Сентябрь 1991 г. **Том 161, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

535.14 + 534.2

ИМПУЛЬС И КВАЗИИМПУЛЬС СВЕТА И ЗВУКА

Р. Пайерлс

(Nuclear Physics Laboratory. Keble Road, Oxford, England)

(*Highlights of Condensed-Matter Theory: Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". — Course LXXXIX/Eds. F. Bassani, E. Fumi, M.P. Tosi. — Amsterdam a.o.: North-Holland, 1985. — Pp. — 237 — 255*)

Предисловие редактора перевода. Имя Рудольфа Пайерлса хорошо известно физикам. Полученные им результаты относятся к самым различным областям теоретической физики. Р. Пайерлс ввел в физику твердого тела процессы переброса, в теории дислокаций существует сила Пайерлса, он занимался теорией ядра и основаниями квантовой электродинамики, ему принадлежат одни из первых в мировой литературе монографии по теории металлов и по квантовой теории твердого тела, совместно с О. Фришем Р. Пайерлс оценил критическую массу U-235.

Р. Пайерлс неоднократно бывал в Советском Союзе, выступал с докладами и лекциями. Еще в 30-е годы несколько раз приезжал в Ленинград. Там женился. Р. Пайерлс дружил с Ландау. У них есть две совместные работы.

Р. Пайерлсу более 80 лет. Совсем недавно он провел несколько недель в Москве — был гостем физических институтов Академии наук (ИФП, ИТФ, ФИАНа, ЛФТИ). Р. Пайерлс — замечательный собеседник. Будучи участником многих научных событий физики XX века, он с удовольствием делится своими воспоминаниями. Беседы с ним доставляют истинное наслаждение.

В своих работах Р. Пайерлс всегда решал простые по постановке, но глубокие задачи. К таким задачам несомненно принадлежит и задача об импульсе и квазиимпульсе. О квазиимпульсе, похоже, Р. Пайерлс думал многие годы. Квазиимпульс, его роль в кинетике твердых тел — навеки связаны с именем Пайерлса. В 1931 г. Р. Пайерлс ввел процессы переброса для квазиимпульса в кристаллах, а в 1990 г. на семинаре в ИФП АН СССР докладывал работу, перевод которой мы предлагаем вниманию читателей "Успехов физических наук". Нет сомнений, что соображения Рудольфа Пайерлса будут интересны всем, кого интересуют по-настоящему глубокие проблемы макроскопической физики.

М. И. Каганов

1. Введение

Вопрос о величине импульса света, распространяющегося в преломляющей среде, породил противоречие между двумя формулами: полученной первой формулой Минковского [1]

$$G_M = \frac{nE}{c}, \tag{1.1}$$

где n — показатель преломления (считающийся постоянным), а E — энергия светового пакета(1*), и появившейся несколько позднее формулой Абрагама [2]

© R. Peierls 1985

© Перевод на русский язык, Академия наук СССР, "Успехи физических наук" 1991

$$G_A = \frac{E}{nc}. \tag{1.2}$$

Мы увидим, что ни одна из этих формул не дает правильного выражения для импульса, но обе они связаны с интересными физическими величинами. G_A — чисто электромагнитная часть импульса, не учитывающая механический импульс (момент количества движения) атомов среды, а G_M — квазиимпульс — величина, представляющая во многих случаях интерес.

Для звуковых волн тоже существует явная неоднозначность. В физике твердого тела обычно утверждается, что импульс фонона равен нулю, в то время как в квантовой гидродинамике (теории сверхтекучей жидкости) импульс обычно полагают равным

$$G = \hbar k,$$

где k — волновой вектор. Это выражение можно переписать в виде

$$G = \frac{E}{s}, \tag{1.3}$$

где E — опять энергия, а s — скорость звука. И в этом случае (1.3) в действительности оказывается квазиимпульсом.

Таким образом, для дальнейшего обсуждения важно хорошо уяснить, что такое квазиимпульс и как он соотносится с импульсом.

2. Определение квазиимпульса

Всякая сохраняющаяся физическая величина связана с определенной инвариантностью. Если сохраняющаяся величина есть C, то

$$\frac{dC}{dt} = \{C, H\} = 0, \tag{2.1}$$

где H — гамильтониан, а скобки обозначают скобки Пуассона, определяемые как обычно:

$$\{C, H\} = \frac{\partial C}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial C}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{2.2}$$

Здесь q_α, p_α — канонические переменные системы. Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Согласно уравнению (2.1), величина C не зависит от времени; кроме того, из (2.1) следует, что гамильтониан инвариантен при преобразовании

$$\begin{aligned} q_\alpha &\to q_\alpha + \varepsilon\{q_\alpha, C\} = q_\alpha + \varepsilon\frac{\partial C}{\partial q_\alpha}, \\ p_\alpha &\to p_\alpha + \varepsilon\{p_\alpha, C\} = p_\alpha - \varepsilon\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

если ε — бесконечно малая величина.

Сегодня эти соотношения более известны в квантовой формулировке, где скобки Пуассона заменены коммутаторами.

