

ГРУППОВЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Я.А. Смородинский, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин

(Российский научный центр "Курчатовский институт",
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики,
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН)

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	2
2.	Предпосылки группового подхода	4
	2.1. Алгебры Ли, представления, базисы. 2.2. Группы SU(2) и SU(1,1) как единая система.	
	2.3. Ряды и коэффициенты КГ. 2.4. Оптика как поле групповых исследований.	
3.	Дискретные обобщения (конечные разности, квантовые алгебры)	20
	3.1. Дискретные исчисления. Конечные разности. 3.2. q -исчисление. 3.3. Теория угловых моментов в q -исчислении.	
4.	Когерентные состояния (КС). Переход к классическому пределу	33
	4.1. КС и соотношения неопределенностей. 4.2. КС как базис НП. 4.3. КС-представление квантовой механики и переход к классическому пределу. 4.4. Фазовое пространство. Относительная дисперсия как мера неопределенности состояния.	
5.	Теория коэффициентов Клебша—Гордана и их соединений	52
	5.1. Единая теория коэффициентов КГ группы SU(2). 5.2. Трансформационные матрицы. 5.3. О коэффициентах КГ других групп. Классический предел.	
6.	Теория амплитуд вероятности	61
	6.1. Базисы НП, вероятностные распределения, предельные теоремы. 6.2. Коэффициенты КГ как аналог гипергеометрического распределения. 6.3. Марковские процессы. Уравнение Шрёдингера. 6.4. О постулатах квантовой теории.	
7.	Квантовая теория, группы и специальные функции	77
	7.1. Группы и специальные функции. 7.2. Вероятностные распределения и гипергеометрические функции.	
8.	Заключение	86
9.	Приложение	87
	Список литературы	92

1. Введение

Анализ основ квантовой теории имеет длительную историю. Пик его приходится на период становления квантовой механики и связан с именами де Бройля, Шрёдингера, Гейзенберга, Бора, Дирака. В 1932 г. с выходом книги фон Неймана [1], в которой было представлено логически последовательное, математически строгое обоснование, опирающееся на теорию гильбертова пространства, подведение фундамента под здание квантовой механики в основном завершается.

В дальнейшем этот круг вопросов постепенно отошел в тень, хотя и происходила эволюция важнейших понятий. Так, обычная нерелятивистская квантовая механика стала частью общей квантовой теории, фундаментальный характер приобрели групповые и вероятностные аспекты, благодаря использованию когерентных состояний (КС) изменилось видение взаимосвязи классической и квантовой теорий, сильно изменился и усложнился применяемый аппарат, входящий в физику из самых, казалось бы, абстрактных разделов математики, а в последний период изменения касались уже самых необходимых и, казалось, стандартных понятий. Все это требует вновь обратиться к основам квантовой теории.

Путь авторов в этой проблеме был связан с теорией коэффициентов Клебша—Гордана (коэффициентов КГ).

В 1972 г. в "УФН" вышел обзор [2], написанный старшими авторами (Я.С. и Л.Ш.), под названием "Коэффициенты Клебша—Гордана с разных сторон". К этому времени теория коэффициентов КГ группы $SU(2)$, или, другими словами, теория угловых моментов, стала неотъемлемой частью различных областей физики: квантовой механики и теории поля, теорий атомных столкновений и атомных спектров, молекулярной физики и физики элементарных частиц, релятивистских уравнений и когерентных явлений. Было показано, что коэффициенты КГ — это фактически новое исчисление, тесно связанное с алгеброй, многомерной геометрией, топологией, проективной геометрией, теорией аналитических функций, специальными функциями, дифференциальными уравнениями, комбинаторным анализом, конечными разностями.

За истекшие 20 лет теория коэффициентов КГ претерпела радикальные изменения. Наряду с дискретными появились непрерывные коэффициенты, сформировалась их единая теория, включающая помимо $SU(2)$ и другие группы. Высказывались предложения о подведении итогов этого этапа в обзоре "Коэффициенты КГ с разных сторон (20 лет спустя)". Но произошло неожиданное. Теория коэффициентов КГ с физической точки зрения — это наука о структуре квантовых систем, о связи системы и подсистем, о переходах между различными структурами, а за двадцать лет изменения произошли в том, что считалось незыблемым и рутинным. И в результате проблема коэффициентов КГ растворилась в общей проблеме основ квантовой теории.

Ключевой момент последней связан с амплитудами вероятности. Обычно амплитуды вероятности (волновые функции ψ) рассматривались как вспомогательное понятие, используемое в квантовой механике для вычисления физических величин. Между тем амплитуды вероятности — это самостоятельные вероятностные объекты, для которых может быть построена последовательная теория. Дирак [3] отмечал, что из двух принципиальных моментов квантовой теории — некоммутативности наблюдаемых и понятия амплитуды вероятности — последнее является более важным и именно с ним будет связано дальнейшее развитие теории и преодоление существующих трудностей. И это предсказание Дирака оправдывается. Одним из основополагающих шагов в этом направлении стало введение Фейнманом [4] интеграла по траекториям. В [5] рассмотрена теория амплитуд вероятности, параллельная обычной теории вероятностей, со своими функциями распределения, предельными теоремами, марковскими процессами. Таким образом, в квантовой теории существуют два равноценных языка — операторов в гильбертовом пространстве и амплитуд вероятности.

Амплитуды вероятности неразрывно связаны с групповым подходом, который в квантовой теории носит универсальный характер. Каждому процессу соответствует своя группа, подобно тому как в статистике каждому конкретному явлению — свое вероятностное распределение. Другими словами, нет какой-то избранной группы, и можно говорить об определенной "групповой демократии". Вместе с тем различные групповые и вероятностные подходы все более переплетаются между собой, образуя единую теорию. Даже коэффициенты КГ, которые появляются из чисто групповых соображений, представляют собой амплитуды вероятности.

Исследования КС как базиса неприводимых представлений (НП) групп позволили осуществить симметричное в отношении волна—частица построение квантовой теории, а также по-новому поставило вопрос о соотношении ее с классической теорией. Оказались возможными групповая трактовка соотношений неопределенностей, строгий переход к классическому пределу и построение состояний, максимально близких к классическим.

Все большую общность стал приобретать аппарат формул перекрытия базисных векторов пространства состояний, в котором используются известные дираковские обозначения (ряд идей Дирака представлен в [6]). В этом аппарате как бы синтезируются оба языка — теории операторов в гильбертовом пространстве и теории амплитуд вероятностей. Его центральное соотношение — формула разложения единицы — может трактоваться и как следствие полноты базиса, и как следствие полноты рассматриваемого поля событий. В аппарат перекрытий входят коэффициенты КГ и широкий класс специальных функций, он позволяет резко упростить обозначения и расчеты. Из истории науки известно, что введение эффективных и простых обозначений влечет за собой далеко идущие последствия.

Процесс движения в направлении разработки общей квантовой теории, содержащей как составную часть обычную квантовую механику, обогатился

новыми моментами, связанными, например, с использованием бесконечномерных алгебр генераторов, псевдодифференциальных операторов, квантовых алгебр. Здесь важен системный подход, выявление основополагающих принципов.

Цель данного обзора, наряду с приведением разрозненных работ в систему и выделением основных идей, состоит в установлении внутреннего единства трех основных подходов (группового, вероятностного, операторного) и в обрисовке контуров общей квантовой теории. Особое внимание обращено на простоту изложения и возможности использования конкретных формул как рабочего инструмента.

В обзоре последовательно представлены групповые предпосылки анализа основ квантовой теории; конечноразностные исчисления, включающие бурно развивающееся направление квантовых алгебр; КС и связанные с ними вопросы соотношений неопределенностей и перехода к классическому пределу; коэффициенты КГ для непрерывных и дискретных базисов; теория амплитуд вероятности, ее связь с групповым подходом и общей структурой квантовой теории. В приложение вынесены справочные формулы для относительно сложных, но интенсивно используемых в квантовой теории групп.

Ввиду широты круга охваченных проблем пришлось ограничиться лишь минимумом ссылок. Кроме заглавий основных разделов, везде используются оговоренные выше сокращения КС, НП, коэффициенты и ряды КГ. За исключением формул раздела 4.1, относящихся к соотношениям неопределенностей, используется система $\hbar = c = 1$.

2. Предпосылки группового подхода

2.1. Алгебры Ли, представления, базисы. Групповые методы стали неотъемлемой составной частью квантовой теории. Ее основные понятия могут быть выражены на групповом языке, обширный спектр ее задач сводится к групповому анализу, различным представлениям квантовой механики можно поставить в соответствие те или иные базисы НП. Для недавнего прошлого был характерен поиск некой основной, всеобъемлющей группы, кандидатами на которую побывало немало групп, вплоть до исключительных. Действительность показала, что для разных задач применимы разные группы и, более того, каждая группа описывает какую-то область реальности.

В данном разделе рассмотрен системный подход, где за основу взят равноправный набор простейших групп, алгебры Ли которых содержат тройку операторов (повышающий, понижающий, диагональный). Это фундамент группового анализа. В рамках этих групп могут быть последовательно рассмотрены основные квантовые понятия (координата—импульс, угловой момент—угол, фаза—число частиц, взаимосвязь энергия—импульс—масса, компоненты вектора углового момента). Отметим, что в рамках простейших (трехпараметрических) групп можно до конца проследить все основные следствия и дать последовательное и полное групповое описание (алгебры генераторов, представле-

ния, базисы, ряды и коэффициенты КГ, КС, символы операторов, переход к классическому пределу).

Теория представлений более сложных групп Ли развита недостаточно, и для них целесообразно использовать конструктивный принцип на базе результатов, полученных для фундаментальных групп. Заметим, что рассмотрение таких групп, как группы Пуанкаре $M(3,1)$ или Лоренца $SL(2C) \sim SO(3,1)$, — предмет отдельных монографий.

Развитие группового подхода оказалось тесно связанным с физическими приложениями. Общеизвестны в этом плане достижения в квантовой теории поля. Выделяется также оптика, где накопился огромный объем конкретного материала, характерная черта которого — переплетение групповых и статистических проблем. Разработка группового аппарата и широкий фронт групповых исследований в оптике явились одной из предпосылок нового этапа анализа основ квантовой теории.

Содержание этого раздела можно рассматривать как обобщение теории угловых моментов на всю совокупность простейших групп, лежащих в фундаменте группового подхода. К ним относятся пять трехпараметрических неабелевых групп Ли: полупростая компактная группа $SU(2)$, некомпактная группа $SU(1,1)$, нильпотентная группа Гейзенберга (или Гейзенберга—Вейля) $W(1)$, группа движений плоскости (или группа Фурье—Бесселя) $M(2)$, группа движений псевдоевклидовой плоскости $M(1,1)$ (иногда обозначается $MH(2)$). Их алгебры Ли содержат по три оператора (повышающий \hat{E}_+ , понижающий \hat{E}_- , диагональный \hat{H}) и имеют сходную структуру:

$$[\hat{H}, \hat{E}_{\pm}] = \pm \hat{E}_{\pm}, \quad [\hat{E}_+, \hat{E}_-] = f(\hat{H}). \quad (2.1)$$

Различие заключается в виде функции $f(\hat{H})$. Для каждой группы будут использоваться специфические обозначения операторов:

$$\begin{array}{cccc} & SU(2), SU(1,1) & M(2), M(1,1) & W(1) \\ f(\hat{H}): & 2\hat{H} & 0 & \hat{I} \\ \hat{E}_{\pm}: & \hat{J}_{\pm} & \hat{\Phi}_{\pm} & \hat{a}_{\pm}; \\ \hat{H}: & \hat{J}_z & \hat{J}_z, \hat{J}_{xt} & \hat{n} \end{array} \quad (2.2)$$

здесь $\hat{n} = \hat{a}_+ \hat{a}_-$ — оператор числа частиц, \hat{I} — оператор, кратный единичному. Для унитарных НП группы $W(1)$ $\hat{a}_+^+ = \hat{a}_+$, $\hat{I}^+ = \hat{I}$, и вместо \hat{a}_+ и \hat{a}_- обычно используются обозначения \hat{a}^+ и \hat{a} (операторы рождения и уничтожения).

Алгебрам Ли (2.1) отвечают конечные преобразования групп $\exp \hat{L}$, задаваемые тремя параметрами:

$$\begin{array}{ll} \hat{L} = \alpha \hat{E}_+ - \bar{\alpha} \hat{E}_- + i\alpha_0 \hat{J}_z, & \hat{E}_{\pm}^+ = \hat{E}_{\mp}, \hat{J}_z^+ = \hat{J}_z \quad (SU(2), M(2)), \\ \hat{L} = \alpha \hat{E}_+ + \bar{\alpha} \hat{E}_- + i\alpha_0 \hat{J}_z, & \hat{E}_{\pm}^+ = -\hat{E}_{\mp}, \hat{J}_z^+ = \hat{J}_z \quad (SU(1,1)), \\ \hat{L} = i\alpha_1 \hat{E}_+ + i\alpha_2 \hat{E}_- + \alpha_0 \hat{J}_{xt}, & \hat{E}_{\pm}^+ = \hat{E}_{\pm}, \hat{J}_{xt}^+ = -\hat{J}_{xt} \quad (M(1,1)), \\ \hat{L} = \alpha \hat{a}_+ - \bar{\alpha} \hat{a}_- + i\alpha_0 \hat{I}, & \hat{a}_{\pm}^+ = \hat{a}_{\mp}, \hat{I}^+ = I \quad (W(1)); \end{array} \quad (2.3)$$

здесь α — комплексное число, все α_i — действительные. Условия эрмитовости в (2.3) отвечают унитарным операторам $\exp \hat{L}$; для произвольных (неунитарных) представлений эти условия, вообще говоря, не выполняются. Заметим, что в физической литературе часто все генераторы (2.3) выбираются эрмитовыми; тогда в коммутационных соотношениях (2.1) появляются множители i и -1 .

За последнее десятилетие получили развитие деформированные алгебры (не являющиеся уже алгебрами Ли), в которых $f(\hat{H})$ — произвольная функция. Оказалось, что для некоторых деформированных алгебр (так называемых квантовых алгебр) в преобразованном виде сохраняются основы структуры теории представлений (см. раздел 3).

Рассматриваемые трехпараметрические группы являются группами движений двумерных многообразий (т.е. преобразований этих многообразий в себя, сохраняющих расстояния между точками и ориентацию) постоянной кривизны K — евклидовой и псевдоевклидовой плоскости ($K=0$, $M(2)$ и $M(1,1)$), сферы ($K > 0$, $SU(2)$), плоскости Лобачевского или гиперboloида ($K < 0$, $SU(1,1)$); $W(1)$ является группой движений фазовой плоскости.

НП соответствующих групп строятся с помощью алгебр Ли (2.1). Дискретный базис НП вводится как базис из собственных функций диагонального оператора \hat{H} ; собственные значения \hat{H} называются при этом весами НП. Повышающие и понижающие операторы задают переходы между базисными векторами, связывая их в одно НП алгебры Ли.

Само НП задается числом (сигнатурой НП) — собственным значением оператора, коммутирующего со всеми генераторами группы. Базис, строящийся с помощью операторов алгебр (2.1), может рассматриваться как базис чисел заполнения; его удобно обозначить в виде $|n\rangle$, $|n_1 n_2\rangle$. Ниже будут также использоваться два типа обозначений НП: $T_{(\lambda)}(g)$ — оператор конечных преобразований, где g — элемент группы, λ — сигнатура представления, и $D(\lambda)$ — тот же оператор, но в случаях, когда отсутствие аргумента g не приводит к недоразумениям.

Обратимся непосредственно к построению унитарных НП алгебры Гейзенберга $W(1)$. Введем базис $|\omega n\rangle$ как базис из собственных функций двух коммутирующих операторов: кратного единичному \hat{I} и числа частиц $\hat{n} = \hat{a}_+ \hat{a}_-$:

$$\hat{I}|\omega n\rangle = \omega|\omega n\rangle, \quad \hat{a}_+ \hat{a}_- |n\rangle = \omega n |\omega n\rangle. \quad (2.4)$$

Из первой пары коммутационных соотношений (2.1) получим

$$\hat{a}_+ |\omega n\rangle = c_1(\omega, n) |\omega, n+1\rangle, \quad \hat{a}_- |\omega n\rangle = c_2(\omega, n) |\omega, n-1\rangle.$$

Для унитарных НП выполняются условия эрмитовости (2.3), поэтому ω и n — действительные; кроме того, $\hat{a}_-^+ = \hat{a}_+$, откуда $c_1^2 = \omega(n+1)$, $c_2^2 = \omega n$, $\bar{c}_k(n) = c_k(n)$ и

$$\hat{a}_+ |\omega n\rangle = [\omega(n+1)]^{1/2} |\omega, n+1\rangle, \quad \hat{a}_- |\omega n\rangle = (\omega n)^{1/2} |\omega, n-1\rangle, \quad (2.5)$$

$$\omega n \geq 1, \quad \omega(n+1) \geq 0. \quad (2.6)$$

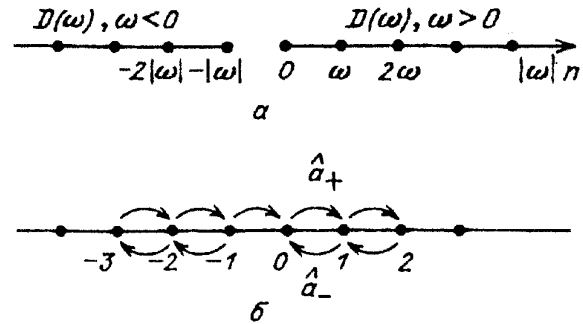


Рис. 1. Представления группы Гейзенберга. *a* — Весовой состав унитарных НП при фиксированном $|\omega|$. *б* — Приводимые, но неразложимые представления

Формулы (2.4) — (2.6) определяют весовой состав унитарных бесконечномерных НП. Эти НП задаются действительным $\omega \neq 0$ (при $\omega = 0$ унитарные НП одномерны); так как \hat{I} коммутирует со всеми операторами группы, то генераторы задают переходы лишь между состояниями с одинаковыми ω . При $\omega > 0$ НП согласно (2.6) имеют младший вес $n = 0$, при $\omega < 0$ — старший вес $n = -1$ (рис. 1). Представления $D(\omega)$ и $D(-\omega)$ являются сопряженными.

С физической точки зрения n задает номер уровня осциллятора, а ω — расстояние между уровнями (частоту осциллятора). Отметим, что в значительной части физической литературы рассматривается лишь одно НП с фиксированным $\omega = 1$.

Генераторы $\hat{\Phi}_{\pm}$ группы движений плоскости $M(2)$, которую образуют вращения и трансляции, могут быть представлены в виде

$$\hat{\Phi}_{\pm} = \hat{p}_x \pm i\hat{p}_y, \quad \hat{\Phi}_+ \hat{\Phi}_- = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2, \quad (2.7)$$

где \hat{p}_x и \hat{p}_y — инфинитезимальные операторы, отвечающие трансляциям (операторы импульсов). Дискретный базис НП группы движений плоскости $M(2)$ строится как базис из собственных функций коммутирующих операторов углового момента \hat{J}_z и квадрата импульса $\hat{p}^2 = \hat{\Phi}_+ \hat{\Phi}_-$:

$$\hat{\Phi}_+ \hat{\Phi}_- |pm\rangle = p^2 |pm\rangle, \quad \hat{J}_z |pm\rangle = m |pm\rangle. \quad (2.8)$$

Из (2.1) получим

$$\hat{\Phi}_+ |pm\rangle = pc^m |p, m+1\rangle, \quad \hat{\Phi}_- |pm\rangle = pc^{-m} |p, m-1\rangle.$$

Для унитарных НП согласно (2.3) m и p — действительные,

$$\hat{\Phi}_{\pm} |pm\rangle = p |p, m \pm 1\rangle. \quad (2.9)$$

Бесконечномерные унитарные НП задаются действительными $p \neq 0$ (при $p=0$ унитарные НП одномерны; им отвечают состояния $|0, m\rangle$); НП $D(p)$ и $D(-p)$ эквивалентны; m пробегает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. НП не имеют ни старшего, ни младшего веса.

В НП $D(p)$ (т.е. при фиксированном квадрате импульса p^2) генераторы могут быть представлены в виде

$$\hat{J}_z = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \Phi_{\pm} = p \exp(\pm i\varphi), \quad \hat{p}_x = p \cos \varphi, \quad \hat{p}_y = p \sin \varphi. \quad (2.10)$$

Такое представление служит основой для описания переменных угловой момент — угол в квантовой механике [8, 9].

Генераторы группы движений псевдоевклидовой плоскости $M(1,1)$ (расстояние между точками $\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2$) — это инфинитезимальные операторы, отвечающие трансляциям и гиперболическим вращениям:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}} &= i\hat{p}_t = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{J}_{xt} = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}, \\ \hat{\Phi}_{\pm} &= \hat{p}_x \pm \hat{\mathcal{E}}, \quad \hat{\Phi}_+ \hat{\Phi}_- = \hat{p}_x^2 - \hat{\mathcal{E}}^2.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Можно ввести базис из собственных функций эрмитовых операторов $\hat{\mathcal{E}}$ и \hat{p} : $\hat{\mathcal{E}}|\mathcal{E}, p\rangle = \mathcal{E}|\mathcal{E}, p\rangle$, $\hat{p}|\mathcal{E}, p\rangle = p|\mathcal{E}, p\rangle$, \mathcal{E} и p — действительные,

$$\hat{\Phi}_+ \hat{\Phi}_- |\mathcal{E}, p\rangle = (p^2 - \mathcal{E}^2)|\mathcal{E}, p\rangle. \quad (2.12)$$

Унитарные представления характеризуются действительным числом $m_0^2 = \mathcal{E}^2 - p^2$, где m_0 — масса частицы. Теория представлений $M(1,1)$ [7], однако, сложнее, чем $M(2)$; в этом смысле $M(2)$ и $M(1,1)$ соотносятся друг с другом так же, как $SU(2)$ и $SU(1,1)$.

2.2. Группы $SU(2)$ и $SU(1,1)$ как единая система. В стандартной теории угловых моментов рассматриваются состояния с целыми и полуцелыми моментами $j \geq 0$. Базис НП $D(j)$ содержит $2j + 1$ вектор $|jm\rangle$, $-j \leq m \leq j$. Объединенная теория представлений групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ может быть наглядно интерпретирована как обобщение на произвольные действительные и комплексные моменты.

При построении НП $SU(2)$ и $SU(1,1)$ удобнее исходить не из (2.1), а из коммутационных соотношений для генераторов унитарных групп $U(2)$ и $U(1,1)$

$$\begin{aligned}[\hat{n}_1, \hat{n}_2] &= 0, \quad [\hat{n}_1, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hat{J}_{\pm}, \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= \hat{n}_1 - \hat{n}_2, \quad [\hat{n}_2, \hat{J}_{\pm}] = \mp \hat{J}_{\pm}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Эта алгебра распадается на две: $U(1)$ ($\hat{n}_1 - \hat{n}_2$ коммутирует со всеми остальными) и $SU(2)$ ($SU(1,1)$) ($\hat{J}_{\pm}, \hat{n}_1 - \hat{n}_2$). Оператор Казимира последней системы

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{4}(2\hat{J}_+ \hat{J}_- + 2\hat{J}_- \hat{J}_+ + (\hat{n}_1 - \hat{n}_2)^2). \quad (2.14)$$

Базис представлений задается как базис из собственных функций \hat{n}_1 и \hat{n}_2 :

$$\hat{n}_1|n_1 n_2\rangle = n_1|n_1 n_2\rangle, \quad \hat{n}_2|n_1 n_2\rangle = n_2|n_1 n_2\rangle. \quad (2.15)$$

В привычных обозначениях $n_1 + n_2 = 2j$, $n_1 - n_2 = 2m$. При построении унитарных НП можно воспользоваться как непосредственно коммутационными соотношениями (2.13) [10, 11], так и представлением генераторов через операторы \hat{a}_+ и \hat{a}_- группы Гейзенберга (при $\omega = 1$)

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{a}_{1\pm} \hat{a}_{2\mp}, \quad \hat{n}_1 = \hat{a}_{1+} \hat{a}_{1-}, \quad \hat{n}_2 = \hat{a}_{2+} \hat{a}_{2-} \quad (2.16)$$

и формулой (2.5):

$$\begin{aligned}\hat{J}_+ |n_1 n_2\rangle &= [n_1(n_2 + 1)]^{1/2} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle, \\ \hat{J}_- |n_1 n_2\rangle &= [n_2(n_1 + 1)]^{1/2} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Для унитарных НП SU(2) и SU(1,1) соответственно имеем $\hat{J}_2^+ = \hat{J}_z \Rightarrow n_1 - n_2$ — действительное, т.е. $\text{Im } n_1 = \text{Im } n_2$;

$$\text{SU}(2): \hat{J}_-^+ = \hat{J}_+ \Rightarrow n_1(n_2 + 1) \geq 0, \quad n_2(n_1 + 1) \geq 0, \quad (2.18)$$

$$\text{SU}(1,1): \hat{J}_-^+ = -\hat{J}_+ \Rightarrow n_1(n_2 + 1) \leq 0, \quad n_2(n_1 + 1) \leq 0. \quad (2.19)$$

На рис. 2, а дана плоскость всех допустимых вещественных частей n_1 и n_2 ; области унитарности для SU(2) (I) и SU(1,1) (II) определяются соотношениями (2.18) и (2.19). Поскольку для НП, как это следует из (2.17), $n_1 + n_2 = 2j$ сохраняется, то их веса лежат на прямых $n_1 + n_2 = \text{const}$, параллельных оси абсцисс. Для унитарности НП необходимо, чтобы веса на прямой (следующие через две единицы длины) не заходили в неунитарную область. С помощью операторов \hat{J}_\pm можно достигнуть произвольного веса данного НП, двигаясь от любого данного веса. Там, где численный множитель в (2.17) равен нулю, представление обрывается, достигается старший (младший) вес. Отметим, что на мнимую часть n_1 и n_2 операторы \hat{J}_\pm не действуют, т.е. весовая диаграмма представления в плоскости $\text{Im } n_1, \text{Im } n_2$ представляет собой точку.

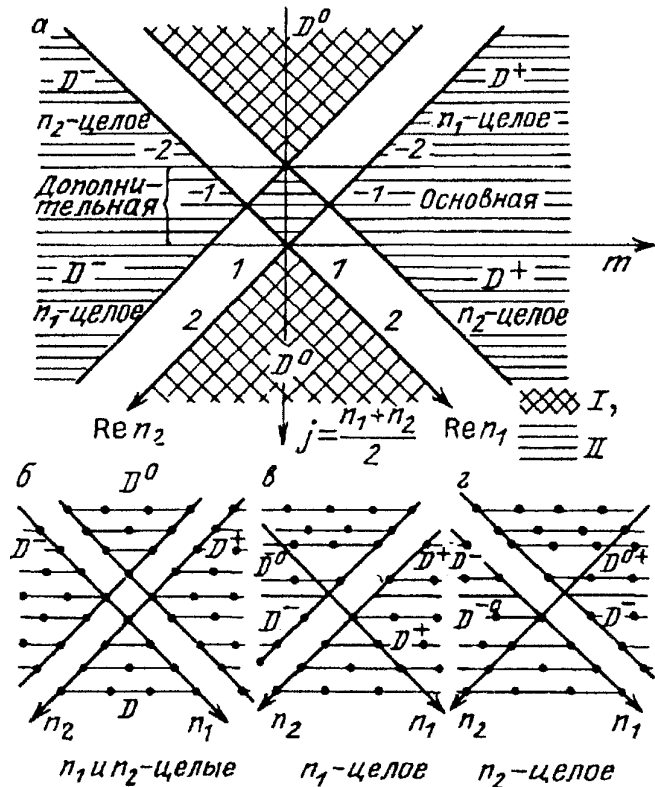


Рис. 2. Весовые диаграммы НП SU(2) и SU(1,1)

На основе (2.17) получаем следующую классификацию и весовой состав представлений алгебры (2.13):

1. n_1 и n_2 — целые. Представление $D(j)$ приводимо; оно распадается на три: $D^-(j)$ со старшим весом, конечномерное $D^0(j)$, $\dim D^0(j) = 2j + 1$, $D^+(j)$ с младшим весом (рис. 2, б).

2. n_1 (или n_2) — целое, $n_2(n_1)$ — не целое (соответственно рис. 2, в и г). Имеем два типа представлений со старшим (младшим) весом — $D^-(j)$ и $D^{0-}(j)$ ($D^+(j)$ и $D^{0+}(j)$), различающиеся весовым составом.

3. n_1 и n_2 — нецелые. Представление $D(j)$ является неприводимым и не имеет ни старшего, ни младшего веса.

Рассмотрим область унитарности группы $SU(2)$.

1. Пусть n_1 и n_2 — действительные числа. Тогда, чтобы выйти из области унитарности (см. рис. 2, а), необходимо, чтобы и старший, и младший веса были целыми. В этом случае представления конечномерны. Имеются две серии, симметрично расположенные относительно прямой $n_1 + n_2 = 2j = -1$. Для обеих собственные значения оператора $\hat{J}^2 = j(j+1)$ совпадают.

2. Пусть n_1 и n_2 имеют мнимую часть: $\text{Im } n_1 = \text{Im } n_2 \neq 0$. Тогда (2.18) не удовлетворяется. Эти представления неунитарны.

Рассмотрим унитарные представления $SU(1,1)$.

1. Пусть n_1 и n_2 — действительные числа. Легко заметить, что веса всех представлений $D^+(j)$ и $D^-(j)$, $-\infty < j < \infty$, находятся в области унитарности. Это так называемая дискретная серия унитарных представлений.

В диапазоне $-2 < 2j < 0$, наряду с дискретной, появляется дополнительная серия за счет того, что можно "перешагнуть" область неунитарности. Для характеристики представлений дополнительной серии нужно еще одно число E , задающее значение $2m = n_1 - n_2$, наиболее близкое к $m = 0$; $-1 + |2j + 1| \leq E \leq 1 - |2j + 1|$. Равенству в последнем соотношении отвечают представления $D^{0+}(j)$ и $D^{-0}(j)$ с младшим (старшим) весом, строгому неравенству — неприводимые $D(j)$.

2. Пусть n_1 и n_2 имеют мнимую часть; из (2.19) получим

$$\text{Re } n_1 + \text{Re } n_2 = -1, \quad \text{Im } n_1 = \text{Im } n_2.$$

Это представления так называемой основной серии

$$D\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{2}\right);$$

ρ — действительно, $-1 \leq E \leq 1$, представления

$$D\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{2}\right), \quad D\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\rho}{2}\right)$$

эквивалентны, $j^2 = (\rho^2 - 1)/4$.

При действительном j эквивалентны представления $D(j)$, лежащие симметрично относительно прямой $2j = -1$.

Таким образом, плоскость с осями j, m (см. рис. 2) дает весьма наглядную картину унитарных НП групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$. Четко видны и различные симметрии, включая зеркальную ($j \rightarrow -j - 1$), а также набор весов представлений. Если для компактной группы $SU(2)$ НП имеют конечное число базисных векторов (весов), в том числе старший и младший веса, то для некомпактной $SU(1,1)$ имеется 3 типа (серии) унитарных НП, содержащих бесконечное число базисных векторов, либо ограниченных с одной стороны старшим (младшим) весом (дискретная серия), либо неограниченных с обеих сторон (основная и дополнительная серии).

Построенные с помощью алгебры Ли абстрактные базисы допускают различные конкретные реализации в пространствах функций. Со многих точек зрения весьма удобным оказывается симметрический (полиномиальный) базис, тесно связанный с конечными преобразованиями (см. раздел 4) и инвариантами группы [11, 12].

Преобразования группы $SU(2)$ $T_{2j}(g)$ реализуются в пространстве полиномов степени $2j$ от z_1, z_2 :

$$\hat{T}_{2j}(g)f_{2j}(z_1, z_2) = f_{2j}(z'_1, z'_2), \quad z'_k = z_k(g) = g_k^j z_i; \quad (2.20)$$

z_1 и z_2 образуют базис двумерного фундаментального НП $D(1/2)$, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$; $\|g_k^j\|$ — унитарная матрица 2×2 . Симметрический базис НП $D(j)$ размерности $2j+1$

$$|n_1 n_2\rangle \sim \psi_{jm}(z) = \left[\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \right]^{1/2} u_1^{n_1} u_2^{n_2}, \quad n_1 = j + m, \quad n_2 = j - m; \quad (2.21)$$

n_1 и n_2 — целые неотрицательные. Для дискретной положительной серии $SU(1,1)$ НП $D^+(j)$ ($j < -1/2$) бесконечномерно,

$$|n_1 n_2\rangle \sim \psi_{jm}(z) = \left(\frac{\Gamma(-n_2)}{n_1! \Gamma(-n_1 - n_2)} \right)^{1/2} u_1^{n_1} u_2^{n_2}; \quad (2.22)$$

$n_1 \geq 0$, целое, $n_2 < -1$; при нецелых n_2 представление является многозначным. Действие конечных преобразований аналогично (2.21), но теперь $|u_1|^2 - |u_2|^2 = 1$, а $\|g_k^j\|$ — псевдоунитарная матрица. Базисы сопряженных НП получаются комплексным сопряжением базисов (2.21), (2.22). Генераторы $SU(2)$ и $SU(1,1)$

$$\hat{J}_+ = z_1 d/dz_2, \quad \hat{J}_- = z_2 d/dz_1, \quad \hat{J}_z = z_1 d/dz_1 - z_2 d/dz_2. \quad (2.23)$$

При фиксированном j возможна и реализация НП $D(j)$ и $D^+(j)$ в проективном пространстве $z = z_1/z_2$ [7, 13—15].

При фиксированном $\omega \neq 0$ операторы \hat{a}_+ и \hat{a}_- алгебры $W(1)$ могут быть реализованы в пространствах аналитических функций комплексной переменной z или действительной x

$$\hat{a}_- = \frac{d}{dz}, \quad \hat{a}_+ = \omega z, \quad \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega x + \frac{d}{dx}), \quad \hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega x - \frac{d}{dx}). \quad (2.24)$$

Действие унитарных операторов конечных преобразований $T_\omega(g)$ задается экспонентой (2.3);

$$\begin{aligned} \hat{T}_\omega(g)f(x) &= \exp \left[i\omega(\alpha_0 + \alpha_2 x) + \alpha_1 \frac{d}{dx} \right] f(x) = \\ &= \exp [i\omega(\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 x)] f(x + \alpha_1), \\ \hat{T}_\omega(g)f(z) &= \exp(i\alpha_0 \omega) \hat{D}(\alpha) f(z) = \exp[\omega(i\alpha_0 - |\alpha|^2 - \alpha z)] f(z - \alpha), \\ \alpha_1 &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \alpha, \quad \alpha_2 = \sqrt{2} \operatorname{Im} \alpha. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оператор $D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^+ - \bar{\alpha} \hat{a})$ называется оператором сдвига. Дискретные базисы в пространствах функций (H_n — полиномы Эрмита)

$$\begin{aligned}\psi_{\omega n}(z) &= (\omega^{1/2}z)^n/(n!)^{1/2}, \\ \psi_{\omega n}(x) &= H_n(\omega^{1/2}x) \exp(-\omega x^2/2)(\omega/\sqrt{\pi}2^n n!)^{1/2}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

У групп $W(1)$, $M(2)$, $M(1,1)$ есть также конечномерные неунитарные представления треугольными матрицами [7, 14]. Коммутационные соотношения могут быть реализованы не только дифференциальными операторами, но и матрицами 2×2 или 3×3 . Отметим, что теория неунитарных представлений достаточно сложна; например, совокупность векторов $(\omega^{1/2}z)^n$, n — целое, образует приводимое, но неразложимое представление алгебры $W(1)$: если от состояния с $n = 0$ нельзя перейти к $n = -1$ (действуя \hat{a}_- , получим нуль), то обратный переход возможен (см. рис. 1, б). Такая ситуация характерна и для других алгебр [17–20].

2.3. Ряды и коэффициенты КГ. Ряды КГ задают разложение прямого произведения двух НП на неприводимые. Для квантовомеханических систем знание рядов КГ дает информацию о возможных состояниях системы, возникающих при сложении подсистем. Приведем сначала два простых примера. Для группы $SU(2)$

$$D(j_1) \otimes D(j_2) = \sum_{\alpha=0}^{\min\{j_1, j_2\}} D(j_1 + j_2 - \alpha), \quad (2.27)$$

т.е. если подсистемы характеризуются угловыми моментами j_1 и j_2 , то система в целом может обладать моментом j , пробегающим значения от $|j_1 - j_2|$ до $j_1 + j_2$. Для группы $M(2)$ [7]

$$D(p_1) \otimes D(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} D(p) d\varphi, \quad (2.28)$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \varphi.$$

Соответственно абсолютная величина импульса p изменяется от $|p_1 - p_2|$ (противоположно направленные импульсы) до $p_1 + p_2$ (одинаково направленные импульсы).

