\mathbf{r}\nabla]\cos\theta = 0,$$

откуда $\theta = \theta(r)$, что приводит к "ежовой" подстановке

$$U_0(r) = \exp(i\tau_r\theta(r)) = \cos\theta(r) + i\tau_r\sin\theta(r), \quad (3.2.12)$$

предложенной еще Скирмом [33]. Как мы вскоре убедимся, конфигурация (3.2.12) реализует абсолютный минимум энергии в первом гомотопическом классе, т.е. среди полей с $|Q| = 1$.

Наконец, для G_2 -инвариантных полей условие (3.2.1) удобно записать в сферических координатах r, ϑ, α :

$$-i\partial_\alpha U + \frac{k}{2}[\tau_3, U] = 0, \quad (3.2.13)$$

где k — некоторое целое число, связанное с требованием периодичности U по α . Взяв след от (3.2.13), найдем $\partial_\alpha\theta = 0$, или $\theta = \theta(r, \vartheta)$. В результате уравнение (3.2.13) упрощается:

$$-i\partial_\alpha(\mathbf{n}\vec{\tau}) + \frac{k}{2}[\tau_3, (\mathbf{n}\vec{\tau})] = 0. \quad (3.2.14)$$

С учетом соотношения $[\tau_i, \tau_k] = 2i\epsilon_{ikj}\tau_j$ из (3.2.14) выводим уравнения для n_i :

$$\partial_\alpha n_3 = 0, \quad \partial_\alpha n_1 = -kn_2, \quad \partial_\alpha n_2 = kn_1.$$

Вводя полярные координаты β, γ вектора $\mathbf{n}$, т.е. полагая

$$n_3 = \cos \beta, \quad n_1 + in_2 = \sin \beta \cdot e^{i\gamma}, \quad (3.2.15)$$

получаем следующую структуру для G_2 -инвариантного кирального поля:

$$\theta = \theta(r, \vartheta), \quad \beta = \beta(r, \vartheta), \quad \gamma = k\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.16)$$

В физических работах G_1 -инвариантные поля часто называют сферически-симметричными или "ежами", а G_2 -инвариантные поля — аксиально-симметричными. Как мы убедимся, G_2 -инвариантные поля реализуют минимум энергии в высших гомотопических классах, т.е. для $|Q| > 1$.

3.3. "Ежовый" анзац Скирма (скирмион) и абсолютный минимум энергии. Будем искать минимум гамильтониана в модели Скирма в заданном гомотопическом классе, т.е. при $Q = N$. При этом оказывается полезным прием минимизации в расширенном фазовом пространстве (см. [45, 46]; подробнее в [12]), который основан на том очевидном свойстве, что минимум функции от нескольких переменных может только увеличиваться при наложении каких-либо связей. В частности, можно сначала минимизировать плотность энергии, в которой производные $\partial_i \phi$ от полей рассматриваются как переменные, независимые от самих полей. В этом и состоит расширение фазового пространства. Разумеется, в конце такой процедуры минимизации следует проверить, являются ли полученные предельные конфигурации решениями уравнений движения.

Если ввести вспомогательные величины

$$\mathbf{X} = \nabla \theta, \quad \mathbf{Y} = \sin \theta \cdot \nabla \beta, \quad \mathbf{Z} = \sin \theta \cdot \sin \beta \cdot \nabla \gamma, \quad (3.3.1)$$

то статический гамильтониан H , сдвинутый на константу, представляется в виде

$$H - 6\pi^2 \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\lambda} |Q| = \int d^3x \left\{ \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \mathbf{X} + \varepsilon' [\mathbf{Y}\mathbf{Z}] \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \mathbf{Y} + \varepsilon' [\mathbf{Z}\mathbf{X}] \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \mathbf{Z} + \varepsilon' [\mathbf{X}\mathbf{Y}] \right)^2 \right\}, \quad (3.3.2)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon \operatorname{sgn} Q$. Для определенности выберем $Q > 0$, т.е. $\varepsilon' = \varepsilon$, и перейдем к безразмерным координатам $\mathbf{r} \rightarrow \varepsilon \lambda \mathbf{r}$. Тогда из (3.3.2) нетрудно заключить, что минимум достигается в случае, когда все пары векторов $\mathbf{X}, [\mathbf{Y}\mathbf{Z}]; \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}\mathbf{X}]; \mathbf{Z}, [\mathbf{X}\mathbf{Y}]$ оказываются антипараллельными. Это означает, что векторы (3.3.1) ортогональны, или

$$(\nabla \theta \nabla \beta) = (\nabla \theta \nabla \gamma) = (\nabla \beta \nabla \gamma) = 0. \quad (3.3.3)$$

При этом с учетом (3.3.3) H представляется в виде

$$H = \frac{\varepsilon}{\lambda} \int d^3x \left\{ (\nabla \theta)^2 \left[\frac{1}{2} + \sin^2 \theta \cdot ((\nabla \beta)^2 + \sin^2 \beta \cdot (\nabla \gamma)^2) \right] + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cdot ((\nabla \beta)^2 + \sin^2 \beta \cdot (\nabla \gamma)^2) + \sin^4 \theta \cdot \sin^2 \beta \cdot (\nabla \beta)^2 (\nabla \gamma)^2 \right\}. \quad (3.3.4)$$

Замечая, что для заряда Q имеем выражение

$$Q = -\frac{1}{2\pi^2} \int \sin^2 \theta \sin \beta (\nabla \theta [\nabla \beta \nabla \gamma]) d^3 x, \quad (3.3.5)$$

мы можем минимизировать H по величине $\delta = |\nabla \beta| - \sin \beta \cdot |\nabla \gamma|$, считая $\sin \beta \cdot |\nabla \beta| |\nabla \gamma|$ фиксированным, Тогда из (3.3.4) заключаем, что $\delta = 0$, т.е.

$$(\nabla \beta)^2 = \sin^2 \beta \cdot (\nabla \gamma)^2. \quad (3.3.6)$$

С учетом (3.3.6) гамильтониан упрощается:

$$H = \frac{\varepsilon}{\lambda} \int [(\nabla \theta)^2 \left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta \cdot (\nabla \beta)^2 \right) + \sin^2 \theta \cdot (\nabla \beta)^2 (1 + \sin^2 \theta)] d^3 x. \quad (3.3.7)$$

Обратимся теперь к формуле (3.3.5), которая выражает топологический заряд как степень отображения $\mathbf{R}^3 \rightarrow S^3$, т.е. целое число, показывающее, сколько раз обходится многообразие S^3 , задаваемое полярными углами θ, β, γ , когда точка g обегает все пространство $\mathbf{R}^3$. Если пользоваться сферическими координатами r, ϑ, α , то, чтобы многообразие S^3 обходилось хотя бы один раз, должны выполняться следующие граничные условия:

$$\beta|_{\vartheta=\pi} = \pi, \quad \beta|_{\vartheta=0} = 0, \quad \gamma|_{\alpha=2\pi} = 2\pi k + \gamma|_{\alpha=0}, \quad (3.3.8)$$

где $k \in \mathbf{Z}$. Из (3.3.8) вытекает, что

$$\beta = \tilde{\beta} + \vartheta, \quad \gamma = k\alpha + \tilde{\gamma}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (3.3.9)$$

где функция $\tilde{\beta}$ периодична по ϑ с периодом π , а функция $\tilde{\gamma}$ периодична по α с периодом 2π . Нетрудно видеть, что в силу периодичности функция $\tilde{\gamma}$ не дает вклада в Q , и поэтому, как следует из (3.3.4), гамильтониан содержит лишь комбинацию $(k\nabla\alpha + \nabla\tilde{\gamma})^2 = (\nabla\gamma)^2$ и достигает минимума, если векторы $k\nabla\alpha$ и $\nabla\tilde{\gamma}$ антипараллельны. Это означает, что $\gamma = \gamma(\alpha)$. Но тогда из (3.3.3) следует, что функции θ и β не зависят от α , и поэтому уравнение Эйлера—Лагранжа для функции γ имеет вид $\partial_\alpha^2 \gamma = 0$, откуда в соответствии с (3.3.9) находим

$$\gamma = k\alpha. \quad (3.3.10)$$

Подставляя (3.3.10) в условие (3.3.6), приходим к следующему уравнению для β :

$$k^2 \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \vartheta} = (r\partial_r \beta)^2 + (\partial_\vartheta \beta)^2. \quad (3.3.11)$$

Уравнение (3.3.11) имеет очевидный интеграл

$$r\partial_r \beta = \text{const.} \quad (3.3.12)$$

Единственным ограниченным решением уравнений (3.3.11) и (3.3.12) является, согласно (3.3.9),

$$\beta = \vartheta, \quad (3.3.13)$$

т.е. в (3.3.11) и (3.3.10) $k=1$. Окончательно, из (3.3.3), (3.3.10) и (3.3.13) выводим следующую структуру полевой конфигурации:

$$\theta = \theta(r), \quad \beta = \vartheta, \quad \gamma = \alpha. \quad (3.3.14)$$

Таким образом, мы пришли к "ежовому" анзацу Скирма (3.2.12). Однако отображение (3.2.12) в точке $r = 0$ не является однозначным, если $\sin \theta(0) \neq 0$. Поэтому необходимо наложить граничное условие

$$\theta(0) = N\pi, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.15)$$

которое соответствует, согласно (3.3.5), значению топологического заряда $Q = N$.

При $N = \pm 1$ полученная конфигурация (3.3.14) единственна и поэтому реализует абсолютный минимум энергии [12, 44 — 47], однако при $N \neq \pm 1$ это не так и возможны состояния с меньшей энергией. Интуитивно ясно, что можно, например, рассмотреть N далеко разнесенных скирмионов с единичным зарядом, и энергия такой системы оказывается меньшей, т.е.

$$E_N > |N|E_1, \quad (3.3.16)$$

где E_N — энергия "ежовой" конфигурации с $Q = N$.

Чтобы доказать неравенство (3.3.16), запишем гамильтониан (3.3.7) для подстановки (3.3.14) с $Q = N$ (в единицах $4\pi\epsilon/\lambda$):

$$H[\theta] = \int_0^\infty dr \left[\theta'^2 \left(\frac{r^2}{2} + 2 \sin^2 \theta \right) + \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{r^2} \right]. \quad (3.3.17)$$

Выделим значения r_k , для которых $\theta(r_k) = k\pi$, $k = \overline{0, N}$, где $r_0 = \infty$, $r_N = 0$, и определим функции

$$\theta_k(r) = \begin{cases} \theta(r) - (k-1)\pi, & r \in [r_k, r_{k-1}], \\ 0, & r > r_{k-1}, \\ \pi, & r \leq r_k. \end{cases}$$

Перепишем гамильтониан (3.3.17) в виде

$$H = \sum_{k=1}^N H[\theta_k] \quad (3.3.18)$$

и заметим, что функции $\theta_k(r)$ удовлетворяют тем же граничным условиям, что и решение уравнения движения для скирмиона с $Q = 1$, и поэтому также относятся к первому гомотопическому классу. Но в первом гомотопическом классе скирмион реализует абсолютный минимум энергии, и поэтому $H[\theta_k] > E_1$. В таком случае из (3.3.18) сразу же следует неравенство (3.3.16).

Численные расчеты подтверждают его справедливость. В частности, для $N < 10$ с точностью $\sim 1\%$ выполняется следующая формула для спектра масс сферически-симметричных конфигураций типа "еж" [48]:

$$E_N \approx \frac{1}{2}N(N+1)E_1. \quad (3.3.19)$$

Для $N \gg 1$ справедливо асимптотическое представление для спектра масс (в единицах $4\pi\epsilon/\lambda$) [49]:

$$E_N \approx [8,310N(N+0,8726)/2] + O(1). \quad (3.3.20)$$

Легко видеть, что неравенство (3.3.16) с большим запасом вытекает из (3.3.19)

и (3.3.20). В частности, $E_2 \approx 3E_1$, что приводит к сильному отталкиванию скирмионов на малых расстояниях и позволяет объяснить эффект насыщения ядерных сил.

Приведем основное уравнение для кирального угла $\theta(r)$:

$$\theta''(r^2 + 4 \sin^2 \theta) = -2r\theta' + \sin 2\theta \cdot \left(1 - 2\theta'^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2}\right). \quad (3.3.21)$$

К сожалению, точных решений уравнения (3.3.21) получить не удалось. Функция $\theta(r)$ имеет линейное поведение при $r \ll 1$: $\theta(r) \approx N\pi - r/r_0$, а при $r \gg 1$ (в линейном режиме) спадает по закону $\theta(r) = g/r^2$. Численное значение энергии скирмиона: $E_1 \approx 8,206749$.

Неплохую аппроксимацию решения с $Q = 1$ дает пробная функция Атьи—Мантона [50]:

$$\theta = \pi \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right)^{-1/2} \right], \quad \lambda^2 \approx 4,22, \quad (3.3.22)$$

для которой $E_1 \approx 8,285$, а также более сложная двухпараметрическая функция

$$\theta = 2 \arctg[y(1 + by^2)^{1/2}], \quad y = r/a,$$

для которой $E_1 \approx 8,239$ при $a = 1,495$, $b = 0,6984$. Интересно сравнить значение E_1 с оценкой (3.1.10):

$$E_1 = 6\pi^2 \sqrt{2} \frac{\epsilon}{\lambda} \cdot 1,231445.$$

Таким образом, превышение оценки соответствует фактору 1,23 для $N = 1$.

3.4. Прямые методы минимизации и доказательство существования скирмиона. Доказать существование скирмионов с $Q = N$, для которых киральный угол $\theta(r)$ удовлетворяет уравнению (3.3.21) и граничным условиям

$$\theta(0) = N\pi, \quad \theta(\infty) = 0, \quad (3.4.1)$$

можно с помощью прямого метода вариационного исчисления (см. [45, 46]; подробнее в [12]). Действительно, из оценки (3.1.10) вытекает существование нижней грани гамильтониана $H[\theta]$, который в единицах $4\pi\epsilon/\lambda$ имеет вид

$$H = \int_0^\infty \mathcal{H} dr = \int_0^\infty \left[\frac{\theta'^2}{2} (r^2 + 4 \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{r^2} \right] dr. \quad (3.4.2)$$

Поэтому существование скирмионов вытекает из достижимости нижней грани H на некотором множестве M функций $\theta(r)$, удовлетворяющих граничным условиям (3.4.1). Как известно, прямой метод вариационного исчисления состоит из построения минимизирующей последовательности функций $\theta_n(r) \in M$, доказательства ее сходимости в M к некоторой предельной функции $\theta_0(r)$ и доказательства того, что

$$\inf H[\theta] = \lim_{n \rightarrow \infty} H[\theta_n] = H[\theta_0]. \quad (3.4.3)$$

Заметим, что (3.4.3) вытекает из полунепрерывности снизу функционала

$H[\theta]$, т.е. из свойства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H[\theta_n] \geq H[\theta_0],$$

так как, по определению нижней грани, $\inf H[\theta] \leq H[\theta_0]$. Поэтому достаточно убедиться в полунепрерывности снизу функционала $H[\theta]$.

Для построения минимизирующей последовательности установим некоторые априорные оценки на предельную функцию $\theta_0(r)$. Покажем сначала, что ее производная в нуле ограничена, т.е.

$$|\theta'_0(0)| \leq C < \infty. \quad (3.4.4)$$

Положим $N\pi - \theta_0(r) = y(r)$ и допустим противное, что при $r \rightarrow 0$ $|y'| \rightarrow \infty$, хотя, согласно (3.4.1), $y \rightarrow 0$. Тогда из уравнения (3.3.21) находим при $r \rightarrow 0$

$$yy'' + y'^2 = y^2/r^2. \quad (3.4.5)$$

Решением уравнения (3.4.5) является $y = Cr$, что противоречит принятому допущению и доказывает (3.4.4).

Установим еще ограничения на поведение θ_0 и θ'_0 при $r \rightarrow \infty$. Ясно, что функционал $H[\theta]$ ограничен сверху, так как в качестве первого члена минимизирующей последовательности можно, например, взять функцию $\theta_1(r) = N\pi \exp(-r)$, для которой $H[\theta_1] < \infty$. Поэтому из (3.4.2) вытекает ограничение

$$\int_0^\infty r^2 \theta_0'^2 dr \leq C_0^2 < \infty,$$

и, согласно неравенству Шварца, при $b > 0$

$$|\theta_0(b)| \leq \int_b^\infty |\theta'_0| dr \leq \left(\int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \right)^{1/2} \left(\int_b^\infty r^2 \theta_0'^2 dr \right)^{1/2} < C_0 b^{-1/2}. \quad (3.4.6)$$

Перепишем теперь (3.3.21) в виде интегрального уравнения (с переменными пределами a, b):

$$\begin{aligned} \left[r\theta_0'^2(r^2 + 4 \sin^2 \theta_0) - 2r \sin^2 \theta_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{r^2} \right) \right]_a^b = \\ = \int_a^b dr \left[-r^2 \theta_0'^2 + 2 \sin^2 \theta_0 \cdot \left(2\theta_0'^2 - 1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Полагая в (3.4.7) $a \rightarrow 0$, $b \gg 1$ и учитывая (3.4.4) и (3.4.6), находим

$$|\theta'_0(b)| = O(b^{-3/2}). \quad (3.4.8)$$

Наконец, заметим, что линеаризованное уравнение (3.3.21), т.е. $r^2 \theta_0'' = 2\theta_0 - 2r\theta_0'$, имеет функцию Грина

$$G(r > s) = -\frac{s^4}{3r^2},$$

$$G(r < s) = -\frac{rs}{3}.$$

Поэтому (3.3.21) эквивалентно интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \theta_0(r) = & \int_0^\infty ds G(r, s)(s^2 + 4 \sin^2 \theta_0)^{-1} \times \\ & \times \left[8 \sin^2 \theta_0 \cdot \left(\frac{\theta_0}{s} \right)' - 2 \sin 2\theta_0 \cdot \left(\theta_0'^2 - \frac{\sin^2 \theta_0}{s^2} \right) + \sin 2\theta_0 - 2\theta_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

С помощью (3.4.8) из (3.4.9) выводим более точные оценки при $b \rightarrow \infty$:

$$\theta_0(b) = O(b^{-2}), \quad |\theta_0'(b)| = O(b^{-3}). \quad (3.4.10)$$

Рассмотрим теперь задачу о минимизации вспомогательного для (3.42) гамильтониана

$$H_{ab}[\theta] = \int_a^b \mathcal{H} dr,$$

заданного на конечном интервале $[a, b]$ в классе гладких функций $\theta(r)$, удовлетворяющих условиям $\theta(a) = N\pi$, $\theta(b) = 0$ и в соответствии с оценками (3.4.5) и (3.4.6) принадлежащих пространству Соболева $H_1(a, b)$ с нормой

$$\|\theta\|_{H_1} = \left(\int_a^b dr r^2 \theta'^2 + \theta^2(1) \right)^{1/2}, \quad a < 1 < b.$$

Выберем в качестве множества M шар в $H_1(a, b)$, который по теореме Банаха—Алаоглу (см. [51]) слабо компактен, и поэтому последовательность $\theta_n \in M$ слабо сходится в нем к некоторой предельной функции $\theta_0(r)$.