Импульс связан с инвариантностью по отношению к смещению координат

$$x, y, z \to x + a, y, z \tag{2.4}$$

при произвольном a. Импульс сохраняется, если гамильтониан системы не

изменяется при преобразовании (2.4). Импульс есть величина, скобка Пуассона с которой любой величины A равна

$$\{A, p_i\} = \frac{\partial A}{\partial x_i}. \tag{2.5}$$

Если q_α и p_α — декартовы координаты, это условие, естественно, удовлетворяется при

$$p_i = \sum_n p_{ni}. \tag{2.6}$$

Здесь мы записали (n, i) вместо α; n нумеруют частицы, а i — координатные оси. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{p_i, H\} = \frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\sum_n \frac{\partial H}{\partial q_{ni}}. \tag{2.7}$$

Последнее уравнение, при выводе которого использовано определение (2.6), имеет правую часть, тождественно равную 0, если гамильтониан трансляционно инвариантен.

Все это, конечно, известные выражения, и они были выписаны лишь для того, чтобы опереться на аналогию при введении квазиимпульса.

Преобразование, связанное с квазиимпульсом, состоит в переносе всех физических характеристик из одной точки среды в другую, не перемещая при этом саму среду. Другими словами, если/обозначает некоторую величину, определенную в каждой точке среды (например, поле, механическую скорость, давление и т.д.), то преобразование имеет вид

$$f(x, y, z) \to f(x - a, y, z). \tag{2.8}$$

В то время как инвариантность по отношению к (2.4) является весьма общей, инвариантность по отношению к (2.8) гораздо уже. Она осуществляется лишь в однородных средах. Поскольку реальные среды имеют атомную структуру, инвариантность относительно преобразования (2.8) в лучшем случае является макроскопическим приближением. В идеальных кристаллах имеет место модифицированное преобразование (2.8), так как преобразование (2.8) не изменяет физических законов, только если a кратно периоду решетки. (Из-за этого квазиимпульс в кристалле может изменяться на дискретную величину при брэгговском отражении или в процессах переброса.)

Заметим, что (2.4) и (2.8) отличаются только перемещением среды, т.е. для электромагнитного поля в вакууме импульс и квазиимпульс совпадают.

По аналогии с (2.5), квазиимпульс K_i должен удовлетворять уравнению

$$\{f(\mathbf{r}), K_i\} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{2.9}$$

Это выполняется при

$$K_i = -\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\pi_\alpha(\mathbf{r})\frac{\partial q_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_i}, \tag{2.10}$$

где $\pi_\alpha(\mathbf{r})$ и $q_\alpha(\mathbf{r})$ — канонические переменные, причем функции определены так, что они равны нулю при нормальном, однородном состоянии среды. Мы предполагаем, что на бесконечности среда находится в покое, так что интеграл

(2.10) сходится. Это выражение можно проинтегрировать по частям и получить

$$\int_V d^3\mathbf{r} q_\alpha(r) \frac{\partial \pi_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_i} - \int_S d\sigma n_i \pi_\alpha q_\alpha,$$

где $d\sigma$ — элемент площади на поверхности S, окружающей объем V, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S. При принятых предположениях при неограниченном объеме поверхностный интеграл обращается в нуль, и мы можем также записать

$$K_i = \int d^3\mathbf{r}\, q_\alpha(\mathbf{r}) \frac{\partial \pi_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_i}. \tag{2.10a}$$

С помощью выражений (2.10) и (2.10 а) легко проверить справедливость формулы (2.9).

Величину $\mathbf{K}$ иногда называют кристаллическим импульсом или волновым вектором. Я предпочитаю называть ее квазиимпульсом, так как это понятие не имеет ничего общего с кристаллами и волновой механикой.

3. Квазиимпульс течения

Теперь мы рассмотрим квазиимпульс, связанный с течением жидкости с вязкостью, равной нулю. Лучше при этом основываться на лагранжевом описании жидкости, поскольку для уравнений в эйлеровых переменных не существует простой канонической формы. Во всяком случае, мне не удалось найти выражение для квазиимпульса в эйлеровых переменных.

В лагранжевом формализме независимыми переменными являются компоненты X, Y, Z вектора $\mathbf{R}$, который определяет положение элемента объема жидкости в гипотетическом состоянии покоя с невозмущенной плотностью ρ_0. Состояние жидкости определяется заданием истинного положения элемента объема $\mathbf{r}$ (компоненты x, y, z), т.е. движение жидкости определяется функцией

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t).$$

Поскольку нас будут интересовать малые перемещения, введем вектор $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}, \tag{3.1}$$

как зависимую переменную. Преобразование (2.5) выражается в терминах истинных пространственных координат $\mathbf{r}$. Итак, мы рассматриваем преобразование

$$u_l(\mathbf{r}) \to u_l(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = u_l - a_i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

для бесконечно малого $\mathbf{a}$. Это дает[2*]

$$x_l - X_l \to x_l - X_l(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = x_l - X_l(\mathbf{r}) - a_i\left(\delta_{il} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right),$$

$$X_l \to X_l - \frac{\partial X_l}{\partial x_i} a_i + a_l. \tag{3.3}$$

В лагранжевом описании $\mathbf{r}$ считается функцией $\mathbf{R}$. Чтобы получить из-