Если ряды КГ показывают, какие состояния могут возникнуть при сложении подсистем, то коэффициенты КГ задают амплитуды вероятности обнаружить систему в заданном состоянии при известных состояниях подсистем. Наиболее изученным примером являются коэффициенты КГ группы $SU(2)$ $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle$; они определяются как коэффициенты переразложения базисов $D(j_1) \otimes D(j_2) \rightarrow D(j)$,

$$\begin{aligned}|jm\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \\ |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle &= \sum_{jm} \langle jm \| j_1 m_1 | j_2 m_2 \rangle |jm\rangle.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Их детальное описание можно найти во многих обзорах и монографиях, например, [2, 21—25]. С коэффициентами КГ тесно связан коэффициент Вигнера $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | j_3 m_3 \| 00 \rangle$, задающий разложение инварианта по произведению базисов трех НП.

Коэффициенты КГ группы $M(2)$ определяются формулами

$$|p_1 m_1 \rangle |p_2 m_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \langle p m \| p_2 m_2 | p_1 m_1 \rangle |p m \rangle d\varphi, \quad (2.30)$$

$$|p m \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle p_1 m_1 | p_2 m_2 \| p m \rangle |p_1 m_1 \rangle |p_2 m_2 \rangle.$$

Их явный вид фактически содержится в [7] (соотношения (2.30) рассматриваются там как формулы умножения и сложения для функций Бесселя); $\langle p_1 m_1 | p_2 m_2 \| p m \rangle = \exp[i(m_1 \varphi - m\beta)] / 2\pi$, $\exp(i\beta) = [p_1 + p_2 \exp(i\varphi)] / p$ при $m = m_1 + m_2$ и равны нулю при $m \neq m_1 + m_2$. Интеграл по φ может быть заменен на интеграл по p от $|p_1 - p_2|$ до $p_1 + p_2$, при этом $d\varphi$ согласно (2.28) заменяется на $2p dp [4p_1^2 p_2^2 - (p^2 - p_1^2 - p_2^2)^2]^{-1/2}$; множитель в знаменателе есть учетверенная площадь треугольника со сторонами p_1, p_2, p .

При построении НП групп выше были использованы алгебры Ли этих групп, т.е. инфинитезимальный подход. Для построения рядов и коэффициентов КГ удобно использовать инварианты группы, а именно так называемый метод производящих инвариантов. Этот метод применялся Ван-дер-Варденом для группы $SU(2)$ (см. также [25]) и был затем развит в [11, 12, 26] для случая полупростых (как компактных, так и некомпактных) групп Ли.

Метод производящих инвариантов основан на разложении функций от инвариантов группы по полиномиальным базисам НП типа (2.21), (2.22), (2.26). Рассмотрим сначала случай групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$, инвариантами которых являются свертка и детерминант

$$(u, \bar{v}) \equiv u_1 \bar{v}_1 \pm u_2 \bar{v}_2, \quad (u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1. \quad (2.31)$$

Разлагая инвариант $SU(2)$ $(u, v)^{2j}$ по базису (2.21):

$$\rho(u, v)^{2j} = \sum_m (-1)^m \psi_{jm} \psi_{jm},$$

получаем коэффициент КГ $\langle jm | jm \| 00 \rangle = (-1)^m \rho$, где нормировочный множитель $\rho = (\dim D(j))^{-1/2} = (2j+1)^{-1/2}$. Производящий инвариант $\langle j_1 u | j_2 v \| j w \rangle$ для произведения двух НП группы $SU(2)$ ($SU(1,1)$) имеет вид

$$\rho(M_1, M_2, \alpha) (uw)^\alpha (u\bar{w})^{M_1 - \alpha} (v\bar{w})^{M_2 - \alpha}; \quad (2.32)$$

$M_1 = 2j_1$, $M_2 = 2j_2$, $\alpha = 2j_1 + 2j_2 - 2j$. Разлагая (2.32), получаем с точностью до коэффициента выражение для произвольного слагаемого

$$u_1^{n_1 + \alpha'} u_2^{M_1 - \alpha - n_1 + \alpha''} v_1^{n'_1 + \alpha''} v_2^{M_2 - \alpha - n'_1 + \alpha'} \bar{w}_1^{M_1 + M_2 - 2\alpha - n_1 - n'_1} \bar{w}_2^{n_1 + n'_1}, \quad (2.33)$$

($\alpha' + \alpha'' = \alpha$), т.е. полином по u степени M_1 , по v — степени M_2 , по \bar{w} — степени $M_1 + M_2 - 2\alpha$. Таким образом, производящему инварианту (2.32) отвечает переход $D(M_1/2) \otimes D(M_2/2) \rightarrow D[(M_1 + M_2 - 2\alpha)/2]$.

Для компактных групп базисные векторы содержат переменные u, v, w только в неотрицательных целых степенях, а значит, возможны только целые положительные степени инвариантов; отсюда получаем ряд (2.27) для конечномерных НП $D(j)$ группы $SU(2)$. В случае унитарных НП некомпактных групп степени могут быть, вообще говоря, произвольными комплексными числами; в частности, для дискретных серий $SU(1,1)$ одна из степеней отрицательна и возникает необходимость использования отрицательных нецелых степеней инвариантов [10, 11].

Для произведения $D^+(M_1/2) \otimes D^+(M_2/2)$, сопоставляя произведение базисов $(u_1^{n_1} u_2^{M_1-n_1})(v_1^{n'_1} v_2^{M_2-n'_1})$ с выражением (2.33), находим, что α должно быть целым и неотрицательным (иначе в (2.33) появится u_1 или v_1 в отрицательной степени), отсюда следует выражение для ряда КГ [11, 14]

$$D^+(j_1) \otimes D^+(j_2) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} D^+(j_1 + j_2 - \alpha). \quad (2.34)$$

Аналогично получим при $j_1 + j_2 < -1/2$

$$D^+(j_1) \otimes D^0(j_2) = \sum_{\alpha=0}^{2j_2} D^+(j_1 + j_2 - \alpha). \quad (2.35)$$

Произведение $D^+(j_1) \otimes D^-(j_2)$ будет разлагаться в прямой интеграл НП, так как ограничений целочисленности на α не возникает.

Коэффициенты КГ получаются как коэффициенты перед нормированным произведением базисных функций $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \bar{\psi}_{j m}$ в разложении производящего инварианта (2.32). Для дискретной положительной серии D^+ группы $SU(1,1)$ они оказываются равными коэффициентам $SU(2)$ с точностью до замены параметров [27, 28]:

$$\begin{aligned} \langle j_1^+ m_1 | j_2^+ m_2 \| j^+ m \rangle_{SU(1,1)} &= (-1)^{j_2 + m_2} \times \\ &\times \left\langle \begin{matrix} (m - j_1 + j_2 - 1)/2 \\ (m_1 - m_2 - j_1 - j_2 - 1)/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (m + j_1 - j_2 - 1)/2 \\ (m_2 - m_1 - j_1 - j_2 - 1)/2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -j - 1 \\ -j_1 - j_2 - 1 \end{matrix} \right\rangle; \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$j < 0, \quad m = -j, -j+1, -j+2, \dots$$

Так как α в (2.34) пробегает бесконечное число значений, то в одном из условий нормировки конечная сумма заменяется на бесконечную (ср. с (2.29)):

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{\infty} |\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j_1 + j_2 - \alpha, m \rangle|^2 &= 1, \\ \sum_{m_1 + m_2 = m} |\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Заметим, что для целых и полуцелых j_1, j_2, j параметры коэффициента КГ $SU(2)$ в (2.36) также являются целыми и полуцелыми.

Произведение НП $D(\omega_1) \otimes D(\omega_2)$ группы Гейзенберга при $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ кратно НП $D(\omega_1 + \omega_2)$ (с бесконечной кратностью); при $\omega_1 + \omega_2 = 0$ получим представление, распадающееся на одномерные НП [14].

Как это ни странно, теория коэффициентов КГ группы $W(1)$ (т.е. квантовая теория сложения осцилляторов) практически не разработана, в то время как аналогичной теории для $SU(2)$ посвящены не только главы в учебниках квантовой механики, но и специальные монографии. Чтобы хотя бы частично восполнить этот пробел, обратимся к рассмотрению инварианта группы $W(1)$. Он может быть найден как перекрытие КС (подробнее см. раздел 4):

$$\langle \omega u | \omega v \rangle = \exp(-\omega J), \quad J = -i\bar{u}v + (|u|^2/2) + (|v|^2/2). \quad (2.37')$$

Действительная часть инварианта представляет собой расстояние между точками комплексной (фазовой) плоскости, $2 \operatorname{Re} J = |u - v|^2$ (этот инвариант аналогичен инварианту группы движений плоскости $M(2)$), мнимая — удвоенная площадь S_Δ треугольника с вершинами в начале координат и в точках v и u , $\operatorname{Im} J = 2S_\Delta$ (рис. 3).

Производящий инвариант $\langle \omega_1 u | \omega_2 v | \omega_1 + \omega_2 w \rangle$ имеет вид

$$\exp\{\omega_1 [u\bar{w} - (|u|^2/2) - (|w|^2/2)]\} \times \exp\{\omega_2 [v\bar{w} - (|v|^2/2) - (|w|^2/2)]\}. \quad (2.38)$$

Разлагая экспоненты в ряд по степеням u, v, \bar{w} и выделяя затем базисы (2.26), получим коэффициент КГ частного вида

$$\langle \omega n_1 | \omega n_2 | \omega_1 + \omega_2, n_1 + n_2 \rangle = \left[\frac{\omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}}{(\omega_1 + \omega_2)^n} \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \right]^{1/2}, \quad (2.39)$$

$$\sum_{n_1+n_2=n} |\langle \omega_1 n_1 | \omega_2 n_2 | \omega_1 + \omega_2, n \rangle|^2 = 1,$$

$$|\omega_1 + \omega_2, n \rangle = \sum_{n_1+n_2=n} \langle \omega_1 n_1 | \omega_2 n_2 | \omega_1 + \omega_2, n \rangle |\omega_1 n_1 \rangle |\omega_2 n_2 \rangle. \quad (2.40)$$

Подставляя вместо $|\omega n \rangle$ базисы (2.26) $\psi_{\omega n}(x)$, получим формулу перерасложения полиномов Эрмита по произведениям этих же полиномов:

$$\frac{H_n((\omega_1 + \omega_2)x)}{(n!)^{1/2}} = \sum_{n_1+n_2=n} \left[\frac{\omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} n!}{(\omega_1 + \omega_2)^n n_1! n_2!} \right]^{1/2} \frac{H_{n_1}(\omega_1 x)}{(n_1!)^{1/2}} \frac{H_{n_2}(\omega_2 x)}{(n_2!)^{1/2}}. \quad (2.41)$$

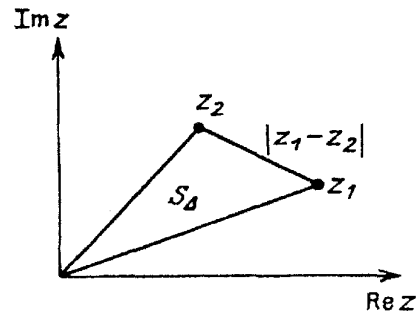


Рис. 3. Инварианты группы Гейзенберга: расстояние $|z_1 - z_2|$, площадь треугольника S_Δ

Коэффициенты КГ общего вида задают пересвязку базисов НП $D(\omega) |\omega_1 x_1 n_1\rangle, |\omega_2 x_2 n_2\rangle, |\omega_1 + \omega_2 x_3 n_3\rangle$, где $|\omega x_i n\rangle$ отвечает состоянию $|\omega n\rangle$, сдвинутому из начала координат в точку x_i .

Коэффициенты КГ рассматриваемых групп задают физические характеристики, возникающие при сложении подсистем. Они могут также применяться к задачам рассеяния и распада. Теория представлений этих групп характеризуется целым набором симметрии, которые находят приложение в различных физических проблемах.

Прежде всего отметим симметрии, сохраняющие коммутационные соотношения. Для группы Гейзенберга $W(1)$ существуют канонические преобразования

$$\hat{a}' = u\hat{a} + v\hat{a}^+, (\hat{a}^+)' = \bar{v}\hat{a} + \bar{u}\hat{a}^+, |u|^2 - |v|^2 = 1. \quad (2.42)$$

Эти преобразования принадлежат группе $SU(1,1)$ — группе автоморфизмов алгебры $W(1)$. Для полупростых групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ преобразования, сохраняющие коммутационные соотношения, принадлежат соответственно $SU(2)$ и $SU(1,1)$.

Большой интерес представляет симметрия между операторами и функциями. В группе Гейзенберга это симметрия между функциями от $\hat{a} = d/dz$ и $\hat{a}^+ = z$; последние согласно (2.42) преобразуются по представлению $D(1/2)$ группы $SU(1,1)$. Операторы $\hat{a}_1^+ = z_1$ и $\hat{a}_2^+ = z_2$ можно рассматривать как базис НП $D(1/2)$ группы $SU(2)$; тогда $\hat{a}_1 = d/dz_1$ и $\hat{a}_2 = d/dz_2$ образуют базис сопряженного НП. Подобно тому как из z_1 и z_2 строится симметрический базис (2.21), можно строить операторный базис любого представления $D(j)$ $SU(2)$ или $SU(1,1)$. В частности, генераторы (2.23), преобразующиеся по присоединенному НП $D(1)$, строятся из z и d/dz с помощью коэффициентов КГ, отвечающих $D(1/2) \otimes D(1/2) \rightarrow (1)$. Отметим, что набор операторов $\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+, \hat{a}_3^+$ можно рассматривать как базис НП $D(10)$ $SU(3)$, а $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ — как базис $D(01)$; генераторы же $SU(3)$ — как аналог (2.23), с помощью коэффициентов КГ, отвечающих $D(10) \otimes D(01) \rightarrow D(11)$.

В модели Дике [29, 30] совокупность двухуровневых систем описывается представлением $(D(1/2))^n$, которое разлагается на НП $D(j)$, где j — кооперативное число, отражающее когерентные свойства совокупности (например, излучающих молекул). Аналогичное построение можно выполнить для операторов \hat{a} и \hat{a}^+ или \hat{a}_1 и \hat{a}_2 , поскольку их можно рассматривать как компоненты спина.

Произвольный оператор группы выражается через суммы произведений генераторов, и, в принципе, можно рассматривать любые их функции — псевдодифференциальные операторы. Существует симметрия между псевдодифференциальными и обычными функциями. Она находит отражение в топологии в понятиях цепи и коцепи [31].

Вопросы, связанные с симметрией коэффициентов КГ, включая симметрию Редже, с их интерпретацией и приложениями рассмотрены в разделах 5 и 6.

2.4. Оптика как поле групповых исследований. Развитие теории фундаментальных групп происходило в неразрывной связи с физической проблематикой и прежде всего с оптикой. На раннем этапе исходным пунктом была сферическая симметрия атомов. НП группы $SU(2)$ и теория угловых моментов широко использовались при анализе атомных спектров [32—34]. Со временем оказалось, что групповые свойства возникают не только из-за симметрии излучающего объекта, но и внутренне присущи оптике. Происходил постепенный перевод на групповой язык проблем когерентности, интерференции, дифракции, поляризации, формирования изображения, распространения излучения в среде, взаимодействия световых пучков. Основой развития группового подхода стали алгебраические, матричные методы, затронувшие, начиная с [35], большинство разделов современной оптики [36—38].

Характерный пример — распространения излучения. Уравнение для параксиального луча имеет вид [38, 39]

$$\begin{vmatrix} y_2 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ V_1 \end{vmatrix}, \quad (2.43)$$

где y — высота над оптической осью, $V = n \sin \vartheta$ (n — показатель преломления, ϑ — угол между осью и лучом); при малых углах $V = n\vartheta$. Определитель матрицы $AD - BC = 1$. Каждому элементу оптической системы можно поставить в соответствие свою унимодулярную матрицу, а система в целом описывается произведением матриц элементарных перемещений, преломлений, отражений. Преобразования (2.43) с унимодулярной матрицей соответствует группа $SL(2, R)$, изоморфная $SU(1,1)$. При отсутствии аксиальной симметрии, когда положение луча задается двумя координатами и двумя соответствующими углами, необходимо рассматривать метаплектическую группу $Sp(4, R)$ [40].

Волновые свойства излучения в параксиальной оптике учитываются на основе теории гауссовых пучков. Гауссов пучок описывает когерентное излучение с дифракционной расходимостью. Его энергия сконцентрирована в приосевой области и быстро спадает на периферии в соответствии с функцией Гаусса.

Вследствие дифракции гауссов пучок в свободном пространстве расширяется с медленным изменением радиуса пятна w и радиуса кривизны поверхности постоянной фазы волны R . Эти два параметра объединяются в комплексный параметр кривизны

$$q = \frac{1}{R} + \frac{i\lambda}{\pi w^2}$$

(λ — длина волны), для которого выполняется соотношение

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (2.44)$$

— аналог соотношения, возникающего для действительного параметра кривизны $1/R = y/V$ из (2.43). Дробно-линейное преобразование (2.44), задающее параметры гауссова пучка после прохождения им оптической системы, носит название правила $ABCD$ [41]. Оно используется в лазерной физике для расчета резонаторов. Отметим, что при многократном прохождении луча между зеркалами он в конечном счете становится гауссовым.

Общий анализ групповых структур в параксиальной оптике, включая метаплектические группы и их связь с группой Пуанкаре, дан в [42]. Рассматриваются и непараксиальные пучки, в частности дана групповая трактовка аббераций [43]. Представления группы $SU(1,1)$ и ее обобщений описывают передачу изображений, процессы распознавания образов.

Второй характерный пример — поляризационные свойства света. Они описываются матрицей когерентности [36]

$$G(\tau) = \left\| \begin{array}{cc} \langle E_x^*(t)E_x(t+\tau) \rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t+\tau) \rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t+\tau) \rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t+\tau) \rangle \end{array} \right\|, \quad (2.45)$$

через которую выражается любая измеримая поляризационная величина согласно соотношению $F = \text{Sp}(\hat{F}G)$. Спектральная матрица с элементами

$$\mathcal{R}_{ik}(\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{ik}(\tau) \exp(i2\pi\nu\tau) d\tau \quad (2.46)$$

может быть разложена по матрицам Паули:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 s_i \sigma_i,$$

где спектральные параметры Стокса

$$s_i = \text{Sp}(\sigma_i \mathcal{R}) \quad (2.47)$$

задают интенсивность волны s_0 и спектральные поляризационные состояния (s_1, s_2, s_3) . Они удовлетворяют условиям

$$4 \det \mathcal{R} = s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 \geq 0,$$

$$\text{Sp} \mathcal{R} = s_0 > 0.$$

Преобразования параметров Стокса (2.47) относятся к группе $SL(2, C)$, а при $s_0 = \text{const}$ — к группе $SU(2)$. Описание поляризационных свойств квазимонохроматических, но не плоских волн связано с группой $SU(3)$ [44, 45], а суперпозиции n световых пучков — с группой $SU(n)$ [46].

Изменение поляризационных состояний при постоянной интенсивности волны s_0 можно трактовать как движение изображений точки по сфере Пуанкаре с радиусом $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$. В работах [47] использовалась методика вращательных блужданий для исследования статистических свойств светового луча и вычисления функции распределения цугов по состояниям поляризации. Подобно блужданию по инвариантному многообразию группы $SU(2)$ — сфере

Пуанкаре в проблеме распространения излучения флуктуационные изменения параметров A, B, C, D можно представить как блуждание по гиперboloиду.

Третий пример связан с эффектами корреляции излучателей в задачах формирования излучения. В модели Дике кооперативные, коллективные состояния системы двухуровневых молекул описываются представлениями группы $SU(2)$. Кооперативное число (сигнатура представления) остается неизменным при радиационных переходах. Конкретные коллективные эффекты в рамках модели Дике рассмотрены в [30, 48]. Система неэквидистантных n -уровневых молекул — объект группы $SU(n)$ [49, 50].

Квантовое описание поля тесно связано с группой Гейзенберга. В основе квантовой электродинамики лежит представление свободного электромагнитного поля как набора бесконечного числа гармонических осцилляторов. Напряженности электрического и магнитного полей рассматриваются как операторы в пространстве состояний, которые описывают поле и выражаются через операторы \hat{a} и \hat{a}^+ . Состояния $|n\rangle$ с точно определенным числом фотонов являются собственными векторами оператора числа фотонов $n = \hat{a}^+ \hat{a}$ и образуют ортонормированную систему, для которой выполняются условия полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}.$$

С квантовой точки зрения вся информация о статистике системы содержится в матрице плотности ρ , которая может быть разложена по этим состояниям:

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \rho(n, m) |n\rangle\langle m|, \quad (2.48)$$

причем чистые состояния описываются матрицей $\rho = |n\rangle\langle n|$. Поскольку $|n\rangle$ преобразуется по представлению группы $W(1)$, то матрица ρ — по представлению группы $W(1) \times W(1)$. В разных физических условиях для $\rho(n)$ возникают различные статистические, вероятностные распределения [36, 51, 52].

Для хаотического (гауссова) излучения, характеризующегося максимальным значением энтропии $S = -\text{Pr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$, справедливо распределение Бозе—Эйнштейна

$$\rho(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{1+n}}. \quad (2.49)$$

В этом случае отличны от нуля только диагональные элементы матрицы плотности.

Для идеального когерентного излучения распределение фотоотсчетов дается распределением Пуассона

$$\rho(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \exp(-\langle n \rangle). \quad (2.50)$$

Здесь групповые проблемы переплетаются со статистическими.

Новые возможности в исследовании статистических свойств излучения открылись благодаря развитию техники детектирования фотонов и измерению корреляционных функций, берущих свое начало с известных работ Хэнбери-Брауна и Твисса [53]. Были исследованы функции распределения фотоотсчетов в разных режимах [36, 54].

Представление чисел заполнения (состояния с определенным числом фотонов $|n\rangle$) не дает информации о фазе поля. Однако при анализе когерентности знание фазы необходимо. В работах Глаубера [55] была сформулирована квантовая теория оптической когерентности в форме, близкой к классическому описанию. В ее основе лежит представление КС, в котором базисные векторы $|z\rangle$ соответствуют суперпозиции $|n\rangle$ и зависят от комплексной величины z , с которой связаны амплитуда и фаза поля:

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (2.51)$$

Поле в состоянии $|z\rangle$ удовлетворяет условию полной когерентности. С групповой точки зрения (2.51) — переход к новому базису, а значит, квантовая оптика, наряду с $|n\rangle$ -представлением, может быть последовательно сформулирована в представлении КС.

В тесной связи с развитием теории КС находится предсказание и экспериментальное наблюдение нового феномена — сжатых состояний света [56—58].

Исследования КС, начатые в оптике, дали мощный толчок в развитии групповых исследований, в том числе теории коэффициентов КГ, а также в выявлении теснейших взаимосвязей вероятностного и группового подхода. Важно и другое. Параллельно и взаимозависимо с групповыми методами в оптике быстро развиваются методы обработки информации [59, 60]. В рамках оптических систем весьма просто и естественно реализуются операции преобразования Фурье, свертки, преобразований Гильберта, Лапласа, Меллина и др. Число таких операций растет, и намечается тенденция реализации групповых операций оптическим путем, образно говоря, создание экспериментальной базы в теории групп.

В целом, идущие в настоящее время процессы создания единого группового подхода, включающего в себя совокупность простейших групп Ли, перевода на групповой язык обширного круга физических проблем, переплетения вероятностных и групповых аспектов, ставят вопрос об их источнике, другими словами, об основах квантовой теории.

3. Дискретные обобщения (конечные разности, квантовые алгебры)

3.1. Дискретные исчисления. Конечные разности. Естественным обобщением алгебр Ли (2.1), в которых $f(\hat{H}) = 2\hat{H}$, $0, \hat{I}$, служат деформированные алгебры с произвольной функцией $f(\hat{H})$. Не являясь, вообще говоря, алгебрами Ли, они сохраняют многие специфические черты алгебр

(2.1). Ниже, однако, вопрос ставится несколько шире с точки зрения возможностей дискретных обобщений теории.

В [2] рассматривалась принципиальная сторона взаимосвязи теории коэффициентов КГ с исчислением конечных разностей, обусловленная тем, что объекты теории угловых моментов (коэффициенты КГ, Рак^j , j - и m -символы) являются функциями дискретных переменных и к ним можно, например, применять операции разностного дифференцирования и интегрирования. За истекшие 20 лет это направление получило дальнейшее развитие.

Кроме того, сформировалось новое направление — квантовые алгебры, которые, начиная с середины 80-х годов, привлекли значительное внимание. Они первоначально возникли в работах по методам обратной задачи рассеяния, в статистической физике и квантовой теории поля [61—65]. Операторы квантовой алгебры $su_q(2)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{E}_{\pm}] &= \pm \hat{E}_{\pm}, \\ [\hat{E}_+, \hat{E}_-] &= \text{sh}(h\hat{H})/\text{sh}(h/2) = (q^{\hat{H}} - q^{-\hat{H}})/(q^{1/2} - q^{-1/2}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Согласно первой паре коммутационных соотношений \hat{E}_{\pm} по-прежнему являются повышающими и понижающими операторами в базисе собственных функций \hat{H} . Если $q = \exp h$, то при $h \rightarrow 0$ получаются обычные перестановочные отношения алгебры Ли и группы $SU(2)$. В связи с этим свойством и были введены термины "квантовые алгебры" и "квантовые группы". Конечно, первоначально это был не более чем жаргон. Но подобно понятиям странности и очарования, ничего общего не имеющим с их обычным смыслом, эта терминология вошла в литературу. Хотя, по существу, здесь речь идет о частном случае деформированных алгебр (спроизвольным $f(\hat{H})$).

Было выяснено, что с квантовыми алгебрами связано так называемое q -исчисление, представляющее собой конечноразностное исчисление, но не на равномерной, а на экспоненциальной сетке. Соответственно, если элементы алгебр Ли (2.1) — дифференциальные операторы, то элементы квантовой алгебры (3.1) — конечноразностные дифференциальные операторы. В q -исчислении удивительным образом соседствуют результаты стопятидесятилетней давности [66—68] и полученные в самое последнее время [69]. Новый всплеск интереса к q -исчислению кладет также начало систематическому исследованию исчислений на неравномерных сетках, для которых появляются специфические понятия числа, свой разностные функции, правила дифференцирования.

Рассмотрим сначала соотношения, применимые для любой конечноразностной сетки. На сетке определяются три оператора конечноразностного дифференцирования

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^+ f(x) &= \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \quad \hat{D}_x^0 f(x) = \frac{f(x_{n+1/2}) - f(x_{n-1/2})}{x_{n+1/2} - x_{n-1/2}}, \\ \hat{D}_x^- f(x) &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При шаге $h_n = x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ имеем $\hat{D}_x^{(k)} \rightarrow d/dx$. Конечноразностный интеграл

$$\int_{x_k}^{x_l} f(x) d_{\text{к.р.}} x = \sum_{n=k}^l f(x_n). \quad (3.3)$$

Для производных могут быть установлены аналоги формулы Лейбница, в которой возникает сдвиг аргумента, и формулы дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^0(f_1(x)f_2(x)) &= f_1(x_{n+1/2})\hat{D}_x^0 f_2(x) + f_2(x_{n-1/2})\hat{D}_x^0 f_1(x) = \\ &= f_1(x_{n-1/2})\hat{D}_x^0 f_2(x) + f_2(x_{n+1/2})\hat{D}_x^0 f_1(x), \\ \hat{D}_x^{(k)} f(\varphi(x)) &= \hat{D}_\varphi^{(k)} f(\varphi) \hat{D}_x^{(k)} f(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где \hat{D}_φ — производная на сетке $\varphi_k = \varphi(x_k)$; в пределе $h \rightarrow 0$ имеем обычные формулы непрерывного анализа.

На сетке определяются конечноразностные функции: правая (сдвинутый факториал) и левая (или просто разностная, иначе называемая обобщенной или символической) разностные степени $(x)_n$ и $x^{(n)}$:

$$(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} x_{k+1}, \quad x_l^{(n)} = \prod_{k=-1}^{-n} x_{k+1}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} (x)_n = \lim_{h \rightarrow 0} x^{(n)} = x^n, \quad (3.5)$$

$$(a+x)^{(n)} = a^n (1 + xa^{-1})^{(n)}.$$

Для равномерной сетки $x_k = a + kh$, $x^{(n)} = (x - nh)_n$

$$(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x + kh) = h^n \Gamma\left(\frac{x}{h} + n\right) / \Gamma\left(\frac{x}{h}\right), \quad (3.6)$$

$$x^{(n)} = \prod_{k=1}^n (x - kh) = h^n \Gamma\left(\frac{x}{h} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{x}{h} - n + 1\right).$$

При целом x и $h = 1$ $(x)_n = (x + n - 1)! / (n - 1)!$, $x^{(n)} = x! / (x - n)!$ Для экспоненциальной сетки $x_k = aq^k$, $h_k = aq^k(q - 1) = x_k(q - 1)$ обычно рассматриваются функции

$$\begin{aligned} (x, q)_n &\equiv (1 - x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - xq^k), \\ (1 - x)^{(n)} &= \prod_{k=-1}^{-n} (1 - xq^k) = (q^{-n}x, q)_n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\sum x_n$ представляют собой в указанных выше случаях суммы арифметической прогрессии с шагом h или геометрической со знаменателем q .

Перейдем к рассмотрению конечноразностного исчисления на равномерной сетке [70—73]. Здесь мы имеем дело с обычными числами x , показательной функцией a^x и разностной степенью $x^{(n)}$:

$$(a+x)^{(n)} = \sum_k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{(k)} a^{(n-k)}, \quad a^{(m+k)} = a^{(m)}(a-m)^{(k)}; \quad (3.8)$$

$x^{(n)}$ при натуральном n задается полиномом Бернулли, коэффициенты в полиноме при x^m называют числами Стирлинга 1-го рода, а при обратном разложении — числами Стирлинга 2-го рода. Их конкретные выражения приведены в [73]. Для разностной производной

$$\hat{D}_x^+ = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.9)$$

часто пользуются упрощенным оператором Δ_x с $h=1$, s -я степень которого задается соотношением

$$\Delta_x^s f(x) = \sum_{k=0}^s (-1)^{s+k} \frac{s!}{k!(s-k)!} f(x+s). \quad (3.10)$$

Приведем характерные примеры разностного дифференцирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} \Delta_x x^{(n)} &= n x^{(n-1)}, & \Delta_x^s x^{(n)} &= n^{(s)} x^{(n-s)}, \\ \int_0^x t^{(n)} d_h t &= \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}, & \Delta_x^s a^x &= (a-1)^s a^x. \end{aligned}$$

Имеется значительная степень соответствия между непрерывным и дискретным анализом. В ряде случаев достаточно использовать формальную замену

$$x^k \leftrightarrow x^{(k)}, \quad (d/dx)^s \leftrightarrow \Delta_x^s.$$

Полного изоморфизма, однако, нет. Так, изменяется формула дифференцирования произведения, а правило умножения для разностных степеней имеет иную структуру, чем для обычных.

Решением конечноразностного уравнения второго порядка гипергеометрического типа является функция [74, 75]

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| h, x \right) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta, x \\ \gamma, \delta \end{matrix} ; 1 \right) = \sum \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (x)_n}{(\gamma)_n (\delta)_n n!}, \quad (3.11)$$

представляющая собой ряд по степеням $x^{(n)}$, где

$$\delta = \frac{1}{h} + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

При $h \rightarrow 0$ это уравнение переходит в гипергеометрическое, и

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| h, \frac{x}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right). \quad (3.12)$$

Соотношение (3.11) объясняет появление гипергеометрических функций ${}_mF_n$ единичного аргумента в дискретном анализе. Обобщенные степени могут быть использованы для удобной записи обобщенных гипергеометрических функций

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} (a_i)_p \\ (b_i)_q \end{matrix} ; x \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \prod_{i=1}^p (a_i - 1 + n)^{(n)} \prod_{j=1}^q \frac{1}{(b_j + 1 + n)^{(n)}} \frac{z^n}{n!}.$$

Эти функции с аргументом $z = \pm 1$ являются стандартным объектом исчисления конечных разностей. В работе [73] была показана их принципиальная роль в процессе разностного дифференцирования. Оператор Δ_x^s был применен к обобщенным степеням и показательной функции, и получена большая совокупность соотношений типа:

$$\begin{aligned}\Delta_x^s(a-x)^{(\alpha)} &= (-1)^s(a-x)^{(\alpha)} {}_2F_1\left(\frac{x+\alpha-a}{x-a}, s; 1\right), \\ \Delta_x^s[(a+x)^{(\alpha)}]^{-1} &= (-1)^s[(a+x)^{(\alpha)}]^{-1} {}_2F_1\left(\frac{a+x-\alpha}{a+x+1}, s; 1\right), \\ \Delta_x^s(b+x)^{(a+x)} &= (-1)^s(b+x)^{(a+x)} {}_2F_0(b+x+1, -s; 1), \\ \Delta_x^s[(a+x)^{(b+2x)}] &= (-1)^s(a+x)^{(b+2x)} {}_3F_0(b-x-a, a+x+1, -s; -1).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Во всех соотношениях результат действия разностного дифференциального оператора Δ_x^s на соответствующую функцию сводится к ее умножению на некоторую обобщенную гипергеометрическую функцию с аргументом $x = \pm 1$. В [73] приведены также правила дифференцирования более сложных функций. Определение ${}_pF_q$ из формул типа (3.13) неоднозначно. Например, для функции ${}_3F_2$ можно указать три эквивалентных выражения

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(\frac{a+x+1}{x-b}, \frac{x-b+\beta}{a+x-\alpha+1}, -s; 1\right) &= \\ &= [(a-x)^{(\alpha)}(b-x)^{(\beta)}]^{-1}(-1)^s\Delta_x^s[(a+x)^{(\alpha)}(b-x)^{(\beta)}], \\ {}_3F_2\left(\frac{x-b}{x-b-\beta}, \frac{a+x-\alpha+1}{a+x+1}, -s; 1\right) &= \\ &= (a+x)^{(\alpha)}(b-x)^{(\beta)}(-1)^s\Delta_x^s[(a+x)^{(\alpha)}(b-x)^{(\beta)}], \\ {}_3F_2\left(\frac{a+x+1}{a+x+1-\alpha}, \frac{b+x-\beta+1}{b+x+1}, -s; 1\right) &= (-1)^s\frac{(b+x)^{(\beta)}}{(a+x)^{(\alpha)}}\Delta_x^s\frac{(a+x)^{(\alpha)}}{(b+x)^{\beta}}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Переход между этими выражениями осуществляется с использованием формул типа (3.8). Через ${}_mF_n$ — функции с аргументом $x = 1$ — выражается ряд основных величин теории угловых моментов: через ${}_3F_2$ — коэффициент КГ (с точностью до нормировочного множителя совпадающий с (3.14)), через ${}_4F_3$ — коэффициент Рака. Конкретное представление нормированного коэффициента КГ $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 || jm \rangle$ в виде выражения типа (3.14) приведено в [2,76]. Нетрудно показать, что при соединении коэффициентов КГ множители перед оператором разностного дифференцирования сокращаются и все операции в теории угловых моментов выражаются через Δ_x^s и произведения обобщенных степеней.

То, что коэффициенты КГ и их соединения можно рассматривать как частный объект исчисления конечных разностей, — это только одна сторона их взаимосвязи. Другая связана с построением последовательной теории угловых моментов в рамках дискретного пространства — времени. Ряд аспектов этой проблемы рассматривался в [77], где построены разностные уравнения для дискретных сферических функций, а также аналоги уравнений Шрёдингера,

Клейна—Гордона, Дирака. Помимо исчисления конечных разностей имеются и другие возможности построения дискретных топологий, в частности диадическая [77, 78] и p -адическая [79] системы координат. Конкретно методика использования групповых методов и построения теории угловых моментов в рамках нестандартных исчислений рассмотрена ниже на примере q -исчисления.

3.2. q -исчисление. За последние годы по различным аспектам теории квантовых алгебр (q -исчислению) идет быстро нарастающий поток работ (см., например, [80—84]). Современное изложение теории алгебр $su_q(2)$ и $su_q(1,1)$ можно найти в [85]. Кратко рассмотрим узловые моменты q -исчисления, связанные с q -аналогами числа, степени, экспоненты, а также с разностным дифференцированием и разложением функций.