Докажем теперь слабую полунепрерывность снизу функционала $H_{ab}[\theta]$. Для этого воспользуемся тем, что всякое гильбертово пространство, и, в частности, $L_2(a, b)$, обладает слабо полунепрерывным снизу скалярным произведением положительных функций [52]. Обозначая $\|\cdot\|$ норму в $L_2(a, b)$, представим $H_{ab}[\theta]$ в виде суммы квадратов норм некоторых векторов из $L_2(a, b)$:

$$H_{ab}[\theta] = \sum_{k=1}^4 \|h_k\|^2,$$

где положено

$$h_1 = r|\theta'|/\sqrt{2}, \quad h_2 = \sqrt{2}|\theta' \sin \theta|,$$

$$h_3 = |\sin \theta|, \quad h_4 = (\sin^2 \theta)/r.$$

Учтем теперь, что пространство Соболева $H_1(a, b)$ компактно вложено в пространство непрерывных функций [53], т.е. $H_1(a, b) \hookrightarrow C(a, b)$. Это означает, что последовательность $\theta_n(r)$ сильно сходится в $C(a, b)$ к $\theta_0(r)$. Но тогда $h_3^{(n)}$ и $h_4^{(n)}$ как непрерывные функции от θ_n также сходятся к соответствующим пределам. Далее θ_n' слабо сходится в $L_2(a, b)$ к θ_0' , и поэтому $h_1^{(n)}$ слабо сходится в $L_2(a, b)$ к $h_1(\theta_0)$. Наконец, последовательность $h_2^{(n)}$ есть произведение последовательностей: $\sqrt{2}\theta_n'$, слабо сходящейся в $L_2(a, b)$, и $\sin \theta_n$, сильно сходящейся в $C(a, b)$. Поэтому $h_2^{(n)}$ слабо сходится в $L_2(a, b)$.

Итак, все векторы $h_k^{(n)}$ слабо сходятся в $L_2(a, b)$ к соответствующим пределам, и, следовательно, функционал $H_{ab}[\theta]$ слабо полунепрерывен снизу в $H_1(a, b)$. Наконец, положив $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, убеждаемся, что

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, \\ b \rightarrow \infty}} H_{ab} = H,$$

так как, согласно (3.4.4) и (3.4.10),

$$\int_0^a \mathcal{H} dr = O(a^3), \quad \int_b^\infty \mathcal{H} dr = O(b^{-3}).$$

Таким образом, доказана слабая достижимость нижней грани гамильтониана H при $Q = N$ в пространстве $H_1(0, \infty)$. Остается лишь убедиться в регулярности предельной функции $\theta_0(r)$, что следует из представления уравнения (3.3.21) в виде

$$\theta_0'(r) = - \int_r^\infty dr F(r, \theta_0, \theta_0'),$$

так как, согласно (3.4.4) и (3.4.10), $F \in L_1(0, \infty)$.

3.5. Структура топологических солитонов в высших гомотопических классах. Ранее мы убедились, что в высших гомотопических классах "ежовый" анзац не реализует минимума энергии. Поэтому будем проводить минимизацию гамильтониана в менее расширенном (по сравнению с разделом 3,3) фазовом пространстве. Если, например, в (3.3.2) менять направление только вектора $\mathbf{Z}$, то из условий (3.3.3) останутся лишь два:

$$(\nabla \theta \nabla \gamma) = (\nabla \beta \nabla \gamma) = 0. \quad (3.5.1)$$

При этом в гамильтониане по-прежнему появляется $(\nabla \gamma)^2$ (см. (3.3.4)), что приводит к условию (3.3.10). Подставляя (3.3.10) в (3.5.1), приходим к аксиально-симметричной конфигурации (3.2.16). На этих основаниях утверждается, что G_2 -инвариантные поля реализуют минимум энергии в высших гомотопических классах [47].

Это свойство не является случайным и подтверждается следующей теоремой [54]:

Теорема 3.5.1. Пусть G -инвариантное поле ϕ^0 , где $G = G_1$ или G_2 ,

реализует минимум G -инвариантного функционала $H[\phi]$ в инвариантном классе. Тогда, если $H[\phi]$ выпуклый по производным в точке ϕ^0 , то поле ϕ^0 реализует истинный минимум H , т.е. минимум и по отношению к неинвариантным возмущениям.

Доказательство. Составим вторую вариацию функционала H :

$$\delta^2 H = (y, \hat{K}(x)y), \quad y = \phi(x) - \phi^0(x),$$

записав ее в виде скалярного произведения в L_2 , в котором $\hat{K}(x)$ — оператор Якоби функционала $H[\phi]$. Из выпуклости $H[\phi]$ по производным вытекает, что оператор $\hat{K}$ эллиптический, а из G -инвариантности $H[\phi]$ выводим, что

$$\hat{K}(x) = \hat{T}_g \hat{K}(g^{-1}x) \hat{T}_g^{-1}, \quad (3.5.2)$$

где $\hat{T}_g$ — оператор представления группы G . Соотношение (3.5.2) означает, что $\hat{K}$ -оператор G -инвариантен и поэтому выражается через операторы Казимира $\hat{C}$ группы G .

Так, например, для G_1 : $\hat{C} = (\hat{J} + \hat{T})^2$, где $\hat{J}$ — операторы момента импульса, $\hat{T}$ — операторы изоспина. Наконец, из эллиптичности $\hat{K}$ следует, что зависимость $\hat{K}$ от $\hat{C}$ монотонная, т.е. собственные значения λ оператора $\hat{K}$ растут с ростом собственных значений α_k оператора Казимира; иными словами, $d\lambda/d\alpha_k > 0$ при $\alpha_k > 0$ (в силу эллиптичности достаточно рассмотреть положительную ветвь спектра). С другой стороны, для инвариантных собственных функций y^0 имеем $\hat{C}y^0 = 0$, а для неинвариантных $\hat{C}y_k = \alpha_k y_k$, $\alpha_k > 0$. Так как по условию теоремы в инвариантном классе спектр $\hat{K}$ положительных, т.е. $\lambda_0 > 0$, то $\lambda > \lambda_0 > 0$. Теорема доказана.

Применение теоремы 3.5.1 к G_1 -инвариантным решениям в модели Скинма было проиллюстрировано в предыдущих разделах. Что же касается G_2 -инвариантных конфигураций, то здесь мы располагаем лишь численными данными по дибарионам [55, 56], т.е. состояниям с $Q = 2$, когда $k = 2$, $\theta(0) = \pi$, $E_2 = 1,92E_1$. Сведения о состояниях с $Q \geq 3$ противоречивы, так как обычно они получаются в предположении дискретной симметрии, когда H минимизируется в некотором секторе пространства, а конфигурации в остальных секторах восстанавливаются продолжением. Тем не менее в каждом секторе аксиальная симметрия подтверждается [57] (см. также [111]).

Отметим интересный способ аппроксимации солитонных конфигураций с высшими топологическими зарядами $Q = k$, предложенный в работе [50]. Рассмотрим евклидово поле Янга—Миллса

$$A_\mu = \frac{i}{2} \tau^a A_\mu^a,$$

удовлетворяющее уравнению самодуальности

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.5.3)$$

и обладающее конечным действием. Это означает, что $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, и поэтому на бесконечности поле является чистой калибровкой:

$$A_\mu \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} U^{-1} \partial_\mu U = L_\mu.$$

Соответствующие решения называются инстантонными и классифицируются с помощью топологического заряда $Q = k$, который численно совпадает со степенью отображения $S^3 \rightarrow S^3$ и вычисляется по формуле (3.1.9). Вакуумные состояния ($F_{\mu\nu} \rightarrow 0$), как видно из (3.5.3), также являются чистыми калибровками и характеризуются тем же топологическим зарядом Q . Формально инстантонное решение соединяет (по времени t) вакуумные решения с зарядами $Q = n$ и $Q' = n + k$. Отчетливо это видно, если наложить калибровочное условие $A_0 = 0$. Пусть найденное инстантонное решение A_μ не удовлетворяет этому условию, т.е. его временная составляющая $A_t \neq 0$. Тогда совершим калибровочное преобразование

$$A_0 = V^{-1} A_t V + V^{-1} \partial_t V = 0,$$

откуда получим уравнение “эволюции”

$$\partial_t V = -A_t V,$$

с формальным решением (в виде голономии вдоль линии времени)

$$V(x, t_1) = T \exp \left(- \int_{t_0}^{t_1} A_t(x, t) dt \right) V(x, t_0). \quad (3.5.4)$$

Полагая $V(x, -\infty) = I$, находим $V(x, +\infty) = U(x)$. Если A_t достаточно быстро спадает при $|x| \rightarrow \infty$, то решение $U(x) \rightarrow I$ при $|x| \rightarrow \infty$. Построенное поле $U(x)$ и есть киральное поле с топологическим зарядом $Q = k$.

Возьмем, например, формулу т' Хофта для инстантонов:

$$A_t = \frac{i}{2\rho} (\vec{\tau} \nabla) \rho, \quad \rho = 1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 (x - X_i)^{-2}.$$

Тогда найдем из (3.5.4) солитонную конфигурацию

$$U(x) = T \exp \left(- \int_{-\infty}^{\infty} A_t(x, t) dt \right). \quad (3.5.5)$$

В частности, для $k = 1$ при $X_1 = T_1 = 0$ найдем

$$A_t = i(x \vec{\tau}) \left[(t^2 + r^2 + \lambda^2)^{-1} - (t^2 + r^2)^{-1} \right],$$

и подстановка в (3.5.5) дает пробную функцию (3.3.22). Вычисления при $k > 1$ гораздо более сложны, но по приведенному алгоритму позволяют получить неплохие аппроксимации солитонных конфигураций в высших гомотопических классах.

3.6. Вращающийся скирмион. В основе попыток описать статические свойства барионов в модели Скирма лежит квазиклассический метод квантования, или метод коллективных координат, в котором предполагается, что основной вклад в спектр возбуждений вносят вращательные моды, описываемые подстановкой Виттена

$$U(t, \mathbf{r}) = A(t)U_0(\mathbf{r})A^{-1}(t), \quad (3.6.1)$$

где $A(t) \in \text{SU}(2)$, $U_0(\mathbf{r})$ — "ежовый" анзац (3.2.12). Подстановка (3.6.1) описывает твердотельное вращение скирмиона в изоспиновом пространстве, что не согласуется с уравнениями движения и допустимо только в предположении о медленном вращении [58]. Но даже строгое описание стационарного вращения вокруг оси z с помощью зависимости вида $\alpha = \omega t$ в полевых функциях, где ω — частота вращения, приводит к уравнениям, не имеющим солитонных решений, так как получается излучательная асимптотика $e^{i\omega r}/r$. Из физических соображений этот результат можно было предвидеть заранее, так как вращающийся скирмион деформируется и начинает излучать пионы, считающиеся безмассовыми в рассматриваемом киральном пределе. Чтобы исправить указанный недостаток, включим в лагранжиан массивный пионный член

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m_\pi^2}{\lambda^2}(1 - \cos \theta), \quad (3.6.2)$$

нарушающий киральную инвариантность.

Отделяя время с помощью замены $\partial_t = -\omega \partial_\alpha$, для G_2 -инвариантной подстановки (3.2.16) получаем лагранжеву плотность

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\left[\frac{1}{2\lambda^2} + \varepsilon^2 \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \beta (r^{-2} \sin^{-2} \vartheta - \omega^2) \times \right. \\ & \times [(\partial_r \theta)^2 + r^{-2}(\partial_\vartheta \theta)^2 + \sin^2 \beta \cdot ((\partial_r \beta)^2 + r^{-2}(\partial_\vartheta \beta)^2)] - \\ & - \frac{1}{2\lambda^2} \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \beta (r^{-2} \sin^{-2} \vartheta - \omega^2) - \frac{m_\pi^2}{\lambda^2}(1 - \cos \theta) - \\ & \left. - \varepsilon^2 r^{-2} \sin^2 \theta \cdot (\partial_r \theta \partial_\vartheta \beta - \partial_r \beta \partial_\vartheta \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Если перейти к безразмерным переменным

$$r \rightarrow \varepsilon \lambda r, \quad \omega \rightarrow \omega / \varepsilon \lambda, \quad m_\pi \rightarrow m / \varepsilon \lambda,$$

то характерная комбинация $1 - \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta$, входящая в (3.6.3), свидетельствует, что для $\omega r \ll 1$ можно воспользоваться разложением по ω^2 как по малому параметру, взяв за основу "ежовый" анзац:

$$\theta \approx \theta_0(r) + \omega^2 \theta_1, \quad \beta \approx \vartheta + \omega^2 \beta_1. \quad (3.6.4)$$

При этом возмущения θ_1 и β_1 разлагаются в ряды по полиномам Лежандра:

$$\theta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_{2n}(\vartheta), \quad \beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r) P_{2n}^1(\vartheta). \quad (3.6.5)$$

Наконец, заметим, что для $\omega r \gg 1$ уравнения движения близки к линейным для переменных

$$X = \sin \theta \cdot \cos \beta, \quad Y = \sin \theta \cdot \sin \beta.$$

Поэтому, если ограничиться амплитудами a_0 , a_1 , b_1 , то решение уравнений

для X и Y согласуется с разложением (3.6.5), если положить

$$X = \cos \vartheta \cdot (a + b \cos^2 \vartheta), \quad Y = \sin \vartheta \cdot (c + d \cos^2 \vartheta), \quad (3.6.6)$$

где a, b, c, d — радиальные функции, имеющие асимптотическое поведение вида

$$a, b \sim \frac{e^{-mr}}{r}, \quad c, d \sim \frac{e^{-m'r}}{r}, \quad m' = (m^2 - \omega^2)^{1/2}. \quad (3.6.7)$$

Таким образом, для $\omega \sim m$ поперечные составляющие изовекторного поля медленно спадают на больших расстояниях, что и является проявлением центробежного эффекта [59].

Как видно из (3.6.7), частота вращения $\omega = m$ (масса пиона) является критической. При ее достижении скирмион становится нестабильным, и начинается излучение пионов. Как следует из соответствующих расчетов, учет деформации вращающегося скирмиона позволяет улучшить предсказания модели Скирма (см. [60]).

3.7. Тороидальные и струнные (вихревые) решения. Связь модели Скирма с S^2 -нелинейной сигма-моделью Фаддеева. Если положить в модели Скирма $\beta = \pi/2$, что отвечает условию электрической нейтральности "пионной жидкости" [34, 35], то оставшиеся угловые координаты θ, γ будут задавать поле со значениями в S^2 , так называемое $\mathbf{n}$ -поле. При этом гамильтониан принимает вид

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} ((\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta \cdot (\nabla\gamma)^2) + \varepsilon^2 \sin^2\theta \cdot [\nabla\theta \nabla\gamma]^2 \right\} \quad (3.7.1)$$

и соответствует S^2 -нелинейной сигма-модели Фаддеева (см. [61]). Поля, удовлетворяющие граничному условию $\theta(\infty) = 0$, разбиваются на гомотопические классы, задаваемые значением специального топологического инварианта — индекса Хопфа Q_H . Оказывается, что индекс Хопфа сводится к степени отображения $S^3 \rightarrow S^3$, если ввести вспомогательное S^3 -многообразие, задаваемое углами A, B, C таким образом, чтобы $\mathbf{n} = \varphi^+ \vec{\tau} \varphi$, где φ — двухкомпонентный спинор, имеющий вид

$$\varphi^T = (\cos A + i \sin A \cdot \cos B, \quad \sin A \cdot \sin B e^{iC}).$$

В таком случае Q_H определяется формулой (3.3.5) с переобозначением углов $\theta, \beta, \gamma \rightarrow A, B, C$, а гамильтониан (3.7.1) оценивается снизу через $|Q_H|^{3/4}$ [61]:

$$H > \mu |Q_H|^{3/4}, \quad \mu = \varepsilon \lambda \cdot 8\pi^2 \sqrt{2} \cdot 3^{3/8}. \quad (3.7.2)$$

Минимизируя функционал $H - \mu |Q_H|^{3/4}$ в расширенном пространстве, как это осуществлено в п. 3.5, приходим к G_2 -инвариантной конфигурации в переменных A, B, C . Возвращаясь к переменным θ, γ , имеем следующую структуру:

$$\theta = \theta(r, \vartheta), \quad \gamma = k\alpha + v(r, \vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.7.3)$$

При этом индекс Хопфа приводится к виду ($w = \cos \theta$)

$$Q_H = \frac{k}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta (1 - w) (\partial_r w \partial_\vartheta v - \partial_\vartheta w \partial_r v),$$

а гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} \left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta \cdot \left(\frac{k^2}{\rho^2} + (\nabla v)^2 \right) \right] + \varepsilon^2 \sin^2\theta \cdot \left(\frac{k^2 (\nabla\theta)^2}{\rho^2} + [\nabla\theta \nabla v]^2 \right) \right\}, \quad (3.7.4)$$

где $\rho = r \sin \vartheta$. Как видно из (3.7.4), регулярные решения обладают свойством $\sin \theta \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, т.е. имеют тороидальную структуру [62], представляя собой замкнутые закрученные струны (или вихри, smoke rings [63]). Дополнительное закручивание $\mathbf{n}$ -поля вдоль струны описывается функцией $\vartheta(r, \vartheta) \in [-n\pi/2, n\pi/2]$, $n \in \mathbf{Z}$, так что $Q_H = kn$.