менение $\mathbf{r}(\mathbf{R})$, соответствующее (3.3), дадим величине $\mathbf{r}$ приращение $\delta\mathbf{r}$ такое, чтобы благодаря (3.3) $\mathbf{R}$ осталось неизменным:

$$X_l \to X_l - \frac{\partial X_l}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \delta x_k + a_l,$$

или

$$\frac{\partial X_l}{\partial x_k} \delta x_k = \frac{\partial X_l}{\partial x_i} a_i - a_l.$$

Домножая на $\partial x_n / \partial X_l$ и суммируя, получим

$$\delta x_n = a_n - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} a_i,$$

или окончательно

$$\delta u_n = -\frac{\partial u_n}{\partial X_i} a_i. \tag{3.4}$$

Таким образом, искомое преобразование в лагранжевых переменных имеет ту же форму, что и в эйлеровых (ср. (3.4) и (3.2)). Далее, канонически сопряженный с $u(\mathbf{R})$ импульс есть

$$\pi_u(\mathbf{R}) = \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}) = \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{R}). \tag{3.5}$$

Квазиимпульс течения согласно (2.10) равен

$$K_i^{(u)} = -\int_V d^2\mathbf{R} \rho_0 v_k \frac{\partial u_k}{\partial X_i}. \tag{3.6}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$K_i^{(u)} = \int_V d^3\mathbf{R} \rho_0 u_k \frac{\partial v_k}{\partial X_i} - \rho_0 \int_S d\Sigma\, \mathbf{u}\mathbf{v} N_i, \tag{3.7}$$

где $d\Sigma$ — элемент площади на поверхности S, ограничивающей объем V в $\mathbf{R}$-пространстве, а $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности. Для неограниченной жидкости, находящейся на бесконечности в покое, второй член обращается в нуль. Для конечного объема мы могли бы выбрать в качестве определения первый член выражения (3.7), что дало бы поправочный член в (3.6). Эта неоднозначность отражает тот факт, что для конечного объема квазиимпульс не сохраняется и существует произвол в определении преобразования. Для однозначности мы примем определение (3.6).

Из (3.6) легко проверить, что

$$\{u_k(\mathbf{R}), K_i^{(u)}\} = -\frac{\partial u_k}{\partial X_i}, \tag{3.8а}$$

а из (3.7)

$$\{v_k(\mathbf{R}), K_i^{(u)}\} = -\frac{\partial v_k}{\partial X_i} \tag{3.8б}$$

при условии, что точка **R** не находится на поверхности S. Таким образом, наше определение квазиимпульса **K** генерирует преобразование (3.4).

В каком случае сохраняется такая величина? Рассмотрим скорость изменения квазиимпульса (3.6)

$$\frac{\mathrm{d}K_i^{(u)}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{R}\rho_0\left[\dot{v}_k\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + v_k\frac{\partial v_k}{\partial X_i}\right]. \tag{3.9}$$

Уравнение движения жидкости

$$\rho_0\dot{v}_k = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \rho_0 F_k, \tag{3.10}$$

где p — давление, ρ — истинная плотность, а **F** — внешняя сила, действующая на единицу массы (плотность силы). Заметим, что производная от давления берется по "новым" координатам. Подставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$\frac{\mathrm{d}K_i^{(u)}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{R}\left\{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial X_i} - \rho_0 F_k\frac{\partial u_k}{\partial X_i} - \frac{1}{2}\rho_0\frac{\partial v^2}{\partial X_i}\right\}. \tag{3.11}$$

Поскольку элемент массы одинаков в эйлеровых и лагранжевых координатах, то

$$\rho_0\mathrm{d}^3\mathbf{R} = \rho\mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{3.12}$$

Кроме того, из определения (3.1) следует

$$\frac{\partial u_k}{\partial X_i} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \delta_{ik}. \tag{3.13}$$

Теперь выражение (3.11) приобретает вид

$$\frac{dK_i^{(u)}}{dt} = \int_{V_r} \mathrm{d}^3\mathbf{r}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho_0\int_{V_R}\mathrm{d}^3\mathbf{R}\frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{2}\rho_0\int_{V_R}\mathrm{d}^3\mathbf{R}\frac{\partial v^2}{\partial X_i} - \rho_0\int_{V_R}\mathrm{d}^3\mathbf{R}F_k\frac{\partial u_k}{\partial X_i}, \tag{3.14}$$

где, как обычно, "функция давления"[3*] P определяется из

$$\mathrm{d}P(\rho) = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{3.15}$$

Все члены, кроме последнего, сводятся к поверхностным интегралам в **R**- и **r**-пространствах:

$$\frac{\mathrm{d}K_i^{(u)}}{\mathrm{d}t} = \int_{S_r}\mathrm{d}\sigma p n_i - \rho_0\int_{S_R}\mathrm{d}\Sigma\left(P + \frac{1}{2}v^2\right)N_i - \rho_0\int_{V_R}\mathrm{d}^3\mathbf{R}F_k\frac{\partial u_k}{\partial X_i}. \tag{3.16}$$

Здесь вновь $\mathrm{d}\sigma$ и $\mathrm{d}\Sigma$ — элементы площади на поверхностях S_r и S_R, ограничивающих соответственно объемы V_r и V_R; **n** и **N** — единичные нормали к этим поверхностям.