Конечноразностные операторы на экспоненциальной сетке согласно (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^+ f(x) &= \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad \hat{D}_x^- f(x) = \frac{f(x) - f(xq^{-1})}{(1-q^{-1})x}, \\ \hat{D}_x^0 f(x) &= \frac{f(q^{1/2}x) - f(q^{-1/2}x)}{(q^{1/2} - q^{-1/2})x},\end{aligned}\quad (3.15)$$

или в более наглядной форме

$$\hat{D}_x^+ f(x) = \frac{f(x + \alpha x) - f(x)}{\alpha x}, \quad \alpha = q - 1. \quad (3.16)$$

Видно сходство с обычной конечноразностной производной (3.8). Однако там добавка к x была независимой, здесь же пропорциональна x . При деформации $\alpha \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$), как и при $h \rightarrow 0$ в (3.9), $\hat{D}_x^{(k)} \rightarrow d/dx$ ($k = +, 0, -$). Оператор интегрирования в q -исчислении имеет вид (3.3), где $x_n = aq^n$; в частности,

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x) d_q x &= \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) f(x_n), \quad 0 < q < 1, \\ \int_a^{\infty} f(x) d_q x &= \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) f(x_n), \quad q > 1.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Подействуем конечноразностными q -дифференциальными операторами на степенную функцию:

$$\hat{D}_x^+ x^n = [n]_+ x^{n-1}, \quad \hat{D}_x^- x^n = [n]_- x^{n-1}, \quad \hat{D}_x^0 x^n = [n] x^{n-1}. \quad (3.18)$$

Появляющаяся здесь величина $[n]$ является аналогом числа в q -исчислении:

$$[n] = q^{-(n-1)/2} [n]_+ = q^{(n-1)/2} [n]_- = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} q^{k/2}. \quad (3.19)$$

$[n]$ инвариантно относительно замены $q \rightarrow q^{-1}$. В пределе $q \rightarrow 1$ q -числа переходят в обычные. Отметим следующие свойства чисел $[m]$:

$$[m \pm n] = q^{\pm \frac{n}{2}} [m] \pm q^{\mp \frac{m}{2}} [n] = q^{\mp \frac{n}{2}} [m] \pm q^{\frac{m}{2}} [n], \quad (3.20)$$

$$[n][n' + n''] - [n + n''] [n'] = [n - n''] [n'], \quad [0] = [1] = 1.$$

Закон сложения q - чисел (полиномов типа (3.19)) следует из требования, чтобы сумма их приводила к полиномам того же типа, учитывая, что (3.20) симметрично относительно замены $n \rightleftharpoons m$, ее можно переписать в виде ($q = \exp h$)

$$[m + n] = (\operatorname{ch} \frac{nh}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{mh}{2} + \operatorname{ch} \frac{mh}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{nh}{2}) / \operatorname{sh} \frac{h}{2}.$$

Заметим, что эта формула соответствует сложению 4-скоростей в специальной теории относительности, а сама 4-скорость измеряется в "элементарной" $\operatorname{sh}(h/2)$, т.е. имеет место своего рода квантование пространства Лобачевского. При этом все соотношения q -алгебры могут быть реализованы на орисферах пространства Лобачевского, представляющих собой параболическое сечение гиперболоида, параллельное световому конусу.

Для q -чисел определяется понятие факториала:

$$[m]! = [1][2][3] \dots [m],$$

$$[n]_+! = (q, q)_n (1 - q)^{-n} = [n]! q^{\frac{n(n-1)}{2}} = [n]_-! q^{n(n-1)}. \quad (3.21)$$

(q -аналоги экспоненциальной функции:

$$e_q^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{(k)}!}, \quad \hat{D}_x^{(k)} e_q^{(k)}(ax) = a e_q^{(k)}(ax), \quad k = +, 0, -. \quad (3.22)$$

При $q \rightarrow 1$ $e_q^{(k)}(x) \rightarrow e^x$; переход между $e_q^{(k)}(x)$ задается формулами типа

$$\hat{D}^- e_q^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xq^{-1/2})^n}{q^{n^2/2} [n]!} = e_q^+(xq^{-1}).$$

q -аналог формулы Тейлора [85]

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^{(n)}}{[n]_+!} \hat{D}_x^{+n} f(x) \Big|_{x=a},$$

где \hat{D}_x^{+n} — n -я разностная производная, $(x-a)^{(n)}$ — разностная обобщенная степень (3.7). Важную роль в приложениях играет q -биномиальная теорема

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, q)_n}{(q, q)_n} x^n = \frac{(ax, q)_{\infty}}{(x, q)_{\infty}}, \quad (3.23)$$

приписываемая различным ученым; по-видимому, впервые она появилась в работе Роте в 1811 г. Применяя ее к ряду (3.22), получим $e_q^+(x/(1-q)) = 1/(x, q)_\infty$.

Разложение степени квазибинома получаем, используя (3.6), (3.7); в него войдет q -аналог биномиального коэффициента:

$$\begin{aligned} (b-x)^{(n)} &= b^n \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(n)} = \sum_{n_1=0}^n \frac{(q^{-n}, q)_{n_1}}{(q, q)_{n_1}} x^{n_1} b^{n-n_1} = \\ &= \sum_{n_1=0}^k \frac{[n]!}{[n_1]! [n-n_1]!} (-1)^{n_1} q^{-n_1(n_1+1)/2} x^{n_1} b^{n-n_1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Имеются и другие далеко идущие аналоги с обычной теорией. Отличия возникают из-за появления в ряде соотношений, в частности в (3.24), дополнительных множителей, зависящих от деформации q .

Фундаментальную роль играет q -аналог обобщенных гипергеометрических функций

$${}_n\Phi_m \left(\begin{matrix} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_m \end{matrix} \middle| q, x \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_1, q)_r \dots (a_n, q)_r}{(b_1, q)_r \dots (b_m, q)_r} \frac{x^r}{(q, q)_r}, \quad (3.25)$$

в котором вместо обычных факториалов используются факториалы q -исчисления. Функция ${}_2\Phi_1$ была введена в 1847 г. Гейне; она удовлетворяет конечноразностному уравнению второго порядка [66]. Аналогично случаю равномерной сетки (3.12) имеем

$${}_2\Phi_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| q, (q-1)x \right) \xrightarrow{q \rightarrow 1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right).$$

Для q -аналогов в основном сохраняются известные формулы теории обычных гипергеометрических функций, например интегральные представления

$${}_2\Phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q, x \right) = \frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(a)\Gamma_q(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-qu)^{c-a-1} (1-q^b xu)^{(-b)} d_q u,$$

где $\Gamma_q(n) = [n-1]_+!$ — аналог Γ -функции. Подробнее функции на экспоненциальной решетке, в частности q -полиномы, рассмотрены в разделе 7.

В целом q -исчисление носит замкнутый и последовательный характер. Отметим, что с помощью равенства

$$(a, q)_n = (a, q)_\infty / (aq^n, q)_\infty$$

или аналога интегрального представления Γ -функции теория может быть распространена на произвольные комплексные n .

3.3. Теория угловых моментов в q -исчислении. На основе q -исчисления можно последовательно строить q -деформированную теорию угловых моментов. (Использование для нее термина "квантовая теория углового момента" могло бы привести к путанице, поскольку под этим понимается обычная теория.)

Рассмотрим сначала q -операторы рождения и уничтожения $\hat{a}_q = \hat{D}_z^0$, $\hat{a}_q^+ = z$, действующие в пространстве функций $f(z)$ комплексной переменной z :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_q, \hat{a}_q^+] &= \hat{D}_z^0 z - z \hat{D}_z^0 = \hat{T}_z, \\ [\hat{a}_q^+, \hat{N}] &= \hat{a}_q^+, \quad [\hat{a}_q, \hat{N}] = -\hat{a}_q, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\hat{N} = z d/dz$ — оператор числа частиц. Принципиально новый момент — появление в коммутационных соотношениях оператора сдвига \hat{T}_z , $\hat{T}_z f(z) = f(q^{1/2}z)$; оно связано с конечноразностной природой \hat{a}_q , а именно с присутствием в формуле разностного дифференцирования произведения (3.4) сдвига аргумента:

$$\begin{aligned} \hat{D}_z^0(f_1(z)f_2(z)) &= f_1(q^{1/2}z)\hat{D}_z^0 f_2(z) + f_2(q^{-1/2}z)\hat{D}_z^0 f_1(z) = \\ &= f_1(q^{-1/2}z)\hat{D}_z^0 f_2(z) + f_2(q^{1/2}z)\hat{D}_z^0 f_1(z). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Выбрав в качестве базиса в пространстве функций (ср. с (2.26))

$$|n\rangle_q = z^n / [n]!, \quad (3.28)$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{a}_q^+ |n\rangle_q &= [n+1]^{1/2} |n+1\rangle_q, \quad \hat{N} |n\rangle_q = n |n\rangle_q, \quad \hat{T}_z |z\rangle = q^{n/2} |n\rangle, \\ \hat{a}_q |n\rangle_q &= [n]^{1/2} |n-1\rangle_q, \quad \hat{a}_q \hat{a}_q^+ |n\rangle = z \hat{D}_z^0 |n\rangle_q = [n] |n\rangle_q. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Аналогом когерентных состояний служит q -экспонента (3.22)

$$|u\rangle_q = e_q^0(uz), \quad \hat{D}_z^0 |u\rangle_q = u |u\rangle_q, \quad \hat{T} |u\rangle_q = |q^{1/2}u\rangle_q. \quad (3.30)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ $\hat{a}_q^+ \rightarrow \hat{a}^+$, $\hat{a}_q \rightarrow \hat{a}$, $\hat{T}_z \rightarrow 1$ и все формулы (3.28) — (3.30) переходят в обычные для группы $W(1)$.

Для рассмотрения $su_q(2)$ запишем операторы и базис НП $D(j)$ в виде, аналогичном (2.23), (2.21):

$$\hat{E}_q^+ = z_1 \hat{D}_{z_2}^0, \quad \hat{E}_q^- = z_2 \hat{D}_{z_1}^0, \quad 2\hat{H} = z_1 \frac{d}{dz_1} - z_2 \frac{d}{dz_2}, \quad (3.31)$$

$$|jm\rangle_q = \left(\frac{[2j]!}{[j+m]![j-m]!} \right)^{1/2} z_1^{j+m} z_2^{j-m}. \quad (3.32)$$

Пространство представления $D(j)$ в этой реализации есть пространство полиномов степени $2j$ от z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} \hat{E}_q^\pm |jm\rangle_q &= ([j \mp m][j \pm m + 1])^{1/2} |j, m \pm 1\rangle_q, \\ \hat{H} |jm\rangle_q &= m |jm\rangle_q. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Нетрудно проверить выполнение коммутационных соотношений (3.1); при $q \rightarrow 1$ имеем обычную теорию углового момента. Оператор Казимира $su_q(2)$ [86] таков:

$$\begin{aligned}\hat{C}_2 &= \hat{E}_q^- \hat{E}_q^+ + \left[\hat{H} + \frac{1}{2} \right]^2 = \hat{E}_q^+ \hat{E}_q^- + \left[\hat{H} - \frac{1}{2} \right]^2, \\ \hat{C}_2 |jm\rangle &= \left[j + \frac{1}{2} \right]^2 |jm\rangle, \quad \hat{C}_2 \xrightarrow{q \rightarrow 1} j(j+1) + \frac{1}{4}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

q -аналог коэффициента КГ определяется стандартным путем:

$$|j_1 j_2 jm\rangle_q = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle_q |j_1 m_1\rangle_q |j_2 m_2\rangle_q. \quad (3.35)$$

Однако задача о сложении моментов для $su_q(2)$ имеет свою специфику. Необходимо установить правило действия \hat{E}_q^\pm в базисе $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$. Как и в случае формулы дифференцирования произведения (3.27), конечноразностная природа операторов \hat{E}_q^\pm приводит к усложнению картины; вместо обычного тензорного произведения НП вводится копроизведение [80, 85]

$$\begin{aligned}\hat{E}_{(1,2)}^\pm &= \hat{E}_{(1)}^\pm \otimes q^{\frac{\hat{H}}{2}(2)} + q^{-\frac{\hat{H}}{2}(1)} \otimes \hat{E}_{(2)}^\pm, \\ \hat{H}_{(1,2)} &= \hat{H}_{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{H}_{(2)}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

В обычной теории $\hat{E}_{(12)}^\pm = \hat{E}_{(1)}^\pm \otimes 1 + 1 \otimes \hat{E}_{(2)}^\pm$, но для $su_q(2)$ такой оператор, в отличие от (3.36), не удовлетворяет коммутационным соотношениям (3.1). Формулы (3.36) можно получить, действуя операторами разностного дифференцирования (3.31) на произведение функций $f_1(z) \otimes f_2(z) = f_1(q^{-1/4} \cdot z) \times f_2(q^{1/4} \cdot z)$.

Поддействовав $\hat{E}_{(12)}^\pm$ на (3.35), выпишем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}([j \mp m][j \pm m + 1])^{1/2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle_q &= \\ &= q^{\frac{m_2}{2}} ([j_1 \mp m_1][j_1 \pm m_1 + 1])^{1/2} \times \\ &\times \langle j_1 m_1 \pm 1 | j_2 m_2 \| jm \pm 1 \rangle_q + \\ &+ q^{-\frac{m_1}{2}} ([j_2 \mp m_2][j_2 \pm m_2 + 1])^{1/2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \pm 1 \| jm \pm 1 \rangle_q,\end{aligned}\quad (3.37)$$

с помощью которых можно найти коэффициенты КГ. В частности,

$$\langle jm | j - m \| 00 \rangle_q = (-1)^{j-m} q^{\frac{m}{2}} / [2j + 1]^{1/2}. \quad (3.38)$$

Выше рассмотрена теория представлений алгебры $su_q(2)$; групповой аспект в настоящее время не является до конца ясным. Коэффициенты КГ использовались для установления q -аналога матриц конечных преобразований $su_q(2)$, обладающих весьма необычными свойствами [80, 85]. Здесь мы используем явный вид коэффициентов (3.38) и состояний $|jm\rangle$ (3.32) для нахождения инвариантов $su_q(2)$. Согласно (3.35)

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right. \right\| 00 \rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right. \right\| 00 \rangle \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = |00\rangle = \text{inv}, \end{aligned}$$

и, обозначив базисные функции НП $D_{(1)}(1/2)$ и $D_{(2)}(1/2)$ z_1, z_2 и u_1, u_2 , получим q -деформированный аналог детерминанта (2.31):

$$z_1 u_2 q^{1/4} - u_1 z_2 q^{-1/4} = \text{inv}, \quad (3.39)$$

который наряду со сверткой $z_1 \bar{u}_1 + z_2 \bar{u}_2$ является инвариантом $su_q(2)$. Обратим внимание, что симметрия $u \leftrightarrow z$ носит комбинированный характер: необходимо также заменить q на q^{-1} .

Ряды и коэффициенты КГ могут быть получены не только с помощью рекуррентных соотношений, но и методом производящих инвариантов; при этом надо использовать обобщенные (разностные) степени и формулы типа (3.24). Аналогом перекрытия КС (см. раздел 4) служит обобщенная степень инварианта (свертки), рассматриваемые же выше базисные функции (3.28), (3.32) есть перекрытия КС и состояний дискретного базиса: $\langle z | n \rangle, \langle jz_1 z_2 | jm \rangle$.

Конкретному построению q -аналогов посвящено значительное число работ [80, 82, 85, 87]. Были получены q -аналоги коэффициентов КГ, Ракá, $6j$ -символов и ряда других объектов теории угловых моментов, исследованы их свойства (симметрия, ортогональность, рекуррентные формулы, асимптотика). Значение коэффициента КГ в форме Ван-дер-Вардена дается формулой [88]

$$\begin{aligned} & \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle_q = \\ & = \Delta(j_1, j_2, j) q^A ([j_1 + m_1]! [j_1 - m_1]! [j_2 + m_2]! [j_2 - m_2]! \times \\ & \times [j + m]! [j - m]! [2j + 1])^{1/2} \times \\ & \times \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} q^{B(\alpha)} ([\alpha]! [j_1 - j_2 - j - \alpha]! \times \\ & \times [j_1 - m_1 - \alpha]! [j_2 + m_2 - \alpha]! \times \\ & \times [j_1 - j_2 + m_1 - \alpha]! [j - j_1 - m_2 + \alpha]!)^{-1}; \end{aligned} \quad (3.40)$$

суммирование по α проводится так, чтобы ни один из факториалов не имел отрицательного аргумента; здесь

$$\begin{aligned} \Delta(abc) &= ([-a + b + c]! \times \\ & \times [a - b + c]! [a + b - c]! / [a + b + c + 1]!)^{1/2}, \\ A &= \{j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) - j(j + 1) + 2(j_1 j_2 + j_1 m_2 - j_2 m_1)\} / 4, \\ B(\alpha) &= -\alpha(j_1 + j_2 + j + 1) / 2. \end{aligned}$$

Формулы с точностью до замены обычных чисел на q -числа $[a]$ и появления дополнительных множителей типа q^A совпадают со стандартными формулами группы $SU(2)$. Это характерно и для теории угловых моментов в q -исчислении в целом. Полное совпадение с обычной теорией (с учетом замены $a \rightarrow [a]$) имеет место для формул ортогональности (5.11) и $6j$ -символов:

$$\left\{ \begin{matrix} abc \\ def \end{matrix} \right\} = \Delta(abe)\Delta(acf)\Delta(cde)\Delta(dbf) \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} [\alpha + 1]! \times \\ \times ([\alpha - a - b - e]! [\alpha - a - c - f]! [\alpha - b - d - f]! [\alpha - d - c - e]! \times \\ \times [a + b + c + d - \alpha]! [a + d + e + f - \alpha]! [b + c + e + f - \alpha]!)^{-1}. \quad (3.41)$$

Как и ряд других величин теории угловых моментов, в q -исчислении $6j$ -символ инвариантен к замене $q \rightarrow q^{-1}$ (ср. (3.1)). Для коэффициента КГ симметрия к этой замене носит комбинированный характер:

$$\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle_q = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_2 m_2 | j_1 m_1 \| j m \rangle_{q^{-1}} \quad (3.42)$$

Для q -аналогов $6j$ -символов выполняются все обычные 144 симметрии, включая симметрию Редже. Но в соединениях $6j$ -символов снова возникают множители типа q^A , и инвариантность к замене $q \leftrightarrow q^{-1}$ теряется. Это, например, относится к $9j$ -символу, представленному в виде суммы произведений трех $6j$ -символов [85].

В q -теории угловых моментов сохраняются и формулы связи коэффициентов КГ и $6j$ -символов с q -аналогами обобщенных гипергеометрических функций. Для коэффициента КГ имеем [85]

$$\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle_q = \\ = (-1)^{j_1 - m_1} q^B \frac{\Delta(j_1 j_2 j) [j + j_2 - m_1]!}{[j_1 - j_2 + j]! [j + j_2 - j_1]!} \times \\ \times \left(\frac{[j_1 + m_1]! [j_2 - m_2]! [j + m]! [2j + 1]}{[j_1 - m_1]! [j_2 + m_2]! [j - m]! [j_2 - j + m_1]!} \right)^{1/2} \times \\ \times {}_3\Phi_2 \left(\begin{matrix} m_1 - j_1, j_1 + m_1 + 1, m - j \\ m_1 - j + j_2 + 1, m_1 - j - j_2 \end{matrix} \middle| q, q \right), \quad (3.43)$$

где

$$B = \frac{1}{4} [j_2(j_2 + 1) - j_1(j_1 + 1) - j(j + 1) + 2m_1(m + 1)].$$

Запись q -аналога $6j$ -символа через ${}_4\Phi_3$ полностью совпадает с обычной (см. (5.24) в [2]) при учете замены чисел $a \rightarrow [a]$. Таким образом, в рамках q -исчисления в основном сохраняется структура теории угловых моментов.

Новый момент здесь — появление калибровочного преобразования (q -калибровки). Как было показано выше, существует два равноправных варианта формул для сложения q -чисел, дифференцирования произведения, копроизведения, инварианта, соответственно (3.20), (3.27), (3.36), (3.39), получающихся заменой $q \leftrightarrow q^{-1}$. Из этих двух вариантов можно составить линейную комбинацию. Например, формулу сложения q -чисел (3.20) можно записать в виде

$$[m + n] = (\beta q^{\frac{n}{2}} + (1 - \beta) q^{-\frac{n}{2}}) [m] + (\beta q^{-\frac{m}{2}} + (1 - \beta) q^{\frac{m}{2}}) [n], \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Калибровочное преобразование определяется параметром β . Не меняются при преобразованиях операции дифференцирования, сложения q -чисел, коэффициенты Рака. Коэффициент КГ зависит от калибровки. Он определяется выбо-

ром множителя в копроизведении (3.36) и все расчеты для него нужно вести при одном выбранном параметре β .

Среди физических приложений q -исчисления обсуждаются такие области, как квантовая теория поля [64], уравнение Янга — Бакстера [65], конформная теория поля [89], точно решаемые проблемы статистической физики [61, 62], феноменологические модели для ядерных и молекулярных вращательных термов [90]. В нарастающем потоке работ методологического плана обобщается на q -исчисление все, что возможно, вплоть до исключительных q -алгебр [91]. Классификация НП q -деформированных алгебр мало отличается от обычной. Так, например, для $su_q(1,1)$ также имеются дискретная, основная и дополнительная серии, но наряду с ними появляется "странная" серия унитарных НП [85]. Большой интерес представляет также связь q -функций с эллиптическими и тэта-функциями, не удовлетворяющими обычным дифференциальным уравнениям. Эта связь отмечалась еще Гейне [66]. Конкретные формулы приведены в гл. 4 и 11 книги [92]. Отметим также связь q -исчисления с теорией разбиений [93].

Квантовая алгебра (3.1) является частным случаем деформированных алгебр с $f(\hat{H})$ в (2.1), задаваемых степенным рядом; можно, например, положить $f(\hat{H}) = \sin(h\hat{H})/\sin(h/2)$, т.е. считать h в (3.1) чисто мнимым. Наряду с квантовыми к деформированным алгебрам относятся и так называемые W -алгебры и алгебры Казимира [94—97]; возможности их применения в квантовой оптике обсуждаются в [94]. К алгебрам Казимира относится, например, алгебра $su^{(n)}(1,1)$:

$$\hat{E}_+ = (\hat{a}^+)^n = z^n, \quad \hat{E}_- = (\hat{a})^n = \frac{d^n}{dz^n}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{a}^+ \hat{a}}{n} = \frac{z}{n} \frac{d}{dz}, \quad (3.44)$$

$$[\hat{H}, \hat{E}_\pm] = \pm \hat{E}_\pm, \quad [\hat{E}_-, \hat{E}_+] = (n(\hat{H} + 1))^{(n+1)} - (n\hat{H})^{(n)},$$

так как ее оператор Казимира $\hat{C}_2 = (n\hat{H})^{(n)} - \hat{E}_+ \hat{E}_-$ является деформацией оператора Казимира $SU(1,1)$ (здесь (n) — обобщенная разностная степень (3.8)). Операторы этой алгебры являются функциями генераторов $W(1)$, а именно — дифференциальными операторами n -го порядка. Конечноразностные производные на равномерной и экспоненциальной сетках

$$\hat{D}_z^+ f(z) = \frac{\exp(hd/dz) - 1}{h} f(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

$$\hat{D}_z^0 = \frac{\text{sh}[(h/2)d/dz]}{h/2}, \quad (3.45)$$

$$\hat{D}_z^+ f(z) = \frac{\exp(hzd/dz) - 1}{(\exp h - 1)z} f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z},$$

$$\hat{D}_z^0 = \frac{\text{sh}[(hz/2)d/dz]}{2 \text{sh}(h/2)},$$

$q = e^h$, также являются функциями от d/dz , т.е. псевдодифференциальными операторами.

Таким образом, в отличие от теории алгебр Ли, где генераторы могут быть представлены дифференциальными операторами не выше первого порядка, в теории деформированных алгебр мы имеем дело с псевдодифференциальными операторами. Псевдодифференциальные операторы могут быть представлены интегральными; ядро при этом называется символом оператора. Наряду со степенной и экспоненциальной функциями от d/dx могут рассматриваться и другие, например, $\delta(d/dx)$. С помощью обычного представления δ -функции как интеграла от $\exp(ikx)$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint f(z) d^2 z. \quad (3.46)$$

Рассмотрение физических систем с гамильтонианами, составленными из операторов q -алгебр, означает рассмотрение систем, описываемых дифференциальными уравнениями бесконечного порядка. Именно с помощью уравнений такого типа и теории представлений алгебр Каца — Муди возможно описание некоторых проблем квантовой теории поля. И в этом смысле результаты, изложенные выше, могут послужить мостом к обобщению существующей теории (см. также раздел 6).

4. Когерентные состояния. Переход к классическому пределу

4.1. КС и соотношения неопределенностей. Значительным событием в развитии теоретико-группового подхода в физике стало использование, наряду с дискретными, непрерывных базисов НП. Исходным пунктом явились исследования в оптике, связанные с созданием когерентных источников (лазеров), и новый метод детектирования излучения [53, 98, 99]. Они поставили в повестку дня переход от представления электромагнитного поля как определенного набора квантовых состояний с точно определенным числом фотонов к рассмотрению состояний с заданной фазой (а значит, с неопределенным числом фотонов). В 1963 г. Глаубер [55] показал возможность описания когерентных явлений с помощью введенных Шрёдингером [100] состояний, описывающих нерасплывающиеся волновые пакеты для квантовых осцилляторов. Он подробно исследовал такие состояния и назвал их когерентными. В 60-е годы КС стали предметом тщательного анализа и использовались в целом ряде физических приложений (см. книги Клаудера и Сударшана [51], Малкина и Манько [101], сборник статей [102]).

Среди ряда замечательных свойств КС можно выделить два определяющих. Во-первых, КС $|z\rangle$ — это функции непрерывной переменной — комплексного числа z , а не набор собственных векторов диагональных операторов алгебры Ли. Они представляют собой полную, хотя и не ортогональную систему, по которой может быть разложен любой вектор. Эта система становится ортогональной лишь в классическом пределе. Во-вторых, КС имеют минимальную

неопределенность, и их можно трактовать как квантовые состояния, максимально близкие к классическим. С помощью КС осуществляется адекватный переход к классическому пределу, при этом большая совокупность квантовых формул переходит в классические.

Введенные Шрёдингером и Глаубером КС оказались тесно связанными с группой Гейзенберга. КС для группы $SU(2)$ были построены Радклиффом [103]. В 1972 г. Переломов [104] предложил определение обобщенных КС как состояний, возникающих при действии оператора представления на какой-либо фиксированный вектор $|z_0\rangle$ в пространстве этого представления. Обычные КС отвечают выбору в качестве $|z_0\rangle$ вакуумного вектора $|0\rangle$. Для произвольной группы G обобщенные КС $|z_g\rangle$ представления $T(g)$ ($g \in G$) определяются соотношением

$$|z_g\rangle = T(g)|z_0\rangle. \quad (4.1)$$

Другими словами, система обобщенных КС — это орбита элемента $|z_0\rangle$ гильбертова пространства, в котором действует представление $T(g)$. Для каждого НП имеется набор таких орбит, и свойства системы обобщенных КС зависят от выбора z_0 [13]. Определение (4.1) означает, что обобщенные КС $|z\rangle$ переходят при конечных преобразованиях в $|z'\rangle$, а не в их суперпозицию, в отличие от состояний ортогонального базиса. Так, для группы $SU(2)$ состояние с $j = m = 1/2$ перейдет при повороте в суперпозицию состояний с $m = \pm 1/2$. В этом одно из главных отличий базиса КС, порождаемого конечными преобразованиями группы, от инфинитезимального (дискретного) базиса, порождаемого генераторами алгебры Ли.

Для данного состояния $|z_0\rangle$ может быть найдена стационарная подгруппа $H = \{h\}$, т.е. множество элементов группы G , под действием которых изменяются только фаза или числовой множитель. Для компактной стационарной подгруппы

$$T(h)|z_0\rangle = \exp(i\alpha(h))|z_0\rangle, \quad (4.2)$$

для некомпактной возникает множитель $\exp(\alpha(h))$. Обобщенные КС, связанные с $|z_0\rangle$, параметризуются точками фактор-пространства G/H , размерность которого равна разности числа параметров G и H . Они могут рассматриваться как точки на поверхности, определяемой инвариантами группы.

Для построения КС как квантовых состояний, максимально близких к классическим, необходимо выделить из различных систем обобщенных КС (орбит) состояния, обладающие минимальной неопределенностью. Первоначально критерием служили выбор в качестве $|z_0\rangle$ старшего веса НП или выделение состояний с максимальной стационарной подалгеброй [104, 105]. Но эти подходы не универсальны. Первый из них непригоден уже в случае представлений основной и дополнительной серий $SU(1,1)$, не ограниченных, вообще говоря, старшим весом, а второй, примененный к группе $W(1)$, дает не только КС, но и другие системы обобщенных КС (сжатые состояния). Поэтому целесообразно непосредственно использовать соотношения неопределенностей. Су-

существует два типа таких соотношений, связывающих между собой среднеквадратичные отклонения ΔT_a , $(\Delta T_a)^2 = \langle \hat{T}_a^2 \rangle - \langle \hat{T}_a \rangle^2$, где \hat{T}_a — генераторы группы G .

К первому типу (подробно рассмотренному в обзоре [106]) относятся соотношения, в которые входят произведения неопределенностей различных величин, например,

$$W(1): \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2, \quad (4.3)$$

$$SU(2): \Delta J_x \cdot \Delta J_y \geq |\langle \hat{J}_z \rangle| \hbar/2. \quad (4.4)$$

Эти соотношения, однако, непригодны для определений КС соответствующих групп, поскольку среди состояний, их минимизирующих, могут встречаться состояния, обладающие сколь угодно большими неопределенностями. Так, в (4.3) равенство может достигаться при $\Delta x \rightarrow \infty$ и $\Delta p \rightarrow 0$, а (4.4) превращается в тождество во всех состояниях с определенной проекцией момента J_x вне зависимости от величин ΔJ_y и ΔJ_z . Кроме того, (4.4), как и аналогичные соотношения для других полупростых групп, неинвариантны относительно конечных преобразований $T(g)$ группы. Множество же КС, определяемое как частный случай системы обобщенных КС, согласно (4.1) инвариантно относительно конечных преобразований $T(g)$.

Последовательное определение КС возможно на основе соотношений, в которые входит сумма квадратов неопределенностей,

$$W(1): \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \geq 1, \quad x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}, \quad x_0 p_0 = \hbar, \quad (4.5)$$

$$SU(2): (\Delta J)^2 = (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 \geq j\hbar^2. \quad (4.6)$$

Развитие этого подхода связано с работами Дельбурга [14, 15], получившего соотношения типа (4.6) для компактных полупростых групп, и Гитмана и А. Шелепина [15, 109], рассмотревших (4.5) для группы Гейзенберга и аналогичные соотношения для $SU(N,1)$ и $SU(N)$. Заметим, что (4.5) можно представить в виде

$$\langle \hat{a}^+ a \rangle - \langle \hat{a}^+ \rangle \langle a \rangle \geq 0. \quad (4.7)$$

Равенство достигается в том и только в том случае, если состояния, по которым производится усреднение, — глауберовские КС (собственные для оператора \hat{a}).

В соотношения (4.5), (4.6) входит инвариантная дисперсия, неизменяющаяся при действии конечных преобразований группы на состояния, по которым проводится усреднение. Инвариантны и сами соотношения. Мера неопределенности типа (4.6) для компактных полупростых групп можно представить в общем виде [15, 108]:

$$\Delta C_2 = g^{ab} (\langle \hat{T}_a \hat{T}_b \rangle - \langle \hat{T}_a \rangle \langle \hat{T}_b \rangle) \geq 0, \quad (4.8)$$

где $C_2 = g_{ab} \hat{T}_a \hat{T}_b$ — квадратичный оператор Казимира, \hat{T}_a — генераторы, g^{ab} — метрический тензор Картана—Киллинга. Для некомпактных групп характеристикой неопределенности также служит ΔC_2 , задаваемый (4.8). Однако в

этом случае, поскольку ΔC_2 может быть отрицательным, при определении КС следует исходить из соотношения $|\Delta C_2| = \min$. Так, для НП дискретных серий SU(1.1)

$$\Delta C_2 = (\Delta J)^2 = \langle J^2 \rangle - \langle J \rangle^2 = j(j+1) - m^2 \leq j < -1/2.$$

Нетрудно убедиться, что ΔC_2 представляет собой инвариантную дисперсию. Если, например, от базиса Картана—Вейля инфинитезимальной алгебры $\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}$ перейти к новому набору эрмитовых и антиэрмитовых операторов \hat{T}_a , состоящему из $\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha + i\hat{E}_{-\alpha}, \hat{E}_\alpha - i\hat{E}_{-\alpha}$ с определенными коэффициентами, то при надлежащем их подборе $\Delta C_2 = (\Delta T)^2$, а

$$(\Delta T)^2 = \sum_{a=1}^R (\Delta T_a)^2 = \sum_{a=1}^R (\langle \hat{T}_a^2 \rangle - \langle \hat{T}_a \rangle^2), \quad (4.9)$$

где R — размерность алгебры Ли группы G .

Таким образом, во всех рассмотренных случаях (компактные и некомпактные полупростые группы, нильпотентная группа Гейзенберга) инвариантное соотношение, определяющее КС, можно представить в форме

$$|(\Delta T)^2| = \min \quad (4.10)$$

с дисперсией $(\Delta T)^2$, задаваемой (4.9). Полнота соответствующих систем КС следует из инвариантности (4.10) относительно конечных преобразований группы. Как видно, данный подход к определению КС носит общий характер, а использование конечных преобразований и инвариантной формулировки соотношений неопределенностей создает необходимые предпосылки для конкретного построения базиса КС и анализа перехода квантовой теории к классическому пределу.

4.2. КС как базис НП. Как известно, строгая и логическая последовательная формулировка квантовой механики, впервые предложенная фон Нейманом [1], использовала представление наблюдаемых и динамических величин как операторов в гильбертовом пространстве. Конкретный анализ КС как квантовых состояний и рассмотрение основных типов базисов НП (включая инфинитезимальный, симметрический, КС) с единой точки зрения тесно связаны со свойствами гильбертова пространства. Кратко остановимся на них.

Для векторов (и сопряженных векторов) гильбертова пространства удобно принять обозначения Дирака $|\psi\rangle$ и $\langle\psi|$. Произведению

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle} \quad (4.11)$$

соответствует некоторое комплексное число. В каждом (сепарабельном) гильбертовом пространстве может быть введен полный ортонормированный дискретный базис: набор векторов $|n\rangle$, для которых

$$\langle n|m\rangle = \delta_{mn} \quad (4.12)$$

и имеет место формула разложения единичного оператора по одномерным проекционным операторам

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|. \quad (4.13)$$

С помощью последней любой вектор может быть разложен по набору $\{|n\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle. \quad (4.14)$$

Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица с элементами

$$A_{mn} = \langle m|\hat{A}|n\rangle, \quad (4.15)$$

интерпретируемая как m -я компонента вектора $\hat{A}|n\rangle$.

