

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКМЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.325

**ПОДОБИЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ  
РАЗРЯДОВ***А.А. Рухадзе, Н.Н. Соболев, В.В. Соколов*

(Институт общей физики АН СССР)

1. Результатам исследований низкотемпературных неизотермических газовых разрядов с низкой степенью ионизации посвящено огромное число публикаций. Такие разряды широко применяются в различных областях науки, техники и технологии. Как исследования, так и применения часто приводят к необходимости использования соотношений подобия разномасштабных разрядов, основанных на размерных преобразованиях. Несмотря на наличие ряда статей, специально посвященных соотношениям подобия в разрядах, а также их обсуждению в наиболее авторитетных монографиях [1 — 4], до сих пор встречаются противоречивые суждения о подобиях разрядов. Это обстоятельство побудило нас написать настоящую заметку, в которой мы попытались устранить противоречия и внести ясность в этот вопрос.

2. Рассмотрим стационарный низкотемпературный разряд с постоянным химическим составом. Будем исходить из наиболее общего определения подобия физических явлений [5]: разряды называются подобными, если физические величины  $G(\mathbf{r}, t)$  в сходственных пространственно-временных точках, связанных линейным преобразованием

$$\mathbf{r}' = s\mathbf{r}, \quad t' = st, \quad (1)$$

также связаны линейным преобразованием

$$G'(\mathbf{r}', t') = s^{\alpha[G]} G(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где  $\alpha[G]$  называется показателем подобия.

В самом общем виде газовый разряд описывается системой кинетических уравнений Больцмана и уравнений поля. Поэтому при определении законов преобразования физических величин, характеризующих разряд, следует исходить из требования инвариантности уравнений Больцмана и уравнений поля.

Отметим, что из (1) и (2) следует, что  $\alpha[\mathbf{v}] = 0$ , т.е. при преобразованиях (1) в сходственных пространственно-временных точках разряда скорости частиц одинаковы. Это в свою очередь приводит к выводу о том, что в подобных разрядах нормированные на единицу функции распределений частиц всех сортов  $f_k(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) (k = e, i, n)$  инвариантны. Поэтому вместо приведенного выше можно пользоваться следующим определением подобия разрядов: два разряда

называются подобными, если при преобразовании (1) нормированные на единицу функции распределений частиц всех сортов по скоростям инвариантны. Это определение более физично. Однако приведенное выше определение более общее, так как содержит не только требование об инвариантности функций распределений частиц по скоростям подобных разрядов, но и указание о форме преобразования других физических величин, например, плотностей различных компонент плазмы разряда. Отметим, что определение подобия разрядов имеющих инвариантные функции распределения, было предложено Маргенау [6] в 1948 г. Но его определение ограничивалось только требованием инвариантности функции распределения электронов, а не всех сортов частиц.

Наконец, заметим, что для полного подобия разрядов недостаточно говорить о подобии величин в объеме, подобными должны быть и граничные условия для функций распределений частиц и компонент электромагнитного поля (и также непротиворечивым образом).

3. Определим величины  $\alpha[G]$ , исходя из инвариантности кинетических уравнений Больцмана для различных сортов частиц

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_k}{m_k} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = I_k(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Все обозначения общепринятые. Поскольку операторы  $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial \mathbf{r}$  и  $\partial/\partial \mathbf{v}$  при преобразованиях (1) имеют показатели

$$\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] = \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] = -1, \quad \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] = 0, \quad (4)$$

то для инвариантности левой части уравнения (3) необходимо, чтобы показатели подобия для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  были равны

$$\alpha[\mathbf{E}] = \alpha[\mathbf{B}] = -1. \quad (5)$$

Требование инвариантности правой части уравнения (3) приводит к определению показателей подобия для плотностей частиц. Будем считать, что в разряде достаточно ограничиться только парными столкновениями частиц и поэтому

$$I_k(\mathbf{r}, t) = \sum_{k'} I_{kk'}(n_k, n_{k'}), \quad (6)$$

причем  $I_{kk'}(n_k, n_{k'}) \sim n_k n_{k'}$ . Отсюда для инвариантности правой части уравнения (3) необходимо выполнение соотношений