Мы видим, что для неограниченного объема в отсутствие внешних сил квазиимпульс сохраняется. Более того, видно, что внешняя сила не дает вклада в квазиимпульс, если $\mathbf{u} = 0$, т.е. если жидкость находится в покое и при нор-

мальной плотности. Вообще внешняя сила приводит жидкость в движение, но если она мала, $\partial u_k/\partial X_i$ для конечного интервала времени — малая величина первого порядка, а последний член в (3.16) — малая величина второго порядка.

В случае звуковой волны, для которой

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\sin(\mathbf{kR} - \omega t), \tag{3.17}$$

причем вектора **A** и **k** имеют одинаковое направление, можно легко проверить, что

$$K^{(u)} = \frac{E}{s}, \tag{3.18}$$

где $s = \omega/k$ — скорость звука, а E — его энергия. В пределе одного фонона, когда $E = \hbar\omega$, находим

$$K^{(u)} = \hbar k. \tag{3.19}$$

4. Погруженное в жидкость тело

Мы будем рассматривать задачи с твердыми телами, погруженными в жидкость. Кажется, что в этом случае однородность нарушается и понятие квазиимпульса становится бесполезным. Однако мы покажем, что система по-прежнему инвариантна относительно следующего преобразования: а) смещение картины течения жидкости, аналогичное описанному выше; б) смещение погруженного тела на то же расстояние; в) смещение жидкости, окружающей тело, так чтобы предоставить ему место для перемещения и заполнить пустоту за ним.

Чтобы оправдать это утверждение, рассмотрим сначала вспомогательную задачу, в которой в неограниченной однородной жидкости находится частица — материальная точка с массой т, взаимодействующая с жидкостью, потенциал взаимодействия, вычисленный на единицу массы жидкости, равен $U(\mathbf{r} - \vec{\xi})$, $\vec{\xi}$ — координата частицы.

Проверим, что в этом случае закон сохранения квазиимпульса не нарушается, если к старому определению квазиимпульса добавить импульс точечной массы:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}^{(u)} + m\dot{\vec{\xi}}. \tag{4.1}$$

Поскольку жидкость неограничена, все поверхностные члены в (3.16) исчезают и скорость изменения **K'** (4.1) равна

$$\frac{\mathrm{d}K_i'}{\mathrm{d}t} = \rho_0\int \mathrm{d}^3\mathbf{R}\frac{\partial U(\mathbf{r}-\vec{\xi})}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \delta_{ik}\right) - \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\rho\frac{\partial U(\mathbf{r}-\vec{\xi})}{\partial \xi_i} =$$

$$= \rho_0\int \mathrm{d}^3\mathbf{R}\frac{\partial U(\mathbf{r}-\vec{\xi})}{\partial X_i} - \int \rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\frac{\partial U(\mathbf{r}-\vec{\xi})}{\partial x_i} - \int \rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\frac{\partial U(\mathbf{r}-\vec{\xi})}{\partial \xi_i}. \tag{4.2}$$

Первый член вновь сводится к поверхностному интегралу, исчезающему для неограниченной жидкости, а два других — сокращаются.

Этот результат сохранится и в пределе, когда потенциал равен нулю вне некой области, которая рассматривается как погруженное тело, и является бесконечным отталкивающим внутри этой области. Это и есть случай погруженного твердого тела. Таким образом, и в этом случае квазиимпульс **K'**,

определенный формулой (4.1), сохраняется.

Указанный вывод достаточно многозначителен, но, возможно, является не совсем прямым, и хотелось бы провести непосредственную проверку. Заметим, что "старая" переменная **R** относится к жидкости постоянной плотности в покое, т.е. в отсутствие погруженного в нее тела. Все интегрирования по **R**, следовательно, по-прежнему происходят по всему пространству, в то время как по **r** интегрируются по объему, фактически занятому жидкостью, т.е. по пространству вне погруженного тела.

Теперь можно применить формулу (3.16) с $\mathbf{F} = 0$. Второе слагаемое по-прежнему обращается в нуль, так как граничная поверхность в **R**-пространстве остается на бесконечности, а вот граница объема V_r теперь располагается и на поверхности погруженного в жидкость тела. Таким образом, 1-е слагаемое теперь точно равно действующей на тело силе со знаком минус и, следовательно, сокращается с производной по времени от второго слагаемого в (4.1).

5. Электромагнитное поле[4*)]

Применим теперь выражение (2.10) для определения квазиимпульса электромагнитного поля. Канонические переменные для поля удобно ввести согласно методу Ферми. В этих переменных действие равно

$$L = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}\left[-c^2\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2\right] \tag{5.1}$$

с дополнительным условием

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{5.2}$$

Тогда сопряженные импульсы

$$\pi_{A_i} = \varepsilon_0 \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad \pi_\varphi = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{5.3}$$

Теперь определение (2.10) дает

$$K_i^{(\text{e.m.})} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}\left(-\frac{\partial A_k}{\partial t}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).$$

Используя условие (5.2), получим

$$K_i^{(\text{e.m.})} = -\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right).$$

Интегрируя последний член по частям 2 раза, имеем

$$K_i^{(\text{e.m.})} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}\left(-\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} E_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}. \tag{5.4}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$K_i^{(\text{e.m.})} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}\,[\mathbf{E}, \mathbf{B}]_i + \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} E_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{5.5}$$

Первый член представляет собой знакомое выражение для импульса поля, а второй можно проинтегрировать по частям и получить интеграл

$$\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} A_i \operatorname{div} \mathbf{E}, \tag{5.6}$$

который равен нулю для поля в вакууме при отсутствии зарядов.