При рассмотрении КС $|z\rangle$ ($z = \{z_k\}$) общая схема меняется. Вместо δ_{mn} в (4.12) или δ -функции (например, $\delta(x - x')$ для базиса $|x\rangle$ НП $D(1)$ группы $W(1)$) возникает функция перекрытия КС

$$\langle z|z'\rangle = f(\bar{z}, z') = \overline{f(\bar{z}', z)}, \quad f(\bar{z}, z) = 1, \quad (4.16)$$

$|f(\bar{z}, z')|$ имеет максимум при $z = z'$. Функция перекрытия КС представляет собой инвариант группы. Действительно, для унитарных НП $\hat{T}^{-1}(g) = \hat{T}^+(g)$, и согласно (4.11)

$$f(\bar{z}_g, u_g) = \langle z_g|u_g\rangle = \langle z|\hat{T}^+(g)\hat{T}(g)|u\rangle = \langle z|u\rangle = f(\bar{z}, u). \quad (4.17)$$

Система КС является переполненной, а разложение единичного оператора имеет вид

$$\hat{1} = \int |z\rangle\langle z|d\mu(z), \quad (4.18)$$

где $d\mu(z) = d\mu(z_g)$ — инвариантная (относительно преобразований группы) мера;

$$|\psi\rangle = \int |z\rangle\langle z|\psi\rangle d\mu(z). \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что функция перекрытия КС $f(\bar{z}, u) = \langle z|u\rangle$ является воспроизводящим ядром в пространстве функций $\psi(\bar{z}) = \langle z|\psi\rangle$ [13, 110]:

$$\psi(\bar{u}) = \int f(\bar{u}, z)\psi(\bar{z})d\mu(z).$$

Оператору A может быть сопоставлена функция (ковариантный символ)

$$A(\bar{z}, z) = \langle z|\hat{A}|z\rangle.$$

Рассмотрение конкретных систем КС тесно связано с аппаратом перекрытий, который позволяет стандартизировать теорию. Начнем с группы Гейзенберга $W(1)$, послужившей отправной точкой общей теории [13, 51, 102]. Минимум инвариантной дисперсии (4.5) достигается согласно (4.7) в том и только в том случае, если состояния, по которым производится усреднение, — собственные для оператора уничтожения $\hat{a}, \hat{a}|\omega z\rangle = \omega z|\omega z\rangle$:

$$|\omega z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n/2} z^n}{(n!)^{1/2}} |\omega n\rangle. \quad (4.20)$$

Сопреженный базис $\langle\omega z|$ совпадает с (4.20) с точностью до замены $|\omega n\rangle$ на $\langle\omega n|$ и z на \bar{z} . Сравнивая (4.20) с

$$|\omega z\rangle = \sum_{n \cdot} \langle \omega n | \omega z \rangle |\omega n\rangle,$$

получим

$$\langle \omega n | \omega z \rangle = \frac{(\omega^{1/2} z)^n}{(n!)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\omega}{2} |z|^2\right), \quad (4.21)$$

т.е. не что иное, как симметрический базис НП (2.26).

Перекрытие КС имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \omega z | \omega n \rangle &= \sum_n \langle \omega z | \omega n \rangle \langle \omega n | \omega u \rangle = \\ &= \exp\{i \bar{z} u - (|u|^2/2) - (|z|^2/2) i \omega\}, \\ |\langle \omega z | \omega u \rangle|^2 &= \exp(-\omega |z - u|^2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Никакие два состояния не ортогональны друг другу, поскольку для любых z и u имеем $0 < |\langle \omega z | \omega u \rangle| \leq 1$. Вместе с тем состояния $|\omega z\rangle$ и $|\omega z'\rangle$ приблизительно совпадают для соседних точек комплексной плоскости, $\langle \omega z | \omega z \rangle = 1$. В КС

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \sqrt{2} \operatorname{Re} z, \quad \langle \hat{p} \rangle = \sqrt{2} \omega \operatorname{Im} z, \\ (\Delta x)^2 &= 1/2\omega, \quad (\Delta p)^2 = \omega/2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Инвариантная мера $d\mu_\omega(z) = \omega d^2 z / \pi$, а интегрирование в (4.18) распространяется на всю комплексную плоскость.

Среди других базисов обобщенных КС используются полукогерентные состояния [15]

$$|\omega n, z\rangle = \hat{D}(z) |\omega n\rangle.$$

При $n = 0$ имеем обычные КС; $\hat{D}(z)$ здесь — оператор сдвига (2.25).

В последнее время особое внимание привлекают сжатые и коррелированные состояния [57—59]. Эти состояния минимизируют соотношения определенностей Шрёдингера (в (4.24) — (4.26), как и в формулы раздела 4.1, входит постоянная \hbar , в остальных случаях используется система $\hbar = c = 1$):

$$(\Delta x \cdot \Delta p)^2 - \sigma_{px}^2 \geq \hbar^2/4, \quad \sigma_{px} = (\langle \hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \rangle/2) - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{x} \rangle, \quad (4.24)$$

и характеризуются коэффициентами сжатия k и корреляции r .

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{\Delta x/x_0}{\Delta p/p_0} \right)^2, \\ r &= \frac{\sigma_{px}}{\Delta x \cdot \Delta p}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

С учетом (4.25) соотношение (4.24) может быть представлено в форме $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/[2(1 - r^2)^{1/2}]$, а инвариантная дисперсия [15, 110]

$$(\Delta x/x_0)^2 + (\Delta p/p_0)^2 \geq (k^{1/2} + k^{-1/2}) \cdot \frac{1}{2(1 - r^2)^{1/2}}. \quad (4.26)$$

При $r = 0$ сжатые состояния минимизируют соотношение Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$. Однако, в отличие от КС, они, вообще говоря, далеки от классических,

так как Δx и Δp могут быть сколько угодно большими соответственно при $k \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$. Этим предельным случаям отвечают состояния с определенным импульсом $|\omega p\rangle$ или координатой $|\omega x\rangle$, также образующие базис НП $D(\omega)$, $\langle \omega x | \omega x' \rangle = \delta(\omega(x - x'))$. Сжатые и коррелированные состояния являются собственными функциями операторов уничтожения \hat{a}' , получаемых с помощью канонических преобразований (2.42), образующих группу $SU(1,1)$; $\hat{a}' = u\hat{a} + v\hat{a}^+$,

$$\hat{a}'|\omega, uv, z\rangle = \omega z|\omega, uv, z\rangle,$$

коэффициенты k и r зависят лишь от отношения $s = v/u$:

$$r = -\text{Im } s \{ [(1 + |s|^2)^2/4] - (\text{Re } s)^2 \}^{-1/2}, \quad -1 \leq r \leq 1, \quad (4.27)$$

$$k = (1 + |s|^2 - 2 \text{Re } s)/(1 + |s|^2 + 2 \text{Re } s), \quad 0 < k < \infty.$$

Это не случайно. Действительно, сжатые и коррелированные состояния $|\omega, uv, z\rangle$ зависят от одного комплексного параметра $s = v/u$, $|s| < 1$, так как u и v связаны соотношением $|u|^2 - |v|^2 = 1$, а, кроме того, умножение u и v на $e^{i\alpha}$ приводит лишь к изменению z , $z' = ze^{i\alpha}$. Поэтому без ущерба для общности можно положить $u = \text{ch } \theta \cdot e^{i\varphi/2}$, $v = \text{sh } \theta \cdot e^{-i\varphi/2}$, т.е. сжатые и коррелированные состояния определяются точкой (θ, φ) однородного пространства $SU(1,1)/U(1)$ — верхней полости двуполостного гиперboloида. При больших θ $k \rightarrow \text{tg}^2 \varphi/2$, $r \rightarrow -1$ ($0 < \varphi < \pi$), $r \rightarrow 1$ ($\pi < \varphi < 2\pi$), $r = 0$ ($\varphi = 0, \varphi = \pi$). Инвариантная дисперсия (4.26) равна $1 + 2|v|^2$.

Функция перекрытия с КС $\langle z|\psi\rangle$ задают разложение по базису КС. Для полукогерентных, сжатых и коррелированных [15], а также состояний с определенной координатой и импульсом:

$$\begin{aligned} \langle \omega z | \omega n, w \rangle &= \\ &= \frac{1}{(n!)^{1/2}} \omega^{n/2} (\bar{z} - \bar{w})^n \exp(\omega \bar{z} w) \exp(-\omega |z|^2/2), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \langle \omega z | \omega, uv, w \rangle &= \\ &= u^{-1/2} \exp \left[\omega \left(\frac{w\bar{z}}{u} - \frac{v\bar{z}^2 - \bar{v}w^2}{2u} - \frac{|w|^2 + |z|^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \omega z | \omega x \rangle &= \\ &= (\pi/\omega^2)^{-1/4} \exp \{ \omega [-(x^2/2) + \bar{z}\sqrt{2}x - (\bar{z}^2/2) - (|z|^2/2)] \}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \omega z | \omega p \rangle &= \\ &= (\pi\omega^2)^{-1/4} \exp [-(p^2/2\omega) + i\bar{z}\sqrt{2}p + (\omega\bar{z}^2/2) - (\omega|z|^2/2)]. \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению КС для НП групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$. КС $SU(2)$, введенные в [103], были исследованы в ряде работ [111—113], где они имели названия: атомные КС, спиновые КС, КС углового момента. КС $SU(1,1)$ исследовались в [13, 104, 110]. Обратимся сначала к общей схеме построения НП в пространствах функций. Пусть НП группы G $T(g)$ действует в пространстве функций $\psi(z)$, $z = \{z_k\}$, по формуле

$$\hat{T}(g)\psi(z) = \psi(gz). \quad (4.31)$$

Различным НП соответствуют различные типы функций, z интерпретируется как элемент группы G , а преобразование (4.31) — как внутренний автоморфизм группы. Но возможна и интерпретация z как столбца $\|z_k\|$, на который действует матрица фундаментального НП g , чем мы и воспользуемся ниже.

Реализация НП в терминах пространства функций проводилась в основном в работах математиков [14, 114, 115], в терминах дискретных базисов — в работах физиков; о связи этих методов см. [17]. С физической точки зрения в работах математиков, по существу, проводилось построение обобщенных КС (орбит) в функциональных пространствах.

Для НП $D(j)$ $SU(2)$ и $D^+(j)$, $D^-(j)$ $SU(1,1)$ пространство НП — это пространство полиномов вида $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ степени $n_1 + n_2 = 2j$ (см. (2.20)–(2.23)); $|z_2|^2 \pm |z_1|^2$ — инвариант группы $SU(2)$ ($SU(1,1)$). Далее положим $|z_2|^2 - |z_1|^2 = 1$ (если принять $|z_2|^2 - |z_1|^2 = 0$ и проделать построения, подобные приведенным ниже, можно прийти к НП основной серии $SU(1,1)$).

Действуя согласно (2.20) на старший вес $f_{2j}(z_1, z_2) = \psi_{jj}(z_1, z_2) = (z_1)^{2j}$, получим КС $\psi_{ju}(z_1, z_2) = (z_1)^{2j} = (\bar{u}_2 z_2 \pm \bar{u}_1 z_1)^{2j}$, где \bar{u}_1 и \bar{u}_2 — элементы первой строки матрицы $\|g_k^j\|$, $|u_1|^2 \pm |u_2|^2 = 1$. Разлагая бином, нетрудно убедиться, что симметрические базисы (2.21), (2.22) есть не что иное, как перекрытия $\langle jm | jz \rangle$. Отсюда для $D(j)$ и $D^+(j)$

$$|j, z_1 z_2 \rangle = \sum_{m=-j}^j \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} z_1^{j+m} z_2^{j-m} |jm \rangle, \quad (4.32)$$

$$|j, z_1 z_2 \rangle = \sum_{m=-j}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(-(j-m))}{\Gamma(-2j)(j+m)!} \right]^{1/2} z_1^{j+m} z_2^{j-m} |jm \rangle. \quad (4.33)$$

Для $D^-(j)$ $m \leq j < -1/2$; формула для КС получается заменой $m \rightarrow -m$, суммирование ведется от $m = -\infty$ до $m = j$.

Используя формулу разложения КС по дискретному базису

$$\langle ju | jz \rangle = \sum_m \langle ju | jm \rangle \langle jm | jz \rangle, \quad (4.34)$$

легко получить перекрытия для $D(j)$ и $D^+(j)$:

$$\langle ju | j'z \rangle = (\bar{u}_1 z_1 + \bar{u}_2 z_2)^{2j} \delta_{jj'}, \quad 2j \geq 0, \quad (4.35)$$

$$\langle ju | j'z \rangle = (\bar{u}_2 z_2 - \bar{u}_1 z_1)^{2j} \delta_{jj'}, \quad 2j < -1. \quad (4.36)$$

Видно, что, в отличие от КС группы $W(1)$, всегда существуют КС, ортогональные данному. Формулу (4.34) можно непосредственно использовать для построения КС, как это было сделано Березиным [110] (см. также [15, 16]), если известен дискретный функциональный базис НП. Инвариантная мера имеет вид [15]

$$D(j): d\mu_j(z) = \frac{2j+1}{(2\pi)^2} \delta(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 1) d^2 z_1 d^2 z_2, \quad (4.37)$$

$$D^+(j): d\mu_j(z) = \frac{-2j-1}{(2\pi)^2} \delta(|z_2|^2 - |z_1|^2 - 1) d^2 z_1 d^2 z_2. \quad (4.38)$$

От переменных z_1 и z_2 удобно перейти к угловым переменным θ, φ :

$$|j\theta\varphi\rangle = |jz_1z_2\rangle e^{-i\omega j}.$$

Можно выписать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{SU}(2): z_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(-\varphi/2 + \omega/2)}, \\ z_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i[(\varphi/2) + (\omega/2)]}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$d\mu_j(\theta, \varphi) = \frac{2j+1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \text{SU}(1,1): z_1 &= \text{ch} \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(-\varphi/2 + \omega/2)}, \\ z_2 &= \text{sh} \frac{\theta}{2} \cdot e^{i[(\varphi/2) + (\omega/2)]}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$d\mu_j(\theta, \varphi) = \frac{-2j-1}{4\pi} \text{sh} \theta d\theta d\varphi,$$

$$2j < -1, \quad 0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

в (4.39), (4.40), в отличие от (4.37), (4.38), отсутствует интегрирование по фазе состояния ωj (фактически это означает переход от $U(2)$ к $SU(2)$). Средние от генераторов (ковариантные символы) $J_k(\theta, \varphi) = \langle \hat{J}_k \rangle$ для $D(j)$ и $D^{(\pm)}(j)$ соответственно:

$$\begin{aligned} J_x &= j_x = j \sin \theta \cdot \cos \varphi, & J_x &= ij_x = \mp ij \text{sh} \theta \cdot \cos \varphi, \\ J_y &= j_y = j \sin \theta \cdot \sin \varphi, & J_y &= ij_y = \mp ij \text{sh} \theta \cdot \sin \varphi, \\ J_z &= j_z = j \cos \theta, & J_z &= j_z = \mp j \text{ch} \theta, \\ j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 &= j^2, & -j_x^2 - j_y^2 + j_z^2 &= j^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Весьма наглядную картину для различных типов базисов НП дает рассмотрение пространства средних с осями j_x, j_y, j_z . Как следует из (4.41), КС группы $SU(2)$ определяются точкой на сфере (рис. 4,а), а КС представлений дискретных серий $SU(1,1)$ — точкой на верхней ($D^+(j)$) или нижней ($D^-(j)$) полости двухполостного гиперboloида (рис. 4,б). Для унитарных НП дополнительной и основной серий, не ограниченных старшим (младшим) весом, КС задается точками на однополостном гиперboloиде или конусе. На рисунке точкам на оси j_z отвечают состояния дискретного базиса $|jm\rangle$, пунктирной линией обозначены поверхности (соответственно сфера и гиперboloид), отвечающие ОКС, связанным не со старшим весами, а с состояниями $|j, j-1\rangle$ дискретного базиса.

Остановимся подробнее на КС группы $SU(2)$ — КС углового момента. Ковариантные символы (4.41) операторов проекций углового момента совпадают с выражениями для компонент классического вектора углового момента (характеризующегося направлением θ, φ в сферических координатах) $\mathbf{j} = j\mathbf{n}$,

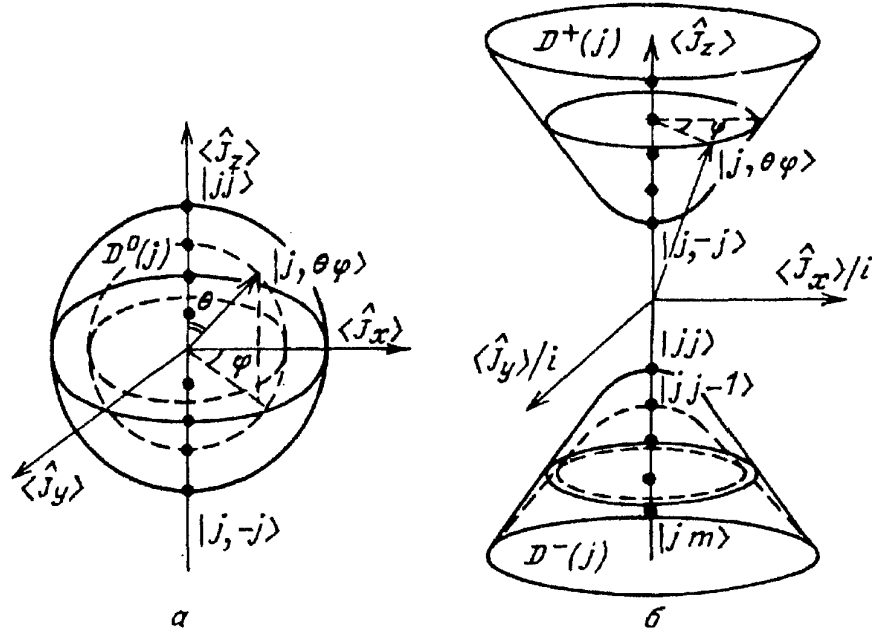


Рис. 4. КС групп SU(2) (а) и SU(1,1) (б) — дискретная серия

$\mathbf{n} = (\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta)$. Подстановка ковариантных символов генераторов в скобку Пуассона

$$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{j \sin \theta} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right) \quad (4.42)$$

дает соотношения, аналогичные коммутационным соотношениям самих операторов: $\{j_x(\theta, \varphi), j_y(\theta, \varphi)\} = j_z(\theta, \varphi)$ и т.д.; для дисперсий в КС имеем $(\Delta J_k)^2 \leq j/2$; модуль перекрытия КС находится из (4.35)

$$|\langle j_1 \varphi_1 | j_2 \varphi_2 \rangle| = \left(\cos \frac{\theta'}{2} \right)^{2j}, \quad (4.43)$$

где θ' — угол между векторами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 (см. рис. 4,а). Различные КС становятся ортогональными лишь в пределе $j \rightarrow \infty$, при любых j ортогональны лишь пары состояний, характеризуемые противоположными направлениями \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 .

Обобщенные КС $|j, |m|; \theta \varphi\rangle$, получаемые под действием конечных преобразований из $|jm\rangle$, можно определить и соотношением

$$(\mathbf{nJ})|j, |m|, \theta \varphi\rangle = |m||j, |m|, \theta \varphi\rangle, \quad (4.44)$$

т.е. как состояния с определенной проекцией момента на направление \mathbf{n} (об аналоге этого соотношения для полупростых групп см. [116]). Волновыми функциями состояний $|j, |m|, \theta \varphi\rangle$ являются сферические функции $Y_{jm}(\theta'', \varphi'')$, где θ'' и φ'' зависят от переменных состояния θ', φ' и сферических координат θ, φ . В частном случае КС

$$Y_{jj}(\theta, \varphi) = (-1)^j \left[\frac{(2j+1)!}{2\pi(2j)!!} \right]^{1/2} (\sin \theta)^j e^{i\varphi j}.$$

Видно, что при $j \rightarrow \infty$ волновая функция КС локализуется в области $\theta = \pi/2$, т.е. в плоскости, перпендикулярной вектору углового момента \mathbf{j} , что отвечает

классическому вращению этой плоскости. В случае же обобщенных КС $|j, |m|, \theta\varphi\rangle$, если не выполняется условие $|m/j| \rightarrow 1$, такой локализации не происходит и даже при $j \rightarrow \infty$ состояния не переходят в классические. Перекрытия $\langle j\theta_1\varphi_1 | j, |m|, \theta_2\varphi_2 \rangle$ приведены в [15].

Отметим, что сферические функции являются перекрытиями состояний с определенным моментом j и его проекцией m на ось и состояний с определенным углом (и, значит, неопределенным j):

$$\begin{aligned} \langle jm | \theta\varphi \rangle &= Y_{jm}(\theta, \varphi), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \langle \theta\varphi | jm \rangle \langle jm | \theta'\varphi' \rangle &= \\ &= \langle \theta\varphi | \theta'\varphi' \rangle = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \\ \hat{1} &= \iint |\theta\varphi\rangle \langle \theta\varphi| \sin \theta d\varphi d\theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Для НП $D(p)$ группы движений плоскости $M(2)$ естественно рассматривать два базиса: $|pm\rangle$ и $|p\alpha\rangle$. Состояния $|pm\rangle$ являются собственными с собственными значениями m и p^2 для операторов проекции углового момента \hat{J}_z и квадрата импульса (оператора Лапласа) $\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ (см. (2.7), (2.8)), $|p\alpha\rangle$ для операторов проекций импульса: $\hat{p}_x|p\alpha\rangle = p \cos \alpha \cdot |p\alpha\rangle$, $\hat{p}_y|p\alpha\rangle = p \sin \alpha \cdot |p\alpha\rangle$. При фиксированном p

$$\int_0^{2\pi} |p\alpha\rangle \langle p\alpha| d\alpha = \hat{1}, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |pm\rangle \langle pm| = \hat{1}. \quad (4.46)$$

Волновые функции (т.е. перекрытия с состояниями $|r\varphi\rangle$, где r, φ — полярные координаты точки на плоскости) можно получить, решая дифференциальные уравнения (2.8), (2.9) [7]

$$\begin{aligned} \langle r\varphi | pm \rangle &= e^{im\varphi} i^m J_m(pr), \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle r\varphi | pm \rangle \langle pm | r\varphi \rangle &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(pr) = 1, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\langle r\varphi | p\alpha \rangle = e^{ipr \cos(\varphi - \alpha)},$$

$$\langle p\alpha | pm \rangle = e^{im\alpha} / \sqrt{2\pi},$$

$$\begin{aligned} \langle p\alpha | p\beta \rangle &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle p\alpha | pm \rangle \langle pm | p\beta \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im(\alpha - \beta)} = \delta(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (4.48)$$

где $J_m(pr)$ — функция Бесселя. Для построения обобщенных КС подействуем оператором конечных преобразований на $|p0\rangle$ (параметр при \hat{J}_z положим рав-

ным нулю, так как $\{\exp(i\alpha_0 \hat{J}_z)\}$ образуют стационарную подгруппу состояния $|pm\rangle$

$$\begin{aligned} \exp[(z\hat{\Phi}_+ - \bar{z}\hat{\Phi}_-)/2] J_0(pr) = \\ = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \frac{1}{n_2!} J_{n_1-n_2}(pr) \left(\frac{pz}{2}\right)^{n_1} \left(-\frac{p\bar{z}}{2}\right)^{n_2} = \\ = J_0[p(r^2 + \rho^2 - 2pr \cos(\beta - \varphi))^{1/2}] = \langle r\varphi | pz \rangle, \quad z = \rho e^{i\beta}. \quad (4.49) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулы суммирования [117]. Аргументом J_0 является произведение p на расстояние между точками с координатами (r, φ) и (ρ, β) . Таким образом, $|pm, z\rangle$ представляет собой состояние $|pm\rangle$, "сдвинутое" из начала координат в точку (ρ, β) .

Для перекрытия КС получим

$$\langle p, u | p, z \rangle = J_0(p|u - z|). \quad (4.50)$$

В соответствии с общей теорией (см. (4.17)) перекрытие КС есть функция инварианта группы $M(2)$ — расстояния между двумя точками плоскости.

При больших $p, p \gg m$, волновые функции $\langle r\varphi | pm, z \rangle$ локализуются в точке (ρ, β) . Состояния $|p, z\rangle = |p0, z\rangle$ являются выделенными среди $|pm, z\rangle$, так как для них пространственная неопределенность $\Delta x^2 + \Delta y^2$ минимальна.

Некоторые вопросы, связанные с переходом к классическому пределу и обобщенными КС для переменных угловой момент — угол, рассмотрены в [9, 16], где построены состояния, собственные для "повернутого" оператора

$$\hat{J}'_z = \hat{J}_z - \bar{z}\hat{\Phi}_+ + z\hat{\Phi}_-$$

— своеобразный аналог сжатых состояний группы $W(1)$, собственных для оператора уничтожения \hat{a}' .

В случае произвольной группы Ли G аналоги сжатых состояний могут быть построены с помощью группы линейных автоморфизмов (канонических преобразований) G_A алгебры Ли группы G . Для этого надо "повернуть" генераторы $\hat{T}_i, \hat{T}'_i = \hat{T}_i(g_A), g_A \in G_A$, и построить обычные состояния для новых операторов \hat{T}'_i ; это и будут сжатые состояния. Они параметризуются точками однородного пространства G_A/G_1 , где G_1 — подгруппа группы G , состоящая из элементов, общих для $\{\exp \sum \alpha_i \hat{T}'_i\}$ и $\{\exp \sum \beta_i \hat{T}_i\}$, $\hat{T}'_i = \hat{T}_i(g_A)$, α и β — параметры преобразований группы G . Такое построение дает содержательную теорию в случае разрешимых групп; для полупростой группы $SU(2)$, где G_1, G_A и G совпадают, оно не приводит к новым состояниям, поскольку $\exp(\sum \alpha_i \hat{T}'_i)$ представляют собой конечные преобразования $SU(2)$.

Формулы перекрытия оказываются очень удобным аппаратом для расчетов. Наряду с обычными можно применять перекрытия, включающие дифференциальные операторы $\langle jw | jd/du \rangle, \langle jd/dw | jd/du \rangle$ (см. [11, 118]). Для группы $SU(2)$

$$\langle jw | jd/du \rangle = (\bar{w}_1 d/du_1 + \bar{w}_2 d/du_2)^{2j}. \quad (4.51)$$

Представляют интерес и перекрытия для дискретных исчислений, представленных в разделе 3, например $\langle jz | j\hat{D}_z^+ \rangle_q$. Структурные особенности перекрытий хорошо видны на примере группы SU(2). Из выражения (4.35) непосредственно следуют соотношения типа

$$\langle u | w \rangle^{2j} = \langle ju | jw \rangle, \langle j_1 u | j_2 w \rangle \langle j_1 u | j_2 w \rangle = \langle j_1 + j_2 u | j_1 + j_2 w \rangle.$$

Соединение и разложение перекрытий осуществляется на основе формул разложения единицы (4.13), (4.18). По существу, перекрытия — это новый универсальный язык, позволяющий проводить весьма сложные операции с функциями на стандартном, элементарном уровне. Теория коэффициентов КГ и некоторые разделы теории спецфункций могут рассматриваться как исследования обобщенных перекрытий.

Заметим, что выше использовалась традиционная реализация пространства представлений W(1), которая применима при фиксированном ω . В общем случае, если состояние не обладает определенной частотой, т.е. не преобразуется по какому-либо определенному НП $D(\omega)$ группы W(1), нужно рассматривать пространство функций $\psi(x, \tau)$,

$$\hat{p} = -i\partial/\partial x, \quad \hat{x}_\omega = -ix\partial/\partial \tau, \quad \hat{I} = -i\partial/\partial \tau, \quad (4.52)$$

$$[\hat{x}_\omega, \hat{p}] = i\hat{I}, \quad [\hat{x}_\omega, \hat{I}] = [\hat{p}, \hat{I}] = 0.$$

По НП $D(\omega)$ преобразуются в функции вида $\psi(x, \tau) = \exp(i\omega\tau)\psi(\omega, x)$, $\hat{p} = -i\partial/\partial x$, $\hat{x}_\omega = \omega x$, $\hat{I} = \omega$ (см. (2.25)). Если в общем случае $[\hat{a}, \hat{a}_\omega^+] = -i\partial/\partial \tau$, то для состояний с фиксированной частотой $[\hat{a}, \hat{a}_\omega^+] = \omega$ и можно применять обычный оператор $\hat{a}^+ = \hat{a}_\omega^+/\omega$, $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Такие состояния рассматриваются в следующем разделе, где вместо $|\omega n\rangle$ и $|\omega z\rangle$ используются сокращенные обозначения $|n\rangle$ и $|z\rangle$ и обычные операторы \hat{a}^+ и \hat{a} .

4.3. КС-представление квантовой механики и переход к классическому пределу. КС осуществляют своего рода классическое представление квантовой механики. Они определялись выше как состояния, обладающие минимальными неопределенностями, с помощью соотношений для инвариантной (относительно конечных преобразований группы симметрии) дисперсии. Эта инвариантность соотношений неопределенностей приводит к тому, что КС образуют полный базис НП группы G. Они параметризуются точками фазового пространства соответствующей классической системы.

Волновая функция ψ в уравнении Шрёдингера, в сущности, не что иное, как перекрытие, различное для разных представлений квантовой механики: $\langle x | \psi \rangle$ для координатного, $\langle p | \psi \rangle$ для импульсного, $\langle n | \psi \rangle$ для энергетического, $\langle z | \psi \rangle$ для представления КС (представления Баргмана—Фока [13, 51, 119]).

В последнем случае уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(z) = -\frac{\omega}{4}\left(\frac{d}{dz} - z\right)^2\psi(z) + u\left(\frac{d/dz + z}{(2m\omega)^{1/2}}\right)\psi(z), \quad (4.53)$$

где $\psi(z) = \langle \bar{z} | \psi \rangle \exp(|z|^2/2)$ — аналитическая функция z ,

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int \overline{\psi_1(z)} \psi_2(z) \exp(-|z|^2) d^2z/\pi, \quad \hat{a} = d/dz, \quad \hat{a}^+ = z, \quad \hat{x} = \frac{d/dz + z}{(2m\omega)^{1/2}}.$$

Осциллятор описывается уравнением первого порядка

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(z) = \omega \left(\frac{1}{2} + z \frac{d}{dz} \right) \psi(z). \quad (4.54)$$

Состояния с определенной энергией $E = \omega [(1/2) + n]$ отвечает $\psi_n(z) = z^n \times \exp(-iEt)/(n!)^{1/2}$, когерентным —

$$\psi_n(z) = \exp[u(t)z - (i\omega t/2) - (|u|^2/2)], \quad u(t) = u_0 e^{-i\omega t}.$$

Эволюция состояния сводится к изменению параметра КС $u(t)$. Представление Баргмана—Фока использовалось в различных квантовомеханических задачах [13, 51].

Рассмотрим общую схему перехода к квазиклассическим уравнениям, опираясь на исчисление символов. Пусть гамильтониан физической системы и некоторый оператор \hat{L} , не зависящий явно от времени, есть операторные функции генераторов группы. Уравнения движения в форме Гейзенберга имеют вид

$$\frac{\partial \hat{L}_H}{\partial t} = i[\hat{H}_H, \hat{L}_H]. \quad (4.55)$$

Квазиклассические уравнения движения записываются с помощью формальной замены в гейзенберговских уравнениях операторов на соответствующие им динамические переменные, а коммутатора — на скобку Пуассона (термин "квазиклассические" здесь означает, что в полученных уравнениях остаются спиновые и цветовые переменные, в классике отсутствующие).

Возникает вопрос, когда такой переход к с-числовым уравнениям может быть осуществлен или по крайней мере дает хорошее приближение. Ответ может быть дан с помощью усреднения уравнений Гейзенберга по КС. Квазиклассические уравнения при этом получаются (вообще говоря, при некоторых дополнительных условиях, которые и служат для определения области их применимости) как уравнения для эволюции КС, которые параметризуются точками фазового пространства системы.

Если КС соответствующей группы не расплываются, т.е. остаются когерентными со временем ($\hat{u}|z(0)\rangle = |z(t)\rangle$, \hat{u} — оператор эволюции), (4.55) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle z | \hat{L} | z \rangle = i \langle z | [\hat{H}, \hat{L}] | z \rangle, \quad (4.56)$$

где $z = z(t)$, а операторы берутся в представлении Шрёдингера, т.е. уравнение (4.55) сводятся к уравнениям на $z(t)$ (случай так называемой "точной квазиклассики"). Чтобы КС не расплывались, достаточно, чтобы \hat{H} был линеен по генераторам группы, так как тогда оператор эволюции является оператором конечных преобразований группы (об условиях нерасплывания КС см. [120]). В левой части (4.56) стоит производная от ковариантного символа оператора

\hat{L} , в правой — символ коммутатора; на языке символов, таким образом, второй принцип соответствия означает, что символ коммутатора переходит в скобку Пуассона символов (ср. [110, 122]).

Обратимся к КС группы $W(1)$. Известно, что они не расплываются при гамильтониане вида

$$\hat{H} = (\omega \hat{a}^+ \hat{a} + F \hat{a} + \bar{F} \hat{a}^+ + \beta), \quad \omega = \bar{\omega}, \quad \beta = \bar{\beta}.$$

Взяв в (4.56) $\hat{L} = \hat{a}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\{H, z\} = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -i\omega z + \bar{F}, \quad (4.57)$$

где $H = H(\bar{z}, z)$ — ковариантный символ гамильтониана. Решением этого уравнения является

$$z = |z| \exp[-i(\omega t + \varphi)] + \int \bar{F}(t) dt.$$

$|z|$ имеет смысл амплитуды колебаний, φ — начальной фазы;

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \sqrt{2} x_0 |z| \cos(\omega t + \varphi), \\ \langle \hat{p} \rangle &= \sqrt{2} p_0 |z| \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Видно, что средние значения изменяются в КС по классическим законам, однако классическая картина движения является хорошим приближением только при условии больших амплитуд колебаний $\langle \hat{p} \rangle$ и $\langle \hat{x} \rangle$ в (4.58), $\sqrt{2}|z|x_0 \gg \Delta x = x_0/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}|z|p_0 \gg \Delta p = p_0/\sqrt{2}$, и классический предел достигается при $|z| \rightarrow \infty$.

Для гамильтонианов, линейных по генераторам $SU(N)$ и $SU(N-1, 1)$ (см. приложение), при

$$\hat{H} = c_k^l \hat{T}_l^k, \quad \bar{c}_k^l = c_l^k (\pm 1)^{\delta_{kN} + \delta_{lN}}$$

(нижний знак отвечает $SU(N-1, 1)$) аналогичным образом получим для симметричных НП [15]

$$\frac{dz_k}{dt} = -i c_k^l z_l. \quad (4.59)$$

В частности, для группы $SU(2)$ $\hat{H} = i(a_x \hat{J}_x + a_y \hat{J}_y + a_z \hat{J}_z)$, используя параметризацию КС $|j\theta\varphi\rangle$ и (4.39) — (4.41), получим уравнение, описывающее движение точки по сфере:

$$\frac{dn}{dt} = [a(t), n]. \quad (4.60)$$

Для $SU(1, 1) \sim SO(2, 1)$ уравнения эволюции КС описывают движение точки по верхней (НП $D^+(j)$) или нижней (НП $D^-(j)$) полости гиперboloида (см. (4.41) и рис. 4).

Если гамильтониан нелинеен по генераторам группы, то, пренебрегая возможным расплыванием КС, из (4.56) можно получить приближенные уравнения на z_k , в которые, в отличие от квазиклассических (4.57), (4.60), войдет сигнатура НП. Квазиклассические уравнения (4.57), (4.59) получаются при некоторых значениях параметров состояний ($|z| \rightarrow \infty$ для $W(1)$, $j \rightarrow \infty$ для $SU(2)$;

случай групп $SU(N)$ исследовался в [15] в связи с выводом квазиклассических уравнений эволюции цветовых переменных (уравнений Вонга)).

Как уже указывалось выше, если КС не расплываются (оператор эволюции $\hat{u}(t, t_0)$ сводится к конечным преобразованиям группы), то $\psi(z, t) = \langle z | \hat{u}(t, t_0) | \psi_0 \rangle = \langle z(t) | \psi_0 \rangle = \psi_0(z(t))$. Для НП $D(j)$ и $D^+(j)$ группы $SU(2)$ и $SU(1,1)$ $\psi = \psi((z_1(t_1), z_2(t_2)))$, $z_1(t)$ и $z_2(t)$ преобразуются как компоненты спинора по фундаментальному НП $D(1/2)$, $|z_2|^2 \pm |z_1|^2 = 1$, т.е. имеется два уравнения на $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Если КС расплываются, то уравнения, получаемые усреднением (4.56) по КС, являются приближенными; точные уравнения — это либо система на $\psi_m(t) = \langle jm | \psi \rangle$ (для $SU(2)$ имеем $\dim D(j) = 2j + 1$ уравнения, для унитарных НП $SU(1,1)$ — бесконечное число), либо уравнение в частных производных на $\psi(z, t) = \langle jz | \psi \rangle$.

Конкретный и последовательный анализ исходит из исчисления символов, в основе которого лежит взаимно однозначное отображение операторных функций генераторов и векторов пространства представления группы на c -числовые функции комплексных переменных z_k и \bar{z}_k . Это исчисление, развитое в работах Березина [110, 121], играет важную роль в предложенной им концепции квантования [110, 122] и конструкции континуального интеграла [121, 123]. Некоторые общие положения, в том числе в приложении к $W(N)$, $SU(N)$ и $SU(N,1)$, можно найти в [13, 15, 16, 110]. Использование КС-представления, опирающегося на исчисление символов, позволяет корректно проследить переход к классическому описанию и дает возможность упрощения расчетов для конкретных систем.