В связи с тороидальной структурой $\mathbf{n}$ -поля его можно попытаться аппроксимировать струнным (вихревым) решением, если взять отрезок струны и замкнуть. Струнные решения для гамильтониана (3.7.4) имеют вид

$$\theta = \theta(\rho), \quad v = \kappa z, \quad \theta(0) = m\pi, \quad (3.7.5)$$

где использованы цилиндрические координаты ρ, z , если z — координата вдоль струны. Существование таких решений может быть доказано прямым вариационным методом [62, 132]. В работе [62] приведены и численные данные для функции $\theta(\rho)$ при $m = 1$. При этом для замкнутого отрезка струны длиной l индекс Хопфа определяется формулой

$$Q_H = \frac{\kappa l}{2\pi} = N.$$

В работе [62] получена следующая оценка для энергии такой конфигурации (в единицах $4\pi\varepsilon/\lambda$):

$$E = 23,65N. \quad (3.7.6)$$

Так как барионный заряд рассматриваемых конфигураций равен нулю, то они отвечают тяжелым мезонам (торонам).

Отметим еще, что в работе [64] была предложена простая пробная функция для аппроксимации решения (3.7.3) с $k = 1$:

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \Psi \cdot \sin^2 \vartheta, \quad v = \arctg(\tg \Psi \cdot \cos \vartheta), \quad (3.7.7)$$

где $\Psi = \Psi(r)$ — неизвестная радиальная функция. Подставляя (3.7.7) в (3.7.4), выполняя интегрирование по углам и используя замену радиальной переменной $r \rightarrow \sqrt{2\varepsilon\lambda}r$, находим

$$H[\Psi] = (32\pi\sqrt{2\varepsilon}/3\lambda) \int_0^\infty dr \left[\Psi'^2 \left(\frac{r^2}{2} + \sin^2 \Psi \right) + \sin^2 \Psi + \frac{\sin^4 \Psi}{r^2} \right].$$

Таким образом, получился гамильтониан H_S Скирма (3.3.17) для нового кирального угла $\Psi(r)$. При этом $H = (8\sqrt{2}/3)H_S$. Если ограничиться аппроксимацией спектра (3.3.19), то отсюда следует значение энергии

$$E \approx 30,95N(N+1)/2. \quad (3.7.8)$$

Видно, что оценка (3.7.8) сильно завышена по сравнению со струнным приближением (3.7.6), которое хорошо работает при $N \gg 1$, когда радиус тороида

велик. В то же время при малых N приближение (3.7.6) явно занижено, что позволяет указать примерное значение массы торона с $Q_H = 1$:

$$2,88E_1 \approx 23,65 < E_{\text{тор}} < 30,95 \approx 3,77E_1,$$

где $E_1 = 8,206749$ — масса скирмиона (нуклона).

4. Модель Скирма и физика адронов

Сформулированная в начале 70-х годов квантовая хромодинамика (КХД) — $SU(3)$ -калибровочная теория кварков и глюонов — признается в настоящее время бесспорным кандидатом на роль теории сильных взаимодействий. Однако если воспользоваться строительной терминологией, то для здания этой теории имеется пока лишь генеральный план, и в отношении многих разделов КХД можно сказать, что дело не доведено даже до рабочих чертежей. По сути, мы не располагаем пока ни достаточными экспериментальными данными, ни достаточно надежными расчетными методами. К настоящему моменту отчетливые очертания приобрела лишь область высоких энергий, т.е. малых расстояний между кварками. КХД обладает свойством асимптотической свободы, и с хорошим приближением кварки в этой области почти свободны, а бегущая константа связи α_s является естественным параметром разложения. Так как методы ренормгруппового анализа и теории возмущений по α_s дают для этой области надежную расчетную схему, она называется пертурбативной КХД, и изучение этой области наталкивается на трудности скорее технического порядка. Нас же будет интересовать непертурбативная область КХД, относящаяся к низким энергиям.

Отметим еще одну самостоятельную и, возможно, наиболее трудную проблему в КХД — исследование динамики в области промежуточных энергий. Здесь существенны как кварк-глюонные, так и адронные степени свободы, что затрудняет создание эффективных в этой области методов.

4.1. Низкоэнергетическая область КХД: методы изучения и открытые вопросы. Область низких энергий в КХД характеризуется сильным взаимодействием кварков, когда стандартная теория возмущений не работает. Считается, что кварки находятся в фазе конфайнмента. Однако в отличие от свойства асимптотической свободы кварков на малых расстояниях, которое строго доказано, состояние конфайнмента не выводится из первооснов КХД и рассматривается лишь как непротиворечивая гипотеза. В соответствии с этой гипотезой в низкоэнергетической КХД существенны лишь бесцветные (адронные) степени свободы т.е. КХД может быть сведена к некоторой эффективной теории мезонов и барионов. При этом возникают две проблемы: 1) как из фундаментального лагранжиана КХД вывести лагранжиан эффективной теории; 2) как из эффективного лагранжиана извлечь требуемую информацию о свойствах адронов.

Один из возможных путей решения первой проблемы был предложен т' Хофтом [65] при попытке найти неявный параметр разложения для КХД в области низких энергий. Оказалось, что в качестве эффективного параметра разложения можно использовать $1/N_c$, где N_c — число цветовых степеней свободы. Единственным существенным требованием при этом является наличие непрерывного перехода в теории от больших N к трехмерному случаю.

Если такое разложение применимо, то при $N_c \rightarrow \infty$ теория существенно упрощается, что позволяет получать разумные предсказания при $N_c = 3$. Более подробно мы остановимся на этом приеме в следующем разделе. Здесь лишь отметим, что предложенная схема $1/N_c$ -разложения имеет строгое обоснование лишь в двумерной КХД [66]. В разделе 4.3 будут рассмотрены схемы вывода из КХД эффективных лагранжианов (бозонизация Андрианова—Новожилова и др.), основанные на дополнительных предположениях.

Понятно, что лагранжиан эффективной теории будет существенно нелинейным и весьма сложным по структуре [67]. Поэтому актуальны различные модельные представления о структуре адронов, позволяющие рассчитывать их характеристики и процессы с их участием. Среди них назовем модель кварковых потенциалов и всевозможные модели мешков. С середины 80-х годов к ним присоединилась и модель Скирма. Большие надежды в последние годы связывают с так называемыми гибридными моделями, объединяющими в себе положительные качества модели мешков и солитонной модели барионов — модели Скирма (см. раздел 4.4). Развиваются и промежуточные киральные кварковые модели [112].

4.2. $1/N_c$ -разложение т'Хофта—Виттена и ренессанс идей Скирма. Идея $1/N_c$ -разложения возникла в физике практически параллельно с моделью "пионной жидкости" Скирма в начале 50-х годов [68]. Известно, что в ряде задач теория возмущений по константе связи попросту лишена смысла. Покажем это на примере атома водорода с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \quad (4.2.1)$$

Казалось бы, потенциальную энергию ввиду малости e^2 можно считать малым возмущением, но с помощью масштабного преобразования $r \rightarrow r/me^2$, $p \rightarrow pme^2$ выражение (4.2.1) приводится к виду

$$H = me^4 \left(\frac{p^2}{2} - \frac{1}{r} \right), \quad (4.2.2)$$

где me^4 служит лишь для задания энергетической шкалы. Поэтому следует искать иной малый параметр. Как выяснилось, в подобных ситуациях параметром может служить обратная размерность расширенного физического пространства $1/N$. Если записать уравнение Шрёдингера для s -состояния N -мерного атома водорода

$$\left[-\frac{1}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{e^2}{r} \right] \Psi = E\Psi, \quad (4.2.3)$$

подстановкой $\Psi \rightarrow \Psi r^{(1-N)/2}$ избавиться в (4.2.3) от члена с первой производной и выполнить масштабное преобразование $r = (N-1)^2 R$, то приходим к уравнению

$$\frac{1}{(N-1)^2} \left[\frac{-1}{2m(N-1)^2} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{N-3}{8m(N-1)R^2} - \frac{e^2}{R} \right] \Psi = E\Psi. \quad (4.2.4)$$

Уравнение (4.2.4) представляет собой уравнение движения частицы с эф-

эффективной массой $M = m(N - 1)^2$ в поле с эффективным потенциалом

$$V_{\text{eff}}(R) = \frac{\gamma}{8mR^2} - \frac{e^2}{R}, \quad \gamma = \frac{N-3}{N-1}. \quad (4.2.5)$$

При больших значениях N задача существенно упрощается, так как эффективная масса M становится большой, и можно считать частицу покоящейся на дне потенциальной ямы (4.2.5). В качестве энергии основного состояния можно поэтому выбрать абсолютный минимум V_{eff} при $\gamma = 1$, а возбужденные уровни получить разложением по $1/N$. Тогда, согласно (4.2.4), найдем

$$E_0 = -2me^4(N-1)^{-2}, \quad (4.2.6)$$

что при $N = 3$ дает $E_0 = -me^4/2$, т.е. точное значение. Практика убеждает в эффективности изложенного метода [69].

Отметим общие черты приведенного простого примера и непертурбативной КХД, которая в пределе большого числа цветов ($N_c \rightarrow \infty$) существенно упрощается [65, 70]. Для пояснения причин такого упрощения напомним, что фундаментальный лагранжиан КХД записывается в случае N_c цветов в виде

$$L_{\text{КХД}} = -\frac{1}{4}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \bar{q}(iD_\mu\gamma^\mu - m)q, \quad (4.2.7)$$

где кварковые поля q^a_α преобразуются по фундаментальному представлению цветовой группы $SU(N_c)$ (соответственно цветовой индекс a принимает значения $a = 1, 2, 3, \dots, N_c$) и флейворной группы $U(N_f)$ (флейворный индекс $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N_f$). Глюонные векторные поля $A_\mu = A_\mu^c \lambda^c$ принимают значения в алгебре Ли группы $SU(N_c)$. Здесь $c = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1$; λ^c — генераторы группы $SU(N_c)$, $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \lambda^a$ — тензор напряженности глюонных полей, f^{abc} — структурные постоянные группы $SU(N_c)$; $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ — ковариантная производная; g — константа цветового взаимодействия (цветовой заряд); m — масса токовых кварков.

Поскольку кварковые поля q^a и антикварковые поля $\bar{q}^a$ (здесь мы для удобства опускаем флейворный индекс) имеют N_c цветовых компонент, то глюонные поля удобно описывать бесследовой $N_c \times N_c$ -матрицей $A_\mu^a_b$ с $N_c^2 - 1$ компонентами, где $A_\mu^a_b = A_\mu^c (\lambda^c)^a_b$. Поэтому даже после фиксации цветных квантовых чисел начального и конечного глюонных состояний имеется как минимум N_c возможностей выбора значений для квантовых чисел промежуточных глюонных полей. Другими словами, при суммировании по всем промежуточным состояниям фейнмановские амплитуды приобретают комбинаторные множители, значения которых определяются числом замкнутых глюонных петель в диаграмме. Техника таких расчетов в наглядных двулинейных обозначениях изложена в [65, 70]. Здесь мы приведем для иллюстрации диаграмму однопетлевого вклада глюонных полей в поляризацию вакуума (рис. 2), опустив в ней для краткости векторные индексы.

В диаграмме содержатся две трехглюонные вершины с вкладом

$A_\mu^a A_\nu^b \partial^\mu A^{\nu c}$, где индекс c отвечает замкнутой глюонной петле и пробегает N_c возможных значений. Суммирование по всем состояниям и дает комбинаторный множитель N_c . Чтобы обеспечить существование непрерывного перехода $N_c \rightarrow \infty$, удобно переопределить заряд $g \rightarrow g/N_c^{1/2}$, избавившись от множителя N_c . Тогда результирующий множитель $(g/N_c^{1/2})^2 N_c = g^2$ не будет зависеть от N_c .

Проанализировав все возможные типы диаграмм, т' Хофт [65] пришел к выводу, что при $N_c \rightarrow \infty$ "выживают" лишь диаграммы, названные "планарными", поскольку они изображаются на плоскости линиями без выхода в третье измерение. Вклады диаграмм, содержащих выход в третье измерение, убывают как N_c^{-2} , а диаграмм с внутренними кварковыми петлями — как N_c^{-1} .

Следующее упрощение вытекает из гипотезы о конфайнменте в пределе больших N_c , т.е. о наблюдаемости только бесцветных состояний. Анализ доминирующих диаграмм КХД в таком предположении был выполнен Виттенем [70] и привел к следующим выводам:

а) При больших N_c мезоны можно рассматривать как стабильные невзаимодействующие частицы, так как амплитуды их распада имеют порядок $N_c^{-1/2}$.

б) Амплитуды упругого рассеяния мезона на мезоне имеют порядок N_c^{-1} и определяются вкладами только древесных диаграмм.

в) Барионные состояния могут возникать в эффективной теории мезонов с малой константой взаимодействия N_c^{-1} как солитоны с массой порядка обратной константы связи, т.е. $\sim N_c$.

Основным итогом проведенных исследований можно считать доказательство эквивалентности КХД в пределе $N_c \rightarrow \infty$ теории мезонных полей (и глюонов) с эффективным взаимодействием порядка N_c^{-1} . Таким образом, была возрождена на новом уровне идея Скирма о барионе как солитонном состоянии, возникающем в результате коллективного возбуждения мезонных полей.

Правда, в таком подходе остаются открытыми вопросы о массах мезонов и константах их взаимодействия, а также о структуре эффективного мезонного лагранжиана и о фермионных свойствах бариона как кирального солитона. Все эти вопросы мы обсудим в следующих разделах, а сейчас поясним, как в рамках КХД получила подтверждение идея Скирма об отождествлении топологического заряда с барионным числом.

Этот результат, полученный в группе Балачандрана (см. [71]), мы воспроизведем по лекциям [72]. Физическая идея заключается в изучении "поляризации" дираковского "моря" кварков в присутствии внешнего классического кирального поля U . Оказывается, что барионный ток кварков (усредненной по фермионным состояниям) в точности совпадает с топологическим

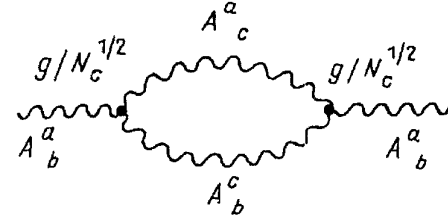


Рис. 2

током Скирма. В терминах кварковых полей q представим барионный ток $J_\mu^{(B)}$ в стандартном для N_c -цветовой КХД виде

$$J_\mu^{(B)} = N_c^{-1} \bar{q} \gamma_\mu q, \quad (4.2.8)$$

где множитель N_c^{-1} соответствует тому, что барионный заряд каждого кварка равен N_c^{-1} . Вычислим наблюдаемое значение $\langle J_\mu^{(B)} \rangle = B_\mu(U)$ в основном состоянии, когда кварк q связан с внешним полем U . В лагранжиане (4.2.7) сохраним лишь кварковую часть

$$L_{\text{КХД}}^{(q)} = i \bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - m(\bar{q}_L U q_R + \text{к.с.}), \quad (4.2.9)$$

где обозначено

$$q_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q. \quad (4.2.10)$$

Если считать, что закон сохранения барионного тока $\partial_\mu B^\mu = 0$ выполняется вне зависимости от динамики внешнего поля $U \in \text{SU}(N_c)$, тогда в общем случае ток B^μ , заданный на U -многообразии, должен иметь вид

$$B^\mu(U) = \beta J^\mu(U) + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\nu \Psi_{\sigma\tau}, \quad (4.2.11)$$

где β — некоторая константа, $\Psi_{\sigma\tau}$ — гладкая функция от U , а J^μ — сохраняющийся (топологический) ток. Из общих соображений понятно, что B^μ нельзя свести только ко второму слагаемому в (4.2.11), так как плотность заряда имела бы вид дивергенции

$$\varepsilon^{ijk} \partial_i \Psi_{jk}$$

и в силу граничного условия $\Psi_{jk}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \text{const}$ не давала бы вклада в барионный заряд.

Из приведенных рассуждений следует, что барионное число дираковского моря

$$\int B_0(U) d^3x = \beta Q \quad (4.2.12)$$

фактически определяется константой β , которую требуется вычислить на основе КХД.