$$\alpha[n_n] = -1, \quad \alpha[n_e] = \alpha[n_i] = -1. \quad (7)$$

Вследствие инвариантности  $\mathbf{v}$  при этом плотность тока  $\mathbf{j} = \sum_k e_k n_k \mathbf{v}_k$  и плотность заряда  $\rho = \sum_k e_k n_k$  имеют показатели подобия

$$\alpha[\mathbf{j}] = -1, \quad \alpha[\rho] = -1. \quad (8)$$

Все сказанное до сих пор не накладывает ограничений на степень ионизации газа в разряде. В дальнейшем мы сосредоточим внимание на разряде с малой степенью ионизации газа, что позволит отказаться от некоторых из полученных выше ограничений, вытекающих из требования инвариантности кинетических уравнений Больцмана для частиц.

4. Прежде, однако, обсудим к каким выводам приводят требования инвариантности относительно преобразований (1) уравнений поля

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (10)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (11)$$

Уравнения (9) показывают, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  должны преобразовываться одинаковым образом. Из (9) их показатель подобия не определяется и поэтому мы вправе считать, что они преобразуются согласно (5). При этом из требования инвариантности уравнения (10) следует, что

$$\alpha[\mathbf{j}] = -2. \quad (12)$$

Наконец, требование инвариантности последнего уравнения (уравнения Пуассона) приводит к следующим соотношениям для плотности заряда  $\rho$  и плотностей электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$ :

$$\alpha[\rho] = -2, \quad \alpha[n_e] = \alpha[n_i] = -2. \quad (13)$$

Что касается плотности нейтральной компоненты  $n_n$ , то из требования инвариантности уравнений поля ее показатель подобия не определяется и поэтому мы вправе принять, что для нее выполняется соотношение (7).

Отметим, что соотношения подобия (12) и (13) также получены без каких-либо ограничений на степень ионизации газа в разряде.

5. Из сопоставления соотношений (7), (8) и (12), (13) видно, что в общем случае одновременная инвариантность уравнений Больцмана и уравнений поля при преобразованиях (1) невозможна. Естественно возникает вопрос об определении условий, когда эти соотношения не будут взаимно противоречивыми и можно говорить о полном подобии в разряде. Оказывается, что это возможно в двух предельных случаях.

а) Пусть газ настолько слабоионизован, что можно пренебречь столкновениями заряженных частиц между собой по сравнению с их столкновениями с нейтральными частицами, т.е. в уравнениях Больцмана для электронов и ионов  $I_{ee}, I_{ei}, I_{ii} \ll I_{en}, I_{in}$ . При этом требование инвариантности этих уравнений не накладывает ограничений на закон преобразования  $n_e$  и  $n_i$ , а следовательно, также  $\mathbf{j}$  и  $\rho$ . Поэтому мы вправе для них принять законы (12) и (13).

Строго говоря, однако, чтобы отказаться от преобразований (7) и (8) для  $n_e$  и  $n_i$  (а поэтому и  $\mathbf{j}, \rho$ ), анализировать только уравнения Больцмана для электронов и ионов недостаточно. Необходимо еще, чтобы инвариантным оставалось уравнение для нейтральных частиц. При этом для неопределенности преобразований  $n_e$  и  $n_i$  нужно потребовать пренебрежение столкновениями нейтральных частиц с заряженными, а это означает пренебрежение нагревом нейтральной компоненты в разряде заряженной компонентой. Это, в свою очередь, возможно, если теплоемкость нейтральной компоненты плазмы намного превосходит теплоемкость заряженной компоненты,  $p = n_n T_n \gg (n_e T_e + n_i T_i)$ . При этом  $T_n$  будет определяться температурой окружающей среды.

Таким образом мы пришли к классической теории подобия [1 — 4, 7]. Поскольку определяющими при этом оказываются соотношения, вытекающие из требований инвариантности уравнений поля, подобие разрядов в этих условиях принято называть П-подобием. Одновременно инвариантными в разряде в случае их П-подобия являются величины:  $E/n_n$ ,  $n_e/n_n^2$ ,  $n_i/n_n^2$ ,  $j/n_n$ .