Коротко рассмотрим основные понятия теории символов. Символом вектора $|\psi\rangle$ называется функция $\psi(z) = \langle z | \psi \rangle$ — волновая функция в представлении КС. Символ однозначно его определяет, задавая разложение (4.19) по базису КС. Функцию $\langle z | n \rangle$, задающую симметрический базис, можно рассматривать как символ векторов абстрактного базиса чисел заполнения. Перекрывания (4.21), (4.22), (4.30), (4.35), (4.36) определяют символы векторов различных базисов НП.

Операторам в гильбертовом пространстве НП также можно поставить в соответствие символы, полностью их определяющие. Ковариантным и контр-авариантным символами оператора \hat{A} называют соответственно функции $Q_A(\bar{z}, z)$ и $P_A(\bar{z}, z)$

$$Q_A(\bar{z}, z) = \langle z | \hat{A} | z \rangle, \quad (4.61)$$

$$\hat{A} = \int P_A(\bar{z}, z) |z\rangle \langle z| d\mu(z), \quad (4.62)$$

$$Q_A(\bar{z}, z) = \int P_A(\bar{u}, u) |\langle z | u \rangle|^2 d\mu(u). \quad (4.63)$$

Представление оператора P -символом весьма удобно в задачах, связанных с матрицей плотности. Заметим, что возможность этих определений связана с переполненностью базиса $|z\rangle$, приводящей к тому, что $\langle z | \hat{A} | u \rangle$ полностью

определяется своими диагональными элементами $\langle z|\hat{A}|z\rangle$; $Q_A(\bar{z}, u) = \langle z|A|u\rangle / \langle z|z\rangle$ является аналитическим продолжением символа $Q_A(\bar{z}, z)$.

Для группы $W(1)$ ковариантный символ Q_A соответствует нормальному способу записи операторов, при котором все операторы \hat{a}_+ стоят слева от \hat{a}_- (с последующей заменой $\hat{a}_+ \rightarrow \bar{z}$, $\hat{a}_- \rightarrow z$), контравариантный P_A — антинормальному, при котором способ записи обратный. Не менее важную роль, чем Q_A и P_A , играет в теории вейлевский символ, соответствующий симметризованному способу записи \hat{a}_+ и \hat{a}_- . Для групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ явный вид P - и Q -символов можно найти в [13], $SU(N)$ и $SU(N,1)$ — в [15, 16]; там же дается простая методика их вычисления, основанная на представлении генераторов через \hat{a}_+ и \hat{a}_- , аналогичном (2.16).

С помощью разложения единицы (4.18) нетрудно получить правила действия на ψ

$$\hat{A}\psi(\bar{z}) = \int Q_A(\bar{z}, u) \langle z|u\rangle \psi(\bar{u}) d\mu(u), \quad (4.64)$$

$$\hat{A}\psi(\bar{z}) = \int P_A(\bar{u}, u) \langle z|u\rangle \psi(\bar{u}) d\mu(u) \quad (4.65)$$

и формулы *-умножения (умножения символов):

$$Q_{A_1} * Q_{A_2} = Q_{A_1 A_2}(\bar{z}, z) = \int Q_{A_1}(\bar{z}, u) Q_{A_2}(\bar{u}, z) |\langle z|u\rangle|^2 d\mu(u), \quad (4.66)$$

$$Q_{A_1 A_2}(\bar{z}, z) = \iint P_1(\bar{u}, u) P_2(\bar{v}, v) \langle z|u\rangle \langle u|v\rangle \langle v|z\rangle d\mu(v) d\mu(u). \quad (4.67)$$

Для группы $W(1)$ (4.63) и (4.66) могут быть записаны в дифференциальной форме [121]:

$$Q_A(\bar{z}, z) = \exp(\Delta(\bar{z}, z)) P_A(\bar{z}, z), \quad \Delta(\bar{z}, z) = \partial^2 / \partial z \partial \bar{z}, \quad (4.68)$$

$$Q_{A_1 A_2}(\bar{z}, z) = (\exp \Delta(\bar{v}, v)) Q_{A_1}(\bar{z}, v) Q_{A_2}(\bar{v}, z) \Big|_{v=z}. \quad (4.69)$$

Формулы *-умножения символов (4.66) и (4.69) важны с точки зрения анализа перехода к классическому пределу, иными словами, для выяснения вопроса — для каких состояний возможно классическое описание. Эти состояния должны обладать минимальной неопределенностью и быть параметризованы точками фазового пространства. Кроме того, средние от операторов в таких состояниях должны быть много больше среднеквадратичных отклонений.

Всем перечисленным уравнениям удовлетворяют КС при некоторых значениях параметров. Для осциллятора это КС $|z\rangle$ с большим $|z|$ (амплитудой колебаний); КС углового момента $|j\varphi\rangle$ переходят в классические при больших моментах j . КС в классическом пределе становятся ортогональными (см. (4.22), (4.43)), произведение перекрытия $|\langle u|z\rangle|^2$ на нормировочный множитель в мере $d\mu$ в (4.66) превращается в δ -функцию, и для операторов с несингулярными символами имеем первый принцип соответствия с точностью до членов порядка $1/|z|^2$ ($W(1)$) или $1/j$ ($SU(2)$), символ произведения операторов равен произведению символов, $Q_{A_1} * Q_{A_2} = Q_{A_1} \cdot Q_{A_2}$. Приведем здесь соответствующие формулы для группы $W(1)$:

$$\begin{aligned}
|\langle u|z\rangle|^2 d\mu(u) &= e^{-|u-z|^2} d^2u/\pi = e^{-\operatorname{Re}^2(u-z)-\operatorname{Im}^2(u-z)} d^2(u-z)/\pi = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}h} e^{-(\operatorname{Re} \alpha)^2/h^2} d \operatorname{Re} \alpha \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{\pi}h} e^{-(\operatorname{Im} \alpha)^2/h^2} d \operatorname{Im} \alpha \xrightarrow{n \rightarrow 0} \delta(\operatorname{Re} \alpha) d \operatorname{Re} \alpha \delta(\operatorname{Im} \alpha) d \operatorname{Im} \alpha,
\end{aligned}$$

где $\alpha = (u - z)/|z|$, $h = 1/|z|$. Второй принцип соответствия также может быть получен с помощью (4.66) при учете членов порядка $1/|z|^2$ (1/ j) [16].

Отметим, что в классическом пределе P - и Q -символы операторов совпадают; это является следствием того, что в (4.63), как и в (4.66), входит квадрат модуля перекрытия КС.

Как следует из проведенного рассмотрения, классическое описание становится возможным при больших значениях некоторых квантовых чисел — параметров состояний (и достаточно "хороших" гамильтонианов, не выводящих с течением времени из области состояний, близких к классическим). Случай $SU(2)$ и $SU(1,1)$ исследовался в [110, 112]; компактных полупростых групп — в работе Саймона [124], где было показано, что классическому пределу отвечают большие значения параметров сигнатуры НП; дискретных серий $SU(N, 1)$ — в [15, 16]. В этом случае классическая картина является хорошим приближением как при больших значениях сигнатуры НП, так и при больших параметрах КС $|z_i|$. Более общая постановка вопроса о классическом пределе как пределе "больших N " (в частности, большого числа степеней свободы) была дана в [125]. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 6 на основе рассмотрения закона больших чисел и предельных теорем теории амплитуд вероятности.

4.4. Фазовое пространство. Относительная дисперсия как мера неопределенности состояния. Остановимся подробнее на вопросе о том, какие состояния являются максимально близкими к классическим. В классической теории состоянию отвечает точка фазового пространства. В квантовом случае удобно рассматривать плоскость $\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle$ (или, в случае произвольной группы Ли, — пространство средних от генераторов). Каждому состоянию отвечает некоторая область этого пространства с центром в точке $x = \langle \hat{x} \rangle, p = \langle \hat{p} \rangle$ (для КС $x = \sqrt{2} \operatorname{Re} z, p = \sqrt{2} \operatorname{Im} z$) и размерами порядка Δx и Δp , иными словами, некоторый вектор (x, p) с дисперсией $((\Delta x)^2, (\Delta p)^2)$. Естественной характеристикой неопределенности этого вектора (а значит, и состояния) является отношение инвариантной дисперсии вектора (4.9) к квадрату его длины:

$$D_{\text{отн}} = (\Delta T)^2 / \langle \hat{T}^2 \rangle, \quad 0 \leq D_{\text{отн}} \leq 1. \quad (4.71)$$

Неопределенность максимальна при $D_{\text{отн}} = 1$; классическому пределу отвечает $D_{\text{отн}} \rightarrow 0$, т.е. неопределенности пренебрежимо малы по сравнению со средними. Условно $D_{\text{отн}} \rightarrow 0$ и является, по существу, принципом соответствия для состояний.

В случае плоского фазового пространства (группа $W(1)$) относительная дисперсия

$$\frac{(\Delta T)^2}{\langle \hat{T}^2 \rangle} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2}{\langle (\hat{x}/x_0)^2 \rangle + \langle (\hat{p}/p_0)^2 \rangle} = \frac{2(\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^+ \rangle \langle \hat{a} \rangle) + 1}{2\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + 1}. \quad (4.72)$$

Для состояний с определенной координатой $|x\rangle$, импульсом $|p\rangle$, а также отвечающих n -му уровню осциллятора $|n\rangle$, когерентных $|z\rangle$, полуккогерентных $|nz\rangle$ и сжатых $|uv, z\rangle$ имеем

Состояния:	$ x\rangle$	$ p\rangle$	$ n\rangle$	$ z\rangle$	$ nz\rangle$	$ uv, z\rangle$.
$D_{\text{отн}}$:	1	1	1	$\frac{1}{1 + 2 z ^2}$	$\frac{1}{1 + \frac{2 z ^2}{1 + 2n}}$	$\frac{1}{1 + \frac{2 u\bar{z} - \bar{v}z ^2}{1 + 2 v ^2}}$.
Классический предел:	—	—	—	$ z \rightarrow \infty$	$ z \rightarrow \infty;$ $n/ z ^2 \rightarrow 0$	$ z \rightarrow \infty.$

Для сжатых и коррелированных состояний

$$D_{\text{отн}} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

при фиксированном $|v/u| \neq 1$. В пределе $|v/u| \rightarrow 1$ это, вообще говоря, не так. В частности, при действительном z и $|v/u| \rightarrow 1$ $D_{\text{отн}}$ обращается в единицу.

Относительная дисперсия углового момента

$$D_{\text{отн}} = \frac{(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2}{\langle J^2 \rangle}. \quad (4.73)$$

Для КС $|j\theta\varphi\rangle$, состояний $|jm\rangle$ обобщенных КС $|j, |m|, \theta\varphi\rangle$ имеем

Состояния:	$ j\theta\varphi\rangle$	$ jm\rangle, j m , \theta\varphi\rangle$	$ j0\rangle$.
$D_{\text{отн}}$:	$\frac{1}{j+1}$	$1 - \frac{m^2}{j(j+1)}$	1.
Классический предел:	$j \rightarrow \infty$	$j \rightarrow \infty, m/j \rightarrow 1$	—

Образно говоря, относительная дисперсия, задаваемая (4.71), позволяет определить степень "квантовости" состояния в процентах.

Отметим, что в классическом пределе дисперсии $(\Delta T)^2$ малы лишь по отношению к средним; они могут быть постоянными (КС $|z\rangle$ группы $W(1)$) или возрастая (КС $|j\theta\varphi\rangle$ группы $SU(2)$), что находится в полном соответствии с соотношениями неопределенностей.

Для состояний с $D_{\text{отн}} \rightarrow 0$ квантовомеханические формулы переходят в классические. В частности, коэффициенты КГ, связывающие КС углового момента $|j\theta\varphi\rangle$, в пределе $j \rightarrow \infty$ дают классическую формулу сложения моментов.

В заключение раздела остановимся на часто используемом приеме перехода к классике путем устремления \hbar к нулю. Хорошо известно, что в формальном

пределе $\hbar \rightarrow 0$ обращаются в нуль не только коммутаторы (а значит, и неопределенности), но и сами операторы $\hat{J}_z = -i\hbar\partial/\partial\varphi$, $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ (а следовательно, и соответствующие физические величины). Поэтому обычно требуют (см., например, [58, 125]), чтобы физические величины (энергия $\hbar\omega [|z|^2 + (1/2)]$ или $\hbar\omega [n + (1/2)]$, угловой момент $j\hbar$ и т.д.) оставались конечными; отсюда получим $\omega |z|^2 \rightarrow \infty$ или $\omega n \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, т.е. фактически мы снова приходим к рассмотрению предела больших квантовых чисел (параметров состояний). Неопределенности при $\hbar \rightarrow 0$ исчезают лишь для состояний, в которых средние (они должны быть конечными) много больше соответствующих неопределенностей, т.е. при относительной дисперсии $D_{\text{отн}} \rightarrow 0$.

5. Теория коэффициентов Клебша—Гордана и их соединений

5.1. Единая теория коэффициентов КГ группы SU(2). В квантовой механике структура взаимосвязей системы и подсистем определяется с помощью коэффициентов КГ. Квадрат модуля коэффициента КГ задает вероятность того, что система находится в данном состоянии при известных состояниях подсистем, а с групповой точки зрения коэффициенты КГ задают переход от базиса прямого произведения двух НП к базису НП и составляют унитарную матрицу.

Коэффициенты КГ — уникальные объекты, в которых как бы сфокусированы проблемы квантовой теории. Они выступают в самых различных ролях: и как-объект группового подхода, и как амплитуда вероятности, которую можно рассматривать и как сумму по путям, и как описание структуры квантовых объектов, и как мощный расчетный инструмент. Это пересечение самых различных областей физики и математики [2]. Теория коэффициентов КГ группы SU(2) — теория угловых моментов в той или иной форме вошла в большинство учебников и монографий по квантовой механике, а сводка формул, полученных к середине 70-х годов, представлена в [21].

До последнего времени теория строилась практически только для дискретного базиса. В 1974 г. Беллисард и Хольц [126] записали коэффициент КГ группы SU(2) в базисе КС, но систематические исследования начались недавно [5, 15, 127]. В отличие от стандартной теории угловых моментов [21, 24], где коэффициенты КГ и их соединения представляют собой громоздкие суммы произведений факториалов, в базисе КС это функции непрерывных переменных. Они являются производящими для обычных коэффициентов КГ.

Сейчас привычный облик теории коэффициентов КГ резко изменился (см. также [5]). Она формулируется единым образом для всех базисов, как своеобразное обобщение формул перекрытия. Благодаря удобному языку записи величин, входящих в теорию, оказалось возможным одновременное присутствие в ней как непрерывных, так и дискретных коэффициентов, а построение все более сложных структур конкретных коэффициентов КГ и их соединений чем-то напоминает сборку моделей из деталей детского конструктора. Начнем с

определений. Для удобства выпишем параллельно формулы для группы $SU(2)$, относящиеся к коэффициентам КГ $\langle j_1 u | j_2 v \| j w \rangle$ и коэффициентам Вигнера $\langle j_1 u | j_2 v | j w \| 00 \rangle$ в базисе КС ($u = \{u_1, u_2\}$), — первые строки формул (5.1) — (5.3), а к коэффициентам КГ $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle$ и коэффициентам Вигнера $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | j m \| 00 \rangle$ в дискретном базисе, — вторые строки формул (5.1) — (5.3):

$$|jw\rangle = \int \langle j_1 u | j_2 v \| j w \rangle |j_1 u\rangle |j_2 v\rangle d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v), \quad (5.1)$$

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle,$$

$$|j_1 u\rangle |j_2 v\rangle = \sum_j \int \langle j w \| j_1 u | j_2 v \rangle |j w\rangle d\mu_j(w), \quad (5.2)$$

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j, m} \langle j m \| j_1 m_1 | j_2 m_2 \rangle |j m\rangle,$$

$$|00\rangle = \int \langle j_1 u | j_2 v | j w \| 00 \rangle |j_1 u\rangle |j_2 v\rangle |j w\rangle d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v) d\mu_j(w), \quad (5.3)$$

$$|00\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | j_3 m_3 \| 00 \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle.$$

Интегрирование здесь проводится по мере (4.37). Можно использовать и угловые переменные (4.39), в которых состояние запишется как $|j\theta\varphi\rangle$, интегрирование проводится по мере $d\mu_j(\theta, \varphi)$.

Формулы (5.1) — (5.3) записаны для абстрактных базисов. В функциональном (гильбертовом) пространстве целесообразно использовать перекрытия, что позволяет придать теории единообразный стандартный характер. В возникающих соотношениях широко применяются такие перекрытия, как

$$\langle ju | jw \rangle = (\bar{u}_1 w_1 + \bar{u}_2 w_2)^{2j}, \quad \langle jm | jm' \rangle = \delta_{mm'}, \quad (5.4)$$

$$\langle ju | jw \| 00 \rangle = \frac{1}{(2j+1)^{1/2}} (\bar{u}_1 \bar{w}_2 - \bar{u}_2 \bar{w}_1)^{2j}, \quad (5.5)$$

$$\langle jm | jm' \| 00 \rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{(2j+1)^{1/2}} \delta_{m, -m'},$$

$$\langle ju | jm \rangle = \left[\frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \right]^{1/2} \bar{u}_1^{j-m} \bar{u}_2^{j+m}, \quad (5.6)$$

которые можно рассматривать как частный случай коэффициентов КГ и как определение (5.6) симметрического базиса. Важную роль играет операция разложения единицы, реализуемая в формулах типа

$$\int \langle ju | jw \rangle \langle jw | jv \rangle d\mu_j(w) = \langle ju | jv \rangle, \quad (5.7)$$

$$\sum_m \langle ju | jm \rangle \langle jm | jw \rangle = \langle ju | jw \rangle.$$

Заметим, что и сами коэффициенты КГ — это, по сути, тоже перекрытия, а именно — базиса прямого произведения двух НП с базисом НП. Поэтому наряду с коэффициентами КГ, связывающими однотипные базисы, можно рассматривать смешанные $\langle j_1 u | j_2 v \| jm \rangle$ или $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j \varphi \rangle$. Для таких необычных объектов может быть проведен последовательный анализ, имеющий много общего с рассмотрением коэффициентов КГ в базисе КС.

Для каждого свойства и соотношения между коэффициентами КГ в дискретном базисе имеется свой аналог в непрерывном и между ними существуют формулы перехода. Характер возникающих соотношений хорошо виден на примере формул ортонормированности:

$$\begin{aligned} \int \langle j_1 u | j_2 v \| jw \rangle \langle jw' \| j_1 u | j_2 v \rangle d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v) &= \langle jw' | jw \rangle, \\ \sum_j \int \langle j_1 u | j_2 v \| jw \rangle \langle jw \| j_1 u' | j_2 v' \rangle d\mu_j(w) &= \langle j_1 u | j_1 u' \rangle \langle j_2 v | j_2 v' \rangle, \\ \int |\langle j_1 u | j_2 v \| jw \rangle|^2 d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v) d\mu_j(w) &= \dim D(j), \\ \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle \langle jm' \| j_1 m_1 | j_2 m_2 \rangle &= \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\sum_{j, m} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle \langle jm \| j_1 m'_1 | j_2 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \quad (5.11)$$

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} |\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle|^2 = \dim D(j).$$

Взаимосвязь между коэффициентами КГ в непрерывном и дискретном базисах задаются формулами

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | j_3 m_3 \| 00 \rangle &= \\ &= \int \langle j_1 u | j_2 v | j_3 w \| 00 \rangle \langle j_1 m_1 | j_1 u \rangle \langle j_2 m_2 | j_2 v \rangle \times \\ &\times \langle j_3 m_3 | j_3 w \rangle d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v) d\mu_{j_3}(w), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \langle j_1 u | j_2 v | j_3 w \| 00 \rangle &= \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | j_3 m_3 \| 00 \rangle \langle j_1 u | j_1 m_1 \rangle \langle j_2 v | j_2 m_2 \rangle \langle j_3 w | j_3 m_3 \rangle, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \langle j_1 u | j_2 v \| j_3 w \rangle &= \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j_3 m_3 \rangle \langle j_3 m_3 | j_3 w \rangle \langle j_2 v | j_2 m_2 \rangle \langle j_1 u | j_1 m_1 \rangle. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Коэффициенты КГ и Вигнера связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \langle j_1 u | j_2 v | jw \| 00 \rangle &= \int \langle j_1 u | j_2 v \| jw' \rangle \langle jw' | jw \| 00 \rangle d\mu_j(w'), \\ \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 | jm' \| 00 \rangle &= \sum_m \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| jm \rangle \langle jm | jm' \| 00 \rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Все свойства стандартной дискретной теории угловых моментов последовательно переносятся на коэффициенты КГ в базисе КС и входят как составная часть в единую теорию. Качественно новый момент заключается в возникновении эффективного расчетного аппарата, связанного с интегрированием по мере μ . Это весьма простая операция, позволяющая проводить расчеты в базисе КС, не обращаясь к обычной теории. Действительно, рассмотрим $\int f_1(z)\overline{f_2(z)}d\mu(z)$, f_1 и f_2 — полиномы по z . Если степени каких-либо z_k и \bar{z}_k в слагаемом под интегралом не совпадают, то интегрирование $\exp(in\varphi_k)$ по фазе φ_k по периоду дает нуль; при совпадении интеграл по φ_k сведется к умножению на 2π . Таким образом, получаем интегралы, в которые входят только $|z_k|^2 = x$:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = B(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta > 0. \quad (5.16)$$

Коэффициенты КГ в базисе КС — инварианты конкретной группы и представляют собой нормированное произведение элементарных производящих инвариантов типа детерминантов и сверток. Они всегда могут быть представлены в факторизованном виде. Так,

$$\langle j_1 u | j_2 v \| j_3 w \rangle = \rho \langle R_1 u | R_1 w \rangle \langle R_2 v | R_2 w \rangle \langle R_3 u | R_3 v \| 00 \rangle;$$

здесь $R_1 = -j_1 + j_2 + j_3$, $R_2 = j_1 - j_2 + j_3$, $R_3 = j_1 + j_2 - j_3$ — степени, в которые возводятся элементарные производящие инварианты:

$$\langle j_1 u | j_2 v \| j_3 w \rangle = \rho (\bar{u}_1 w_1 + \bar{u}_2 w_2)^{R_1} (\bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2)^{R_2} (\bar{u}_1 \bar{v}_2 - \bar{u}_2 \bar{v}_1)^{R_3}, \quad (5.17)$$

$$\rho = \left[\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3+1)!}{R_1!R_2!R_3!(R_1+R_2+R_3+1)!} \right]^{1/2}.$$

Формула (5.17) — типичный пример коэффициентов КГ в базисе КС. Они непосредственно записываются в виде произведения инвариантов группы. Нормировочный множитель может быть вычислен с помощью (5.16). Симметрии коэффициентов КГ (инвариантов) соответствуют симметриям в дискретном базисе. Аналоги дискретных рекуррентных соотношений могут быть получены с помощью перекрытий типа (4.51), содержащих дифференциальные операторы (см. также [128, 129]). В базисе КС сохраняется и общая схема построения соединений коэффициентов КГ. В простейшем случае имеем

$$\int \langle j_1 u | j_2 v \| j_{12} w \rangle \langle j_{12} w | j_3 s \| j z \rangle d\mu_{j_{12}}(w), \quad (5.18)$$

$$\sum_{m'} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j' m' \rangle \langle j' m' | j_3 m_3 \| j m \rangle.$$

Рассмотренная формулировка теории коэффициентов КГ носит общий характер и применима не только для $SU(2)$, но и для любых других групп.

5.2. Трансформационные матрицы. Взаимосвязи между различными структурами в квантовой механике определяются трансформаци-

онными матрицами. С групповой точки зрения они задают переход между различными базисами прямых произведений НП. Для группы $SU(2)$ это соответствует переходу между различными схемами сложения n моментов ($n \geq 3$). Простейший случай матрицы $((j_1 j_2) j_1 j_2 j_3 | j_1 (j_2 j_3) j_2 j_3)$, соответствующей $n = 3$, был изучен Рака́ [32]. Трансформационные матрицы представляются в виде соединений коэффициентов КГ, просуммированных по всем проекциям моментов. Их симметричная форма носит название j -символов [21, 24, 130]. Трансформационные матрицы унитарны по своему построению. Из унитарности следуют формулы типа

$$\sum_{j_{23}} ((j_1 j_2) j_1 j_2 j_3 | j_1 (j_2 j_3) j_2 j_3) (j_1 (j_2 j_3) j_2 j_3 | (j_1 j_2) j'_{12} j_3) = \delta_{j_{12} j'_{12}}.$$

Детальная сводка соотношений, содержащих трансформационные матрицы и включающих дискретные переменные, представлена в [21].

В базисе КС трансформационные матрицы задают пересвязку моментов с использованием непрерывных переменных:

$$\begin{aligned} & \int \langle j_1 w_1 | j_2 w_2 \| j_{12} w_{12} \rangle \langle j_{12} w_{12} | j_3 w_3 \| j w \rangle d\mu_{j_{12}}(w_{12}) = \\ & = \sum_{j_{23}} ((j_1 j_2) j_1 j_2 j_3 | j_1 (j_2 j_3) j_2 j_3) \times \\ & \times \int \langle j_1 w_1 | j_{23} w_{23} \| j w \rangle \langle j_2 w_2 | j_3 w_3 \| j_{23} w_{23} \rangle d\mu_{j_{23}}(w_{23}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Естественно, что трансформационные матрицы, зависящие только от моментов, одинаковы для любого базиса группы $SU(2)$. Они могут быть представлены и через интеграл. Так, для трансформационной матрицы в (5.19), соответствующей коэффициенту Рака́, имеем

$$\begin{aligned} & ((j_1 j_2) j_1 j_2 j_3 | j_1 (j_2 j_3) j_2 j_3) = \\ & = \sum_{m_i} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} | j_3 m_3 \| j m \rangle \times \\ & \times \langle j m \| j_{23} m_{23} | j_1 m_1 \rangle \langle j_{23} m_{23} \| j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = \\ & = \int \langle j_1 w_1 | j_2 w_2 \| j_{12} w_{12} \rangle \langle j_{12} w_{12} | j_3 w_3 \| j w \rangle \times \\ & \times \langle j w \| j_{23} w_{23} | j_1 w_1 \rangle \langle j_{23} w_{23} \| j_2 w_2 | j_3 w_3 \rangle \times \\ & \times d\mu_{j_{12}}(w_{12}) d\mu_{j_2}(w_2) d\mu_{j_3}(w_3) d\mu_{j_1}(w_1) d\mu_{j_{23}}(w_{23}) d\mu_j(w). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Таким образом, исходное выражение для расчетов трансформационных матриц может быть представлено в двух эквивалентных формах через дискретные и непрерывные переменные. Сама трансформационная матрица (зависящая только от сигнатуры представления) — инвариант группы $SU(2)$. Вместе с тем она может рассматриваться как тензор $SU(3)$. Эта двойственность иллюстрируется простым примером связи между перекрытиями групп $SU(2)$ и $SU(3)$:

$$\begin{aligned}
\left| \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right|^R &= \frac{1}{(R+1)^{1/2}} {}_3\langle Ru | Rv | Rs \| 00 \rangle = \\
&= \sum_{R_1+R_2+R_3=R} \frac{R!}{R_1!R_2!R_3!} s_1^{R_1} s_2^{R_2} s_3^{R_3} \times \\
&\times \left\langle \frac{1}{2}(R_2+R_3)u_1v_1 \left| \frac{1}{2}(R_1+R_3)u_2v_2 \right| \frac{1}{2}(R_1+R_2)u_3v_3 \| 00 \right\rangle. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Индекс 3 слева снизу означает, что перекрытие относится к группе SU(3). Потеря простоты, присущей предшествующим формулам, здесь не случайна: величины, входящие в (5.21), относятся к разным группам. Эта сторона теории рассмотрена в [2, 12], где использовалось разложение 3×3 -детерминанта $|u_{ik}|$:

$$|u_{ik}|^R = [(R!)^3(R+1)]^{1/2} \sum_{\sum_k R_{ik}=1} \|R_{ik}\| \cdot \prod_{i,k=1}^3 \frac{u_{ik}^{R_{ik}}}{(R_{ik}!)^{1/2}}, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
\|R_{ik}\| &= \left\| \begin{array}{ccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{ccc} -j_1 + j_2 + j_3 & j_1 - j_2 + j_3 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

и на основе R -символов (5.23) и их соединений была построена теория jm - и j -символов в форме, ковариантной относительно группы SU(3).

Трансформационная матрица (5.20), рассматриваемая как сумма произведений четырех символов $\|R_{ik}\|$, соответствует тензору группы SU(3), содержащему четыре тройки индексов. В выражении типа (5.20) для произвольного j -символа по вторым и третьим строкам входящих в него $\|R_{ik}\|$ проводится суммирование по проекциям моментов, а из элементов первых строк может быть составлена $3 \times n$ -матрица.

Эта матрица и задает j -символ в R -представлении. Триады элементов R_{1k}^l , соответствующие R_{1k} l -го символа $\|R_{ik}\|$, образуют столбец. Каждая триада связана с тремя другими, причем связи располагаются в строке. Суть унифицированной R -формы записи наглядно видна на двух конкретных примерах $6j$ - и $9j$ -символов:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \overbrace{R_{11} \ R_{21} \ R_{31}} & \overbrace{R_{41}} & & \\ \overbrace{R_{12} \ R_{22} \ R_{32}} & \overbrace{R_{42}} & & \\ \overbrace{R_{13} \ R_{23} \ R_{33}} & \overbrace{R_{43}} & & \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \overbrace{-j_1+j_2+j_{12}} & \overbrace{-j_1+j_{23}+j} & \overbrace{j_2-j_3+j_{23}} & \overbrace{j_{12}-j_3+j} \\ \overbrace{j_1-j_2+j_{12}} & \overbrace{j_1+j_{23}-j} & \overbrace{-j_2+j_3+j_{23}} & \overbrace{j_{12}+j_3-j} \\ \overbrace{j_1+j_2-j_{12}} & \overbrace{j_1-j_{23}+j} & \overbrace{j_2+j_3-j_{23}} & \overbrace{-j_{12}+j_3+j} \end{array} \right\|, \quad (5.24)$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \overbrace{R_{11}} & \overbrace{R_{21}} & \overbrace{R_{31}} & \overbrace{R_{41}} & \overbrace{R_{51}} & \overbrace{R_{61}} \\ \overbrace{R_{12}} & \overbrace{R_{22}} & \overbrace{R_{32}} & \overbrace{R_{42}} & \overbrace{R_{52}} & \overbrace{R_{62}} \\ \overbrace{R_{13}} & \overbrace{R_{23}} & \overbrace{R_{33}} & \overbrace{R_{43}} & \overbrace{R_{53}} & \overbrace{R_{63}} \end{array} \right\|. \quad (5.25)$$

В такой форме записи учтена специфика трансформационных матриц — указана схема связи. Заметим, что если каждую триаду в R -символах (5.24), (5.25) представить точкой, сохранив линии связей, то схемы связи в этих R -символах

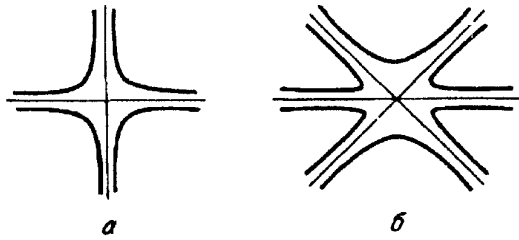


Рис. 5. Графы j -символов. a — $6j$ -символ. b — $9j$ -символ

превратятся в обычные графы теории угловых моментов. Общая форма графов для символов (5.24) и (5.25) представлена на рис. 5, a и b . Общее число симметрии в $3 \times n$ -символах равно произведению числа перестановок строк и числа симметрии соответствующей геометрической фигуры (рис. 5). Для (5.24) имеем $3! \cdot 24$ симметрии, а для (5.25) — $3! \cdot 72$ симметрии. Рис. 5 наглядно иллюстрирует добавочные $3!$ симметрии как связанные с изменением порядка нитей, приходящих в каждую вершину. В рамках данного подхода учитываются все симметрии, включая симметрию Редже [131]. Трансформационные матрицы в R -представлении можно рассматривать на языке перекрытий, j -символ (5.24) соответствует перекрытию типа

$${}_3 \langle R_1 R_{1i} | R_2 R_{2i} | R_3 R_{3i} | R_4 R_{4i} \| 00 \rangle,$$

в котором дополнительно нужно указать схему связи. Это перекрытие представляет собой тензор $SU(3)$, который можно свернуть в инвариант, используя четыре вектора типа

$$\left(\frac{R!}{R_{i1}! R_{i2}! R_{i3}!} \right)^{1/2} u_{i1}^{R_{i1}} u_{i2}^{R_{i2}} u_{i3}^{R_{i3}},$$

и записать как перекрытие

$${}_3 \langle R_1 u_1 | R_2 u_2 | R_3 u_3 | R_4 u_4 \| 00 \rangle.$$

Связь между этими перекрытиями может быть записана в стандартной форме:

$$\begin{aligned}
{}_3\langle R_1 u_1 | R_2 u_2 | R_3 u_3 | R_4 u_4 \| 00 \rangle = \\
= \sum_{R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}, R_{4i}} {}_3\langle R_1 u | R_1 R_{1i} \rangle {}_3\langle R_2 u_2 | R_2 R_{2i} \rangle \times \\
\times {}_3\langle R_3 u | R_3 R_{3i} \rangle {}_3\langle R_4 u_4 | R_4 R_{4i} \rangle \times \\
\times {}_3\langle R_1 R_{1i} | R_2 R_{2i} | R_3 R_{3i} | R_4 R_{4i} \| 00 \rangle. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Таким образом, для трансформационных матриц группы SU(2) так же, как и для коэффициентов КГ, имеем единую теорию, включающую как дискретный, так и непрерывный базис.

Возникнув в рамках группы SU(2), эта теория выходит за них и становится частью теории перекрытий группы SU(3).

5.3. О коэффициентах КГ других групп. Классический предел. Уже из краткого рассмотрения теории коэффициентов КГ группы SU(2) видны некоторые характерные особенности квантовых структур. К ним относятся: отсутствие присущей классике непроходимой грани между системой и подсистемой (коэффициенты КГ содержат симметрию не только между подсистемами $(j_1 m_1)$ и $(j_2 m_2)$, но и между ними и системой (jm) ; см. также раздел 6), возможность описания различных разбиений на подсистемы на основе групповых характеристик, несводимость квантовых структур к структурам, описываемым одной группой. Для конкретных систем (атом, ядро, молекула) также характерно наличие целой совокупности различных групп. Даже если последовательно строить объекты, исходя только из одной группы, появление других неизбежно (см. также [132]).

Как уже отмечалось, основы теории коэффициентов КГ в базисе КС, рассмотренные выше на примере SU(2), сохраняются для произвольной группы. Конкретные вычисления существенно базируются, как и в случае SU(2), на разложении единицы (M — сигнатура НП)

$$\int |Mz\rangle\langle Mz| d\mu_M(z) = \hat{1}, \quad (5.27)$$

откуда, например, следуют соотношения типа

$$\begin{aligned}
\sum_M \int |\langle M_1 u | M_2 v \| Mw \rangle|^2 d\mu_M(w) = 1, \\
\int |\langle M_1 u | M_2 v \| Mw \rangle|^2 d\mu_{M_1}(u) d\mu_{M_2}(v) = 1.
\end{aligned} \quad (5.28)$$

Вероятностный смысл коэффициентов КГ такой же, как и в случае SU(2). Значения квадрата модуля в (5.28) задает плотность вероятности по мере $d\mu_M$ того, что система находится в состоянии $|Mw\rangle$, если подсистемы находятся в состояниях $|M_1 u\rangle$ и $|M_2 v\rangle$. Для дискретных серий $D^+(M)$ группы SU(1,1) коэффициент КГ в базисе КС имеет много общего с коэффициентом КГ группы SU(2) (ср. (5.17)):

$$\langle M_1 u | M_2 v \| M w \rangle = \rho'(M_1, M_2, M) (\bar{u}_1 w_1 - \bar{u}_2 w_2)^{M_1 - \alpha} \times \\ \times (\bar{v}_1 w_1 - \bar{v}_2 w_2)^{M_2 - \alpha} (\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1)^\alpha,$$

где $M = 2j$, $2\alpha = M - M_1 - M_2 \geq 0$, M_1, M_2, M — отрицательны,

$$\rho'(M_1, M_2, M) = \left(\frac{\Gamma(-M_1 + \alpha) \Gamma(-M_2 + \alpha) \Gamma(-M - 1 + \alpha)}{\Gamma(-M_1) \Gamma(-M_2) \Gamma(-M - 1) \alpha!} \right)^{1/2}. \quad (5.29)$$

В этом случае может быть эффективно использован аппарат интегрирования по мере μ . В основе здесь лежит соотношение

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (x+1)^{-\beta} dx = B(\alpha, \beta - \alpha), \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (5.30)$$

аналогичное (5.16). При построении коэффициентов КГ и их соединений в базисе КС и в дискретном базисе применяется та же техника перекрытий, что и для группы SU(2).