Для этого произведем в (4.2.9) замену переменных $u_L = q_L$, $u_R = U q_R$:

$$L_q = i \bar{u}_L \gamma^\mu \partial_\mu u_L + i \bar{u}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - A_\mu) u_R - m(\bar{u}_L u_R + \text{к.с.}),$$

где $A_\mu = -U \partial_\mu U^\dagger$. В результате взаимодействия правые токи приобретают аномалию [113]:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\bar{u}_R \gamma^\mu u_R) - im(\bar{u}_L u_R - \bar{u}_R u_L) = \\ = \frac{N_c}{8\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \text{tr}(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta), \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

тогда как для левых токов имеем обычное соотношение

$$\partial_\mu (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) - im(\bar{u}_R u_L - \bar{u}_L u_R) = 0, \quad (4.2.14)$$

вытекающее из уравнений движения.

Складывая (4.2.13) и (4.2.14), получаем

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^{\mu(B)} &= \frac{1}{N_c} \partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu q) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \text{tr}(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta).\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

Наблюдаемое значение барионного тока дираковского "моря" кварков получается из (4.2.15) усреднением по фермионным состояниям:

$$\langle J^{\mu(B)} \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta).$$

Учитывая определение A_μ и топологического тока в модели Скирма (см. (2.4.5) и (3.1.9)), приходим к выражению

$$\langle J^{\mu(B)} \rangle = - \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}(A_\nu A_\alpha A_\beta) = J^\mu,$$

подтверждающему гипотезу Скирма об интерпретации топологического заряда как барионного числа. Таким образом, в (4.2.12) следует положить $\beta = 1$ [73—75].

4.3. Бозонизация Андрианова—Новожилова и другие подходы к выводу эффективных лагранжианов из КДД. Проблема перехода от фундаментального (микроскопического) описания к эффективному (макроскопическому) не нова в теоретической физике. Достаточно напомнить "низкоэнергетическую" динамику в физике твердого тела, где фундаментальными объектами являются ионы в узлах кристаллической решетки и электроны, взаимодействующие по закону Кулона, а адекватное описание явлений дается в терминах электронов с эффективной массой (поляронов) и фононов. Примечательно, что в этом случае эффективные степени свободы возникают вследствие спонтанного нарушения трансляционной инвариантности. Возвращаясь к описанию низкоэнергетической динамики КХД, легко провести некоторую аналогию с приведенным примером. Здесь мы тоже должны перейти в фундаментальном лагранжиане (4.2.7) от кварковых и глюонных степеней свободы, которые существенны лишь на расстояниях порядка 0,3 фм, к адронным степеням свободы, описывающим физику сильных взаимодействий на расстояниях 1—2 фм. При формировании этой области основная роль (гипотетически) возлагается на непертурбативные эффекты — спонтанное нарушение киральной симметрии и конфайнмент цвета. Если первое из явлений поддается некоторому описанию, то с явлением конфайнмента дело обстоит значительно хуже: до настоящего времени отсутствует даже корректная постановка задачи. Кроме того, имеются примеры вычислений характеристик адронов на основе правил сумм без использования гипотезы конфайнмента [76, 77]. Не привлекается эта гипотеза и для объяснения существования пионов, возникающих как голдстоуновские частицы вследствие спонтанного нарушения киральной симметрии, а из частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ) выводятся их основные параметры.

Отметим, что зачастую высказываются полярные точки зрения на проблему вывода эффективного лагранжиана из КХД. С одной стороны, задачу можно сформулировать как отыскание подходящей "замены переменных" в

функциональном интеграле

$$\begin{aligned} \int dA d\bar{q} dq \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx L_{\text{КХД}}(\bar{q}, q, A)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dU \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx L_{\text{eff}}(U)\right), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где $L_{\text{КХД}}$ задается формулой (4.2.7), U — киральное поле, параметризуемое мезонными полями, а L_{eff} — искомый эффективный лагранжиан, зависящий лишь от мезонных полей. Фактически строгое решение указанной задачи эквивалентно разрешению уравнений КХД в области низких энергий. Даже если бы это удалось, в итоге получился бы достаточно сложный для исследования мезонный лагранжиан, для извлечения информации из которого потребовались бы специальные методы [67]. В настоящее время такие методы активно разрабатываются, и для их апробации используются те эффективные лагранжианы, которые удастся либо вывести, используя дополнительные предположения, либо сконструировать правдоподобным образом. Конструирование разумных приближений к эффективному лагранжиану и рассматривается сейчас в качестве альтернативного подхода, поскольку, как будет продемонстрировано, прямой вывод без упрощающих предположений пока невозможен.

При этом помимо чисто мезонных эффективных лагранжианов активно исследуются так называемые кварк-мезонные, или гибридные модели, где кварковые степени свободы не считаются подавленными. Такой подход оправдывается феноменологическими соображениями, в частности отсутствием ясности в проблеме конфайнмента. Мы вернемся к этим вопросам в разделе 4.4, а здесь опишем принимаемые большинством исследователей (см., например, [12]) симметричные соображения, а также различные подходы и приближения, используемые при попытках решения задачи (4.3.1).

Достаточно надежным приближением для области низких энергий в КХД оказывается киральный предел, когда токовые кварки считаются безмассовыми. Основанием для этого служит то, что массы u - и d -кварков ($m_u \approx 4$ МэВ, $m_d \approx 7$ МэВ) и в значительно меньшей степени масса s -кварка ($m_s \sim 130$ МэВ) малы по сравнению с характерным для этой области энергетическим масштабом $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 300$ МэВ. Как показывают расчеты, массы барионов и большинства мезонов при переходе к такому пределу практически не меняются. Исключение составляют пионы, которые в силу соотношения Гелл-Манна—Оакса—Реннера $m_\pi^2 \approx (m_u + m_d)\Lambda_{\text{КХД}}$ становятся безмассовыми.

Подставляя (4.2.10) в (4.2.7), легко убедиться, что при $m \rightarrow 0$ лагранжиан КХД обладает глобальной $U(N_f)_L \otimes U(N_f)_R$ -симметрией относительно левых и правых вращений в флейворном пространстве. Более детально, речь идет о преобразованиях из группы

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A, \quad (4.3.2)$$

где $U(1)_V$ и $U(1)_A$ — порождаемые преобразованиями $q \rightarrow e^{i\alpha} q$, $q \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha} q$ однопараметрические подгруппы векторных и аксиально-векторных преобразований соответственно. По приведенным выше соображениям распространять киральную симметрию на случай $N_f > 3$ не представляется разумным, и поэтому в формуле (4.3.2) мы ограничились случаем $N_f = 3$. На квантовом уров-

не $U(1)_A$ -симметрия оказывается нарушенной, так как соответствующий аксиальный ток не сохраняется в силу аномалии Адлера—Белла—Джэкива—Бардина [78]:

$$\partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q) = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(G_{\mu\nu} G_{\lambda\rho}). \quad (4.3.3)$$

Оставшаяся группа симметрии

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$$

включает преобразования вида

$$q \rightarrow \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\pi^a \lambda^a}{2}\right) q, \quad (4.3.4)$$

перепутывающие состояния с разной четностью, где λ^a — генераторы $SU(3)$, π^a — киральные фазы. Для левых и правых кварковых полей (4.2.10) преобразование (4.3.4) принимает вид

$$q \rightarrow U^{-1/2} q_L + U^{1/2} q_R, \quad U = \exp(i\pi^a \lambda^a). \quad (4.3.5)$$

Спонтанное нарушение глобальной $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии можно понимать как локальную фиксацию относительных киральных фаз левых и правых кварков, а фазовые функции $\pi^a(x)$ связать с голдстоуновскими бозонами — октетом мезонов ($\pi^\pm, \pi^0, \eta, K^0, K^\pm, \bar{K}^0$). Поскольку на пространственной бесконечности мезонные поля исчезают, то для главного кирального поля $U(x)$ это эквивалентно граничному условию

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} U(x) = I. \quad (4.3.6)$$

Из вида преобразований кварковых полей

$$q_L \rightarrow W q_L, \quad q_R \rightarrow V q_R, \quad W, V \in SU(3),$$

следует закон преобразования главного кирального поля U относительно группы $G = SU(3)_L \otimes SU(3)_R$:

$$U(x) \rightarrow V U(x) W^{-1}. \quad (4.3.7)$$

Следовательно, вакуумное состояние $U = I$ инвариантно лишь относительно преобразований из подгруппы G , выделенной условием $V = W$, т.е. относительно векторной подгруппы

$$G_V = \text{diag}(SU(3)_L \otimes SU(3)_R) \approx SU(3)_V. \quad (4.3.8)$$

К аналогичному выводу приходим, если считать, что в вакуумном состоянии кварки образуют конденсат $\langle \bar{q}_\alpha q_\beta \rangle = \langle \bar{q} q \rangle \delta_{\alpha\beta} / 3$, неинвариантный относительно киральных преобразований (4.3.4), что и приводит к спонтанному нарушению киральной симметрии $G \rightarrow SU(3)_V$. Более детальное обсуждение сценария спонтанного нарушения киральной симметрии можно найти в [79].

Таким образом, можно считать, что поле U задает орбиту группы G , проходящую через I , и тем самым принимает значения в однородном пространстве $G/G_V \approx SU(3)$, осуществляя взаимно однозначное соответствие между слабы-

ми (фазовыми) возбуждениями вакуума, параметризующими поле $U(x)$ в силу (4.3.5), и элементами группового многообразия $SU(3)$. Если теперь принять во внимание справедливость кирального предела с приемлемой точностью лишь для легких u -, d -кварков, что соответствует $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -симметрии, нарушающейся по тому же сценарию до $SU(2)_V$, то можно считать данное рассмотрение еще одним подтверждением глубокой интуиции Скирма. Еще до появления представлений о кварках и КХД он считал, что киральное поле должно принимать значения на многообразии $S^3 \approx SU(2)$. С другой стороны, поскольку приведенные рассуждения представляются справедливыми при любом подходе к выводу эффективного лагранжиана, то вероятным итогом должна быть некоторая нелинейная σ -модель со спонтанно нарушенной киральной симметрией.

На основе более детального анализа симметрии КХД Виттен [70] и си-ракузская группа [71] пришли к выводу о том, что искомое эффективное действие σ -модели должны обязательно содержать кинетический член (известный как действие Вайнберга—Гюрши) и член Весса—Зумино [80], обусловленный наличием в КХД аксиальной аномалии Адлера—Белла—Джэки-ва—Бардина (4.3.3):

$$S = -\frac{F_\pi^2}{16} \int d^4x \operatorname{tr}(L_\mu L^\mu) - \frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{D_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \operatorname{tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma), \quad (4.3.9)$$

где F_π — постоянная распада пиона, а D_5 — 5-диск, границей которого является пространство-время Минковского. Этот вывод строго подтверждается в работе Карчева и Славнова [81], где выделяется киральная фаза кварков на основе процедуры Фаддеева—Попова. Показывается, что после замены переменных

$$q^U = U^{-2} q_R + q_L, \quad \bar{q}^U = \bar{q}_R U^2 + \bar{q}_L \quad (4.3.10)$$

в производящем функционале (4.3.1) с безмассовым вариантом лагранжиана (4.2.7) и вычисления якобиана преобразования в эффективном лагранжиане возникает член Весса—Зумино.

Следующий этап процедуры состоит в интегрировании по цветовым переменным. Не останавливаясь на технике континуального интегрирования в калибровочных теориях (см. известные монографии [20, 82]), отметим, что процедуру все же не удастся довести до конца, поскольку для этого требуется провести суммирование плечевых глюонных диаграмм, т.е. требуется развитие техники $1/N$ -разложения на случай матричных полей. Ввиду нерешенности этой задачи пока не удастся однозначно воспроизвести члены более высокого порядка по L_μ , вычислить в терминах кварк-глюонных параметров константу F_π и т.д.

Получить ответ на эти вопросы удастся лишь с привлечением ряда дополнительных допущений, например используя бозонизацию Андрианова—Новожилова [83, 84]. Помимо допущения о спонтанном нарушении киральной симметрии в методе бозонизации самосогласованным образом задаются параметры области низких энергий за счет предположения о наличии кваркового $\langle \bar{q}q \rangle$ и глюонного $\langle \operatorname{tr} G_{\mu\nu}^2 \rangle$ конденсатов. Пренебрегая возможной связью между флейворными и цветовыми фазами кварков, рассматривается кварковая часть лагранжиана (4.2.7) вида

$$L_q = \bar{q} \mathbf{D} q = i \bar{q} \gamma^\mu (\partial_\mu - V_\mu - \gamma_5 A_\mu) q - \bar{q} (S + \gamma_5 P) q,$$

где $\mathbf{D}$ — (перечеркнутый) оператор Дирака и предполагается, что система кварков находится во внешних векторном V_μ , псевдовекторном A_μ , скалярном S и псевдоскалярном P полях. В приближении безмассовых кварков спектр оператора Дирака $\mathbf{D}$: $\mathbf{D} q_k = K q_k$ — симметричен, и область низких энергий можно задать, используя масштабный параметр $\Lambda_{\text{КХД}}$: $|K| \leq \Lambda_{\text{КХД}}$. В случае массивных токовых кварков для ограничения спектра требуется дополнительный параметр M , учитывающий асимметрию спектра оператора $\mathbf{D}$. Тогда область низких энергий выделяется условием

$$|K - M| \leq \Lambda_{\text{КХД}}, \quad M \in [0, \Lambda_{\text{КХД}}], \quad (4.3.11)$$

которое приводит к плотности кваркового конденсата

$$\langle \bar{q} q \rangle = - \frac{N_c}{2\pi^2} \left(\Lambda_{\text{КХД}}^2 M - \frac{M^3}{3} \right). \quad (4.3.12)$$

Таким образом, в основе метода бозонизации Андрианова—Новожилова лежит допущение, что в области низких энергий доминируют непертурбативные кварковые флуктуации, нарушающие киральную симметрию и приводящие к образованию кваркового конденсата.

Трудность подхода состоит в вычислении континуального интеграла в левой части (4.3.1) по кварковым степеням свободы при введенных ограничениях на спектр оператора Дирака. Используя конечно-модовую регуляризацию [85], авторы метода вычисляют аномалию Адлера—Белла—Бардина—Джэкива и восстанавливают действие Весса—Зумино—Виттена (4.3.9). Кроме того, применяя замену переменных, аналогичную (4.3.10), удается явным образом вычислить члены четвертого порядка по L_μ в эффективном лагранжиане:

$$L_{\text{eff}}^{(4)}(U) = \frac{N_c}{384\pi^2} \text{tr} \{ [L_\mu, L_\nu] [L^\mu, L^\nu] - 2(L_\mu L^\mu)^2 + 4\partial_\mu \partial^\mu U \partial_\mu \partial^\mu U^{-1} \}. \quad (4.3.13)$$

(Более полное выражение, содержащее зависимости от введенных внешних полей, можно найти в работах [84].) Наконец, упомянутый подход позволяет установить, что условием устойчивости кваркового конденсата относительно флуктуаций является положительная определенность выражения, отвечающего глюонному конденсату:

$$\langle \text{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \rangle = \frac{6N_c}{g^2} (6\Lambda_{\text{КХД}}^2 M^2 - \Lambda_{\text{КХД}}^4 - M^4). \quad (4.3.14)$$

Заметим также, что в (4.3.13) помимо скирмовского члена, необходимого для описания на классическом уровне стабильной протяженной частицы, содержатся тахионные добавки, нарушающие положительную определенность функционала энергии. С другой стороны, развитый подход приводит к эффективному потенциалу, позволяющему единым образом описывать области низких энергий и асимптотической свободы в КХД. Подробнее это будет обсуждаться в следующем разделе.

В заключение отметим, что существуют и другие методы вывода эффективного мезонного лагранжиана в КХД [77].

4.4. Гибридные модели, кварковые мешки и скирмионы. Как уже отмечалось ранее, помимо эффективных мезонных лагранжианов для описания области низких энергий в КХД используются различные модели мешков (дубненский мешок, МТИ-мешок). Кварки рассматриваются как релятивистские частицы со спином $1/2$, находящиеся в ограниченном объеме — мешке, размеры которого должны соответствовать характерному масштабу конфайнмента. Внутри мешка кварки можно считать свободными в соответствии со свойством асимптотической свободы, а их невылетание обеспечивается накладываемыми граничными условиями. Например, в модели МТИ-мешка [86] с лагранжианом

$$L_{\text{МТИ}} = \left(\frac{i}{2} \bar{q} \gamma^\mu \vec{\sigma}_\mu q - m \bar{q} q - B \right) \theta_B(x) - \frac{1}{2} \bar{q} q \delta_B(x) \quad (4.4.1)$$

пленение кварков обеспечивается ступенчатой функцией $\theta_B(x)$, равной 1 внутри мешка и исчезающей вне его. Поверхностная δ -функция $\delta_B(x)$ возникает в связи с соотношением $\partial_\mu \theta_B = n_\mu \delta_B$, где n_μ — внешняя нормаль к поверхности мешка. Стабильность мешка обеспечивается "вакуумным" давлением B . Поскольку внутри мешка кварки свободны, то их поведение описывается уравнением Дирака

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q = 0, \quad (4.4.2)$$

с граничными условиями на поверхности

$$i n_\mu \gamma^\mu q = q. \quad (4.4.3)$$

Хотя идея искусственного пленения кварков в мешке и позволяет использовать привычные методы описания точечных частиц, все же ясно, что в последовательной теории конфайнмент должен возникать в результате взаимодействия кварков. Поэтому, чтобы избавиться от образа мешка, размеры которого задаются из внемодельных соображений, в [87] было предложено рассматривать мешок как дефект в сигма-модельной полевой конфигурации. В качестве последней можно, в частности, рассматривать "ежовую" конфигурацию скирмиона или более сложную, содержащую поля векторных ρ - и ω -мезонов [88]. Для таких моделей, которые стали известны как киральные или гибридные модели мешков, в $(1 + 1)$ -мерном варианте [89] был обнаружен любопытный феномен: результаты расчетов в формализме мешков показывают, что можно рассматривать мешок не как физическую реальность, а лишь как некоторый способ разбиения пространства на "внутреннюю" и "внешнюю" части. В этом случае граничные условия (на поверхности "мешка") не вносятся в модель, а выводятся из условия бозонизации

$$\partial_\mu \phi = \sqrt{\pi} \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q. \quad (4.4.4)$$

При этом область пространства, занимаемая адроном, может быть разбита на любое число кусков любой конфигурации, в одних из которых могут быть существенны лишь кварковые степени свободы, в других — только мезонные. Оказывается, что если задать на границах кусков подходящие граничные условия и принять во внимание эффект Казимира, то физические результаты не зависят от способа разбиения пространства. Описанный феномен получил название принципа чеширского кота, который, как известно, обладал удивительной способностью: когда он исчезал, улыбка его оставалась. Так и в данном

случае: мешка, по сути дела, нет, но можно пользоваться соответствующим формализмом [90].