6. Поляризуемая среда

Ограничим наше рассмотрение немагнитными средами без дисперсии. Будем считать, что поляризация происходит благодаря смещению электрических зарядов внутри атомов. Если имеется N таких зарядов на единицу массы и каждый из них имеет массу m и заряд e, то при смещении x_i и возвращающей силе $-\Omega^2 m x_i$ электрический дипольный момент на единицу массы равен

$$M_i = N e x_i, \tag{6.1}$$

а сопряженный M_i импульс

$$\pi_{M_i} = \rho \left(\frac{m \dot{M}_i}{ne^2} + A_i \right). \tag{6.2}$$

Согласно определению (2.10) квазиимпульс, связанный с поляризацией, равен

$$K_i^{(M)} = - \int d^3\mathbf{r} \rho \left(\frac{m \dot{M}_k}{Ne^2} + A_k \right) \frac{\partial M_k}{\partial x_i}. \tag{6.3}$$

В сумме (5.5) и (6.3) дают

$$K_i^{(\text{e.m.})} + K_i^{(M)} = \int d^2\mathbf{r} \left\{ [\mathbf{E}, \mathbf{B}] + \varepsilon_0 E_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \rho A_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} - \frac{m}{Ne^2} \rho \dot{M}_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right\}.$$

Интегрируя третий член по частям и учитывая определение электрической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \rho \mathbf{M}, \tag{6.4}$$

а также то, что в отсутствие свободных зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

находим

$$K_i^{(\text{e.m.})} + K_i^{(M)} = \int d^3\mathbf{r} \left\{ [\mathbf{D}, \mathbf{B}] + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} (\mathbf{AM}) - \frac{m}{Ne^2} \rho \dot{M}_k \frac{\partial M_k}{\partial x_j} \right\}. \tag{6.5}$$

Второй член исчезает, если плотность жидкости постоянна, а последний пренебрежимо мал, если частота поля мала по сравнению с резонансной частотой Ω, что в этой модели совпадает с условием возможности пренебрежения дисперсией.

Таким образом, в однородном диэлектрике без дисперсии квазиимпульс равен той величине, которую Минковский считал импульсом:

$$\mathbf{K} = \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{D}, \mathbf{B}]. \tag{6.6}$$

Легко проверить, что это выражение совпадает с формулой (1.1) и что квазиимпульс фотона с волновым вектором k равен $\hbar k$.

На то, что эта величина является квазиимпульсом, указал E.J. Blount в 1972 г. в неопубликованном докладе.

7. Импульс света

Теперь мы готовы рассмотреть давление, которое оказывает свет на тело, погруженное в жидкость. Записав баланс квазиимпульса, можно приравнять начальное значение квазиимпульса **k**, т.е. значение, когда свет еще не достиг тела, его конечной величине; сумме квазиимпульса света и импульса тела. Для этой цели будем вычислять квазиимпульс поля по формуле (6.6), поскольку до того, как свет достиг тела, и после того, как отраженный свет вышел за пределы области взаимодействия с телом, плотность однородна (в пренебрежении поправками, пропорциональными интенсивности света, которые дадут вклад лишь 2-го порядка во второе слагаемое в выражении (6.5)), а всевозможные акустические возмущения также будут приводить к поправкам 2-го порядка к квазиимпульсу, как это было объяснено в конце раздела 3.

Таким образом, давление на предмет имеет такую величину, как если бы было справедливо выражение Минковского для импульса и отсутствовали все степени свободы, кроме электромагнитных. Этот результат был получен в важной работе Гордона [3]. Он, однако, не показал связи с определением квазиимпульса. Вывод находится в согласии с прекрасным экспериментом Джонса и Ричарда [4], впоследствии усовершенствованным Джонсом и Лезилем [5].

Преимущество применения закона сохранения квазиимпульса, а не импульса, состоит в том, что при преломлении и отражении света создаются акустические возмущения, обладающие импульсом, но несущие лишь пренебрежимо малый квазиимпульс. Однако из обсуждения в разделе 4 становится ясным, что закон сохранения квазиимпульса можно применить только для тела, полностью погруженного в жидкость. Если жидкость прилегает лишь к части поверхности тела, то вычисление давления таким способом невозможно. Это можно увидеть из формулы (3.16), в которой присутствуют границы как в **R**-пространстве, так и в обычном пространстве; каждый интеграл содержит поверхностные члены.

Можно привести и более "физическое" рассуждение, указав, что в случае погруженного тела постоянное гидростатическое давление не создает эффекта, так как полная сила, действующая на тело, равно нулю, в то время как для предмета, погруженного лишь одной стороной, необходимо знать абсолютную величину давления. Я узнал от профессора А. Гоззини, что предварительные опыты в такой геометрии дали результаты, по-видимому, отличающиеся от предсказания Минковского.