Для групп SU(N) и SU(N-1,1) результаты по коэффициентам КГ в базисе КС были получены в [5, 11, 15] (см. также приложение). Аналоги соотношений (5.16), (5.30) приведены в [5]; в их правой части стоит многомерная В-функция. В основе конструкции коэффициентов КГ лежат аналоги соотношений (5.4), (5.5), которые для группы SU(3) имеют вид:

$${}_3\langle Mv | M\xi \rangle = (\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3)^M, \quad (5.31)$$

$${}_3\langle Mu | Mv | Mw \| 00 \rangle = \frac{1}{[(M+1)^2 (M+2)/2]^{1/2}} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^M.$$

При определенных значениях параметров коэффициенты КГ в базисе КС имеют классический предел. Рассмотрим переход к классическому пределу на примере группы SU(2) [15]. В угловых переменных (4.39) КС

$$|j\theta\varphi\rangle = \sum_{m=-j}^j \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{j+m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{j-m} \exp(-im\varphi) |jm\rangle. \quad (5.32)$$

Перекрытие

$$|\langle j_1 \theta_1 \varphi_1 | j_2 \theta_2 \varphi_2 \rangle| \left(\cos \frac{\theta_{12}}{2} \right)^2,$$

где θ_{12} — угол между \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , коэффициент КГ [15]

$$|\langle j_1 \theta_1 \varphi_1 | j_2 \theta_2 \varphi_2 \| j\theta\varphi \rangle| = \\ = \rho(j_1 j_2 j_3) \left(\sin \frac{\theta_{12}}{2} \right)^{j_1+j_2-j} \left(\cos \frac{\theta_{23}}{2} \right)^{-j_1+j_2+j} \left(\cos \frac{\theta_{13}}{2} \right)^{j_1-j_2+j},$$

где $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ — углы между \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , \mathbf{j}_2 и \mathbf{j}_3 , \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_3 .

$$\begin{aligned} & \text{В базисе прямого произведения } |j_1\theta_1\varphi_1\rangle \otimes |j_2\theta_2\varphi_2\rangle \\ \langle \hat{J}^2 \rangle &= j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2j_1j_2 \cos \theta_{12} = j_{\text{кл}}^2 + j_1 + j_2; \end{aligned} \quad (5.33)$$

здесь $j_{\text{кл}}$ — классический момент,

$$j_{\text{кл}}^2 = j_1^2 + j_2^2 + 2j_1j_2 \cos \theta_{12}. \quad (5.34)$$

При больших значениях j_1, j_2 среднее квадратичное отклонение $\Delta J = (j_1 + j_2)^{1/2}$ много меньше складываемых моментов, $\langle \hat{J}^2 \rangle \approx j_{\text{кл}}^2$, и мы приходим к классической формуле сложения моментов (5.34).

Когерентные коэффициенты КГ при больших j_1, j_2 существенно отличны от нуля только в области вокруг значений j, θ и φ , задаваемых классической формулой сложения моментов. Обычные коэффициенты КГ $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle$ при $j \rightarrow \infty$ быстро осциллируют [21, 133], т.е. классический предел для них не существует, что вполне естественно, так как они связывают состояния, весьма далекие от классических. В базисе: $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ дисперсия $(\Delta J)^2 = (j_1^2 - m_1^2 + j_2^2 - m_2^2 + j_1 + j_2)$, т.е., вообще говоря, того же порядка, что и $\langle \hat{J}^2 \rangle$ при любых, сколь угодно больших j_1 и j_2 .

6. Теория амплитуд вероятности

6.1. Базисы НП, вероятностные распределения, предельные теоремы. В квантовой механике квадрат модуля волновой функции $|\psi_n|^2$ задает вероятность нахождения системы в n -м состоянии, а сама функция ψ_n получила название амплитуды вероятности. О волновой функции часто писали как о вспомогательном понятии, используемом для вычисления значений различных физических величин. Однако, подобно геометрии Лобачевского, которая, с одной стороны, явилась обобщением обычной геометрии, а с другой — ее отображением, аналогом, теорию амплитуд вероятности можно рассматривать и как обобщение теории вероятностей, и как некоторую параллельную теорию, имеющую для всех своих объектов аналоги с обычной теорией вероятностей. Это исходный пункт работы [5], где представлена теория амплитуд вероятности, и ее результаты будут существенно использованы в данном разделе.

Отметим, что непосредственно по теории амплитуд вероятности до последнего времени имелось ограниченное число работ. Прежде всего следует указать на работы Фейнмана, в которых при построении интегралов по траекториям он, по-видимому, впервые дал последовательную трактовку амплитуд вероятностей как самостоятельных величин (см. [4]). В работах Маслова [134, 135] рассматривались комплексные марковские цепи и на этой основе дан вывод дискретного аналога интеграла Фейнмана и уравнения Шрёдингера. Дике (см. [19]) предложил для амплитуд вероятностей простейшую схему с двумя состояниями. Различные аспекты взаимосвязи вероятностных и теоретико-групповых характеристик обсуждались в работах [5, 11, 136, 137].

В теории амплитуд вероятности будут рассматриваться события, состоящие в том, что система находится в данном (чистом) состоянии. Это множество событий служит базой для последовательного построения теории, включая вывод основных уравнений. В принципе можно учитывать и более сложные события (типа прохождения через щель или измерения), но они носят вторичный характер и структура множества событий в этом случае сильно усложняется. Согласно [5] для теории амплитуд вероятности возникает ряд качественно новых моментов, отличающих ее от обычной теории вероятностей.

1. Если в теории вероятностей события образуют σ -алгебру [138], то в теории амплитуд — гильбертово пространство. Множеству элементарных событий отвечают элементы базиса гильбертова пространства; условие полноты множества элементарных событий $|n\rangle$ или $|y\rangle$ запишется в виде

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}, \quad \int |y\rangle\langle y| d\mu(y) = \hat{1}. \quad (6.1)$$

2. В теории вероятностей каждому элементарному событию A_n ставится в соответствие действительное неотрицательное число p_n в интервале $[0, 1]$ с условием нормировки $\sum p_n = 1$; в теории амплитуд — гиперкомплексное число $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ (действительное, комплексное, кватернион) с условием нормировки

$$\sum_n \psi_n \bar{\psi}_n = 1. \quad (6.2)$$

Задание набора $\{\psi_n\}$ означает задание состояния $|\psi\rangle$. В случае непрерывного множества элементарных состояний каждому состоянию может быть сопоставлена функция $\psi(y) = \langle y|\psi\rangle$ — плотность амплитуды вероятности по мере $d\mu(y)$.

3. В обычной теории вероятностей можно выбрать p_n таким образом, что любая случайная величина будет точно определена; например, $p_1 = 1$, тогда дисперсия

$$D(x) = \sum_n x_n^2 p_n (1 - p_n) = 0.$$

В теории амплитуд справедлив принцип неопределенности: неосуществимо событие (невозможно подобрать такие ψ_n), в результате которого все случайные величины (наблюдаемые) могут быть точно определены.

4. Если в теории вероятностей матрицы (операторы) перехода (задающие полную вероятностную картину возможных изменений при переходе от момента времени t к моменту t') образуют полугруппу, то в теории амплитуд вероятности образуют группу. Это дает возможность применения детально развитого аппарата теории групп для описания возникающего богатого набора различных структур.

5. Если в обычной теории марковских процессов используется расчетный аппарат, связанный с уравнением Колмогорова—Чепмена (обобщенным урав-

нением Маркова, для стохастического оператора эволюции), то в теории амплитуд вероятности — связанный с аналогичным уравнением для унитарного оператора эволюции. При некоторых дополнительных условиях (отсутствии скачков) вероятности перехода удовлетворяют уравнениям Фоккера—Планка—Колмогорова, а амплитуды перехода — нерелятивистскому уравнению Шрёдингера.

При последовательном построении теории амплитуд вероятности целесообразно исходить из параллелизма с мощным аппаратом обычной теории вероятностей, прежде всего с конкретными функциями распределения, а также с предельными теоремами. Здесь возникает и качественно новый аспект: полученные распределения обладают групповыми характеристиками. Наряду с построением распределений и предельных теорем теории амплитуд ниже дается вероятностная трактовка коэффициентов КГ и их соединений, а также приводятся основные положения теории марковских процессов для амплитуд вероятности. Это позволяет последовательно сформулировать общие принципы квантовой теории. Перейдем к рассмотрению конкретных распределений.

Если комплексные амплитуды ψ_i , удовлетворяющие (6.2), образуют базис фундаментального НП $D(10...0)$ группы $SU(N)$, то комплексные полиномиальные распределения

$$\Psi_M^{n_i} = \left(\frac{M!}{n_1! \dots n_N!} \right)^{1/2} \psi_1^{n_1} \dots \psi_N^{n_N}, \quad M = \sum_{i=1}^N n_i, \quad (6.3)$$

при фиксированном M образуют базис НП $D(M0...0)$. Умножая его на комплексно-сопряженное, преобразующееся по НП $D(0...0M)$, получим полиномиальное распределение для обычных вероятностей $p_i = |\psi_i|^2$, $\sum p_i = 1$:

$$\mathcal{P}_M^{n_i} = \Psi_M^{n_i} \bar{\Psi}_M^{n_i} = \frac{M!}{n_1! \dots n_N!} p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}. \quad (6.4)$$

Таким образом, симметрический базис (6.3) НП $D(M0...0)$ групп $SU(N)$ с вероятностной точки зрения является полиномиальным распределением для комплексных амплитуд.

Отрицательное биномиальное распределение

$$\mathcal{P}_n^{n_1 n_2} = \frac{(-n + n_1 - 1)!}{(-n - 1)! n_1!} p^{-n} q^{n_1} = \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n_2 + 1) n_1!} \left(\frac{1}{p} \right)^{n_2} \left(-\frac{q}{p} \right)^{n_1} \quad (6.5)$$

при целом n , $n < 0$, дает вероятность того, что до достижения успеха с номером $|n|$ будет n_1 неудач (вероятность успеха p , неудачи $q = 1 - p$). При фиксированном $n = n_1 + n_2$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \mathcal{P}_n^{n_1 n_2} = \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p} \right)^n = 1.$$

Отрицательное биномиальное распределение для комплексных амплитуд имеет вид:

$$\Psi_n^{n_1 n_2} = \left(\frac{\Gamma(-n_2)}{n_1! \Gamma(-n)} \right)^{1/2} \psi_1^{-n} \psi_2^{n_1} = \left[\frac{\Gamma(-n_2) (-1)^{n_1}}{n_1! \Gamma(-n)} \right]^{1/2} u_1^{n_1} u_2^{n_2}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{P}_n^{n_1 n_2} = \left| \Psi_n^{n_1 n_2} \right|^2, \quad u_1 = -i\psi_2/\psi_1, \quad u_2 = 1/\psi_1,$$

$$p = |\psi_1|^2 = |1/u_2|^2, \quad q = |\psi_2|^2 = |u_1/u_2|^2.$$

Так как $p + q = 1$, то $-u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2 = 1$, что представляет собой инвариант группы $SU(1,1)$; u_1 и u_2 образуют базис фундаментального неунитарного НП $D(1/2)$. При преобразованиях из $SU(1,1)$ ψ_1 и ψ_2 преобразуются дробно-линейно, а $\Psi_n^{n_1 n_2}$ и $\bar{\Psi}_n^{n_1 n_2}$ при фиксированном n образуют базис унитарных НП дискретной положительной $D^+(j)$ и отрицательной $D^-(j)$ серий соответственно. Здесь $j = n/2$, $m = (n_1 - n_2)/2$, $m = -j, -j+1, \dots$ для $D^+(j)$ и $m = j, j-1, j-2, \dots$ для $D^-(j)$. Согласно (6.5) при фиксированном $n = n_1 + n_2$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \left| \Psi_n^{n_1 n_2} \right|^2 = 1.$$

Распределение Пуассона для комплексных амплитуд имеет вид

$$\Psi_k = \frac{u^k}{(k!)^{1/2}} e^{-|u|^2/2}. \quad (6.7)$$

Домножая на $\bar{\Psi}_k$, получим обычное распределение Пуассона с параметром $|u|^2$

$$\mathcal{P}_k = \left| \Psi_k \right|^2 = \frac{|u|^{2k}}{k!} e^{-|u|^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Psi_k \right|^2 = 1.$$

Ψ_k образуют базис унитарного бесконечномерного НП группы Гейзенберга. Аналогично случаю обычных вероятностей распределение Пуассона для амплитуд может быть получено из биномиального распределения для комплексных амплитуд. Если для вероятностей p_k имеем при $n \rightarrow \infty$, фиксированном $a = np$ и конечном k ($k \ll n$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k^{k, n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = a^k e^{-a}/k!,$$

то для амплитуд $\psi_k = |\psi_k| e^{i\varphi_k}$ при фиксированном $|u|^2 = |\psi_1|^2 n$ и больших n ($k \ll n$) имеем

$$\Psi_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \psi_1^k \psi_2^{n-k} \rightarrow \frac{u^k}{\sqrt{k!}} e^{-|u|^2/2} e^{i\varphi_2 n},$$

$$u = |\psi_1| n^{1/2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Среди распределений теории вероятностей особую роль играет нормальное распределение, являющееся, в частности, предельным случаем многих дискретных распределений. Плотность нормального распределения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\rho^2(x, x_0)/2\sigma^2} \quad (6.8)$$

монотонно и быстро убывает с увеличением расстояния ρ до точки максимума x_0 . Свойство убывания квадрата модуля плотности пропорционально $\exp(-\rho^2)$ и является общим свойством аналогов нормального распределения для амплитуд вероятности. В теории представлений групп им отвечают КС. Функции перекрытия КС $\langle u|z \rangle$ наименее "размазаны" по однородному пространству и представимы в виде

$$|\langle u|z \rangle|^2 = \exp(-\rho^2(u, z)), \quad (6.9)$$

где $\rho(u, z)$ — инвариантная относительно групповых преобразований симметрика [16]; $\rho(u, z) \geq 0$, $\rho(u, z) = \rho(z, u)$, $\rho(u, z) = 0$ только при $u = z$ (симметрика отличается от метрики (расстояния) возможностью невыполнения правила треугольника).

Функция перекрытия КС $\langle u|z \rangle$ представляет собой аналог нормального распределения в теории амплитуд вероятности. Для группы Гейзенберга квадрат перекрытия КС

$$|\langle u|z \rangle|^2 = \exp|z - u|^2 = \exp[-(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2], \quad (6.10)$$

$$u = x + iy, \quad z = x_1 + iy_1,$$

соответствует обычному двумерному нормальному распределению,

$$\int |\langle z|u \rangle|^2 d^2u/\pi = 1.$$

Для сжатых состояний согласно (4.29) квадрат перекрытия обобщенных КС соответствует двумерному нормальному распределению с различной дисперсией по различным направлениям в однородном пространстве.

Квадрат перекрытия КС $SU(2)$ согласно (4.43) дается соотношением

$$|\langle \theta_1 \varphi_1 | \theta_2 \varphi_2 \rangle|^2 = \exp(-\rho^2(\theta_1, \varphi_1; \theta_2, \varphi_2)) = [\cos(\theta_{12}/2)]^{2j},$$

где θ_{12} — угол между векторами, определяемыми состояниями $|\theta_1 \varphi_1 \rangle$ и $|\theta_2 \varphi_2 \rangle$. При больших j квадрат модуля перекрытия (с учетом $d\mu_j$ (4.39)) приближается к нормальному распределению. Характерно, что рассмотренные выше дискретные и непрерывные распределения для амплитуд являются базисами НП групп Ли.

Так же, как и в обычной теории вероятностей, в теории амплитуд важную роль играют закон больших чисел и предельные теоремы. Рассмотрим аналог закона больших чисел для совокупности наблюдаемых (случайных величин) или, иными словами, для состояния системы в целом. КС, параметризующиеся точками фазового пространства, в классическом пределе становятся ортогональными друг другу. Это явно видно из перекрытий КС (4.22), (4.36), (4.43). В пределе больших квантовых чисел ($j \rightarrow \infty$ или $|z| \rightarrow \infty$ в рассмотренных выше примерах) средние квадратичные отклонения случайных величин в КС становятся пренебрежимо малыми по сравнению с их математическими ожиданиями.

Закон больших чисел имеет место и для распределений, описывающих характеристики системы при сложении подсистем, — для коэффициентов КГ. Обычные коэффициенты КГ $\langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \rangle$ группы $SU(2)$ при $j \rightarrow \infty$ быстро осциллируют, поскольку они связывают состояния, весьма далекие от классических. Коэффициенты КГ в базисе КС при больших j существенно отличны от нуля только в области вокруг значений j, θ, φ , определяемых классической формулой сложения моментов, которая и получается в пределе $j_1, j_2 \rightarrow \infty$. Таким образом, обсуждавшиеся в разделах 4,5 вопросы перехода к классическому пределу приобретают прозрачный вероятностный смысл.

Для распределений, связанных с КС, могут быть установлены свои предельные теоремы. В [15, 16] рассмотрены КС $|Mz_1 \dots z_{N+1}\rangle$ симметричных НП групп $SU(N+1)$ и $SU(N,1)$ и с помощью преобразования $\alpha^i = z_i/z_N$ сделан переход соответственно к N -мерному проективному пространству $P_N(\mathbb{C})$ или открытому шару $D_N(\mathbb{C})$; показано, что при больших M (кривизна пространства — $1/M$) перекрытие КС отлично от нуля только при малых $\Delta\alpha^i$ и может быть представлено в виде многомерного нормального распределения

$$\langle M\alpha | M\alpha' \rangle = \exp(-\rho^2) \approx \exp(-g_{ik} \Delta\alpha^i \Delta\bar{\alpha}^k), \quad \Delta\alpha^i = \alpha' - \alpha. \quad (6.11)$$

Возможна простая геометрическая трактовка (6.11): если распределение отлично от нуля лишь в малой окрестности точки α (а в малой области пространство можно считать плоским), то и соответствующие КС переходят в КС плоского фазового пространства (КС группы Гейзенберга).

Из закона больших чисел для КС, соответствующего тому, что $\langle M\alpha | M\beta \rangle$ с точностью до нормировочного множителя в мере $d\mu$ при $|M| \rightarrow \infty$ обращается в $\delta(\alpha - \beta)$, следует первый принцип соответствия. Используя формулу умножения символов (4.66), с точностью до членов порядка $1/M$ получим соотношение для математических ожиданий \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}[AB] = \mathcal{M}[BA] = \mathcal{M}[A]\mathcal{M}[B], \quad (6.12)$$

где A и B — случайные величины, соответствующие генераторам группы. Из возможности записи перекрытий в виде (6.11), т.е. из предельных теорем для КС следует, что при больших $|M|$ коммутатор переходит в скобку Пуассона (второй принцип соответствия) [16]:

$$\mathcal{M}[AB - BA] = g^{ik} \left(\frac{\partial A(\alpha, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}^k} \frac{\partial B(\alpha, \bar{\alpha})}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial A(\alpha, \bar{\alpha})}{\partial \alpha^i} \frac{\partial B(\alpha, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}^k} \right); \quad (6.13)$$

$\|g^{ik}\| = \|g_{ik}\|^{-1}$, $A(\alpha, \bar{\alpha}) = \mathcal{M}(A)$, $B(\alpha, \bar{\alpha}) = \mathcal{M}(B)$ — функции на однородном пространстве.

Таким образом, закону больших чисел и предельным теоремам теории амплитуд в квантовой механике отвечают первый и второй принципы соответствия. Как видим, построение общей теории распределений для амплитуд вероятности представляется весьма актуальной задачей.

6.2. Коэффициенты КГ как аналог гипергеометрического распределения. В теории групп коэффициенты КГ связывают различные базисы и задают переразложение вероятностных распределений, соответствующих этим базисам. Гипергеометрическое распределение в обычной теории вероятностей

$$\left\{ \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_1^2 & n_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{C^{n_1^1 n_2^1} C^{n_1^2 n_2^2}}{C^{n_1 n_2}} = \frac{n_1^1! n_2^1! n_1^2! n_2^2!}{n_1! n_1^1! n_1^2! n_2^1! n_2^2!} \quad (6.14)$$

$$n_i = n_i^1 + n_i^2, \quad n^i = n_1^i + n_2^i, \quad n = \sum_{i,k} n_k^i$$

задает переразложение биномиальных распределений

$$\mathcal{P}_{n^1}^{n_1^1 n_2^1} \mathcal{P}_{n^2}^{n_1^2 n_2^2} = \left\{ \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_1^2 & n_2^2 \end{matrix} \right\} \mathcal{P}_n^{n_1 n_2} \quad (6.15)$$

и является аналогом коэффициента группы $SU(2)$ в теории комплексных амплитуд. Анализ взаимосвязи с гипергеометрическим распределением и его обобщениями являлся частью проблемы соотношения классических и квантовых свойств, позволяет понять вероятностный смысл симметрии коэффициентов КГ.

Гипергеометрическое распределение

$$\left\{ \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_1^2 & n_2^2 \end{matrix} \right\}$$

определяется как вероятность того, что в выборке из $n^1 = n_1^1 + n_2^1$ предметов из общей совокупности

$$n = \sum_{i,k} n_k^i$$

предметов, где имеется $n_1^1 = n_1^1 + n_1^2$ предметов со свойствами A и $n_2^1 = n_2^1 + n_2^2$ предметов со свойством \bar{A} , окажется n_1^1 предметов со свойством A . Численное значение гипергеометрического распределения не меняется при перестановке строк и столбцов, а также при транспонировании.

Распределение (6.14) допускает простое обобщение на случай, когда общее число свойств равно I , а число совокупностей объектов, на которые разбита исходная, равно K . Вероятность наличия в k -й совокупности n_k^i объектов со свойствами i ($i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$) дается соотношением:

$$\{n_k^i\} = \left\{ \begin{matrix} n_1^1 \dots n_I^1 \\ \dots \dots \dots \\ n_1^k \dots n_I^k \end{matrix} \right\} = \frac{\prod_i n_i^1! \prod_k n_k^1!}{n! \prod_{i,k} n_k^i!} = \{n_k^i\}. \quad (6.16)$$

Численное значение многомерного гипергеометрического распределения не меняется как при перестановке строк и столбцов, так и при транспонировании. Последнее означает, что свойство принадлежать данной выборке с вероятностной точки зрения ничем не отличается от свойств самих предметов. Условие нормированности распределения (6.16) имеет вид

$$\sum_{n_k^i} \{n_k^i\} = 1, \quad 0 < \{n_i^k\} \leq 1. \quad (6.17)$$

Суммирование ведется при фиксированных суммах строк и столбцов матрицы $\|n_k^i\|$, $n_i = \sum_k n_k^i$, $n^k = \sum_i n_k^i$.

Отметим свойство сворачиваемости K гипергеометрического распределения в распределение $K-1$

$$\sum_{\alpha^i} \{n_1^i \dots n_{K-1}^i - \alpha^i, \alpha^i\} = \{n_1^i \dots n_{K-1}^i\}, \quad (6.18)$$

которое играет важную роль в теории гипергеометрических функций многих переменных (см. раздел 7); оно может быть доказано и при нецелых n_k^i . Суммирование здесь ведется при фиксированном $\alpha = \sum \alpha_i$. С вероятностной точки зрения (6.18) отвечает объединению элементов K -й и $K-1$ -й совокупности в одну.

Аналогично тому, как гипергеометрическое распределение возникало при переразложении биномиальных, коэффициенты КГ задают пересвязку базисов НП — комплексных биномиальных распределений. Новый момент — появление параметра $\alpha = j_1 + j_2 - j$, отвечающего свертке базисных функций $D(j_1)$ и $D(j_2)$ в инвариант $(\psi_1 \psi'_2 - \psi'_1 \psi_2)^\alpha = 1$ [5, 137]. Симметризации ($\alpha = 0$) отвечает обычное гипергеометрическое распределение в степени $1/2$.

В теории вероятностей задача о нахождении характеристик системы при сложении подсистем, в отличие от задачи о выборке (о разбиении на подсистемы), имеет тривиальное решение: свойства целой системы однозначно определяются свойствами складываемых подсистем. В теории амплитуд вероятности задачи о выборке и о сложении подсистем ("сложении моментов") эквивалентны; их решение дается соответствующими коэффициентами КГ. В простейшем случае двух свойств A и \bar{A} — это коэффициенты КГ группы $SU(2)$. Запишем их в виде символа Редже

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2j^2 - \alpha & 2j^1 - \alpha & \alpha \\ n_1^1 & n_2^1 & 2j_2 - \alpha \\ n_1^2 & n_2^2 & 2j_1 - \alpha \end{array} \right\| = \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle \frac{(-1)^{-j_1 + j_2 - \alpha - m}}{(2j + 1)^{1/2}}, \quad (6.19)$$

где $j = j_1 + j_2 - 2\alpha$, $m = m_1 + m_2$, $n_1^i + n_2^i = 2j_i$, $n_1^1 + n_1^2 = 2j^1$, $n_2^1 + n_2^2 = 2j^2$, $n_1^1 - n_2^1 = 2m_1$

Имеется глубокая аналогия между симметриями коэффициентов КГ и гипергеометрического распределения. Перестановка перемножаемых представлений $D(j_1)$ и $D(j_2)$ соответствует перестановке двух частей разбиения исходной

совокупности объектов. Изменению знака проекций моментов соответствует перестановка нумерации внутренних свойств совокупности; транспонирование символа Редже, — транспонированию матрицы гипергеометрического распределения (эта симметрия связана с тем, что разбиение совокупности объектов по их внутренним свойствам с вероятностной точки зрения ничем не отличается от разбиения, производимого с помощью выборки). Симметрия коэффициентов КГ, соответствующая перестановке результирующего представления с одним из перемножаемых (т.е. симметрия, связанная с эквивалентностью задач о выборке и о разбиении на подсистемы), аналога не имеет. При добавлении этой симметрии к симметриям гипергеометрического распределения последовательным применением транспонирования и перестановок можно получить 72 симметрии Редже коэффициентов КГ группы SU(2). Как видно из (6.19), сама матрица гипергеометрического распределения может рассматриваться как часть символа Редже.

Отрицательное гипергеометрическое распределение задается как пересвязка отрицательных биномиальных. Соответствующая формула совпадает с (6.15), однако здесь n_2^i — отрицательные, $|n_2^i| > n_1^i$, n_1^i — целые положительные. Отрицательное гипергеометрическое распределение может быть определено как условная вероятность. А именно, если выборка из $|n_2|$ элементов производится до тех пор, пока число элементов со свойством A не достигнет фиксированного числа $|n_1|$, то вероятность того, что число элементов со свойством \bar{A} в выборке будет n_1^1 , равна

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_1^2 & n_2^2 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-n^1 + n_1^1 - 1)!(-n^2 + n_1^2 - 1)!(-n - 1)!n_1!}{(-n^1 - 1)!n_1^1!(-n^2 - 1)!n_1^2!(-n + n_1 - 1)!} = \\ &= \left\{ \begin{matrix} n_1^1 & -n^1 - 1 \\ n_1^2 & -n^2 - 1 \end{matrix} \right\} \frac{-n - 1}{-n_2 - 1}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Коэффициенты КГ группы SU(1,1) $\langle j_1^+ m_1 | j_2^+ m_2 \| j^+ m \rangle$ задают пересвязку отрицательных биномиальных распределений для комплексных амплитуд, т.е. являются аналогом отрицательного гипергеометрического распределения. Коэффициенты КГ для дискретной серии SU(1,1) могут быть выражены через коэффициенты КГ SU(2) согласно (2.36) и записаны в виде символа Редже [5]:

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle &= \left\| \begin{matrix} -n - \alpha - 2 & n_1 - \alpha & \alpha \\ n_1^1 & -n^1 - \alpha - 1 & -n_2^2 - 1 \\ n_1^2 & -n^2 - \alpha - 1 & -n_1^1 - 1 \end{matrix} \right\| \times \\ &\quad \times (-n - 1 + 2\alpha)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$j_i = \frac{n_1^i + n_2^i}{2}, \quad m_i = \frac{n_1^i - n_2^i}{2}, \quad j = j_1 + j_2 - \alpha.$$

6.3. Марковские процессы. Уравнение Шрёдингера. Теория марковских процессов составляет основу для описания как стохастических, так и квантовомеханических процессов. Марковский процесс для амплитуд вероятности, аналогично случаю обычных вероятностей, определяется как процесс без последствия: состояние системы в некоторый момент времени зависит лишь от того, в каком состоянии она находилась в непосредственно предшествующий момент t , и не зависит от того, в каком состоянии она находилась в более ранние моменты времени $\tau < t$.

Рассмотрим параллельно, следуя [5], стохастические и квантовые марковские процессы. В случае конечного или счетного состояний

$$p_k(t) = p_k^i(t, t_0)p_i(t_0), \quad p_k^i(t, t) = \delta_k^i, \quad (6.22)$$

$$\psi_k(t) = u_k^i(t, t_0)\psi_i(t_0), \quad u_k^i(t, t) = \delta_k^i, \quad (6.23)$$

где $p_k^i(t, t_0)$ ($u_k^i(t, t_0)$) — условные вероятности (амплитуды) перехода из i -го состояния в k -е, $t > t_0$. Из условий нормированности $\sum p_i = 1$, $p_i \geq 0$ и $\sum |\psi_i|^2 = 1$ следует

$$\sum_k p_k^i = 1, \quad p_k^i \geq 0, \quad \sum_k \bar{u}_i^k u_l^k = \delta_{il},$$

т.е. $\|p_k^i\|$ — стохастическая матрица (сумма элементов строки равна единице), $U = \|u_k^i\|$ — унитарная $U^+ = U^{-1}$. Произведение стохастических матриц дает снова стохастическую матрицу, произведение унитарных — унитарную. Однако если обратная матрица $U^{-1}(t, t_0) = U^+(t, t_0)$ всегда существует, то этого нельзя сказать об обратной матрице $\|p_k^i\|^{-1}$. Матрицы $\|u_k^i\|$ образуют группы $U(N, K)$ ($K = R, C, H$ соответственно для действительных, комплексных, кватернионных амплитуд), стохастические $\|p_k^i\|$ составляют полугруппу. Амплитуды ψ_i образуют базис фундаментального НП $D(10...0)$ группы $U(N, K)$, матрицы $\|u_k^i\|$ являются матрицами конечных преобразований этих НП.

Поскольку обратный оператор для амплитуд существует, то зная оператор эволюции и состояние $\psi(t)$ системы в настоящий момент, можно восстановить прошлое, т.е. марковский процесс для амплитуд симметричен относительно прошлого и будущего. Для стохастических процессов можно узнать будущее, зная оператор перехода и состояние системы, но восстановить прошлое невозможно. Особенно наглядно это видно на примере матрицы перехода $\|p_k^i\|$, $p_1^1 = 1$, остальные $p_k^i = 0$. При переходе на 1 шаг, каково бы ни было предшествующее состояние, получим $p_1 = 1, p_i = 0$ при $i \neq 1$, т.е. информация о предшествующем состоянии теряется полностью.

В общем случае уравнения (6.22), (6.23) можно представить в операторной форме

$$p(t) = \hat{P}(t, t_0)p(t_0), \quad (6.24)$$

$$\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0). \quad (6.25)$$

Из условий нормировки для p и ψ следует, что $\hat{P}(t, t_0)$ — стохастический оператор, $\hat{U}(t, t_0)$ — унитарный. Так как для марковских процессов будущее не зависит от прошлого при известном настоящем, то операторы перехода должны удовлетворять уравнениям

$$\hat{P}(t, t_0) = \hat{P}(t, \tau) \hat{P}(\tau, t_0), \quad (6.26)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, \tau) \hat{U}(\tau, t_0). \quad (6.27)$$

Это обобщенные уравнения Маркова, которые в различных случаях (дискретные и непрерывные процессы, цепи для вероятностей и амплитуд) имеют много названий: уравнения Маркова, Смолуховского, Колмогорова—Чепмена, уравнения для амплитуд вероятностей и т.д.

Разлагая $\hat{P}(t + \Delta t, t)$ и $\hat{U}(t + \Delta t, t)$ в ряд по Δt и ограничиваясь линейными членами $\hat{\Lambda} \Delta t$ и $\hat{H} \Delta t$, в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(t, t_0) = \hat{\Lambda}(t) \hat{P}(t, t_0), \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{H}^+ = -\hat{H}. \quad (6.29)$$

Уравнения для $p(t)$ и $\psi(t)$ аналогичны:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t) = \hat{\Lambda} p(t), \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t). \quad (6.31)$$

Ниже мы рассматриваем $\hat{P}(t, t_0)$ и $\hat{U}(t, t_0)$, не зависящие от $p(t_0)$ и $\psi(t_0)$. Нелинейные комплексные цепи с неаддитивной амплитудой изучались в [135]. При конечном или счетном числе состояний (6.30) и (6.31) записываются в матричной форме (т.е. правая часть представляет собой сумму)

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k = \lambda_k^i p_i, \quad \Lambda = \|\lambda_k^i\|, \quad \sum_k \lambda_k^i = 0, \quad \lambda_k^i \geq 0 \quad (i \neq k),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_k = h_k^i \psi_i, \quad H = \|h_k^i\|, \quad H^+ = -H.$$

В случае непрерывных процессов (6.26)—(6.31) могут быть записаны в интегральной форме. Для одномерного непрерывного марковского процесса имеем

$$\psi(x, t) = \int u(x, t | x', t_0) \psi(x', t_0) dx', \quad (6.32)$$

$$u(x, \tau | x_0, t_0) = \int u(x, \tau | x', t) u(x', t | x_0, t_0) dx', \quad (6.33)$$

что аналогично уравнениям теории вероятностей с точностью до замены $\psi(x, t) \rightarrow p(x, t)$, $u(x, \tau | x_0, t) \rightarrow p(x, \tau | x_0, t)$. Здесь $u(x, \tau | x_0, t)$ — условная плотность (плотность амплитуды перехода).

Воспользуемся (6.32) и (6.33) для нахождения явного вида $\hat{\Lambda}$ и \hat{H} . Положим в (6.33) $\tau = t + \Delta t$. Плотности перехода $p(x | x')$ и $u(x | x')$ представим как интегралы Фурье от условной характеристической функции

$$\begin{aligned}
p(\Omega|x') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega(x-x')} p(x|x') dx, \\
u(\tilde{p}|x') &= \frac{\langle \tilde{p} | \hat{U} | x' \rangle}{\langle \tilde{p} | x' \rangle} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \tilde{p} | x \rangle \langle x | \hat{U} | x' \rangle}{\langle \tilde{p} | x' \rangle} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{p}(x-x')} u(x|x') dx.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Последняя формула показывает, что условная характеристическая функция $u(\tilde{p}|x')$ есть не что иное, как pq - (или px -) — символ оператора \hat{U} . Разлагая затем характеристическую функцию в ряд Тейлора по степеням Ω или импульса \tilde{p} и устремляя Δt к нулю, получим для операторов $\hat{\Lambda}$ [139, 140] и \hat{H} [5]

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t), \quad \hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} A_n(x, t), \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \hat{\Lambda} p(x, t), \quad \hat{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x, t), \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - x')^n u(x, t + \Delta t | x', t) dx, \quad n \geq 1, \\
A_0 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [u(x, t + \Delta t | x', t) - u(x, t | x', t)] dx,
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$K_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - x')^n p(x, t + \Delta t | x', t) dx. \tag{6.38}$$

При условии, что все коэффициенты при $n > 2$ равны нулю, мы получаем уравнения Фоккера—Планка и Шрёдингера

$$\hat{\Lambda}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x} a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, t), \tag{6.39}$$

где $b(x, t) = K_2(x, t) \geq 0$ — коэффициент диффузии, $a(x, t) = K_1(x, t)$ — коэффициент сноса,

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{i}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} A_1(x, t) + A_0(x, t), \tag{6.40}$$

где $m = i/A_2$ — масса частицы, а через $A_1(x, t)$ и $A_0(x, t)$ выражаются потенциалы поля. Для любого непрерывного процесса можно доказать, что либо отличны от нуля только первые два коэффициента K_n , либо бесконечно много (а именно — все четные [139]). Т.е. имеется альтернатива: либо уравнение не выше второго порядка (такие процессы называются диффузионными), либо бесконечного (несколько примеров таких процессов можно найти в [140, 141]). В теории амплитуд аналогичное утверждение не доказано, хотя и представляется достаточно правдоподобным.