Строго говоря, распространение подобной схемы на $(3 + 1)$ -мерную модель кирального мешка упирается в ту же трудность, которая возникает и при выводе эффективных лагранжианов из КХД: сказывается отсутствие точной схемы бозонизации фермионов в $(3 + 1)$ -мерном случае. Тем не менее, как показано в работах группы физиков из Стони-Брука [91], в $(3 + 1)$ -мерной гибридной модели выполняется приближенный принцип чеширского кота, приводящий к разумному радиусу сферического мешка $R < 0,5$ фм.

На основе гибридных моделей удастся рассчитывать статические характеристики адронов и параметры их взаимодействия и, что очень важно, получать единое описание явлений как в адронном секторе КХД, так и в области асимптотической свободы. Последнее достигается благодаря тому, что в соответствии с принципом чеширского кота разбиение на подобласти может быть произвольным, а следовательно, можно рассматривать мешки (дефекты) произвольного радиуса R . При стремлении $R \rightarrow 0$ мы должны получать модель Скирма (или иную эффективную σ -модель), а при больших R должна возникать стандартная модель мешка типа (4.4.1).

Отметим, что интерполяция подобного рода может быть получена и вне гибридных моделей, например на основе какой-либо схемы бозонизации. Так, метод бозонизации Андрианова—Новожилова позволяет получить потенциал $V(U, S)$, зависящий от кирального U и скалярного S полей, где S можно рассматривать как характеристику кваркония, с эффективной константой взаимодействия g_{eff} . В области высоких энергий последняя совпадает с бегущей константой α_s , а в области низких энергий $g_{\text{eff}} \approx \text{const}$. Причем эти области соответствуют двум минимумам потенциала $V(U, S)$, отвечающим различным S . Вычисления на основе интерполирующего потенциала дают разумное значение для радиуса кваркового мешка $R = 0,42 \pm 0,27$ фм.

4.5. Фаза Берри и скирмион как фермион. Упомянутые в заголовке эффекты, интенсивно изучаемые в последние годы, как оказалось, действительно имеют общую природу. И фаза Берри, и возникновение фермионных состояний в рамках бозонной полевой теории первоначально воспринимались как некоторая экзотика, но постепенно была выяснена глубокая топологическая природа и универсальность этих эффектов. Из многочисленных публикаций по данной проблеме упомянем обзоры [92 — 94] и труды конференций [95, 96], посвященных этим вопросам. В соответствии с задачами обзора сосредоточимся на идеях, лежащих в основе этих явлений, отдавая предпочтение описанию фермионных свойств скирмиона. Уместно подчеркнуть, что в последние годы термин "скирмион" приобрел очень широкий смысл, обозначая состояния в бозонных полевых теориях (не обязательно $(3 + 1)$ -мерных и зачастую никак не связанных с моделью Скирма), квантуемые как фермионы [94]. Поскольку рассматриваемые явления существенно связаны с топологическими свойствами моделей, то наиболее адекватное их описание требует активного применения аппарата алгебраической топологии. Не имея такой возможности, мы остановимся на изложении лишь основных результатов, опуская технические детали.

Как уже отмечалось в разделе 2.3, первая надежда реализовать идею построения фермионов из бозонов возникла у Скирма пекле открытия топологического заряда в синус-Гордон-модели. Напомним, что эта величина пред-

ставляет собой разность чисел кинков и антикинков. Обозначая x_0^i координаты локализации центров кинков (или антикинков), можно записать следующую "функцию заселения" кинков и антикинков вдоль действительной оси:

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_i \theta^+(x - x_0^i) + \sum_j \theta^-(x - x_0^j) \right), \quad (4.5.1)$$

где $\theta^\pm$ суть 2π -кинковые решения синус-Гордон-уравнения (2.3.3), соответственно растущие или убывающие. Согласно (2.3.5), топологический заряд Q может быть представлен в виде

$$Q = \bar{\alpha}(+\infty) - \bar{\alpha}(-\infty) = \sum_i n_i^+ - \sum_j n_j^-. \quad (4.5.2)$$

Скирм интерпретировал сохраняющуюся величину (4.5.2) как разность числа фермионов и антифермионов. В подтверждение такой интерпретации он проквантовал синус-Гордон-модель [6], предложив явный вид операторов рождения и уничтожения кинков, удовлетворяющих антикоммутиационным соотношениям. На этом основании Скирм сделал вывод об эквивалентности квантовых солитонов синус-Гордон-модели фермионам, взаимодействующим по четырехфермионному типу (независимо такая модель рассматривалась Тиррингом). Позднее этот результат (из иных соображений) был строго подтвержден Коулменом [25] (подробности можно найти в книге [20]). Здесь уместно заметить, что в $(1+1)$ -мерных теориях отсутствуют спиновые различия между бозонами и фермионами, и процесс бозонизации, т.е. перевода фермионной теории в бозонную, имеет вполне ясный сценарий (см. раздел 2.3). Скирм сделал попытку распространить этот результат на $(3+1)$ -мерную модель [36], но строгое обоснование его гипотезы о фермионных свойствах скирмиона было дано лишь на основе топологической трактовки спина по Финкельштейну (см. [27, 97, 98]).

Суть этого подхода коротко можно изложить следующим образом. В отличие от тензорных полей, преобразующихся по однозначным представлениям группы Пуанкаре, в частности группы вращений $SO(3)$, спиноры характеризуются двузначностью при поворотах на 2π . Этот факт на языке теории гомотопий звучит следующим образом: группа $SO(3)$ является двухсвязной, т.е. ее фундаментальная группа (группа замкнутых путей) $\pi_1(SO(3))$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$ — абелевой группе целых чисел по модулю 2, состоящей из двух элементов. В квантовой физике это приводит к двум возможным квантованиям: по Ферми—Дираку или по Бозе—Эйнштейну.

Топологическая трактовка спина по Финкельштейну состоит в построении двухзначных функционалов на множестве Φ классических полей. Последние можно рассматривать (в каждый фиксированный момент времени t) как отображения $\phi(\mathbf{x}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \Phi$. Пространство всех таких непрерывных отображений $\text{Map}(\mathbb{R}^3, \Phi)$, обозначаемое для краткости M , в общем случае не является односвязным, и связные компоненты его можно представить себе как элементы нулевой гомотопической группы $\pi_0(M)$. С другой стороны, гомотопические классы $[\mathbb{R}^3, \Phi]_i$ отображений $\phi(\mathbf{x})$ образуют третью гомотопическую группу $\pi_3(\Phi)$, и понятно, что эти две группы можно отождествить. Кроме того, между высшими гомотопическими группами пространства M и многообразием Φ су-

существует изоморфизм: $\pi_k(M) = \pi_{k+3}(\Phi)$. Поле $\phi = \phi(x, t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, можно рассматривать как путь в M , соединяющий точки $\phi(x, t_1) = \phi_1(x)$ и $\phi(x, t_2) = \phi_2(x)$. Амплитуду A вероятности квантового перехода из состояния $\Psi[\phi_1(x)]$ в состояние $\Psi[\phi_2(x)]$ можно по Фейнману записать в виде комплекснозначного функционала, проинтегрировав $\exp\{(i/\hbar) \int L[\phi] d^4x\}$ по пространству $M(\phi_1, \phi_2)$ путей в M , соединяющих точки $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$. Так как в общем случае $M(\phi_1, \phi_2)$ не односвязно, то, обозначая его связные компоненты $M_\alpha(\phi_1, \phi_2)$, можно представить амплитуду перехода в виде

$$A(\phi_1 \rightarrow \phi_2) = \sum_{\alpha} \chi(\alpha) \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int L[\phi] d^4x\right\} d\mu[\phi], \quad (4.5.3)$$

где $L[\phi]$ — классический лагранжиан, $d\mu[\phi]$ — функциональная квазимера, коэффициенты $\chi(\alpha)$ задают однопараметрическое представление группы $\pi_1(M)$ [99]. Суммирование в (4.5.3) осуществляется по множеству связных компонент пространства M . Оказывается, что без потери общности пути можно считать замкнутыми, т.е. $\phi_1 = \phi_2$. Это позволяет отождествить упомянутое выше множество связных компонент с группой $\pi_1(M) = \pi_4(\Phi)$ в соответствии с приведенными ранее соотношениями. Для коэффициентов $\chi(\alpha)$ в таком случае справедлив закон композиции $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$. В общем случае вычисление значений $\chi(\alpha)$ может быть сведено также к случаю замкнутых путей $\phi_1 = \phi_2$, и поэтому результат носит общий характер.

Приведем теперь определение двузначности функционалов $A(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ по Финкельштейну, фактически являющееся переводом на язык теории гомотопий свойства спиноров менять знак при поворотах на 2π : если $\phi_1 \in [R^3, \Phi]_i$, то тому же гомотопическому классу должен принадлежать и замкнутый путь P , начало и конец которого есть $\phi_1(x)$, причем такой, что значения $\Psi[\phi(x, t)]$ вдоль P меняются непрерывным образом и в конечной точке пути не совпадают с первоначальным значением. Двойной обход по тому же пути P , т.е. обход по P^2 , должен приводить функционал $\Psi[\phi(x, t)]$ к первоначальному значению. Иными словами, путь P в $[R^3, \Phi]$ должен быть нетривиальным, а путь P^2 — тривиальным.

Ответ на вопрос, в каких случаях такая ситуация возможна, можно получить на основе вычисления коэффициентов $\chi(\alpha)$ [99]. В случае скирмиона обозначим $\lambda(\nu)$ гомотопический класс композиции последовательных отображений: $\varphi^0: S^4 \rightarrow S^3$ и $\varphi^\nu: S^3 \rightarrow \Phi$, т.е. $\lambda(\nu) = \nu\rho$, где $\nu \in \pi_3(\Phi)$, а ρ есть нетривиальный элемент группы $\pi_4(S^3) = Z_2$. На основании гомотопического определения фермионного состояния можно утверждать, что при $\lambda(\nu) \equiv 0$ все отображения будут отвечать бозонам, а в противном случае — фермионам. Более точно это утверждение формулируется так: если скирмион характеризуется квантовым числом $\nu \in \pi_3(\Phi)$ и $\chi[\lambda(\nu)] = 1$, то в таком случае он подчиняется статистике Бозе—Эйнштейна, а если $\chi[\lambda(\nu)] = -1$, то — статистике Ферми—Дирака [100]. В работе [99] приведены вычисления для случаев, когда полево многообразие $\Phi = G/H$, где G — простая группа Ли, а H — ее подгруппа,

которые могут быть заменены соответственно своими максимальными компактными подгруппами, что не приводит к изменению гомотопических групп $\pi_3(\Phi)$. Для интересующего нас случая модели Скирма $\Phi = G = \text{SU}(2)$, $\pi_3(\text{SU}(2)) = \mathbb{Z}$. Если G локально изоморфна группе $\text{SO}(n)$, где $n = 3$ или $n \geq 5$, то $\pi_4(G) = \mathbb{Z}_2$. В этом случае $\lambda(\nu) = 0$ для всех четных чисел $\nu \in \pi_3(G) = \mathbb{Z}$ и $\lambda(\nu) = 1$ для всех нечетных чисел ν . Если же G не является локально изоморфной $\text{SO}(n)$, то $\pi_4(G) = 0$ и $\lambda(\nu) = 0$, т.е. в таких теориях возможны лишь бозонные состояния. Прежде чем переходить к описанию динамической реализации этого формализма, отметим, что все приведенные утверждения полностью соответствуют результатам работ [97, 98], в которых и были сформулированы необходимые и достаточные условия существования "спинорных структур" на полевых многообразиях Φ . В приведенном тексте мы сознательно обходим стороной $\text{SU}(3)$ -обобщение модели Скирма. Как известно, для группы $\text{SU}(3)$ $\pi_4(\text{SU}(3)) = 0$, и поэтому вопрос о статистике скирмиона в этом случае мы рассмотрим в рамках динамической реализации двухзначных функционалов, к описанию которой мы и переходим.

Динамическая реализация схемы Финкельштейна была предложена в серии работ Виттена [114] и Балачандрана с сотрудниками [71, 101 — 103], которые возродили интерес к модели Скирма и продемонстрировали ее применимость при описании низкоэнергетического предела в КХД. В частности, Виттеном было замечено, что имеется ряд процессов с участием псевдоскалярных мезонов, которые разрешены с точки зрения симметрии КХД, но запрещены в рамках эффективной низкоэнергетической теории типа Скирма. Причина такого рассогласования заключается в том, что эффективные вершины для таких процессов содержат в качестве множителя символ Леви—Чевиты $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$. Например, типичный процесс $K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ определяется вершиной вида

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \pi^0 \partial_\mu K^+ \partial_\nu K^- \partial_\lambda \pi^+ \partial_\rho \pi^-.$$

При вычислениях в рамках киральной модели Скирма это соответствует комбинациям $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho)$, тождественно равным нулю в силу циклической инвариантности следа. Поэтому процессы такого рода запрещены в рамках эффективных киральных моделей, что можно понимать как следствие дополнительного закона сохранения.

Виттен обратил внимание на то, что наличие избыточного закона сохранения в киральных моделях связано с излишней дискретной симметрией эффективного лагранжиана, отсутствующей в фундаментальном лагранжиане КХД. Эту симметрию легко обнаружить, выписав киральное поле $U(\mathbf{x}, t)$, моделирующее низкоэнергетический предел КХД с тремя ароматами:

$$U(\mathbf{x}, t) = \exp\left(\frac{i}{F_\pi} \lambda^a \pi^a(\mathbf{x}, t)\right), \quad a = \overline{1, 8}, \quad (4.5.4)$$

где λ^a — матрицы Гелл-Манна, а $\pi^a(\mathbf{x}, t)$ — поля псевдоскалярного октета мезонов. Замечая, что при отражении пространства

$$P: \pi^a(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\pi^a(-\mathbf{x}, t), \quad (4.5.5)$$

из (4.5.4) выводим закон преобразования кирального поля $U(\mathbf{x}, t)$:

$$P: U(\mathbf{x}, t) \rightarrow U^+(-\mathbf{x}, t). \quad (4.5.6)$$

Но операцию (4.5.6) можно представить и как произведение двух операций:
 $P = P_0(-1)^{N_B}$, где

$$P_0: x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t; \quad (-1)^{N_B}: U \rightarrow U^+. \quad (4.5.7)$$

Принятое здесь обозначение для второй операции связано с тем, что операция $U \rightarrow U^+$ эквивалентна $\pi^a \rightarrow -\pi^a$, т.е. она подсчитывает число бозонов N_B по mod 2. Указанная симметрия порождает специальное правило отбора: все функции Грина должны быть инвариантны относительно замены $\pi^a(x) \rightarrow -\pi^a(x)$ и, таким образом, должны исчезать для всех случаев с нечетным набором полей π^a . Другими словами, должны быть подавлены все реакции с нечетным числом псевдоскалярных участников.

К счастью, известна общая методика избавления от неприятностей такого рода [101, 102], уже встречавшихся, например, при описании динамики системы "заряд—монополь". Уравнение движения электрического заряда e на сфере $S^2 = \{r^2 = 1\}$ и в поле монополя Дирака с магнитным зарядом μ , который локализован в начале координат, имеет вид (в единицах $c = 1$)

$$m\ddot{x}_i = e\mu\epsilon_{ijk}\dot{x}_j\frac{x_k}{r^3} - mx_i\dot{r}^2. \quad (4.5.8)$$

Заметим, что сила Лоренца в правой части уравнения (4.5.8) исключает избыточные дискретные симметрии вида $t \rightarrow -t$ и $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, свойственные системе при отсутствии магнитного поля, оставляя допустимым лишь их произведение. Но при этом возникает проблема восстановления лагранжиана системы по уравнению (4.5.8), так как введение векторного потенциала $\mathbf{A}$ по правилу

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.5.9)$$

приводит с необходимостью к сингулярности $\mathbf{A}$ в точках некоторой линии, проходящей через начало координат (нить или струна Дирака), а значит, и к сингулярности лагранжиана взаимодействия $e(\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A})$.

Пожалуй, именно здесь уместно вспомнить о "фазе Берри" [104]. Дело в том, что М. Берри пришел к аналогичной проблеме, исследуя применимость адиабатического приближения Борна—Оппенгеймера к квантовым системам, в которых можно выделить "быструю" и "медленную" переменные. Тогда решение задачи, как известно, можно разбить на два этапа: рассмотреть вначале движение "быстрой" подсистемы при фиксированных координатах "медленной", а затем уже учесть движение последней. Если отказаться от предположения Борна—Оппенгеймера о том, что связью между "быстрыми" и "медленными" переменными в адиабатическом приближении можно пренебречь, то выясняется, что в результате развязывания "быстрых" степеней свободы в пространстве "медленных" переменных $\mathbf{R}$ возникает нетривиальная структура — своеобразный "калибровочный потенциал" $\mathbf{A}(\mathbf{R})$.