Квазиимпульс также является наиболее простым понятием для обсуждения других процессов в конденсированных средах, таких как эффект Черенкова, фотоэлектрический эффект и др., при описании которых обычно говорят об импульсе, в то время как на самом деле рассуждения верны по отношению к квазиимпульсу.

Интересен случай рождения фононов при рассеянии нейтронов. В этом случае интересно сохранение и импульса, и квазиимпульса. У нейтрона, как слабо взаимодействующей частицы, импульс и квазиимпульс совпадают. Если уменьшение импульса нейтрона есть $\Delta\mathbf{p}$, то таково же и уменьшение квази-

импульса. Таким образом квазиимпульс рождаемого фонона

$$\hbar\mathbf{k} = \Delta\mathbf{p}. \tag{7.1}$$

С другой стороны, среда должна также воспринять и импульс, равный (7.1), но совсем не очевидно, что этот импульс следует считать принадлежащим фонону. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 8.

Квазиимпульс также полезен при определении звукового давления, хотя я и не буду здесь это обсуждать. Так же как и в случае светового давления, важна геометрия опыта. Рихтер [6] показал, что явно противоречивые результаты, встречающиеся в литературе о звуковом давлении, можно согласовать, если уделить должное внимание геометрии опытов.

8. Импульс звука

Вернемся теперь от дискуссии о квазиимпульсе к импульсу. Для жидкости определение импульса очевидно. В лагранжевых и эйлеровых координатах соответственно

$$G_i = \int d^3\mathbf{R}\rho_0 v_i\,, \tag{8.1а}$$

$$G_i = \int d^3\mathbf{r}\rho v_i\,. \tag{8.1б}$$

Правда, необходима определенная осторожность при определении звуковой волны. В идеальной жидкости без дисперсии и нелинейности звуковая волна малой интенсивности в лагранжевых переменных может быть записана как

$$u_i = A_i \sin(\mathbf{kR} - \omega t), \tag{8.2а}$$

где $\mathbf{A}$ параллелен $\mathbf{k}$ и $\omega = ks$, где s — скорость звука. В эйлеровых переменных запишем

$$\begin{cases} v_i = -B_i\cos(\mathbf{kr} - \omega t), \\ \rho/\rho_0 - 1 = -(1/\omega)(\mathbf{B}, \mathbf{k})\cos(\mathbf{kr} - \omega t), \end{cases} \tag{8.2б}$$

$$\mathbf{B} = \omega\mathbf{A}. \tag{8.3}$$

Если вычислить импульс из (8.1а), используя (8.2а), то естественно найдем

$$\mathbf{G} = 0, \tag{8.4а}$$

в то время как из (8.1б) и (8.2б) средняя плотность импульса

$$g = \frac{1}{2}\rho_0\frac{k}{\omega}B^2, \tag{8.5}$$

$$g = \frac{\varepsilon k}{\omega}, \tag{8.6}$$

где $\varepsilon = (1/2)\rho_0 B^2$ — плотность энергии. Таким образом,

$$G = \frac{E}{s}. \tag{8.4б}$$

Этот парадокс не означает, что существует разница между определением (8.1а) и (8.1б) импульса, но говорит о том, что определения (8.2а) и (8.2б) звуковой волны неэквивалентны. Формализмы Лагранжа и Эйлера эквивалентны, но переход от одного к другому нелинеен. Поскольку выражения (8.2а) и (8.2б) записаны с точностью до величины первого порядка, они отличаются в членах второго порядка. Энергия и импульс квадратичны по амплитуде — это и объясняет различие.

Для занимающихся физикой твердого тела координаты Лагранжа более естественны, поскольку всякий предпочитает отметить каждый атом, а не использовать для идентификации атома его положение в пространстве. В квантовой гидродинамике, т.е. для сверхтекучих жидкостей, обычно используют эйлеровы переменные и принимают равенство (8.4б). Пока мы имеем дело с идеальной жидкостью без дисперсии и нелинейности, любой подход справедлив, если только последовательно его применять. Теллунг [7] показал, что рассмотрение сверхтекучей жидкости может быть проведено в терминах "лагранжевых фононов", определенных формулой (8.2а), вместо используемых обычно "эйлеровых фононов" с определением (8.2б).

На практике никто не имеет дела с бесконечно протяженной звуковой волной, как в (8.2); напротив, можно записать (в лагранжевых переменных)

$$u_z = f(Z - st)\cos k(Z - st) + h(Z - st), \tag{8.7}$$

где f— амплитудная модуляция, а h представляет собой среднюю (по времени) скорость. Предполагается, что f и h слабо меняются на расстоянии $\sim k^{-1}$. Любой такой волновой пакет является решением волнового уравнения, и мы можем положить $h = 0$, как в формуле (8.2а), или выбрать его так, чтобы соответствовать выражению (8.2б).