Рассмотрение процессов, описываемых уравнениями второго порядка, эквивалентно рассмотрению процессов, удовлетворяющих условиям соответственно для вероятностей [142] и амплитуд [5]:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \geq \delta} p(y, t | x, t - \Delta t) dy = 0, \quad (6.41)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \geq \delta} u(y, t | x, t - \Delta t) dy = 0. \quad (6.42)$$

Эти условия делают маловероятными большие смещения (скачки). Мы будем называть такие процессы процессами с малыми приращениями или процессами без скачков. Условие малости приращений приводит соответственно к диффузионным процессам или к нерелятивистской квантовой механике. (Отметим, что в математической литературе (6.41) называется также условием усиленной непрерывности [143] или условием Линдеберга [142] ввиду сходства с условием применимости центральной предельной теоремы.)

Уравнение (6.35) относится к описанию процессов со скачками, т.е. связанных с переходами между различными стационарными состояниями, излучением и поглощением. Условия, которым должны удовлетворять коэффициенты A_n , могут быть установлены на основе (6.37). Общее исследование уравнения (6.35) достаточно сложно. Интересная возможность нахождения его точных решений связана с записью \hat{H} через операторы деформированных (в том числе квантовых) алгебр типа операторов сдвига (3.45).

В случае конечного или счетного состояний аналог условия малости приращений

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{k, |i-k| > 1} p_k^i(t | t - \Delta t) &= 0, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{k, |i-k| > 1} u_k^i(t | t - \Delta t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

означает возможность перехода за малое Δt только в соседние состояния, т.е. рассмотрение задачи об одномерном случайном блуждании.

В [142] отмечалось, что "теория полугрупп приводит к цельной теории марковских процессов, что недостижимо при других методах". Переходная функция (вероятность перехода) марковского процесса порождает полугруппу операторов. Знание инфинитезимального оператора полугруппы (или, что то же самое, процесса) позволяет найти важные характеристики процесса; более того, вопросы классификации марковских процессов сводятся к описанию соответствующих им инфинитезимальных операторов [144, 145].

Классификация марковских процессов для амплитуд связана с классификацией групп или соответствующих им алгебр Ли. В случае процессов со счетным (конечным) числом состояний амплитуды перехода при $\Delta t \rightarrow 0$

$$u_j^i = \delta_j^i + h_j^i \Delta t, \quad h_j^i = -\bar{h}_i^j,$$

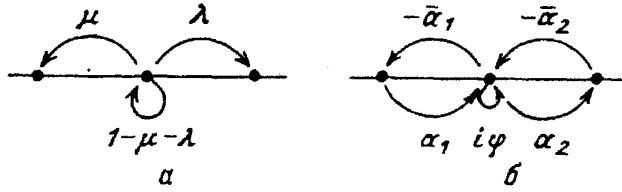


Рис. 6. Вероятности и амплитуды перехода в задаче о случайном блуждании

или в матричной форме записи $U(t + \Delta t, t) = E + H\Delta t$, $H^+ = -H$, $H = \|h_j^i\|$. Классификация процессов здесь сводится к классификации матричных унитарных НП групп Ли.

Рассмотрим одномерные процессы для комплексных амплитуд, удовлетворяющие условию (6.43). Им отвечают многоуровневые системы с переходами между соседними уровнями: в инфинитезимальный оператор процесса (гамильтониан) входят амплитуды перехода h_k^i только с $|i - k| \leq 1$, т.е. матрица $\|h_k^i\|$ трехдиагональна. Алгебра инфинитезимальных операторов процесса (алгебра Ли) состоит из трех операторов: повышающего \hat{E}_+ , понижающего \hat{E}_- и номера уровня (числа частиц) \hat{H} , отвечающего за изменение фазы состояния, удовлетворяющего (2.1). Блужданию по отрезку отвечают преобразования конечномерного НП $D(j)$ группы $SU(2)$, по полупрямой — $D^\pm(j)$ $SU(1,1)$ или $D(\omega)$ $W(1)$, по прямой — НП основной серии $SU(1,1)$ или $D(p)$ группы $M(2)$ (подробнее см. [5]).

Плотности переходов для дискретных процессов, удовлетворяющих (6.43), в наглядном виде представлены на рис. 6. Если схематически проделать предельный переход к непрерывному процессу, то получим, что коэффициент диффузии $K_2 \sim \lambda + \mu - (\lambda - \mu)^2$, сноса $K_1 \sim \lambda - \mu$ [140], масса обратно пропорциональна амплитуде перехода в соседнее состояние, $m \sim 1/\text{Im } \alpha$, а потенциал $A_0 \sim \partial\varphi/\partial t$ [5].

Если процесс не является процессом с малым приращением, то наряду с операторами перехода \hat{E}_\pm необходимо рассматривать операторы $\hat{E}_{2\pm}$, $\hat{E}_{3\pm}$ и т.д., т.е. уже не конечномерные алгебры Ли, а алгебры Каца—Муди или деформированные алгебры.

6.4. О постулатах квантовой теории. На основе теории амплитуд вероятности могут быть сформулированы постулаты квантовой теории [5]. Эта формулировка, тесно связанная с предложенной фон Нейманом (см. [1, 121]), включает в себя нерелятивистскую квантовую механику как частный случай и состоит из четырех положений.

I. Процесс изменения состояния квантовой системы является марковским процессом.

II. Состояния квантовой системы находятся во взаимнооднозначном соответствии с совокупностями ненулевых векторов гильбертова пространства, различающихся лишь множителем.

III. Нормированные векторы состояний $|\psi\rangle$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с амплитудами вероятности ψ . Если имеет место разложение единицы $\int |y\rangle\langle y| d\mu(y) = \hat{1}$, то $\psi(y) = \langle y|\psi\rangle$.

IV. Наблюдаемые находятся во взаимно однозначном соответствии со случайными величинами с действительным математическим ожиданием.

Далее могут быть заданы дополнительные условия, которые выполняются для широкого класса процессов, но не являются обязательными. Сформулируем два утверждения.

1. Амплитуда перехода не зависит от ψ . В этом случае эволюция описывается линейными уравнениями.

2. Амплитуда перехода не зависит от ψ , а процесс изменения состояния есть процесс с малыми приращениями для комплексных амплитуд. В этом случае эволюция описывается нерелятивистским уравнением Шрёдингера.

В общем случае, согласно постулатам I—III, эволюция состояния может быть описана на двух языках: операторов, действующих в абстрактном гильбертовом пространстве, и переходных амплитуд:

$$\hat{U}(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle = |\psi(t_2)\rangle, \quad \hat{U}(t, t) = \hat{1}, \quad (6.44)$$

$$\int u(x, t_2|y, t_1)\psi(y, t_1)d\mu(y) = \psi(x, t_2), \quad u(x, t|y, t) = \delta(x - y).$$

Мы пишем здесь для краткости y , подразумевая $y = \{y_i\}$. Для случая плоского пространства

$$d\mu(y) = \prod_i dy_i.$$

Из постулата I следует уравнение для оператора эволюции или обобщенное уравнение Маркова для амплитуд:

$$\hat{U}(t_3, t_1) = \hat{U}(t_3, t_2)\hat{U}(t_2, t_1), \quad (6.45)$$

$$\int u(z, t_3|y, t_2)u(y, t_2|x, t_1)d\mu(y) = u(z, t_3|x, t_1).$$

Так как $\psi(x, t)$ — амплитуда вероятности, то норма $\int \psi(x, t)\bar{\psi}(x, t)d\mu(x)$, а значит, и $\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle$ должны сохраняться со временем, отсюда $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$, т.е. \hat{U} — унитарный оператор.

Далее, основываясь на соотношениях (6.44) и (6.45), с помощью разложения $\hat{U}(t, t - \Delta t)$ и $u(y, t|x, t - \Delta t)$ при малых Δt можно перейти к уравнению Шрёдингера (6.31) или интегралу по траекториям.

Постулат IV позволяет определить классический предел как случай, когда математические ожидания случайных величин много больше их дисперсий. Закон больших чисел и предельные теоремы теории амплитуд вероятности, с которыми связаны первый и второй принципы соответствия, задают условия перехода к классическому пределу. На языке теории операторов в гильбертовом пространстве IV означает требование соответствия линейных самосопряженных операторов наблюдаемым.

Согласно II и III, состоянию отвечает набор амплитуд, различающихся лишь фазовым множителем; в случае комплексных амплитуд — это множитель $e^{i\varphi}$, кватернионных — $e^{i\varphi_1 + j\varphi_2 + k\varphi_3}$. Выбором типа амплитуд мы, по существу, задаем калибровочную группу. Для комплексных амплитуд это калибровочная группа $U(1)$ электромагнитного взаимодействия, для кватернионных (отвечающих частицам со спином $1/2$) — группа $U(1, \mathbf{H}) = SU(2)$.

Требование сохранения нормировки ψ приводит к классификации состояний по унитарным НП групп симметрии; для некомпактных групп унитарные НП бесконечномерны. Известно, что частице со спином S отвечают, с одной стороны, унитарные бесконечномерные НП $D(SM)$ группы Лоренца [146, 147], с другой — неунитарные конечномерные (по которым преобразуется ψ в релятивистских волновых уравнениях), т.е. допускаются два различных описания. Не исключено, что релятивистские уравнения для неунитарных НП являются уравнениями для эволюции КС, связанных с группами Лоренца $SO(3,1) \sim \sim SL(2, \mathbf{C})$ и Пуанкаре $M(3,1)$ (аналогично уравнению первого порядка на спинор $\{z_1, z_2\}$, $|z_2|^2 - |z_1|^2 = 1$ группы $SU(1,1)$, возникающему как уравнение для эволюции КС дискретных унитарных серий бесконечномерных НП $SU(1,1)$; см. раздел 4.3). В связи с этим представляется весьма актуальной задача построения теории КС и символов операторов групп $SL(2, \mathbf{C})$ и $M(3,1)$.

В релятивистской теории одним из путей сохранения вероятностной интерпретации является введение собственного времени и рассмотрение уравнений первого порядка по $\partial/\partial\tau$; однако в отличие от уравнения Дирака с собственным временем [148] (которое, кстати, весьма удобно использовать при переходе к классическому пределу [15, 101]) ψ должно преобразовываться не по конечномерному, а по бесконечномерному унитарному НП группы $M(3,1)$.

Основным уравнением теории является (6.45), выражающее марковское свойство процесса. При наложении конкретных условий на амплитуду перехода или меру $d\mu$ из него могут быть получены различные дифференциальные уравнения. Уравнения квантовой механики в искривленном пространстве получаются при рассмотрении процессов с малыми приращениями на действительных и комплексных многообразиях с метрическим тензором g_{ik} и $g_{i\bar{k}}$ соответственно:

$$d\mu(x) = (\det g_{ik})^{1/2} \prod_n \wedge dx^n, \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

$$d\mu(z) = \det g_{i\bar{k}} \prod_n dz^n \wedge d\bar{z}^n, \quad ds^2 = g_{i\bar{k}} dz^i d\bar{z}^k.$$

Если не накладывать условия независимости амплитуд перехода от ψ , т.е. считать ее функцией $\psi, u(x, t | x_0, t_0, \psi(x_0, t_0))$, то для случая процессов с малыми приращениями возникают уравнения нелинейной квантовой механики типа нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta |\psi|^2 \psi.$$

Для вывода уравнений удобно использовать аппарат условных характеристических функций (или, что то же самое, pq -, qp - и вейлевских символов операторов).

7. Квантовая теория, группы и специальные функции

7.1. Группы и специальные функции. При решении задач квантовой механики обычно возникают специальные функции. О них можно говорить как о некоторой основе расчетного аппарата. В этом плане важно установление соответствия с групповым и вероятностным описанием квантовой механики, своего рода "перевод" с языка специальных функций на групповой и вероятностный языки

С групповой точки зрения в теории спецфункций в один тугой узел, переплетается комплекс проблем, связанных с представлениями, коэффициентами КГ, алгебрами Ли, КС, разностными исчислениями. Однако длительное время развитие теории спецфункций шло независимо от групповых методов и было получено практически необозримое количество конкретных формул [92, 117, 149], без которых невозможно представить современную физику. Связь между спецфункциями и представлениями групп была открыта Картаном, а систематическое изложение теории спецфункций с групповой точки зрения впервые дано Виленкиным [7] (см. также [150, 151]). В этой проблеме можно выделить три качественных момента.

Во-первых, спецфункции появляются в теории как матричные элементы $t_{mn}^l(g)$ матриц конечных преобразований (l — сигнатура НП). Их дискретные индексы соответствуют m и n , непрерывные переменные — параметрам g группы, например, матричные элементы $SU(2)$ и $SU(1,1)$ выражаются через многочлены и функции Лежандра P_{mn}^l , $M(2)$ — через функции Бесселя J_{m-n} [7]. Теоремы сложения для спецфункций являются непосредственным следствием соотношения

$$T_l(g_1 g_2) = T_l(g_1) T_l(g_2). \quad (7.1)$$

Рекуррентные формулы, связывающие $t_{mn}^l(g)$, у которых индексы отличаются друг от друга на единицу, представляют собой инфинитезимальный вариант теоремы сложения. Это формулы типа

$$\hat{A} t_{mn}^l = c_1(l, m, n) t_{m, n+1}^l, \quad \hat{A}' t_{m, n+1}^l = c_2(l, m, n) t_{mn}^l,$$

где \hat{A}, \hat{A}' — дифференциальные операторы первого порядка (генераторы группы). С их помощью устанавливаются дифференциальные уравнения второго порядка, которым удовлетворяют спецфункции: $\hat{A}' \hat{A} t_{mn}^l = c_2(l, m, n+1) \times \times c_1(l, m, n) t_{mn}^l$. Именно такой подход реализован в [7].

Во-вторых, спецфункции появляются как перекрытия различных базисов одного НП группы. Так, полиномы Эрмита могут быть записаны в виде перекрытия $\langle n | x \rangle$ группы $W(1)$:

$$\langle n|x \rangle = \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n(x) \exp(-x^2/2).$$

Использование разложения единицы дает производящую функцию для полиномов Эрмита

$$\begin{aligned} \langle z|x \rangle &= \sum_n \langle z|n \rangle \langle n|x \rangle, \\ \exp[(-z^2/2) + z \cdot \sqrt{2}x] &= \sum_n (z/\sqrt{2})^n H_n(x)/n! \end{aligned} \quad (7.2)$$

Аналогично, учитывая (4.21) и (4.22), получаем интегральное представление и соотношение ортогональности

$$\begin{aligned} \langle n|x \rangle &= \frac{1}{\pi} \int \langle n|z \rangle \langle z|x \rangle d^2z, \\ H_n(x) &= \frac{z^{n/2}}{\pi} \int \exp\left[-\frac{z^2}{2} + \sqrt{2}zx - |z|^2\right] \bar{z}^n d^2z, \\ \langle n|n' \rangle &= \int \langle n|x \rangle \langle x|n' \rangle dx, \quad \delta_{nn'} = \int H_n(x) H_m(x) \exp(-x^2) dx. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Функции Бесселя J_m записываются как перекрытие базисов $\langle r\varphi|pm \rangle$ представлений группы $M(2)$. С помощью (4.46) — (4.49) получим производящую функцию и интегральное представление для J_m :

$$\begin{aligned} \langle r\varphi|p\alpha \rangle &= \sum_m \langle r\varphi|pm \rangle \langle pm|p\alpha \rangle, \\ \exp[ipr \cos(\varphi - \alpha)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \alpha)] i^m J_m(pr), \\ \langle r\varphi|pm \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle r\varphi|p\alpha \rangle \langle p\alpha|pm \rangle d\alpha, \\ i^m J_m(pr) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ipr \cos(\varphi - \alpha) + im\alpha] d\alpha. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из соотношений типа $\langle x|\hat{a}|n \rangle = n^{1/2} \langle x|n-1 \rangle$, $\langle r\varphi|\hat{\Phi}_{\pm}|pm \rangle = \langle r\varphi|p, m \pm 1 \rangle$ легко выводятся рекуррентные формулы и дифференциальные уравнения второго порядка. Формулы умножения (сложения) спецфункций задают разложение произведения спецфункций в сумму функций того же типа (соответственно разложение спецфункции в сумму произведений). В рамках рассматриваемого подхода этим операциям отвечает переразложение базисов прямого произведения НП и приведенного базиса, осуществляемое с помощью коэффициентов КГ (для функций Бесселя см. (2.30), для сферических функций — (2.29), для полиномов Эрмита — (2.41)). Данный подход позволяет использовать стандартные приемы и прояснить групповой смысл многих соотношений.

В-третьих, спецфункции появляются как коэффициенты пересвязывания базисов. Если рассматриваются дискретные базисы, то все параметры этих функций также дискретны, а исследования в этом направлении тесно связаны с разностными исчислениями на сетках (ср. раздел 3). В основе анализа различных разностных аналогов спецфункций лежит обобщение стандартного подхода для непрерывной переменной. Следуя [75, 152], рассмотрим его на примере ортогональных полиномов. Исходный пункт — дифференциальное уравнение для классических полиномов

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (7.5)$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — полиномы соответственно не выше второй и первой степени. Если решение этого уравнения $y(x)$ — полином степени n , то для него справедлива формула Родрига, задающая рекуррентную процедуру

$$y_n = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\sigma^n(x) \rho(x)); \quad (7.6)$$

здесь B_n — нормировочная постоянная, $\rho(x)$ — весовая функция, определяемая соотношением $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ и входящая, например, в формулу ортогональности

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = \delta_{mn}. \quad (7.7)$$

Функция $\rho(x)$ приводится к трем каноническим видам, соответствующим полиномам Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ (и его частным случаям — полиномам Лежандра, Чебышева, Гегенбауэра), Лагерра $L_n^\alpha(x)$, Эрмита $H_n(x)$. Величины, входящие в (7.6), и интервал ортогональности (a, b) представлены в табл. I [152].

Таблица I

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x); \alpha, \beta > -1$	$L_n^\alpha(x); \alpha > -1$	$H_n(x)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$x^\alpha \exp(-x)$	$\exp(-x^2)$
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
B_n	$(-1)^n / 2^n n!$	$1/n!$	$(-1)^n$
(a, b)	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

Все полиномы — это частные случаи гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta; \gamma | z)$, общим для них является равенство $\alpha = -n$.

Рассмотренная стандартная схема, развитая для классических ортогональных полиномов, переносится на дискретные исчисления [75, 152]. Соотношения (7.7) — (7.9) сохраняются с учетом замены обычных величин на их разностные аналоги (производной — на разностную производную, степени — на обобщенную степень, интеграла в (7.7) — на сумму). Для разностного аналога (7.5) на равномерной сетке имеется 4 типа разностных полиномов: Хана $h_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$, Мейкснера $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$, Кравчука $K_n^p(x, N)$, Шарлье $S_n^\mu(x)$. Разностные аналоги величин, входящих в (7.6), приведены в табл. II [152].

Таблица II

$y_n(x)$	$h_n^{(\mu, \nu)}(x, N); \mu, \nu > -1$	$m_n^{(\gamma, \mu)}(x); \gamma > 0, 0 < \mu < 1$	$K_n^p(x, N); p, q > 0, p+q > 1$	$C_n^\mu(x); \mu > 0$
$\rho(x)$	$\{\Gamma(x+1)\Gamma(x+\mu+1) \times \times \Gamma(N+\nu-x)\Gamma(N-x)\}^{-1}$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(\gamma)}$	$\frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$	$\frac{e^{-x} \mu^x}{\Gamma(1+x)}$
$\sigma(x)$	$x(\mu+x)$	x	x	x
B_n	$1/n!$	$1/\mu^n$	$(-1)^n q^n/n!$	$1/\mu^n$
(a, b)	$(0, N)$	$(0, \infty)$	$(0, N+1)$	$(0, \infty)$

Полиномы Мейкснера, Кравчука, Шарлье выражаются через обычную гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$, а полиномы Хана представляются в виде (ср. с (3.11))

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = \frac{(-1)^n (N-1)! (\beta+1)^{(n)}}{n! (N-n-1)!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, \alpha + \beta + n + 1, x \\ \beta + 1, 1 - N \end{matrix}; 1 \right), \quad (7.8)$$

что с точностью до нормировки совпадает с коэффициентами КГ группы SU(2)

$$(-1)^{j_1-m_1} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \| j m \rangle = \frac{(\rho(x))^{1/2}}{d_n} h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N); \quad (7.9)$$

здесь $\rho(x)$ и d_n — вес и норма полиномов Хана, $n = j - m$, $x = j_2 - m_2$, $N = j_1 + j_2 - m + 1$, $\alpha = m - m'$, $\beta = m + m'$, $m' = j_1 - j_2$.

Представления группы SU(2), или D -функции Вигнера

$$D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-im\alpha) d_{mm'}^j(\beta) \exp(im'\gamma),$$

непосредственно связаны с полиномами Якоби и Кравчука:

$$d_{mm'}^j(\beta) = \frac{(-1)^{m-m'}}{2^m} \left[\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!} \right]^{1/2} \times \\ \times (1-s)^{\frac{m-m'}{2}} (1+s)^{\frac{m+m'}{2}} P_{j-m}^{(m-m', m+m')}, \quad (7.10)$$

$$s = \cos \beta \quad (7.11)$$

$$(-1)^{m-m'} d_{mm'}^j(\beta) = \frac{(\rho(x))^{1/2}}{d_n} K_n^p(x, N);$$

здесь $\rho(x)$ и d_n — вес и норма полиномов Кравчука, $n = j - m$, $x = j - m'$, $N = 2j$, $p = \sin^2(\beta/2)$. Заметим, что поскольку полиномы Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ являются разностными аналогами полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$, то из сопоставления (7.9) и (7.10) следует, что коэффициенты КГ — разностные аналоги функции $d_{mm'}^j(\beta)$ при $s = \cos \beta$. Таким образом, теория коэффициентов КГ может быть переведена на язык спецфункций (см. также [153]). Все ее соотношения одновременно являются соотношениями между разностными спецфункциями.

Определенную совокупность дискретных полиномов можно рассматривать в рамках стандартной теории, но на неравномерной сетке. Здесь также имеются

разностные аналоги формулы Родрига и формулы ортогональности (7.6), (7.7). Для квадратичной сетки $x_k = kh(kh + 1)$ оператор дифференцирования

$$D_x^+ f(x) = \frac{f(x + 2h(k + 1)) - f(x)}{2h(k + 1)}. \quad (7.12)$$

При достаточно больших k $(hk + 1)/hk \approx 1$, и он приближенно соответствует разностному оператору (3.9) на равномерной сетке. Для квадратичной сетки в [152] исследованы два типа полиномов: **Ракá** $u_n^{(\alpha, \beta)}(x, a, b)$ и дуальные полиномы Хана $W_n^c(x, a, b)$, ортогональные на отрезке (a, b) . Существование полиномов **Ракá** было установлено в [73, 154, 155] при изучении коэффициентов **Ракá** на основе их представления через ${}_4F_3$ с аргументом $x = 1$.

Формула связи $6j$ -символа с полиномами **Ракá** имеет вид

$$(-1)^{j_1 + j + j_{23}} (2j_{12} + 1)^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \frac{(\rho(s))^{1/2}}{d_n} u_n^{(\alpha, \beta)}(x, a, b); \quad (7.13)$$

здесь $\rho(s)$ и d_n — вес и норма полиномов, $n = j_{12} - j_1 + j_2$, $x = s(s + 1)$, $s = j_{23}$, $a = j_3 - j_2$, $b = j_2 + j_3 + j$, $\alpha = j_1 - j_2 - j_3 + j$, $\beta = j_1 - j_2 + j_3 - j$. Очевидно, пользуясь (7.13), можно сформулировать теорию трансформационных матриц на языке полиномов.

Заметим, что подобно тому как при больших k в (7.12) происходит переход от разностного дифференцирования на квадратичной сетке к обычному разностному и затем при $h \rightarrow 0$ — к дифференцированию по непрерывной переменной, можно записать (ср. [21, 152]) асимптотические формулы перехода от полиномов **Ракá** к полиномам Хана и затем к полиномам Якоби (соответственно коэффициенты **Ракá** — коэффициенты КГ — d -функции).

В случае экспоненциальной сетки $x_k = \exp(2\gamma k) = q^k$ правило дифференцирования задается (3.15). Здесь возникают q -полиномы [152, 156, 157]. Их классификация аналогична классификации полиномов на равномерной сетке, в которые они и переходят при $q \rightarrow 1$; например,

$$\lim_{q \rightarrow 1} h_n^{(\alpha, \beta)}(q^k, N, q) = h_n^{(\alpha, \beta)}(k, N). \quad (7.14)$$

Через q -полиномы Хана выражаются коэффициенты КГ $su_q(2)$ (3.43). Для сетки $x_k = \text{ch}(2\gamma k)$, имеются, в частности, q -аналоги полиномов **Ракá** и дуальных полиномов Хана. Случай сеток $\text{sh}(2\gamma k)$, $\cos(2\gamma k)$ кратко обсуждается в [152].

Обширный класс полиномов может быть получен из приведенных выше комплексификацией аргумента; это так называемые дискретные полиномы от мнимого аргумента. Для них в формуле ортогональности суммирование заменяется на интегрирование. Через дискретные полиномы мнимого аргумента выражаются коэффициенты КГ непрерывных серий некомпактных групп, в частности, $SO(3, 1)$ [152]. $9j$ -символам группы $SU(2)$ отвечают дискретные полиномы двух переменных [158]. Функции нескольких переменных появляются также в теории представлений высших групп.

7.2. Вероятностные распределения и гипергеометрические функции. Теория спецфункций тесно связана с вероятностными распределениями. Особое место в ней занимают гипергеометрические функции, поскольку через них выражается основная масса функций, встречающихся в задачах математической физики. За последние десятилетия весьма интенсивно развивалась теория и расширялась сфера приложений гипергеометрических функций многих переменных и обобщенных гипергеометрических функций [92, 159—161]. Их свойства имеют много общего со свойствами обычных гипергеометрических функций ${}_2F_1$; они, очевидно, определяются структурой коэффициентов в ряду по степеням x_i . Коэффициенты эти выражаются через $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$, например для гипергеометрических функций двух переменных Аппеля F_1 и Горна G_2

$$F_1 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} x^m y^n, \quad (7.15)$$

$$G_2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!n!} x^m y^n$$

или обобщенной гипергеометрической функции

$${}_pF_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (7.16)$$

Для анализа возникающих сложных функций важно использовать конструктивный подход [5], т.е. нужно задать базисные элементы, способ их соединения и правила конструкции. Здесь имеется прямая аналогия с теорией угловых моментов, все величины которой строятся как соединения коэффициентов КГ, а правила конструкции задаются графической техникой [23]. Заметим, что наряду с методикой [23], где коэффициенты КГ представляются в виде "трех-хвостки", возможна ее модификация, где коэффициент КГ представляется в виде треугольников, а соединение двух коэффициентов отображается двумя треугольниками, имеющими общую сторону [2].

В общей теории гипергеометрических функций роль базисного элемента (аналога коэффициента КГ) играет гипергеометрическое распределение, рассмотренное в разделе 6. Коэффициенты при непрерывных переменных в гипергеометрических функциях многих переменных и обобщенных гипергеометрических функциях будут строиться как соединения указанных распределений (т.е. их теория имеет свою вероятностную сторону).

Перейдем к рассмотрению способов определения базисных элементов.

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется рядом

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (7.17)$$

Она является производящей для гипергеометрического распределения (обозначения см. в разделе 6)

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x) &= \frac{n^2!n_2!}{n!(n-n_1-n^1)!} F(-n_1, -n^1, n-n_1-n^1+1; x) = \\
&= \frac{n^1!n_1!n^2!n_2!}{n!} \sum_j \frac{x^j}{(n^1-j)!(n_1-j)!(n-n_1-n^1+j)!j!} = \\
&= \sum_{n_1^1} \left\{ \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_1^2 & n_2^2 \end{matrix} \right\} x^{n_1^1}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Если n_i и n^i — целые, то ряд обрывается при $j = \min\{n_1, n^1\}$ и получаются полиномы. Суммирование в (7.18) ведется при фиксированных суммах строк и столбцов n_i и n^i . Сумма вероятностей всех возможных исходов (6.17) $\tilde{F}(1) = 1$.

Для гипергеометрического распределения 2×3 можно записать две различные производящие функции — гипергеометрические функции двух аргументов F_1 и G_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(x, y) &= \frac{n^2!n_3!}{N!(N-n^1-n_1-n_2)!} F_1(-n^1, -n_1, -n_2; N-n^1-n_1-n_2+1; x, y) = \\
&= \sum_{j,m} \left\{ \begin{matrix} j & m & n^1-j-m \\ n_1-j & n_2-m & N-n^1-n_1-n_2+j+m \end{matrix} \right\} x^j y^m,
\end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2(x, y) &= \frac{n^1!(N-n^1)!n_2!}{N!(N-n^1-n_1)!(n^1-n_2)!} G_2(-n_1, -n_2, -N+n^1-n_1, -n_1+n_2; x, y) = \\
&= \sum_{j,m} \left\{ \begin{matrix} j & n_2-m & n^1-n_2-j+m \\ n_1-j & m & N-n^1-n_1+j-m \end{matrix} \right\} x^j y^m.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Если заменить в (7.18) — (7.20) факториалы на Γ -функции, то мы получим ряды для гипергеометрических функций при произвольных значениях параметров, которые представляют собой суммы строк и столбцов матрицы распределения.

Полигипергеометрическое распределение как функция $M \times N$ -матрицы может быть эффективно использовано при построении и исследовании гипергеометрических функций многих переменных. В частности, исходя из (7.19), (7.20) и свойства сворачиваемости полигипергеометрического распределения (6.18), легко получить формулы приведения, как содержащиеся, так и не содержащиеся в [92]:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2(\beta, \beta', -\gamma + \beta' + 1, \alpha - \beta'; x, 1) &= \tilde{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, 1) = \\
&= \tilde{F}(\alpha, \beta; \gamma - \beta', x), \\
\tilde{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, x) &= \sum_{j,m} \left\{ \begin{matrix} j & m & -\alpha-j-m \\ -\beta-\gamma & -\beta-m & \gamma+j+m-1 \end{matrix} \right\} x^{j+m} =
\end{aligned} \tag{7.21}$$

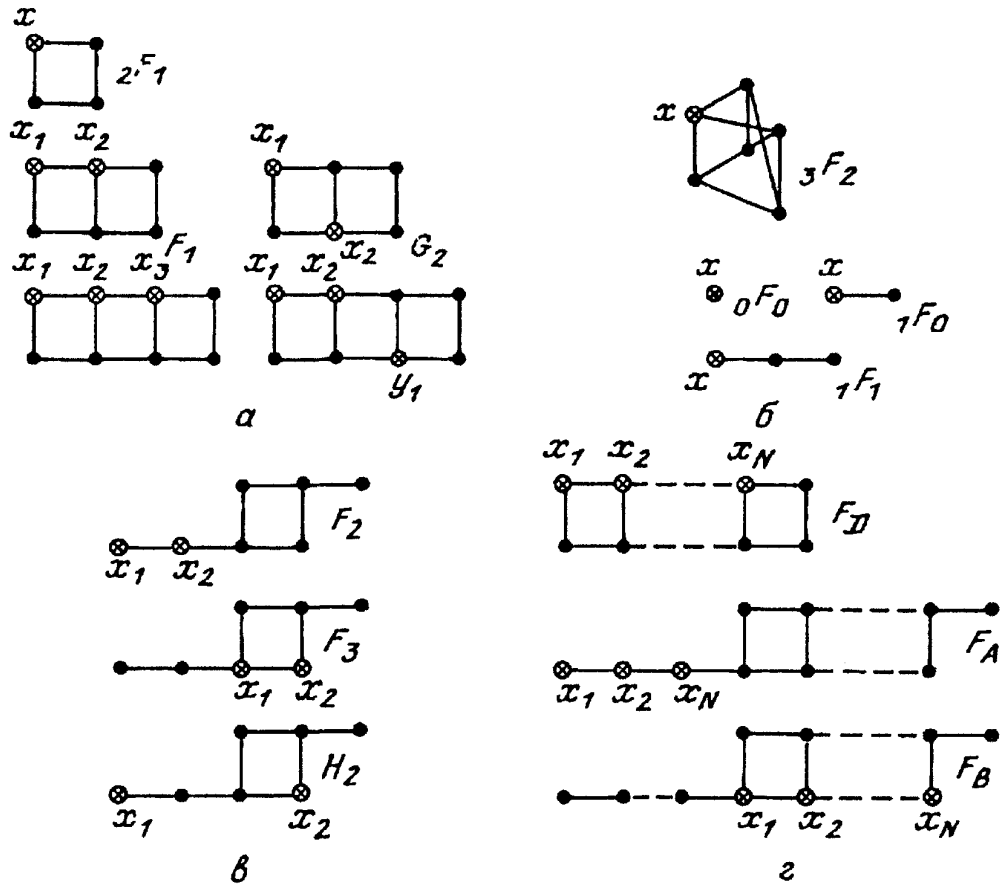


Рис. 7. Графы гипергеометрических функций

$$= \sum_j \left\{ \begin{matrix} j' & -\alpha - j' \\ -\beta - \beta' - j' & \gamma + j' - 1 \end{matrix} \right\} x^{j'} = \tilde{F}(\alpha, \beta + \beta', \gamma; x).$$

При целых $\beta' < 0$, заменяя параметр суммирования m в (7.19) на $k - n_2 - m$, получим [5]

$$\tilde{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = y^{-\beta'} \tilde{G}_2(\beta, \beta', -\gamma + \beta' + 1, \alpha - \beta'; x, \frac{1}{y}). \quad (7.22)$$

Анализ обобщенных гипергеометрических функций также связан с рассмотрением соединений гипергеометрических распределений. Как уже отмечалось, коэффициенты КГ и Рака с точностью до нормировки выражаются через функции ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$. Используя выражение коэффициента КГ через гипергеометрическое распределение [137], можно записать соотношение

$$\begin{aligned} {}_3F_2(2\alpha - 2n^2, n_1^1 + 1, n_1; n_1^1 - n_1^2 + 1, -n_1^1 - n_2^2; x) = \\ = \rho \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} (-1)^{\alpha_2} \left\{ \begin{matrix} n_1^1 - \alpha_1 & n_2^1 - \alpha_2 \\ n_1^2 - \alpha_2 & n_2^2 - \alpha_1 \end{matrix} \right\}^{1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \begin{Bmatrix} n_1^1 - \alpha_1 & n_2^1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{Bmatrix}^{1/2} \begin{Bmatrix} n_1^2 - \alpha_2 & n_2^2 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{Bmatrix}^{1/2} x^{\alpha_1}. \quad (7.23)$$

Функция ${}_3F_2$ с точностью до нормировки ρ , является производящей для соединения (произведения) трех гипергеометрических распределений, а ее значение при аргументе 1 дает коэффициент КГ группы $SU(2)$. Аналогично функция ${}_4F_3$ — производящая для соединения четырех коэффициентов КГ, а ее значение при аргументе 1 соответствует коэффициенту **Ракá**.

Как видно, гипергеометрические распределения служат своего рода кирпичиками, из которых по определенному алгоритму могут конструироваться как обобщенные гипергеометрические функции, так и гипергеометрические функции многих переменных. Правила конструкции могут быть заданы с помощью простой графической техники. Гипергеометрические функции многих переменных строятся как производящие для полигипергеометрических распределений.

На рис. 7,а каждому узлу графа соответствует параметр полигипергеометрического распределения, записанного в матричной форме. Построение осуществляется по следующему алгоритму. Произведение факториалов чисел, соответствующих узлам, записывается в знаменателе, произведение факториалов от сумм по ребрам — в числителе. Факториал суммы по всему графу — снова в знаменателе. По аналогичному алгоритму строится распределение для графа на рис. 7,б — г. Графам на рис. 7,а с проставленными точками x_i отвечают гипергеометрические функции типа

$$F(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_1 \dots \dots \\ \dots n_2 \dots \end{Bmatrix} x_1^{n_1} x_2^{n_2}.$$

Отметим, что при этом $F(x, 1) = F(x)$, а $F(1, 1) = 1$. Суммирование ведется по матрицам с фиксированными суммами строк и столбцов. Эти суммы являются параметрами функций.