Оказывается, что если в энергетическом спектре задачи на собственные значения для "быстрых" переменных (при этом "медленные" выступают как параметры) имеется вырождение, то приобретает сингулярность потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{R})$. Берри показал [104], что если роль "быстрых" переменных играют электронные степени свободы (электрон в магнитном поле $\mathbf{B}(t)$), то в пространстве "медленных" переменных будет в точности индуцироваться сингулярный по-

тенциал монопольного типа, и задача вычисления фазы волновой функции (фазы Берри) совпадает с задачей о восстановлении лагранжиана взаимодействия системы "заряд—монополь". На этом основании Айтчисон [105] подчеркивал аналогию между фазой Берри и членом Весса—Зумино, с помощью которого, как мы вскоре убедимся, решается и задача восстановления лагранжиана системы "заряд—монополь", и задача об устранении избыточных симметрии в эффективном киральном лагранжиане, и вопрос о скирмионе как фермионе.

Для решения проблемы сингулярности лагранжиана взаимодействия $e(\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A})$ можно, в частности, заметить нечувствительность уравнения (4.5.9) к градиентным преобразованиям $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, которые ведут к изменению действия:

$$S' - S = e \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\mathbf{r}} \nabla \psi) = e \int_1^2 d\psi. \quad (4.5.10)$$

Как известно, такая неоднозначность действия весьма нежелательна в квантовом описании. Оценим ее, например, для замкнутого пути электрона на сфере $S^2 = \{r^2 = 1\}$, считая, что $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}(t_1)$, и вычислив вклад взаимодействия в двух разных калибровках (см. (4.5.10)):

$$e \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\mathbf{r}} \mathbf{A}) = e \oint_{\gamma} (\mathbf{A} d\mathbf{r}). \quad (4.5.11)$$

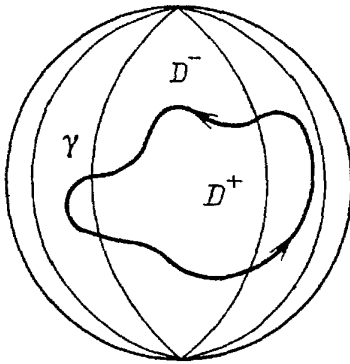


Рис. 3

Здесь γ — замкнутый контур, разделяющий две области: D^+ и D^- на $S^2 = D^+ \cup D^-$ (рис. 3). Применить теорему Стокса и свести контурный интеграл (4.5.11) к поверхностному мы можем лишь при отсутствии особенностей в интегранте. Поэтому, интегрируя по D^+ , выбираем калибровку так, чтобы все особенности $\mathbf{A}$ лежали в D^- , а затем поступаем наоборот. Тогда найдем

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (\mathbf{A}_1 d\mathbf{r}) &= \int_{D^+} (\mathbf{B}_1 d\mathbf{S}), \\ \oint_{\gamma} (\mathbf{A}_2 d\mathbf{r}) &= - \int_{D^-} (\mathbf{B}_2 d\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

где знак минус связан с выбором противоположной ориентации, а $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — магнитная индукция монополя. При переходе от одной калибровки к другой получим неоднозначность действия

$$\Delta S = e \int_{D^+ \cup D^-} (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = e \int_V d^3x \text{div } \mathbf{B} = 4\pi e, \quad (4.5.13)$$

где V — объем внутренности S^2 . Так как амплитуда квантового перехода

$$A(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} d\mu [r(t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[r(t)] \right\}$$

не должна зависеть от выбора калибровки, то приходим к условию

$$\exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{D^+} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) \right\} = \exp \left\{ - \frac{ie}{\hbar} \int_{D^-} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) \right\},$$

откуда с учетом (4.5.13) получим условие квантования Дирака

$$\exp \left(\frac{i}{\hbar} \Delta S \right) = 1, \quad \Delta S = 2\pi n \hbar, \quad e\mu = \frac{n}{2} \hbar. \quad (4.5.14)$$

Мы встретились здесь с достаточно распространенной ситуацией, когда возникают многозначные функционалы, и устранение их неоднозначности приводит к квантованию физических параметров [106].

Другой путь, предложенный Балачандраном с сотрудниками [101, 102], дает возможность получить несингулярное действие и, как мы увидим ниже, ведет к интересным обобщениям. Предлагается расширить конфигурационное пространство Q до пространства путей PQ над Q , которое определяется следующим образом. Пусть x_0 — фиксированная точка отсчета в Q (произвольная). Тогда элементом PQ будет путь p из x_0 в x , задаваемый параметром σ :

$$p = \{p(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad p(0) = x_0, \quad p(1) = x\}.$$

Соответственно вводится и **временная** зависимость $p(\sigma, t)$. Тогда свободное от сингулярностей действие имеет вид

$$S_{\text{int}} = e \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 d\sigma F_{ij}[p] \frac{\partial p^i(\sigma, t)}{\partial \sigma} \frac{\partial p^j(\sigma, t)}{\partial t}, \quad (4.5.15)$$

где

$$F_{ij}[p] = \mu \epsilon_{ijk} \frac{p^k(\sigma, t)}{|p(\sigma, t)|}.$$

Интегрант в (4.5.15) можно представить как замкнутую 2-форму

$$\omega = \frac{e}{2} F_{ij}[p] dp^i \wedge dp^j$$

с условием замкнутости $d\omega = 0$, совпадающим с тождеством Бианки

$$\partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} = 0.$$

Дальнейшее развитие этого подхода можно найти в работах [93, 107]. Кратко изложим его итоги. Так как волновая функция, описывающая (чистое) состояние квантовой системы, всегда определена с точностью до фазы, то можно считать ее заданной не на Q , а на соответствующем $U(1)$ -расслоении над Q , обозначаемом $\hat{Q}$. Тогда $\hat{Q}$ можно представить себе как пространство, получаемое присоединением окружности S^1 к каждой точке Q . Тривиальность

или нетривиальность расстояния $\hat{Q}$ зависит от способа, с помощью которого слои S^1 "крепятся" к Q . Если $\hat{Q} = Q \otimes S^1$, то расслоение тривиально, или, как еще говорят, не содержит кручения; в противном случае расслоение $\hat{Q}$ нетривиально, и на нем может быть определено действие Весса—Зумино S_{WZ} .

Общий метод построения волновых функций в присутствии нетривиального члена Весса—Зумино изложен в [93, 101]. Если на конфигурационном пространстве определена группа преобразований G , относительно которой действие S , включая S_{WZ} , инвариантно, то на расслоении $\hat{Q}$ действует иная, квантовая группа $\hat{G}$, обычно не совпадающая с G и иногда даже не содержащая G в качестве подгруппы. Так, в рассмотренной выше системе "заряд—монополь" $G = SO(3)$, в то время как $\hat{G}$ может быть выбрана как $SU(2)$ в случае, когда $e\mu = \hbar(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Именно в силу замены классической группы симметрии G на квантовую $\hat{G}$ и возможны фермион-бозонные трансмутации, предсказанные в свое время Скирмом. Способ отыскания групп $\hat{G}$, как правило, связан с так называемым центральным расширением и представляет собой достаточно сложную задачу. Не имея возможности остановиться на этом важном и интересном вопросе более подробно, отсылаем читателя к уже упомянутым работам.

Устранить избыточные симметрии в σ -модели можно, как было показано Виттеном [114], добавлением в уравнения движения (2.4.8) члена, аналогичного силе Лоренца в (4.5.8), т.е. типа $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho$. Но при этом опять возникает проблема с восстановлением лагранжиана, так как простейший возможный член $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho)$ тривиален. Эксплуатируя аналогию с системой "заряд—монополь", вместо пути S^1 на S^2 вводим "путь" S^4 на S^5 , т.е. расширяем область определения киральных полей и рассматриваем отображения вида $U(x): S^4 \rightarrow SU(3) = G$ и соответствующее пространству путей PQ расширение $U(x, \sigma): S^5 \rightarrow SU(3)$. Оказывается, что осуществить такое расширение возможно лишь при условии $\pi_4(G) = 0$, что и выполняется в нашем случае. В силу другого известного изоморфизма $\pi_5[SU(3)] = \mathbb{Z}$ на отображениях $U(x, \sigma)$ можно задать топологический инвариант типа степени отображения:

$$Q_5 = \int_{S^5} d^5x J_5^0 = -i \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\tau}}{240\pi^2} \int_{S^5} d^5x \text{tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\tau), \quad (4.5.16)$$

где $x^5 = \sigma$. Нетрудно проверить, что стоящая под интегралом в (4.5.16) 5-форма

$$\omega_5 = \frac{-i}{240\pi^2} \text{tr} l^5, \quad l = L_\mu dx^\mu,$$

замкнута и неточна. Повторяя аргументацию, использованную при описании системы "заряд—монополь", получаем явный вид S_{WZ} для $SU(3)$ -модели Скирма:

$$S_{WZ} = \frac{i\eta}{240\pi^2} \int_{D_5} d^5x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\tau} \text{tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\tau), \quad (4.5.17)$$

где $\eta = \text{const}$. Для того чтобы значение S_{WZ} не зависело от выбора диска D_5^+ или D_5^- , как и в (4.5.14), накладываем условие

$$\eta \left(\int_{D_5^+} \omega_5 + \int_{D_5^-} \omega_5 \right) = \eta \int_{S^5} \omega_5 = 2\pi\eta n = 2\pi\hbar n',$$

где $n, n' \in \mathbb{Z}$ и использовано обобщение теоремы Гаусса на S^5 [115]. Опять получаем квантование параметра η , а из сравнения (4.5.17) с формулой (4.3.9), выведенной из КХД с учетом аксиальной аномалии, приходим к результату Виттена: $\eta = N_c \hbar$. Осталось привести доводы в пользу того, что скирмион в этом случае ведет себя как фермион. С этой целью рассмотрим амплитуду вероятности вакуум-вакуумного перехода для покоящегося скирмиона:

$$\langle \text{Sk}(T) | \text{Sk}(0) \rangle = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} HT \right) (1 + O(\hbar)),$$

где H — гамильтониан системы, T — промежуток времени. Затем осуществим поворот скирмиона на угол 2π вокруг некоторой оси. При этом по правилам квантовой механики амплитуда приобретает фазовый множитель вида $\exp(-i2\pi J/\hbar)$, где J — спин скирмиона:

$$\langle \text{Sk}(T) | \text{Sk}(0) \rangle_{2\pi} = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} HT \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} 2\pi J \right) (1 + O(\hbar)). \quad (4.5.18)$$

Для вычисления этого множителя вложим статический $\text{SU}(2)$ -скирмион (3.2.12) в $\text{SU}(3)$, т.е. рассмотрим классические киральные поля вида

$$U_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \exp(i\tau\theta(r)) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.5.19)$$

а вращающееся поле U выберем в виде $U(\mathbf{x}, t) = A^+(t) U_c(\mathbf{x}) A(t)$, где $A(t)$ есть $\text{SU}(3)$ -матрица поворота вокруг некоторой оси. Амплитуду записываем в виде фейнмановского интеграла

$$\langle \text{Sk}(T) | \text{Sk}(0) \rangle_{2\pi} = \int_{t=0(U_c)}^{t=T(A^+ U_c A)} d\mu [U(\mathbf{x}, t)] \exp \left(\frac{i}{\hbar} S \right), \quad (4.5.20)$$

где

$$S = -MT - \frac{i\hbar}{240\pi^2} \int_{D_5^+} \text{tr } \tilde{F}^5, \quad (4.5.21)$$

M — масса скирмиона, а 1-форма $l = L_\mu dx^\mu$ вычисляется на полях $U(\mathbf{x}, t)$, получаемых расширением на D_5 полей $U(\mathbf{x}, t)$ с помощью замены $A(t) \rightarrow A(t, \sigma)$. При этом $A(t, 1) = A(t)$, $\partial_t A(t, 0) = 0$, $A(t+T, \sigma) = A(t, \sigma)$. Вычисления в (4.5.20) и (4.5.21) дают следующий результат:

$$\frac{-i}{240\pi^2} \int_{D_5^+} \text{tr } \tilde{F}^5 = \pi Q,$$

$$\langle \text{Sk}(T) | \text{Sk}(0) \rangle_{2\pi} = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} MT \right) \exp(iN_c \pi Q) (1 + O(\hbar)), \quad (4.5.22)$$

где Q — топологический заряд скирмиона.

Из сравнения ожидаемого ответа (4.5.18) с полученным (4.5.22) заключаем, что спин **SU(3)-скирмиона** при $Q = 1$ равен

$$J = \frac{\hbar}{2} N_c,$$

т.е. для четного числа цветов спин скирмиона целый, а для нечетного полуцелый.

Из приведенных рассуждений нельзя получить ответа на вопрос о спине **SU(2)-скирмиона**, для которого, как известно, член Весса—Зумино тривиален. Ответ на этот вопрос можно предложить следующий, в духе принципа чеширского кота. Действительно, член Весса—Зумино исчезает при переходе от $N_f = 3$ к $N_f = 2$, но его "улыбка" в виде дискретной группы $\mathbf{Z}_2$ остается. Часто говорят, что в этом случае работает дискретный вариант члена Весса—Зумино (см. [72, 93]), отбирающий возможные способы или типы квантования. Дело в том, что в схеме квантования по методу коллективных координат существует три возможных типа квантования (см. лекции [72], а также [108]): бозонное, фермионное и смешанное. Стандартная процедура выгладит следующим образом: после вложения анзаца Скирма в **SU(3)-киральное** поле по типу (4.5.19) и введения коллективных координат $A(t)$ приходим к лагранжиану $L(A, \dot{A})$, допускающему калибровочную симметрию, т.е. группу преобразований, зависящих от времени, под действием которых $L(A, \dot{A})$ изменяется на полную производную: $L \rightarrow L + d\chi/dt$. Как обычно, наличие временной группы симметрии ведет не к законам сохранения, а к ограничениям на фазовое пространство классической теории и на допустимые состояния в квантовой теории. Именно эти дополнительные связи устраняют свободу в выборе схемы квантования **SU(3)-скирмиона**. Зависящие от времени преобразования коллективных координат, сохраняющие инвариантным поле $U(\mathbf{x}, t) = A(t)U_c A^+(t)$ и уравнение для него, легко определить из (4.5.19), полагая, например,

$$A(t) \rightarrow A(t)\exp(iY\alpha(t)), \text{ где } 3Y = \text{diag}(1, 1, -2). \quad (4.5.23)$$

Так как Y коммутирует с U_c , то U будет инвариантным относительно преобразований (4.5.23), представляющих однопараметрическую **U(1)-подгруппу** гиперзаряда.

Для **SU(2)-модели** Скирма наличие альтернативных схем квантования отражает тот факт, что физические состояния в этом случае могут принадлежать одному из двух неприводимых представлений группы $\mathbf{Z}_2$, т.е. векторы состояния могут быть либо четными, либо нечетными функциями коллективной переменной $A(t)$. Можно представлять себе **SU(2)-модель** как получающуюся из **SU(3)-модели** путем наложения подходящей связи. Так как

$$\exp(i3\pi Y) = \text{diag}(-1, -1, 1),$$

то сужение группы калибровочной инвариантности **SU(3)-модели** на случай двух флейворов содержит $\mathbf{Z}_2$. Калибровочное условие в **SU(3)-модели** приводит к однозначному определению $\exp(i3\pi Y)$ на физических состояниях. Соответственно, неоднозначность в квантовании двухфлейворной модели Скирма устраняется, если рассматривать ее как некоторое сужение трехфлейворной модели.

Нельзя не упомянуть еще об одном эффекте, обнаруженном в последнее время и имеющем некоторое отношение к фермионным свойствам скирмиона. Речь идет о результатах-эксперимента Европейской Мюонной коллаборации (ЕМС) [109] по измерению спин-зависимой структурной функции протона и об объяснении этих результатов в работе [110] на основе модели Скирма. Оказалось, что результаты расчетов [110] с высокой точностью подтверждаются экспериментом. Попытки получить те же результаты на основе решеточных расчетов в КХД с привлечением максимально возможных мощностей компьютерной техники пока не привели к успеху. Мы не будем подробнее останавливаться на деталях этого эффекта, существование которого еще раз подтверждает необходимость разработки динамических сценариев для получения конкретных ответов в КХД. Как выясняется, модель Скирма достаточно успешно справляется с подобными функциями в низкоэнергетической области. Объяснение эффекта в рамках киральной кварковой модели Дьяконова—Петрова [112, 116] было предложено в работе [117].

4.6. Взаимодействие скирмионов и межнуклонные силы. При рассмотрении взаимодействия в рамках модели Скирма надо иметь в виду, что эта модель, рассматриваемая как низкоэнергетическое приближение КХД в главном порядке по числу цветов, лишь эффективно учитывает обмен массивными векторными и скалярными мезонами, и поэтому не может претендовать на полноту описания. Тем не менее, несмотря на относительную простоту, модель Скирма дает во многих случаях правильную качественную, а иногда даже и количественную картину явления. В частности, это относится ко взаимодействиям в далекой области, т.е. к низким энергиям, где модель хорошо работает.