9. Эффекты дисперсии и нелинейности

В среде с дисперсией, где, однако, уравнения Лагранжа продолжают оставаться линейными, решение должно иметь вид

$$u_z = f(Z - ut)\cos k(Z - wt) + h(Z - st), \tag{9.1}$$

где $w = \omega/k$ — фазовая скорость, $u = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ — групповая скорость при волновом векторе, равном k, а $s = (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k)_0$ — скорость звука в длинноволновом пределе, поскольку $h(Z)$ эффективно длинноволновый пакет. Два возмущения, составляющие выражение (9.1), двигаются теперь с различными скоростями и со временем разделятся в пространстве. Таким образом, кажется разумным рассматривать первое слагаемое как звуковой пакет, а второе — как длинноволновое возмущение, которое можно породить одновременно со звуком, но которое не принадлежит ему. В квантовой теории лишь первое слагаемое следовало бы отождествить с фононом. Такую интерпретацию не следует воспринимать догматически. Ничто не мешает нам назвать фононом все выражение (9.1), если мы согласны рассматривать фонон разделенным между двумя областями пространства.

Однако кажется правильным определять импульс звука так, чтобы он не распадался за разумное время, но тогда ему следует приписать величину, равную нулю. Аналогично и импульс фонона в таком предположении следует положить равным нулю. Именно на этом основывались предыдущие рассуждения в [8].

Следует еще рассмотреть возможное влияние нелинейных эффектов. Ведь в действительности, уже в связи с чисто кинематическими эффектами, не существует жидкости, для которой уравнения движения строго линейны.

Если мы рассматриваем звук малой амплитуды, то в нелинейные члены войдут высшие ее степени, но, как уже обсуждалось, при вычислении импульса нельзя ограничиться линейным приближением. В [9] я рассмотрел среду со слабой дисперсией и ангармоническими членами в потенциальной энергии, которая описывается следующими уравнениями Лагранжа:

$$\ddot{u}_i = s^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \alpha\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla^2\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \left(\frac{3}{2}+\beta\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\right\}. \tag{9.2}$$

Здесь α — коэффициент при первом дисперсионном члене, β — первый ангармонический коэффициент в разложении потенциальной энергии по плотности. Мы перестали использовать заглавные буквы для лагранжевых переменных, поскольку в этом разделе используем только их. Для чисто одномерного движения уравнение (9.2) сводится к

$$\ddot{u} = s^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{9.3}$$

и является линейным при $\beta = 0$.

Будем искать решение, описывающее нераспадающийся звуковой пакет:

$$\mathbf{u} = \mathrm{Re}\{\mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{U}t)\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{w}t)]\} + \mathbf{h}(\mathbf{r} - \mathbf{U}t), \tag{9.4}$$

$\mathbf{f}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{w}$ направлены по оси z; $w = s(1 - \alpha k^2/2)$, $U = s(1 - 3\alpha k^2/2)$. Заметим, что в отличие от выражения (9.1) мы требуем, чтобы вторая часть распространялась с той же групповой скоростью, что и первая.

Из этого условия можно определить $\mathbf{h}$ при заданной функции f, и тогда плотность импульса равна:

$$g_z = \int \mathrm{d}^3\mathbf{q}\left\{\exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{U}t)]\frac{\beta U^2 q_z^2 + s^2(q^2 - q_z^2)}{s^2 q^2 - U^2 q_z^2}\chi(\mathbf{q})\right\}, \tag{9.5}$$

$$\chi(\mathbf{q}) = \frac{\rho_0 s^2 k^2}{2U}\frac{1}{(2\pi)^3}\int |f(\mathbf{r})|^2\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{9.6}$$

Чтобы получить полный импульс, надо проинтегрировать это выражение по $\mathrm{d}^3\mathbf{r}$. С точностью до множителя $(2\pi)^3$ это эквивалентно тому, чтобы взять подынтегральное выражение из (9.5) в точке $\mathbf{q} = 0$. Но в этой точке оно имеет разрыв. Это отражает тот факт, что функция (9.5) содержит член, ведущий себя на больших расстояниях как

$$\mathrm{const}\,\frac{2\gamma^2 z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}} \tag{9.7}$$

с

$$\gamma^2 = \frac{s^2}{s^2 - U^2}. \tag{9.8}$$

Выражение (9.7) имеет вид лоренц-преобразованного поля диполя. Хорошо известно, что интеграл от такого поля по бесконечному объему зависит от формы этого объема. Мы приведем ответ для двух предельных случаев: сильно вытянутый вдоль оси z объем и объем, сплюснутый к плоскости (x, y). Первый случай соответствует взятию предела (9.5) при $\mathbf{q} \to 0$ с $q_z \ll q$. Подынтегральное выражение тогда стремится к

$$\chi(0). \tag{9.9а}$$

Второй случай соответствует $q_z = q$, что дает

$$\frac{\beta U^2}{s^2 - U^2}\chi(0). \tag{9.9б}$$

Соответственно полные импульсы равны

$$G = \frac{E}{U(1 - \alpha k^2)} \tag{9.10а}$$

и

$$G = \frac{\beta U E}{3s^2\alpha k^2(1 - \alpha k^2)}, \tag{9.10б}$$

причем было использовано выражение для энергии

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 s^2 k^2 (1 - \alpha k^2)\int |f(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}. \tag{9.11}$$

Совершенно неясно, какой из этих двух (или других, возможных при другом выборе объема) ответов правилен. Имеются слабые основания предположить, что это (9.10а). В пределе $\alpha = 0$ он согласуется с "эйлеровской" величиной (8.4б) или (1.3). Выражение (9.10б) достаточно своеобразно, так как при ненулевом β оно расходится при $k \to 0$.