б) Рассмотрим теперь другой предельный случай разряда с относительно высокой плотностью заряженных частиц и высокой степенью ионизации. Интегралы столкновений заряженных частиц между собой не считаются малыми по сравнению с их столкновениями с нейтральными частицами, т.е.  $I_{ee}, I_{ei}, I_{ii} \sim I_{en}, I_{in}$ . Более того и разогрев газа в разряде может быть значительным. Вместе с тем примем, что плотности заряда и тока в разряде малы так, что в уравнениях поля (10) и (11) можно положить

$$j = 0, \quad \rho = 0. \quad (14)$$

Такое приближение выполняется в разряде, если магнитное давление поля тока пренебрежимо мало по сравнению с газокINETическим давлением заряженной компоненты плазмы,  $B^2 \sim (jr_0)^2 \ll n_e T_e + n_i T_i$ , где  $r_0$  — поперечный размер разряда, а размер разряда, в свою очередь, намного больше дебаевского радиуса плазмы:

$$r_0^2 \gg \frac{T_e}{4\pi e^2 n_e} + \frac{T_i}{4\pi e^2 n_i}$$

(или, электростатическое давление поля разделения зарядов ничтожно мало по сравнению с давлением заряженной компоненты плазмы  $E^2 \sim (n_e - n_i)^2 e^2 r_0^2 \ll n_e T_e + n_i T_i$ ).

При указанных ограничениях инвариантность уравнений поля уже не накладывает ограничений (12) и (13) и мы можем считать выполненными в разряде соотношения (7) и (8), получаемые из требования инвариантности уравнений Больцмана. Такое подобие плотных разрядов называется Б-подобием. Впервые оно было рассмотрено в [5] и независимо повторено в [8,9]. В этом случае в разряде инвариантны величины  $E/n_n$ ,  $n_e/n_n$ ,  $n_i/n_n$  и  $j/n_n$ .

6. Проиллюстрируем сформулированные выше соотношения подобия на примере тлеющего разряда, горящего в цилиндрической трубке радиуса  $r_0$ . Давление нейтрального газа  $p = n_n T_n$  однородно в таком разряде, причем температура газа  $T_n$  — инвариант согласно как Б-, так и П-подобиям. Отсюда  $\alpha[p] = -1$ ; находим общие инварианты подобия

$$pr_0, \quad \frac{E}{p}, \quad U, \quad (15)$$

где  $U$  — потенциал горения разряда.

Что касается инвариантов  $j/p^2$  и  $J$  (полный ток), выполняемых при П-подобии, и  $j/p$  и  $JE$ , выполняемых при Б-подобии, то вопрос о том, какие из них имеют место в тлеющем разряде, зависит от степени ионизации газа. При малых степенях ионизации, когда не происходит нагрев нейтральной компоненты, в соответствии с изложенным выше, для всего разряда применимо П-подобие и это действительно подтверждается экспериментом. В случае же

существенной степени ионизации газа и разогрева нейтральной компоненты будет применимо Б-подобие, но не для всего тлеющего разряда, а только для его квазинейтрального столба, исключая приэлектродные слои пространственного заряда. Поскольку в этом случае роль слоев мала, то эксперимент подтверждает Б-подобие таких разрядов.

Мы не случайно привели здесь пример тлеющего разряда. Справедливость соотношений подобия в применении к тлеющему разряду экспериментально подтверждена в большом числе работ. Однако они с большой степенью достоверности применимы и к темному разряду и к дугам низкого давления, хотя экспериментальных исследований значительно меньше. Тем не менее, инварианты подобия очень полезны как при проведении экспериментов, так и при расчетах. Обычно вместо расчетов всех величин, характеризующих разряд, рассчитывают (либо измеряют) такие инварианты, как  $E/p$ ,  $pr_0$ ,  $j/p$  или  $j/p^2$ , чем значительно облегчают задачу исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1952.
2. Энгель А. Ионизованные газы. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Френсис Г. Ионизационные явления в газах. — М.: Атомиздат, 1964.
4. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987.
5. Pfau S., Rytcher A., Wojaczek K.//Beitr. Plasma-Phys. 1969. Bd. 9. S. 333.
6. Margenau H.//Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 326.
7. Holm R.//Phys. Zs. 1924. Bd. 25. S. 497.
8. Конюхов В.К.//ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 1649.
9. Muehe C.//J. Appl. Phys. 1974. V. 45. P. 82.

Статья поступила 22.01.91 г.,  
после доработки 12.05.91 г.