Дадим сначала наглядное топологическое описание системы двух взаимодействующих $SU(2)$ -скирмионов, т.е. сектора с $Q = 2$, в адиабатическом приближении. Последнее означает, что мы будем минимизировать энергию, зафиксировав геометрические центры скирмионов в некоторых точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, определяемых условием $\theta = \pi$, или

$$U(\mathbf{r}_1) = U(\mathbf{r}_2) = -I. \quad (4.6.1)$$

Условие (4.6.1) говорит о том, что поле в окрестностях точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ совпадает с полем U_0 одиночного скирмиона (3.2.12). Поэтому поверхности $\theta(\mathbf{r}) = \text{const} \approx \pi$ близки к сферам с центрами в $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ (рис. 4). Далее, существует поверхность $\theta = \theta_0$, гомеоморфная связной сумме двух сфер S^2 , которая делит пространство $\mathbf{R}^3$ на три части: две внутренние ($\theta > \theta_0$), содержащие точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, и одну внешнюю ($\theta < \theta_0$). Каждая поверхность $\theta = \text{const}$ отображается в некоторое множество $\Omega \subset SU(2)$, гомеоморфное сфере S^2 : если зафиксировать θ , то в U остается свободным единичный вектор $\mathbf{n} \in S^2$. Из рисунка видно, что связные части

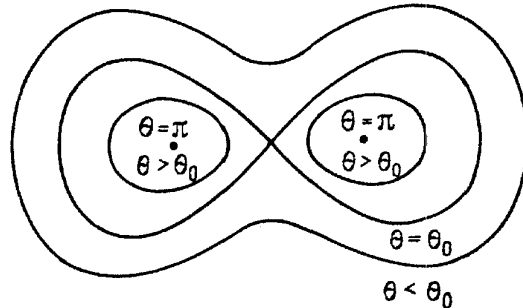


Рис. 4

поверхностей $\theta = \text{const} > \theta_0$ отображаются в S^2 со степенью 1, а поверхности $\theta = \text{const} < \theta_0$ — со степенью 2. Поэтому топология полевой конфигурации в области $\theta < \theta_0$ совпадает с топологией G_2 -инвариантного поля (3.2.16) с $k = 2$. По мере сближения скирмионов $\theta_0 \rightarrow \pi$ и возникает полностью аксиально-симметричная конфигурация (3.2.16), которая, однако, еще не отвечает максимально возможному физическому сближению скирмионов, так как распределение плотности энергии в этом состоянии имеет тороидальный характер. Дальнейшее сближение означало бы перетекание пионной жидкости в центральную область, что привело бы к образованию области с $\theta > \pi$, рост которой привел бы в конце концов к образованию G_1 -инвариантной конфигурации с $Q = 2$, а так как энергия ее в три раза больше энергии одиночного скирмиона E_1 , то это приводит к сильному отталкиванию (с энергией порядка E_1).

Обычно для описания взаимодействия скирмионов используют продакт-анзац

$$U_{12} = U_0^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)U_0^B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \quad (4.6.2)$$

где

$$U_0^A = AU_0A^+, \quad U_0^B = BU_0B^+; \quad A, B \in \text{SU}(2).$$

Если матрицы A и B различны, то это отвечает относительному развороту скирмионов в изопространстве. В частности, на рис. 4 видно, что максимальное притяжение отвечает развороту на π вокруг оси, перпендикулярной линии центров, так как точка соприкосновения на поверхности $\theta = \theta_0$ (начало координат) однозначно отображается в $\text{SU}(2)$ только при таком развороте [47, 118, 119]. Из сказанного выше ясно, что конфигурация (4.6.2) правильно отражает картину взаимодействия на больших расстояниях и только качественно правильно — на малых. Вместе с тем она совершенно не учитывает образование G_2 -инвариантной конфигурации в области средних расстояний [55, 57].

Для расчета взаимодействия поступают следующим образом. Вычисляют энергию системы для конфигурации U_{12} , из которой вычитают энергию разделенных скирмионов, т.е. $2E_1$. Результат и объявляется потенциалом взаимодействия $V(R, A, B)$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. При квантовом описании матрицы A и B являются случайными, и по ним нужно усреднить. Оказывается, что результат усреднения будет таким же, как если бы усреднялись по стандартным спин-изоспиновым состояниям нуклона $|N\rangle$ некоторые произведения $\vec{\sigma}_i$ - и $\vec{\tau}_j$ ($i, j = 1, 2$)-матриц Паули, отвечающих операторам спина и изоспина отдельных нуклонов [60, 120, 121]. В частности, справедливо соотношение (см. [60])

$$\langle N' | \text{tr}(\tau_\alpha A^+ \tau_\beta A) | N \rangle = -\frac{2}{3} \langle N' | \sigma_\alpha \tau_\beta | N \rangle,$$

учет которого приводит к потенциалу NN-взаимодействия

$$V^{\text{NN}} = V_c + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) [(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) V_{\sigma\tau} + S_{12} V_{T\tau}], \quad (4.6.3)$$

где $S_{12} = 3(\mathbf{n}\vec{\sigma}_1)(\mathbf{n}\vec{\sigma}_2) - (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)$ — стандартный тензорный оператор, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Сравнение (4.6.3) с хорошо зарекомендовавшим себя "парижским" феноменологическим потенциалом [122] показывает удовлетворительное согласие в далекой области ($R > 2$ фм) и качественное согласие в средней области ($1 < R < 2$ фм). Однако центральный потенциал V_c получается чисто отталкивательным, хотя "парижский" потенциал содержит в средней области незначительную (по сравнению с массой нуклона) притягивающую часть, которая играет важнейшую роль в ядерной физике, формируя энергию связи ядер. В теории бозонного обмена этот притягивающий потенциал объясняется изоскалярным **2 π -обменом** (обмен эффективным **σ -мезоном**) и может быть получен в рамках модели Скирма, если учитывать возмущение скирмионов в процессе взаимодействия [123]. На наш взгляд, этот недостающий эффект связан с дефектом продакт-анзаца (4.6.2).

Отметим, что относительно просто выделить в (4.6.3) потенциал однопионного обмена, который связан со структурой скирмиона в асимптотической ($r \rightarrow \infty$) области:

$$\theta(r) \approx \frac{3\lambda f_{\pi NN}}{8\pi m_\pi} (1 + m_\pi r) \exp(-m_\pi r) r^{-2}, \quad (4.6.4)$$

где $f_{\pi NN}$ — некоторая численная постоянная, $\lambda = 2/F_\pi$, $F_\pi = 186$ МэВ — постоянная распада пиона. С помощью (4.6.4) получается следующий потенциал:

$$V_\pi^{NN} \approx \frac{m_\pi f_{\pi NN}^2}{12\pi} [Y_2(m_\pi r) S_{12} + Y_0(m_\pi r) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2),$$

где использованы функции Юкавы

$$Y_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad Y_2 = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) Y_0(x).$$

Таким образом, однопионный обмен дает вклад в потенциалы $V_{\sigma\sigma}$ и $V_{\tau\tau}$. Надо сказать, что согласие с "парижским" потенциалом получается хорошим не только за счет однопионного обмена. Например, при $R < 1,5$ фм вклад V_π^{NN} составляет менее 30%. Поэтому модель Скирма качественно правильно учитывает и многопионные процессы.

Но в феноменологическом "парижском" потенциале кроме слагаемых вида (4.6.3) есть и другие члены, играющие существенную роль. К ним, например, относится спин-орбитальное взаимодействие, имеющее вид

$$[V_{LS} + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) V_{LS\tau}] (\mathbf{L} \mathbf{S}), \quad (4.6.5)$$

где $\mathbf{S} = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)/2$, $\mathbf{L} = -i[\mathbf{R} \nabla_R]$. В модели Скирма можно получить спин-орбитальное взаимодействие [124], если в гамильтониане учесть кинетическую нестационарную часть, связанную с $\text{tr } L_0^2$. Однако изоспин-независимая часть V_{LS} в (4.6.5) получается с неправильным знаком. Исправить положение можно, если включить в лагранжиан Скирма член

$$L_6 = \gamma^2 J_\mu J^\mu, \quad (4.6.6)$$

где J_μ — плотность барионного тока. Слагаемое (4.6.6) в лагранжиане квадратично по скоростям и не нарушает стабильности скирмиона.

4.7. Мезон-барионные процессы. При анализе процессов взаимодействия мезонов с барионами обнаружили некоторые закономерности, хорошо согласующиеся с опытом и впервые обнаруженные при попытках описать πN -рассеяние в рамках модели Скирма. Однако вскоре выяснилось, что эти закономерности в определенной мере модельно-независимы и связаны с приближенным законом сохранения K -спина, а именно

$$K = L + T, \quad (4.7.1)$$

где L — момент импульса мезонов (рассматриваются 0^- -мультиплеты), T — их изоспин. Закон сохранения K -спина связан с K -симметрией барионов, проявляющейся в "ежовой" структуре скирмиона, т.е. в G_1 -инвариантности его полевой конфигурации. Полезно подчеркнуть здесь аналогию с рассеянием на центральном потенциале в квантовой механике, когда сохраняется орбитальный момент.

Отметим, что K -симметрия сохраняется только в адиабатическом приближении, т.е. при относительно высокой энергии падающих частиц, когда нет резонанса с низко лежащими вращательными возбуждениями скирмиона: грубо можно сказать, что время рассеяния должно быть мало по сравнению с периодом вращения. Одним из следствий K -симметрии являются некоторые линейные соотношения между парциальными амплитудами, так называемые соотношения Маттиса—Пескина—Карлинера (см. [125]). Так, если рассмотреть πN -рассеяние, включая N - и Δ -состояния, то T -матрица приводится к виду (см. [125])

$$\begin{aligned} T_{LTJ} &\equiv T(\{LsTJ\} \rightarrow \{L's'TJ\}) = \\ &= (-1)^{s'-s} (2s+1)^{1/2} (2s'+1)^{1/2} \sum_K (2K+1) \begin{Bmatrix} KTJ \\ s'L'1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} KTJ \\ sL1 \end{Bmatrix} \tau_{KL'L}, \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

где $\tau_{KL'L}$ — приведенная T -матрица, L, L' — начальный и конечный угловые моменты пиона, s, s' — начальный и конечный спины (равные изоспинам) бариона, T — полный изоспин, J — полный момент импульса. В (4.7.2) величина K меняется в пределах, согласующихся с условиями $|L-1| \leq K \leq L+1$, $|L'-1| \leq K \leq |L'+1|$. Из (4.7.2) вытекают два линейных соотношения:

$$\begin{aligned} (4L+2)T_{L3/2,L-1/2} - (L-1)T_{L1/2,L-1/2} &= (3L+3)T_{L1/2,L+1/2}, \\ (4L+2)T_{L3/2,L+1/2} - 3LT_{L1/2,L-1/2} &= (L+2)T_{L1/2,L+1/2}. \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Сравнение с опытом показывает хорошее выполнение соотношений (4.7.3) в F -канале [60], но плохое в D -канале. Этого следовало ожидать, так как высокие L отвечают более высокой энергии.

В последнее время выяснилось, что соотношения Маттиса—Пескина—Карлинера обобщаются и на $SU(3)$ -случай [125], где они получаются приближенно. Кроме того, сохранение K -симметрии успешно применяется и при

анализе процессов барион-барионного взаимодействия [126, 127].

Что же касается расчета амплитуд рассеяния в рамках модели Скирма, то обычно это осуществляется путем рассмотрения конфигурации вида

$$U = \exp[i(\mathbf{n}\vec{\tau})\theta(r) + i\vec{\pi}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r,$$

где $\theta(r)$ описывает скирмион, а $\vec{\pi}(\mathbf{r})$ — мезонное поле. После этого в лагранжиане остаются лишь члены, квадратичные по $\vec{\pi}$, что приводит к линейным уравнениям для пионного поля, коэффициенты в которых зависят от "ежовой" конфигурации. Разлагая $\vec{\pi}$ -поле по сферическим гармоникам с учетом **К**-симметрии, приходят к системе уравнений для радиальных полевых функций, решение которых и позволяет определить матрицу рассеяния [60].

4.8. Модель Скирма и ядерная материя. Первые попытки описать плотную ядерную материю с помощью эффективного мезонного поля были сделаны еще Скирмом [33]. Вводя, согласно п. 3.3, векторы

$$\mathbf{X} = \nabla\theta, \quad \mathbf{Y} = \sin\theta \cdot \nabla\beta, \quad \mathbf{Z} = \sin\theta \cdot \sin\beta \cdot \nabla\gamma,$$

перепишем плотность энергии $u = E/V$ и плотность числа частиц $n = |N|/V = |Q|/V$ в виде

$$u = \frac{1}{2\lambda^2}(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) + \varepsilon^2([\mathbf{X} \mathbf{Y}]^2 + [\mathbf{Y} \mathbf{Z}]^2 + [\mathbf{Z} \mathbf{X}]^2), \quad (4.8.1)$$

$$n = \frac{1}{2\pi^2} |(\mathbf{X}[\mathbf{Y} \mathbf{Z}])|. \quad (4.8.2)$$

Вспоминая, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, получаем неравенства

$$\frac{1}{3}(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) \geq (|\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| \cdot |\mathbf{Z}|)^{2/3} \geq |(\mathbf{X}[\mathbf{Y} \mathbf{Z}])|^{2/3},$$

$$\frac{1}{3}([\mathbf{X} \mathbf{Y}]^2 + [\mathbf{Y} \mathbf{Z}]^2 + [\mathbf{Z} \mathbf{X}]^2) \geq |(\mathbf{X}[\mathbf{Y} \mathbf{Z}])|^{4/3},$$

используя которые, из (4.8.1) и (4.8.2) выводим оценку для плотности энергии ядерной материи:

$$u \geq \frac{1}{2\lambda^2} (2\pi^2 n)^{2/3} + \varepsilon^2 (2\pi^2 n)^{4/3}. \quad (4.8.3)$$

В предельном случае плотной материи второе слагаемое в (4.8.3) является доминирующим:

$$u > \varepsilon^2 (2\pi^2 n)^{4/3} \approx 160 \varepsilon^2 n^{4/3}. \quad (4.8.4)$$

Интересно сравнить оценку Скирма (4.8.4) с соответствующей оценкой в теории кварк-глюонной плазмы в приближении кварковых мешков [128]:

$$u = B + \frac{4}{9} \pi^{2/3} \left(1 + \frac{2\alpha_s}{3\pi} \right) n^{4/3}, \quad (4.8.5)$$

где B — постоянная кваркового мешка, α_s — константа КХД-связи. Видно, что оценки (4.8.4) и (4.8.5) хорошо согласуются. Это говорит о том, что модель Скирма достаточно хорошо отражает и некоторые черты высокоэнергетической физики адронов.

Численные расчеты [129] показывают, что если рассмотреть систему изолированных скирмионов, то по мере ее уплотнения они образуют подобие гранецентрированной кубической решетки (ГЦК) с некоторой постоянной a и симметрией вида

$$U(x + \frac{a}{2}, y + \frac{a}{2}, z) = \tau_3 U(x, y, z) \tau_3; \quad (4.8.6)$$

далее — циклически. Симметрия (4.8.6) означает, что скирмион в центре грани повернут в изопространстве на π вокруг нормали к грани. По мере дальнейшего уплотнения скирмионы расширяются, теряя индивидуальность, и происходит фазовый переход к конденсированной системе. Если обозначить $U = \sigma + i(\vec{\pi}\vec{\tau})$, то для фазового перехода справедливо параболическое приближение к среднему полю:

$$\langle \sigma \rangle \sim (a - a_{\text{кр}})^2,$$

что является признаком фазового перехода второго рода. В точке фазового перехода система приобретает дополнительную симметрию:

$$\sigma(x + \frac{a}{2}, y, z) = -\sigma(x, y, z),$$

$$\pi_1(x + \frac{a}{2}, y, z) = -\pi_1(x, y, z),$$

$$\pi_2(x + \frac{a}{2}, y, z) = \pi_2(x, y, z),$$

$$\pi_3(x + \frac{a}{2}, y, z) = \pi_3(x, y, z);$$

(далее — циклически).

Наконец, по мере дальнейшего уменьшения величины $a < a_{\text{кр}}$ энергия на один скирмион продолжает уменьшаться, но не беспредельно, достигая минимума при некотором $a = a_0$, когда распределение поля может быть аппроксимировано функциями вида

$$\sigma = \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos kz, \quad k = 2\pi/a,$$

$$\pi_1 = \sin kx \cdot (1 - \frac{\sin^2 ky}{2} - \frac{\sin^2 kz}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 ky \cdot \sin^2 kz)^{1/2};$$

далее — циклически. Таким образом, поверхности $\sigma = 0$ являются ортогональными плоскостями вида $x, y, z = a/4 + ma/2, m \in \mathbf{Z}$. Отметим, что при этом наблюдается значительное (в 1,2 раза) уменьшение массы, приходящейся на один скирмион, по сравнению с изолированным скирмионом. Интересную интерпретацию этого эффекта предложил Н. Мантон [130], который рассмотрел модель Скирма не в плоском пространстве $\mathbf{R}^3$, а на сфере S^3 некоторого радиуса R . Так как квадрат интервала на S^3 есть

$$dS^2 = R^2 [d\mu^2 + \sin^2 \mu (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\alpha^2)], \quad \mu \in [0, \pi],$$

то переход $\mathbf{R}^3 \rightarrow S^3$ эквивалентен замене в гамильтониане Скирма $r \rightarrow R \sin \mu, dr \rightarrow d\mu$.

При этом для "ежового" анзаца гамильтониан принимает вид

$$H = 2\sqrt{2}\pi\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_0^\pi d\mu \sin^2\mu \cdot \left\{ L \left[\left(\frac{d\theta}{d\mu} \right)^2 + \frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\mu} + L^{-1} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\mu} \right) \left[2 \left(\frac{d\theta}{d\mu} \right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\mu} \right] \right\}, \quad (4.8.7)$$

где положено $L = R/\lambda\varepsilon\sqrt{2}$. Нетрудно видеть, что минимизация гамильтониана (4.8.7) приводит к уравнениям Эйлера—Лагранжа, допускающим простое решение

$$\theta = \pi - \mu \quad (4.8.8)$$

с энергией

$$E = 3\pi^2\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\lambda}(L + L^{-1}).$$

Если $L = 1$, то достигается абсолютный минимум энергии $E_{\min} = 6\pi^2\sqrt{2}\varepsilon/\lambda$, тогда как в $\mathbf{R}^3$ это невозможно (см. п. 3.1).