Первым трем графам отвечают соответственно обычные гипергеометрические функции ${}_2F_1$ функции Аппеля F_1 и Горна G_2 . Графу рис. 7,б отвечает обобщенная гипергеометрическая функция ${}_3F_2$. Суммирование здесь также ведется при фиксированных суммах по ребрам графа. Функции, получающиеся друг из друга аналитическим продолжением, например F_1 и G_2 (см. (7.22) и рис. 7,а) или F_2, F_3, H_2 [92] (см. рис. 7,в), имеют одинаковые графы.

Отметим, что среди функций Лауричелла (N -мерных аналогов ${}_2F_1$) F_A, F_B, F_C, F_D (рис. 7,г) именно F_D и ее аналитические продолжения

$$\begin{aligned} \tilde{F}_D \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_l, \beta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_1, \dots, x_k \\ y_1, \dots, y_l \end{matrix} \right) = \\ = \sum \left\{ \begin{matrix} n_1, \dots, n_k & \beta - m_1, \dots, \beta_l - m_l & \beta + \sum n_i + \sum m_i \\ \alpha_1 - n_1, \dots, \alpha_k - n_k & m_1, \dots, m_l & \alpha + \sum n_i - \sum m_i \end{matrix} \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times x_1^{n_1} \dots x_i^{n_i} y_1^{m_1} \dots y_i^{m_i},$$

связанные с гипергеометрическим распределением $2 \times (N + 1)$, максимально сохраняют свойства ${}_2F_1$ и наиболее интересны с групповой точки зрения [150].

Рассмотренная графическая техника адекватно отображает свойства обобщений гипергеометрической функции, а также соединений коэффициентов КГ. В принятой для коэффициентов КГ (функции ${}_3F_2(1)$) упрощенной графической методике [23] ряд свойств, включая соотношения симметрии, теряется. В этом случае вместо фигуры, свернутой наподобие листа Мёбиуса (см. рис. 7,б), имеем ее проекцию — треугольник (или эквивалентную ему "треххвостку").

8. Заключение

Анализ основ квантовой теории показывает, что в настоящее время происходит определенный синтез наших понятий. Можно говорить о двух языках квантовой теории: операторов в гильбертовом пространстве и амплитуд вероятности. Последний неразрывно связан с возможностью группового описания. Конкретные формулы квантовой теории часто допускают тройную интерпретацию (операторную, вероятностную, групповую). Здесь мы имеем дело с одной сущностью, но открывающейся с разных сторон. Универсальную роль при этом играет математический аппарат перекрытий, отличающийся простотой и удобством. Он служит основой формализации и унификации теории, в том числе коэффициентов КГ, задающих структуру квантовых объектов, и ряда разделов специальных функций, а также открывает возможность сокращения числа необходимых формул и объема справочной литературы.

В значительной мере формализовалось соотношение между классической и квантовой теорией. Классика — это вероятности и полугруппы, квантовая теория — это амплитуды вероятностей и группы. Переход к классическому пределу соответствует предельным теоремам теории амплитуд вероятностей.

Многое проясняется и в основах общей квантовой теории. Обычная квантовая механика основывается на постулатах существования амплитуд вероятностей марковских процессов (уравнение первого порядка по $\frac{\partial}{\partial t}$) и малости приращений (отсутствие скачков). Последний постулат обуславливает определяющую роль уравнений второго порядка (и в квантовой теории, и в классике). Отказ от него и допущение возможности скачков сразу приводит к уравнениям бесконечного порядка. В этом случае необходимо уже применять группы с бесконечным числом параметров и псевдодифференциальные операторы. Изложенный подход достаточно четко обрисовывает направление и перспективы развития общей квантовой теории.

Интересно, что когда речь идет об основах, то сохраняют актуальность многие работы эпохи классиков квантовой теории, а по q -исчислению, как

отмечалось, даже статьи середины прошлого века. Здесь особенно наглядно проявляется связь прошлого, настоящего и будущего.

Нам хотелось бы выделить неоценимый вклад в данную проблематику сравнительно недавно ушедших из жизни Феликса Александровича Березина и Наума Яковлевича Виленикина, имена которых известны каждому специалисту.

Мы искренне признательны за обсуждение ряда вопросов Д.М. Гитману, Ю.Ф. Смирнову и В.Н. Толстому.

9. Приложение

Проведенный в обзоре анализ опирался в основном на теорию простейших неабелевых групп, содержащих три генератора: $SU(2)$, $SU(1,1)$, $W(1)$, $M(2)$, $M(1,1)$. Но эти группы — лишь небольшая часть общего массива групп Ли, нашедших широкое применение в самых различных областях физики. Их теория пока еще недостаточно приведена в систему, часто в физических журналах вновь и вновь в различных видах переоткрываются одни и те же формулы. Поэтому представляется целесообразным привести небольшой справочный материал для групп Ли в целом, выделив данные, полезные для практической работы.

9.1. О классификации групп Ли. Группы Ли делятся на разрешимые и полупростые. Алгебры Ли L разрешимых групп имеют свой коммутативный идеал $N([L, N] \subset N)$ или, другими словами, последовательность идеалов $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}]$, ..., $L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] = 0$ обрывается. К числу разрешимых групп относятся $W(1)$, $M(2)$, $M(1,1)$, а также группа Пуанкаре. $W(1)$ — нильпотентная группа, частный случай разрешимых, характеризующихся последовательностью $L_{(0)} = L$, $L_{(1)} = [L_{(0)}, L]$, ..., $L_{(n+1)} = [L_{(n)}, L] = 0$.

Полупростые группы Ли не содержат коммутативного идеала. Они включают в себя группы линейных преобразований n переменных (действительных \mathbf{R} , комплексных \mathbf{C} и кватернионных \mathbf{H}) $GL(n, \mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ и их подгруппы, задаваемые унимодулярными, (псевдо)унитарными, симплектическими и ортогональными матрицами. Все эти группы носят название классических. К полупростым относятся также исключительные группы, связанные с алгеброй октав.

Классификация классических групп дается табл. III:

	Унимодулярные	(Псевдо)унитарные	Симплектические	Ортогональные
R:	$SL(n, \mathbf{R})$	$SO(p, q)$	$Sp(n, \mathbf{R})$	$SO(n, \mathbf{R})$
C:	$SL(n, \mathbf{C})$	$SU(p, q)$	$Sp(n, \mathbf{C})$	$SO(n, \mathbf{C})$
H:	$SL(n, \mathbf{H})$	$Sp(p, q)$	$Sp(n, \mathbf{H})$	$SO(n, \mathbf{H})$

Заметим, что унитарная кватернионная группа иногда обозначается как $USp(n)$ или $SU(n, \mathbb{H})$; $Sp(p, q)$ — как $Sp(2p, 2q)$; $SL(n, \mathbb{H})$ и $SO(n, \mathbb{H})$ — как $SU^*(2n)$ и $SO^*(2n)$.

Между рядом групп малых размерностей существуют соотношения эквивалентности (изоморфизма и гомоморфизма) типа $SL(2, \mathbb{R}) \sim SU(1, 1) \sim SO(2, 1)$, $SL(2, \mathbb{C}) \sim SO(3, \mathbb{C}) \sim SO(3, 1) \sim SL(1, \mathbb{C} \times \mathbb{H})$; их полный список приведен в [28].

К числу основных характеристик группы G относятся матрицы инфинитезимальных операторов L , матрицы конечных преобразований g , инварианты J . Соответствие между матрицами конечных и инфинитезимальных преобразований $g = \exp L$:

$$\begin{array}{llll} g \in GL(n, \mathbb{K}): & \det g = 1 & I_{p,q}^{-1} g^+ I_{p,q} = g^{-1} & F^{-1} g^T F = g^{-1} & g^T = g^{-1} \\ & \text{(унимоду-} & \text{(псевдоуни-} & \text{(симплекти-} & \text{(ортого-} \\ & \text{лярные),} & \text{тарные),} & \text{-ческие),} & \text{нальные),} \\ L \in gl(n, \mathbb{K}): & \text{Tr } L = 0 & I_{p,q}^{-1} L^+ I_{p,q} = -L & F^{-1} L^T F = L & L^+ = -L \\ & \text{(бессле-} & \text{((псевдо)анти-} & & \text{(антисим-} \\ & \text{довые),} & \text{эрмитовы)} & & \text{метрич-} \\ & & & & \text{ные);} \end{array}$$

здесь $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, I_p — единичная матрица $p \times p$, $p + q = n$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

$2r = n$; вместо F можно рассматривать матрицу γ : $\gamma_{2l, 2l-1} = 1$, $\gamma_{2l-1, 2l} = -1$, $l = 1, 2, \dots, n/2$, остальные $\gamma_{ik} = 0$.

Общим инвариантом классических групп является детерминант, построенный из базисных векторов фундаментальных НП. Квадратичные инварианты псевдоунитарных, симплектических и ортогональных подгрупп $SL(N, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ имеют вид $X' I_{p,q} X^+$, $X' \gamma X^T$, $X' X^T$, где $X = \{x_i\}$ и $X' = \{x'_i\}$ — строки из базисных векторов фундаментальных НП. Для кватернионных базисов X^T — столбец из транспонированных кватернионов $q^T = a_1 + ia_2 - ja_3 + ka_4$. Список инвариантов классических групп представлен в [11, 166], исключительных в [166, 167].

9.2. Алгебры Ли, ряды КГ, формулы редукции. Перестановочные соотношения для генераторов группы записываются в стандартной форме

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha(\hat{H}_i) \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \hat{H}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = \hat{N}_{\alpha, \beta} \hat{E}_{\alpha+\beta}.$$

В отличие от (2.1) они содержат целый набор повышающих, понижающих и диагональных операторов. Постоянные $\alpha(\hat{H}_i)$ и $N_{\alpha, \beta}$ выражаются через корневые векторы, характерные для каждой группы (базис Картана—Вейля). Алгоритм их записи и структура системы корневых векторов задается схемами Дынкина. Весь этот круг вопросов детально изложен в [28, 115, 164]. На рис. 8 приведен набор схем Дынкина для групп относительно низкого ранга. В них

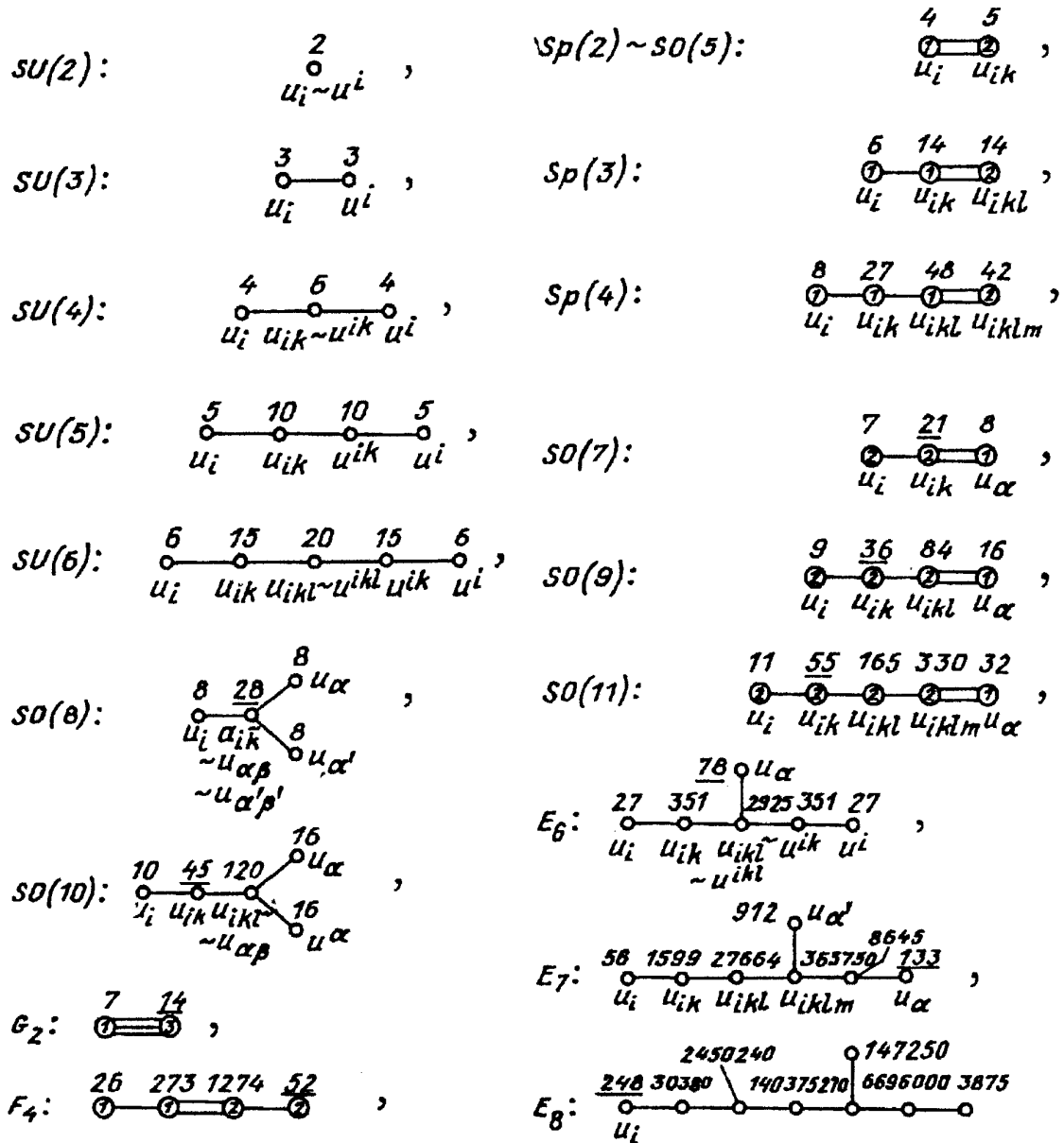


Рис. 8. Схемы Дынкина. Над вершинами проставлены размерности соответствующих фундаментальных НП. Цифры в вершинах указывают отношение квадратов модулей корневых векторов (для $SU(N)$, $SO(2N)$, E_6 , E_7 , E_8 оно равно единице). У ортогональных и исключительных подчеркнуты размерности присоединенных представлений

даны размерности фундаментальных представлений и содержатся обозначения, используемые ниже в таблице рядов КГ. Весовые диаграммы НП групп третьего ранга $SU(4)$, $SO(7)$, $Sp(3)$, $SU(3,1)$ приведены в [11]. По рядам и коэффициентам КГ в литературе содержится огромная масса фактического материала. Он во многом бессистемен. Ограничимся таблицей рядов, особенно часто встречающихся в приложениях:

$$SU(3): D(P_1 Q_1) \otimes D(P_2 Q_2) =$$

$$= \sum_{A=0}^{C_1 \min\{P_1, P_2\}} \sum_{S_1=0}^{\min\{Q_1, Q_2\}} \sum_{S_2=0}^{\min\{Q_1, Q_2\}} D(PQ), \quad P \geq 0, \quad Q \geq 0;$$

$$\text{SU}(2,1): D^+(P_1 Q_1) \otimes D^+(P_2 Q_2) =$$

$$= \sum_{A=0}^{C_2} \sum_{S_1=0}^{\infty} \sum_{S_2=0}^{\min\{Q_1, Q_2\}} D^+(PQ), \quad P < -2, \quad Q \geq 0,$$

$$P = P_1 + P_2 - 2S_1 + S_2 - A, \quad Q = Q_1 + Q_2 - 2S_2 + S_1 - A,$$

$$C_1 = \min\{P_2 - S_1, Q_1 - S_2\} + \min\{P_1 - S_1, Q_2 - S_2\}, \quad C_2 = Q_1 + Q_2 - 2S_2;$$

$$\text{SU}(N,1): D^+(P_1 0 \dots 0) \otimes D^+(P_2 0 \dots 0) = \sum_{S=0}^{\infty} D^+(P_1 + P_2 - 2S \ 0 \dots 0);$$

$$\text{SU}(N): D(P_1 0 \dots 0) \otimes D(P_2 0 \dots 0) = \sum_{S=0}^{\min\{P_1, P_2\}} D(P_1 + P_2 - 2S \ 0 \dots 0),$$

$$D(P_1 0 \dots 0 Q_1) \otimes D(P_2 0 \dots 0 Q_2) =$$

$$= \sum_{\alpha', \alpha'', S_P, S_Q} D(P_1 + P_2 - \alpha' - \alpha'' - 2S_P \ 0 \dots 0 \ S_Q \ Q_1 + Q_2 - \alpha' - \alpha'' - 2S_Q),$$

$$P_1 - S_P - \alpha' \geq 0, \quad P_2 - S_P - \alpha'' \geq 0, \quad Q_1 - S_Q - \alpha'' \geq 0,$$

$$Q_2 - S_Q - \alpha' \geq 0 \quad (N \geq 4);$$

$$\text{SO}(N), \text{Sp}(N): D(P_1 0 \dots 0) \otimes D(P_2 0 \dots 0) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\min\{P_1-S, P_2-S\}} \sum_{S=0}^{\min\{P_1, P_2\}} D(P_1 + P_2 - 2S - 2\alpha \ 0 \dots 0),$$

$$D(0 \dots 0 P_1) \otimes D(0 \dots 0 P_2) =$$

$$= \sum_{S_1, \dots, S_N} \left\{ \begin{array}{l} D(2S_2 \ 2S_3 \dots 2S_N \ P_1 + P_2 - \sum_{i=1}^N 2S_i), \text{Sp}(N) \\ D(S_1 \ S_2 \dots S_N \ P_1 + P_2 - \sum_{i=1}^N 2S_i), \text{SO}(2N+1) \end{array} \right\},$$

$$P_k - \sum_{i=1}^N S_i \geq 0;$$

$$\text{Sp}(2) \sim \text{SO}(5): D(P_1 Q_1) \otimes D(P_2 Q_2) =$$

$$= \sum_{\alpha_P, \alpha_Q, S_P, S_Q} D(P_1 + P_2 - 2S_P - 2\alpha_P + 2S_Q \ Q_1 + Q_2 - 2S_Q - \alpha_Q + S_P),$$

$$P_1 - \alpha_1 - S_P - 2\alpha'_1 - \alpha''_1 \geq 0, \quad Q_1 - \alpha_2 - S_Q - \alpha'_2 - \alpha''_2 \geq 0,$$

$$\alpha_P = \alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha'_2,$$

$$P_2 - \alpha_1 - S_P - 2\alpha'_2 - \alpha''_2 \geq 0, \quad Q_2 - \alpha_2 - S_Q - \alpha'_1 - \alpha''_1 \geq 0;$$

$$\alpha_Q = 2\alpha_2 + \alpha'_1 + \alpha'_2.$$

Большое число конкретных выражений для рядов КГ классических групп приведено в [11], исключительных — в [162, 163, 165]. Формулы редукции на подгруппу отражают иерархию физических структур. Правила ветвления, отвечающие редукции $SU(N+1) \rightarrow SU(N)$, $SO(N+1) \rightarrow SO(N)$, $SU(2N) \rightarrow Sp(N)$, $Sp(N) \rightarrow Sp(N-1)$, $SU(N) \rightarrow SO(N)$ при $N \leq 7$, приведены в [12].

9.3. Б а з и с ы НП. Базисы НП (как конечно-, так и бесконечномерных) делятся на два широких класса: дискретные (инфинитезимальные и тензорные) и непрерывные (базисы обобщенных КС и базисы из собственных функций несамосопряженных операторов).

Инфинитезимальные базисы строятся как базисы НП соответствующей алгебры Ли (посредством действия на выбранный элемент инфинитезимальных операторов группы получаем полный базис НП). Эти базисы представляют собой систему собственных функций самосопряженных операторов; различный выбор последних приводит к разным базисам.

Тензорный (симметрический) базис строится как полином от базисных функций фундаментальных НП; тесно связан с группой перестановок. В случае унитарных НП некомпактных групп тензоры могут быть отрицательного и нецелого ранга. Этот базис, как правило, избыточен (кроме простейших случаев).

Базис обобщенных КС строится посредством действия на выбранный элемент из пространства НП конечных преобразований группы; он является переполненным. Базис из собственных функций повышающих или понижающих операторов может быть построен для бесконечномерных унитарных НП некомпактных групп, но не для конечномерных НП компактных..

9.4. Г р у п п ы $SU(N)$ и $SU(N-1, 1)$. Принципиальным моментом является возможность построения теории представлений высших групп на конструктивной основе. Определяющую роль в таком подходе играют формулы для перекрытий, действия генераторов и инвариантной меры. Помимо рассмотренных простейших групп детальная теория, включая КС, исчисление символов и переход к классическому пределу, имеется для унитарных симметричных НП $SU(N)$ и $SU(N-1, 1)$ [15, 16]. Инвариантом групп $SU(N)$ и $SU(N-1, 1)$ является

$$(u, z) = \bar{u}_N z_N \pm \sum_{i=1}^{N-1} \bar{u}_i z_i.$$

Для симметричных конечномерных НП $D(M0...0)$ $SU(N)$, $M \geq 0$ целое, для бесконечномерных НП $D^+(M0...0)$ $SU(N-1, 1)$ $M < -N+1$. Перекрытие КС выражается через инвариант, $\langle Mu | Mz \rangle = (u, z)^M$. Мы положили $(u, u) = (z, z) = 1$. Относительная дисперсия (4.71) в КС $\Delta C_2 / C_2 = N / (N + M)$. Инвариантная мера

$$d\mu_M(z) = \frac{(M+N-1)!}{M!} \frac{1}{(2\pi)^N} \delta \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 - 1 \right) \prod_{i=1}^N d\rho_i^2 d\varphi_i,$$

$$d\mu_M(z) = \frac{\Gamma(-M)}{\Gamma(-M-N+1)} \frac{1}{(2\pi)^N} \delta \left(\rho_N^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i^2 - 1 \right) \prod_{i=1}^N d\rho_i^2 d\varphi_i,$$

$$z_i = \rho_i e^{i\varphi_i}.$$

Интегрирование проводится по N -мерной комплексной сфере или гиперboloиду $(z, z) = 1$ с помощью формул, аналогичных (5.16) [5]. Путем преобразования $z'_i = z_i/z_N$ осуществляется переход к проективному пространству $P_{N-1}(\mathbb{C})$ или открытому шару $D_{N-1}(\mathbb{C})$. Символы операторов могут быть найдены на основе записи генераторов \hat{T}_j^i групп $U(N)$ и $U(N-1, 1)$ через \hat{a}_+ и \hat{a}_- : $\hat{T}_j^i = \hat{a}_{i+} \hat{a}_{j-}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука. 1964.
2. Смородинский Я.А. Шелепин Л.А. // УФН. 1972. Т. 106. С. 3.
3. Dirac P.A.M. // Fields and Quanta. 1972. V. 3. P. 139.
4. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
5. Шелепин А.Л., Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1992. Т. 218. С. 3.
6. Дирак П.А.М. Воспоминания о необычайной эпохе: Сб. статей. — М.: Наука, 1990.
7. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
8. Каррузерс П., Ньюто М. // Когерентные состояния в квантовой теории. — М.: Мир. 1972. С. 71.
9. Гитман Д.М., Шелепин А.Л. // Кратк. сообщ. физ. 1990. № 1. С. 31.
10. Шелепин А.Л., Шелепин Л.А.// Теоретико-групповые методы в физике. — М.: Наука, 1986. — Т. 2. С. 99.
- [11] Шелепин А.Л., Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1989. Т. 191. С. 46.
12. Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1973. Т. 70. С. 3.
13. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. — М.: Наука, 1987.
14. Желобенко Д.П., Штерн А.М. Представления групп Ли. — М.: Наука, 1983.
15. Гитман Д.М., Харчев С.М., Шелепин А.Л. // Тр. ФИАН. 1990. Т. 201. С. 95.
16. Gitman D.M., Shelepin A.L. Preprint MIT, CTP, 1990. — Massachusetts, 1991.
17. Фронсдел К. // Теория групп и элементарные частицы. — М.: Мир, 1967. С. 324.
18. Fronsdal C. // Proc. Roy. Soc. A. 1965. V.288. P.98.
19. Климык А. У. Матричные элементы и коэффициенты Клебша—Гордана представлений групп. — К.: Наукова думка, 1979.
20. Gruber B., Klimuk A.V. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 2009.
- [21] Варшавович Д.М., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. — Л.: Наука, 1975.
22. Биденхарн Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой механике Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
23. Юцис А.П., Левинсон И.Б., Ванагас В.В. Математический аппарат момента количества движения. — Вильнюс: ГИПНЛ, 1960.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.
25. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. — М.: Гостехиздат, 1957.
26. Карасев В.П. // Тр. ФИАН. 1973. Т. 70. С. 147.
27. Chacon E., Levi P., Moshinsky M. // J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1876.
28. Барут А., Рончика Р. Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
29. Dicke R.H. // Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 99.

30. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.
- [31] Хилтон П., Уайли С. Теория гомологии. Введение в алгебраическую топологию. — М.: Мир, 1966.
32. *Racah G.* // *Phys. Rev.* 1942. V. 62. P.438; 1943. V. 63. P. 367; 1949. V. 76. P. 1352.
33. Никитин А.А., Рудзикас З.Б. Основы теории спектров атомов и ионов. — М.: Наука, 1983.
34. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. — М.: Физматгиз, 1963.
35. Федоров Ф.И. Оптика активных сред. — Минск: Изд-во АН БССР, 1958.
36. Перица Я. Когерентность света. — М.: Мир, 1974.
37. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. — М.: Мир, 1966.
38. Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. — М.: Мир, 1978.
39. Мейтленд А., Данн М. Введение в физику лазеров. — М.: Наука, 1978.
40. *Bascu H., Cadilhac M.* // *Phys. Rev. A.* 1981. V. 23. P. 2532.
- [41] *Kogelnic H.* // *J. Bell. Syst. Tech.* 1965. V. 44. P. 455.
42. *Sudarshan E.C.G., Simon R., Mucunda N.* // *Phys. Rev. A.* 1983. V. 28. P. 2921, 2933.
43. Вольф К.Б., Манько В.И. // Тр. ФИАН. 1986. Т. 176. С. 96.
44. *Roman P.* // *Nuovo Cimento.* 1959. V. 13. P. 974.
45. Вульфсон К.С. // УФН. 1987. Т. 152. С. 667.
46. *Barakat R.* // *J. Opt Soc. Am.* 1963. V. 53. P. 317.
47. Потехин В.К., Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1980. Т. 124. С. 114; 1986. Т. 173. С. 173.
48. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в оптике. — М.: Наука, 1988.
49. Шелепин Л.А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 1463.
50. Махвиладзе Т.М., Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1973. Т. 70. С. 120.
- [51] Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970.
52. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Б., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
53. *Hanbury Brown R., Twiss R.Q.* // *Nature.* 1956. V. 177. P. 27; V. 178. P. 1046; *Proc. Roy. Soc. A.* 1957. V. 242. P. 300; V. 243. P. 291.
54. Ареки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вейдлик В. Квантовые флуктуации излучения лазера. — М.: Мир, 1974.
55. Глаубер Р. // Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М.: Мир, 1966, — С. 91.
56. Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. // УФН. 1987. Т. 153. С. 233.
- 57. Тайш М.К., Салз Б.Э.А.** // УФН. 1991. Т.161, № 4. С. 171.
58. Быков В.П. // УФН. 1991. Т. 161, № 10. С. 151.
59. Юу Ф.Т.С. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию. — М.: Сов. радио, 1979.
60. Белл Р.Дж. Введение в фурье-спектроскопию. — М.: Мир, 1975.
- [61] *Sklyanin E.K.* // *Func. Anal, and Appl.* 1982. V. 16. P. 262.
62. *Kulish P.P., Reshetikhin N.Y.* // *J. Sov. Math.* 1983. V. 23. P. 2435.
63. Дринфельд В.Г. // ДАН СССР. 1985. Т. 32. С.254.
64. *Moore G., Seiberg N.* // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 123. P. 177.
65. *Jimbo M.* // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1989. V. 4. P. 3759.
66. *Heine E.* // *Grelle's J.f.d.M.* 1847. Bd. 34. S. 285.
67. *Jacobi C.G.J.* // *Grelle's J.f.d.M.* 1846. Bd. 34. S. 197.
68. *Thomae J.* // *J. reine and angew. Math.* 1869. Bd. 70. S. 258.
69. *Symmetries in Science.* V. — New York: Plenum Press, 1991.
70. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.
- [71] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.
72. Самарский А.А., Карамзин Ю.Н. Разностные уравнения. — М.: Наука, 1978.
73. Карасев В.П., Шелепин Л.А. // Тр. ФИАН. 1976. Т. 87. С. 55.
74. *Thomae J.* // *Zs. Math. Phys.* 1871. Bd. 16. S. 428.
75. Сулов С.К. К теории разностных аналогов гипергеометрических функций на равномерных сетках. — Препринт ИАЭ—4445/1. — М., 1987.
76. Гельфонд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
77. Хармут Х. Применение методов теории информации в физике. — М.: Мир. 1989.
78. Хэмминг Р.В. Теория информации и теория кодирования. — М.: Радио и связь, 1983.

79. Коблиц И. *P*-адические числа, *P*-адический анализ и дзета-функция. — М.: Мир, 1982.
80. *Nomura M.* // J. Phys. Soc. Japan. 1988. V. 57. P. 3653; 1989. V. 58. P. 2694; 1990. V. 59. P. 439, 1954, 2345; 1991. V. 60. P. 710, 1906.
- [81] *Bidenharn L.C.* // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 873.
82. *Kachurik I.I., Klimyk A.U.* // J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 2717.
83. *Floreanini R., Vinet L.* Preprint Université de Montreal 1991. UdeM—LPN—TH54; J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 1019.
84. *Смирнов Ю.Ф., Толстой В.Н., Харитонов Ю.И.* // ЯФ. 1991. Т. 53. С. 959.
85. *Klimyk A.U., Smirnov Y.F., Gruber B.* // Symmetries in Science. V. — New York: Plenum Press, 1991.—P. 341.
86. *Rosso M.* // Commun Math. Phys. 1988. V. 117. P. 581.
87. *Качурик И.И.* Препринт ИТФ-90-37Р. — Киев, 1990.
88. *Nomura M.* // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2397.
89. *Alvares-Gamme L., Gomes C., Sierre G.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 220. P. 142.
90. *Жилинский Б.Н., Смирнов Ю.Ф.* // ЯФ. 1991. Т. 54. С. 17.
- [91] *Koh I.G., Zhong Qi Ma.* Preprint IC/89/259. — Trieste, 1989; // Phys. Lett. B. 1990. V. 234. P. 480.
92. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1—3. — М.: Наука, 1973.
93. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.
94. *Карасев В.П.* // Кратк. сообщ. физ. 1991. № 9. С. 31.
95. *Fateev V.A., Lukianov S.L.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 507.
96. *Замолодчиков А.Б.* // ТМФ. 1985. Т. 65. С. 347.
97. *Roseck M.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 554.
98. *Басов Н.Г., Прохоров А.М.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 431.
99. *Gordon J. P., Zeiger H.J., Townes C.H.* // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 282.
100. *Schrödinger E.* // Naturwissenschaften. 1926. Bd. 14. S. 664.
- [101] *Малкин И.А., Манько В.И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.
102. Когерентные состояния в квантовой теории / Под ред. В.И. Манько. — М.: Мир, 1972.
103. *Radcliff J.M.* // J. Phys. A. 1971. V. 4. P. 313.
104. *Perelomov A. M.* // Commun. Math. Phys. 1972. V. 26. P. 222.
105. *Переломов А.М.* // ЯФ. 1979. Т. 29. С. 1688.
106. *Додонов В.В., Манько В.И.* // Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 5.
107. *Delbourgo R.* // J. Phys. A. 1977. V. 10. P. 1837.
108. *Delbourgo R., Fox J.R.* // J. Phys. A. 1977. V. 10. P. 233L.
109. *Gitman D.M., Shelepin A.L.* // Symmetries and algebraic structure in Physics. — Proc. of XVIII Intern. Colloquium of Group Theoretical Methods in Physics. — New York: Nova Science, 1991. — P. 251.
110. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1986.
- [111] *Klauder J.R., Skagerstam B. S.* Coherent states, Application in physics and Mathematical Physics. — Singapore: World Sci. Publ. Co., 1985.
112. *Lieb E.M.* // Commun. Math. Phys. 1973. V. 31. P. 327.
113. *Arecchi F.T., Courteus E., Gilmor R., Thomas H.* // Phys. Rev. 1972. V. 6. P. 2211.
114. *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
115. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
116. *Schmitt H.A., Multi A.* // J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 861L.
117. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983; Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
118. *Карасев В.П.* // Кратк. сообщ. физ. 1976. № 3. С. 32.
119. *Lebocuf J.P., Daraseno M.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 6800.
120. *Ariano G.D., Rasetti M., Vadacchino M.* // J. Phys. A. 1985. V. 18. P. 1295.
- [121] *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шрёдингера. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
122. *Berezin F.A.* // Commun. Math. Phys. 1975. V. 40. P. 153.
123. *Березин Ф.А.* УФН. 1980. Т. 32. С. 497.
124. *Simon B.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 71. P. 247.
125. *Yaffe L.G.* // Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 1992.
126. *Bellisard J., Holtz R.* // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 1275.

127. *Shelepin A.L., Shelepin L.A.* // Symmetries and algebraic structure in Physics. — Proc. of XVIII International Colloquium of Group Theoretical Methods in Physics. — New York: Nova Science. 1991. — P. 279.
128. *Карасев В.П.* // Кратк. сообщ. физ. 1976. № 3. С. 32.
129. *Карасев В.П., Карасев П.П., Санько В.А., Шелепин Л.А.* // Тр. ФИАН. 1979. Т. 106. С. 119.
130. *Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А.* // ЯФ. 1975. Т. 21. С. 1135.
- [131] *Regge T.* // Nuovo Cimento. 1958. V. 10. P. 544.
132. *Shelepin L.A.* // Nucl. Phys. B. 1967. V. 2. P. 608.
133. *Ponzano G., Regge T.* // Spectroscopy and group theoretical methods in physics. — Amsterdam: North-Holland, 1968. — P. 1.
134. *Маслов В.П.* // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 2. С. 272.
135. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. — М.: Наука, 1976.
136. *Загидуллин М.В., Шелепин Л.А.* // Тр. ФИАН. 1979. Т. 106. С. 154.
137. *Шелепин А.Л., Шелепин Л.А.* // Тр. ФИАН. 1986. Т. 173. С. 142.
138. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
139. *Pawula R.F.* // Trans. IEEE. 1967. V. IT-13. No. 1. P. 33.
140. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
- [141] *Ohlson J.E.* // Trans. IEEE. 1973. V. COM-22, No. 9. P. 43.
142. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1,2. — М.: Наука, 1967.
143. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Гостехиздат, 1954.
144. *Дынкин Е.Б.* Основания теории марковских процессов. — М.: Физматгиз, 1959.
145. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
146. *Шапиро И.С.* // ДАН СССР. 1956. Т. 106. С. 647.
147. *Попов В.С.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1116.
148. *Фок В.А.* Работы по квантовой теории поля. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
149. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1986.
150. *Миллер У.* Симметрии и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
- [151] *Talman J.* Special Functions. A Group Theoretical Approach. — New York: W.A. Benjamin, 1968.
152. *Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. — М.: Наука, 1985.
153. *Смородинский Я.А., Суслов С.К.* // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 192; Т. 36. С. 1066.
154. *Askey R., Wilson L.A.* // SIAM J. Math. Anal. 1979. V. 10. P. 1008.
155. *Wilson J.A.* // SIAM J. Math. Anal. 1980. V. 11. P. 690.
156. *Halm W.* // Math. Nachr. 1949. Bd. 2, Nr. 1. S. 4; Nr. 5. S. 263; Nr. 6. S. 340.
157. *Karlin S., McGregor J.L.* // Scripta Math. 1961. V. 26. P. 33.
158. *Суслов С.К.* // ТМФ. 1991. Т. 88. С. 66.
159. *Гельфанд И.М.* // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 1. С. 14.
160. *Гельфанд И.М., Зелевинский А.В.* // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 3. С. 17.
- [161] *Розенблюм А.В., Розенблюм Л.В.* // Диф. уравн. 1982. Т. 18. С. 1787.
162. *Wybourne B.G., Bowick M.J.* // Austral. J. Phys. 1977. V. 30, No. 3. P. 259.
163. *Wybourne B.G.* // Austral. J. Phys. 1979. V. 32, No. 5. P. 417.
164. *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1983.
165. *Шелепин А.Л., Шелепин Л.А.* // Кратк. сообщ. физ. 1989. № 7. С. 20.
166. *Гантмахер Ф.Р.* // Мат. сб. 1939. Т. 5. С. 217.
167. *Varut A.O., Ruczka R.* // Proc. Roy. Soc. London 1965. V. 287. P. 519.

Статья поступила 17.06.92 г.