Нетрудно видеть, что решение (4.8.8) соответствует равномерному распределению материи по S^3 , т.е. конденсированной фазе. Как показано в [131], это решение оказывается стабильным при $L < \sqrt{2}$, т.е. при $R = R_{\text{кр}} = 2\lambda\varepsilon$ должен происходить фазовый переход. Поэтому в модели Мантона—Скирма радиус R координатной сферы S^3 должен зависеть от плотности ядерной материи: $R \sim n^{-1/3}$. Если $L > \sqrt{2}$, то конденсированная фаза неустойчива, и в пределе $L \gg 1$ должны получаться изолированные скирмионы. В последнем случае можно получить поправки к массе скирмиона, зависящие от L [131]:

$$E_1 \approx 6\pi^2\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\lambda} \left(1,231445 - \frac{0,419}{L^2} + \frac{1}{4L^3} \right). \quad (4.8.9)$$

Из выражения (4.8.9) сразу виден эффект уменьшения массы скирмиона в зависимости от плотности ядерной материи.

5. Заключение

Одной из задач, которую мы ставили перед собой при написании обзора, была наглядная демонстрация эффективности топологических методов в изучении существенно нелинейных явлений. Модель Скирма является яркой иллюстрацией этого нового направления в теоретической физике, которое эволюционировало от гидродинамических представлений Гельмгольца—Кельвина конца прошлого столетия до современных моделей частиц и ядерной материи. В качестве других примеров развития данного подхода можно назвать теорию дефектов в твердом теле, теорию жидких кристаллов, теорию сильных возбуждений в магнетиках, теорию сверхтекучести и сверхпроводимости. Все перечисленные теории на данный момент находятся на разных стадиях развития, но тем не менее уже сейчас можно подметить их общие черты. Это и близкая структура модельных гамильтонианов, и глубокая топологическая природа нелинейных явлений. Мы надеемся, что методы, изложенные в обзоре и апробированные на модели Скирма, могут быть успешно использованы во

всех перечисленных теориях, а методы изучения последних найдут свое применение в физике скирмионов. Безусловно, в этом случае мы могли бы считать цель работы достигнутой.

Краткие биографические сведения о Т.Х.Р. Скирме

Тони Хилтон Роил Скирм родился 5 декабря 1922 г. Окончив в 1943 г. Тринити-колледж Кембриджского университета, он в течение трех лет работал как физик-теоретик в Лос-Аламосе (США) и по возвращении в Тринити-колледж стал заниматься теоретической ядерной физикой. В 1950 — 1961 гг. он возглавлял группу исследователей, специализирующуюся в области теории ядра, в теоретическом отделе Научно-исследовательского центра по атомной энергии в Харуэлле (Англия). Именно в этот период им были выполнены главные работы, принесшие ему известность. С 1962 г. Скирм посвящает себя преподавательской деятельности. Два года он работает на кафедре математики Малайского университета в Куала-Лумпуре, а с 1964 г. по возвращении в Англию — в Бирмингемском университете, вначале как профессор и заведующий кафедрой математической физики, а затем как профессор кафедры прикладной математики.

В 1985 г. Королевское общество Великобритании наградило профессора Т.Х.Р. Скирма медалью Хьюза в знак признания его вклада в развитие теории ядра и элементарных частиц. Умер Т.Х.Р. Скирм 25 июня 1987 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Skyrme T.H.R.*// Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1954. V. 226. P. 521.
2. *Skyrme T.H.R.*// Ibidem. 1955. V. 230. P. 277.
3. *Skyrme T.H.R.*// Nuovo Cimento Suppl. 1956. V. 4. P. 749.
4. *Skyrme T.H.R.*//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1958. V. 247. P. 260.
5. *Skyrme T.H.R.*// Ibidem. 1959. V. 252. P. 236.
6. *Skyrme T.H.R.*// Ibidem. 1961. V. 262. P. 237.
7. Паули В. Мезонная теория ядерных сил. — М.: ИЛ, 1947.
8. Фаддеев Л.Д.//Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 141.
9. *Skyrme T.H.R.*//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 2745.
10. *Thomson W.*//Proc. Roy. Soc. Edinburg. 1869. V. 6. P. 94.
- [11] Филиппов А.Т. Многоликий солитон. — М.: Наука, 1986.
12. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Модель Скирма и солитоны в физике адронов// Лекции для молодых ученых. Вып. 55. Р4-89-568. — Дубна: ОИЯИ, 1989.
13. *Pais A.*//Physica. 1953. V. 19. P. 869; Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. V. 40. P. 484.
14. *Schwinger J.*// Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 1164; Ann. of Phys. 1957. V. 2. P. 407.
15. *Feynman R., Gell-Mann M.*// Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1067.
16. Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов. — М.: Мир, 1976.
17. *Weinberg S.*//Phys. Rev. 1968. V. 166. P. 1568.
18. Скотт Э., Чу Ф., Мак-Лафлин Д.//см.: Скотт Э. Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Сов. радио, 1977. — С. 215.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
20. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985.
- [21] Абловитц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
22. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.
23. *Skyrme T.H.R., Perring J.K.*//Nucl. Phys. 1962. V. 31. P. 550.
24. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.*//Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15, P. 240.
25. *Coleman S.*//Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 11. P. 2088.
26. *Finkelstein D., Mistler Ch.*//Ann. of Phys. 1959. V. 6. P. 230.
27. *Finkelstein D.*// J Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1218.
28. *Westenholz C., von*//Ann. Henri Poincare. Ser. A. 1919, T. 30. P. 353.
29. Ольшанецкий М.А.// УФН. 1982. Т. 136. С. 421.

30. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология. — М.: Наука, 1989.
- [31] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
32. Skyrme T.H.R.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1961. V. 260. P. 127.
33. Skyrme T.H.R.//Nucl. Phys. 1962. V. 31. P. 556.
34. Санюк В.И.//Проблемы физики высоких энергий и теории поля. — Труды XI семинара. — М.: Наука, 1989. — С. 240; Труды XII семинара. — М.: Наука, 1990. — С. 254.
35. Sanyuk V.I.//IVth International Workshop on "Solitons and Applications"/Eds. V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev. — Singapore: World Scientific, 1990. — P. 374.
36. Skyrme T.H.R.// J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 1755.
37. Рыбаков Ю.П. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 14. — М.: Энергоиздат, 1984. — С. 161.
38. Rybakov Yu.P., Chakrabarti S.//Intern. J. Theor. Phys. 1984. V. 23. P. 325.
39. Hobart R.H.//Proc. Phys. Soc. 1963. V. 82, pt. 2. P. 201.
40. Derrick G.H.// J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 1252.
- [41] Фаддеев Л.Д.//Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. — Дубна: ОИЯИ Д2-9788, 1976. — С. 207.
42. Palais R.//Comm. Math. Phys. 1979. V. 69. P. 19.
43. Ладыженская О.А., Капитанский Л.В.// 3 а п . научных семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 127, вып. 15. С. 84.
44. Рыбаков Ю.П.//Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. — М.: Атомиздат, 1979. — С. 194.
45. Романов В.П., Фролов И.В., Шварц А.С.//Теор. и мат. физ. 1918. Т. 37. С. 305.
- Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I.//The Niels Bohr Inst. preprint NBI-HE-81-49. — Copenhagen, 1981.
46. Рыбаков Ю.П.//Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 13. — М.: Энергоатомиздат, 1982. — С. 187.
47. Кожевников И.Р., Рыбаков Ю.П., Фомин М.Б.//Теор. и мат. физ. 1988. Т. 75. С. 353.
48. Нисиченко В.П. Автореферат диссертации... канд. физ.-мат. наук. — М.: УДН, 1981.
49. Богомольный Е.Б., Фатеев В.А.// ЯФ. 1983. Т. 37. С. 228.
50. Atiyah M.F., Manton N.S.//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 228. P. 438.
- [51] Ахиезер Н.Е., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
52. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
53. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
54. Рыбаков Ю.П.//Проблемы физики высоких энергий и теории поля. — Труды X семинара. — М.: Наука, 1988. — С. 349.
55. Копелиович В.Б., Штерн Б.Е.//Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 165.
56. Verbaarschot J.J.M.//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 195. P. 235.
57. Braaten E., Townsend S., Carson L.//Ibidem. 1990. V. 235. P. 147.
58. Kudriavtsev A.E., Martemyanov B. V. Preprint ITEP-9. — Moscow, 1985.
59. Braaten E.// [67]. — P. 57.
- Blaizot J.P., Ripka G.//Phys. Rev. Ser. D. 1988. V. 38. P. 1556.
60. Holzwarth G., Schwesinger B.//Rep. Prog. Phys. 1986. V. 49. P. 825.
- [61] Вакуленко А.Ф., Капитанский Л.В.// ДАН СССР. 1979. Т. 246. С. 840.
62. Kundu A., Rybakov Yu.P.// J. Phys. Ser. A: Math., Gen. 1982. V. 15. P. 269.
63. Gipson J.M., Tze H.C.// Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 183. P. 524.
64. Fujii K., Otsuki S., Toyoda F.// Prog. Theor. Phys. 1985. V. 73. P. 1287.
65. 'tHooft G.// Nucl. Phys. Ser. B. 1974. V. 72. P. 461.
66. Славнов А.А.//Теор. и мат. физ. 1982. Т. 51. С. 307; 1983. Т. 57. С. 4.
67. Witten E.// Solitons in Nuclear and Elementary Particles Physics/Eds. A. Chodos, E. Hadjimichael, C. Tze. — Singapore: World Scientific, 1984. — P. 306.
68. Berlin T.H., Kac M.//Phys. Rev. 1952. V. 86. P. 821.
69. Sukhatme U., Imbo T.//Ibidem. Ser. D. 1983. V. 28. P. 418.
70. Witten E.// Nucl. Phys. Ser. B. 1979. V. 160. P. 57; Phys. Today. 1980. V. 33, No. 7. P. 38.
- [71] Balachandran A.P., Nair V.P., Rajeev S.G., Stern A.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1124; 1983. V. 50. P. 1630; Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 27. Pp. 1153, 2272.
72. Balachandran A.P.// High Energy Physics'85/Eds. M.J. Bowick, F. Gursey. — Singapore: World Scientific, 1986. — V. 1. P. 1.
73. Goldstone J., Wilczek F.// Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 986.
74. Kahana S., Ripka G., Soni V.//Nucl. Phys. Ser. A. 1984. V. 415. P. 351.
75. Kahana S., Ripka C.//Ibidem. V. 429. P. 426.
76. Shuryak E.V.//Phys. Rep. 1985. V. 115. P. 151.

77. *Diakonov D.I.*// Skyrmsions and Anomalies/Eds. M. Jezabek, M. Praszalowicz. — Singapore: World Scientific, 1987. — P. 27.
78. *Adier S.*//Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 2426.
Bell J.S., Jackiw R.//Nuovo Cimentito. 1969. V. 60. P. 147.
Bardeen W.A.//Phys. Rev. 1969. V. 184. P. 1848.
79. *Fomin P.I., Gusynin V.P., Miranski V.A., Sitetiko Yu.*// Riv. Nuovo Cimento. 1984. V. 6. P. 1.
80. *Wess J., Zumino B.*//Phys. Lett. Ser. B. 1971. V. 37. P. 95.
- [81] *Карчев Н.И., Славнов А.А.*//Теор. и мат. физ. 1985. Т. 65. С. 192.
82. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1988.
83. *Andrianov A.A., Novozhilov Yu.*//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 153. P. 422.
Andrianov A.A.//Ibidem. V.157. P. 425.
84. *Andrianov A.A., Andrianov V.A., Novozhilov V.Yu., Novozhilov Yu.V.*//Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 217;
Андреанов А.А., Андреанов В.А., Новожилов В.Ю., Новожилов Ю.В.//Теор. и мат. физ. 1987. Т. 70. С. 63.
85. *Andrianov A.A., Bonora L.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 232. Pp. 232, 247.
86. *Chodos A., Thorn C.B.*// Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 12. P. 2733.
87. *Rho M., Goldliaber A.S., Brown G.E.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 747.
Goldstone L., Jaffe R.L.// Ibidem. P. 1518.
Brown G.E., Rho M.//Phys. Lett. Ser. B. 1979, V. 82. P. 177.
88. *Kaymakcalan Q., Rajeev S., Schediter J.*//Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 30. P. 594.
Kaymakcalan O., Schechter J.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 1109;
Meissner U.-G., Zahed I.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1035.
89. *Nadkarni S., Nielsen H.B., Zahed I.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 253. P. 308; 1986. V. 263. Pp. 1, 23.
90. *Nielsen H.B.*// [77]. — P. 277.
- [91] *Vepstas L., Jackson A.D., Goldliaber A.S.*//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 140. P. 280.
Wust E., Vepstas L., Jackson A.D.// Ibidem. 1986. V. 173. P. 217.
92. *Виницкий С.И., Дебров В.И., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.*//УФН. 1990. Т. 160. С. 1.
93. *Balacimndran A.P., Gomm H., Sorkin R.D.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 281. P. 573.
94. *Mackenzie R., Wilczek F.*//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 2827.
95. *Markovski B., Vinitsky S.I., Eds. Topological Phases in Quantum Physics.* — Singapore: World Scientific, 1989.
96. *Jezabek M., Praszalowicz M., Eds. Skyrmsions and Anomalies.* — Singapore: World Scientific, 1987.
97. *Finkelstein D., Rubinstein J.*// J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1762.
98. *Williams J.*//Ibidem. 1970. V. 11. P. 2611.
99. *Schwarz A.S.*//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 403.
100. *Ravenei D., Zee A.*//Comm. Math. Phys. 1985. V. 98. P. 239.
- [101] *Zaccaria F., Sudarshan E. C.G., Nielson J. S., Mukunda N., Marmo G., Balacliandran A.P.*//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 27. P. 2327.
102. *Balacliandran A.P., Marmo G., Skagerstam B.S., Stern A.* Gauge symmetries and fibre bundles: Applications to particle dynamics//Lecture Notes in Physics. V. 188. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1983.
103. *Balacliandran A.P., Nair V.P., Trahern C.G.*//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 27. P. 1369.
104. *Berry M.*//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1984. V. 392. P. 45.
105. *Aitchison I.J.R.*// Acta Phys. Pol. Ser. B. 1987. V. 19. P. 207.
106. *Джэкив Р.*//УФН. 1986. Т. 149. С. 139.
107. *Sorkin R.*//Comm. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 421.
108. *Balacliandran A.P.*//Symposium on Anomalies, Geometry and Topology/Eds. W.A. Bardeen, A.R. White. — Singapore: World Scientific, 1985. — P. 472.
109. *E.M. Collaboration (Aschman J. et al.)*//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 206. P. 364.
110. *Brodsky S.J., Ellis J., Karliner M.*//Ibidem. P. 309.
- [111] *Kurihara T., Kanada H., Otofujii T., Saito S.*//Prog. Theor. Phys. 1989. V. 81. P. 858.
Николаев В.А., Ткачев О.Г.//Физ. ЭЧАЯ. 1990. Т. 21, вып. 6. С. 1499.
112. *Diakonov D.I., Petrov V.Yu., Pobylitsa P.V.*// Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 306. P. 809.
113. *Райдер Л.* Квантовая теория поля, — М.: Мир, 1987.
114. *Witten E.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 223. Pp. 422, 433.
115. *Bott R., Seely R.*//Comm. Math. Phys. 1978. V. 62, P. 235.
116. *Diakonov D.I., Petrov F.Yu.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 272. P. 457.
117. *Wakamatsu M.*// Phys. Rev. Ser. D. 1990. V. 42. P. 2427.
118. *Рыбаков Ю.П.*//Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 14. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — С. 166.

119. Рыбаков Ю.П., Сутантио В.//Ibidem. — 1985. — Вып. 15. С. 137.
120. Jackson A., Jackson A.D., Pasquier V.//Nucl. Phys. Ser. A. 1985. V. 432. P. 567.
[121] Zahedl., Brown G.E.//Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 1.
Meissner U.-G., Zahed I.// Adv. Nucl. Phys. 1986. V. 17. P. 143.
Meissner U.-G.//Phys. Rep. 1988. V. 161. P. 213.
122. Vinh Mou. R. Orsay Preprint IPNO/TH 89-84. — 1989.
123. Kaiser N., Meissner U.-G.//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 233. P. 457.
124. Nyman E.M., Riska D.O.// Rep. Prog. Phys. 1990. V. 53. P. 1137.
125. Karliner M., Mattis M.P.// Phys. Rev. Ser. D. 1986. V. 34. P. 1991.
126. Braaten E., Cai D.//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1243.
127. Donohue J.T.//Phys. Rev. Ser. D. 1990. V. 41. P. 2317.
128. Pethick C.J.//Nucl. Phys. Ser. A. 1985. V. 434. P. 587.
129. Castillejo L., Jones P.S.J., Jackson A.D., Verbaarschot J.J.M., Jackson A.// Nucl. Phys. Ser. A. 1989. V. 501. P. 801.
130. Manton N.S.// Comm. Math. Phys. 1987. V. 111. P. 469.
131 Manton N.S., Saniols T.M.// J. Phys. Ser. A. 1990. V. 23. P. 3749.
132. Рыбаков Ю.П.//Итоги науки и техники. Сер. "Классическая теория поля и теория гравитации. Т.2. Гравитация и космология.— М.: ВИНТИ, 1991. — С. 56.

Статья поступила 9.07.91 г.