Все эти результаты не применимы непосредственно к твердым телам, в которых дисперсионные и ангармонические поправки имеют более сложный вид.

10. Импульс света

Для света, распространяющегося в однородной диэлектрической жидкости, плотность импульса есть сумма импульса поля и вещества, приведенного полем в движение. Первая часть правильно учитывается формулой Абрагама (1.2). Это доказывается из требования симметрии релятивистского тензора энергии — импульса поля, что приводит к связи плотности импульса и потока энергии. Механическая часть импульса задается формулой $\rho\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — средняя скорость атомов среды. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \rho\mathbf{v}. \tag{10.1}$$

Мы оценим v по обычной формуле из учебника для объемной силы, действующей со стороны поля (см., например, [10]):

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\nu\nabla E^2 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{c^2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}, \mathbf{H}], \tag{10.2}$$

где ν обозначает

$$\nu = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}. \tag{10.3}$$

В случае чисто волнового движения, с помощью уравнений Максвелла, это выражение можно свести к

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \left[(n^2 - 1) - \frac{1}{2}\nu\right]\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{c^2}. \tag{10.4}$$

Если свет распространяется в сторону невозмущенной жидкости, так что вначале при $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{v} = 0$, то (10.4) можно проинтегрировать:

$$\rho\mathbf{v} = \left(n^2 - 1 - \frac{1}{2}\nu\right)\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{c^2}.$$

Последний множитель равен плотности импульса по Абрагаму. Добавив электромагнитную часть, получим

$$g = \left(n^2 - \frac{1}{2}\nu\right)g_A$$

и

$$G = \left(n^2 - \frac{1}{2}\nu\right)\frac{E}{nc}, \tag{10.5}$$

если E обозначает энергию.

В частности, в случае применимости к жидкости формулы Клаузиуса—Моссоти

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = \mathrm{const}\cdot\rho \tag{10.6}$$

находим

$$\nu = (n^2 - 1) + \frac{1}{3}(n^2 - 1)^2, \tag{10.7}$$

а (10.5) приобретает вид

$$G = \frac{1}{2}\left[n^2 + 1 - \frac{1}{3}(n^2 - 1)^2\right]\frac{E}{nc}. \tag{10.8}$$

В предыдущей работе по этому поводу [11] я записал при последнем члене коэффициент 1/5 вместо 1/3. Эта ошибка возникла из-за того, что учитывалась лишь прямая электромагнитная сила, действующая на атомы среды, отличающаяся от (10.2). Однако, как показали Лай, Суен и Янг [12], корреляции между положениями атомов изменяются полем, и это изменение приводит к возникновению дополнительных сил, так что в сумме правилен результат (10.2). Он применим в статическом пределе, как это хорошо известно из термодинамических соображений; он также применим, если продолжительность действия света велика по сравнению с временем релаксации движения атомов в жидкости.

Теперь видно, что импульс света в жидкости не равен ни выражению Минковского, ни выражению Абрагама. Результат (10.5) или (10.8) не так просто проверить экспериментально, поскольку в любом процессе рассеяния, преломления или отражения света генерируются также и звуковые волны.

Это можно видеть из выражения (10.2), которое сводится к полной временной производной только в случае чисто волнового движения. В других случаях интеграл по времени от (10.2) не исчезает, и движение не прекращается после прохождения света. Если мы захотим вычислить радиационное давление на предмет через изменение импульса света, придется учесть и этот остаточный импульс.

Я попытался сделать это для одного практического случая [13], но и здесь не смог учесть силы гидростатического давления. Я считал, что за разумное время жидкость не сместится так далеко, чтобы возникшие изменения плотности привели к заметным изменениям давления. Так или иначе, сила (10.2) создает разность давлений между пучностью и узлом стоячей волны, и эта разность усредняется за время порядка λ/s, где λ — длина волны, а s — скорость звука. Это время гораздо больше, чем световой период, и в то же время реально всегда гораздо меньше, чем длительность действия света. Фактическое определение звуковых возмущений представляет собой достаточно сложную гидродинамическую задачу, которую надо решать отдельно для каждой геометрии опыта. Как мы уже видели, эту трудность можно всегда обойти, вычисляя давление на погруженное тело с помощью закона сохранения квазиимпульса.

* * *

Часть изложенных здесь результатов была прояснена во время пребывания в Scoula Normale Superiore в Пизе. Автор обязан проф. Л.А. Радикати и его коллегам, проявившим гостеприимство, и проф. А. Гоззини за интересные обсуждения.

(*Перевод с англ Я. Б. Базалия*)

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

(1*) Слово "пакет" мы будем все время использовать для перевода английского "pulse" для того, чтобы не происходило путаницы "импульса света" с "механическим импульсом света".

(2*) Дальнейшие рассуждения обосновывают следующее утверждение: если обозначить $\mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{R})$, то при преобразовании $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \to \mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ величина $\mathbf{V}$ преобразуется так: $\mathbf{V}(\mathbf{R}) \to \mathbf{V}(\mathbf{R} - \mathbf{a})$.

(3*) $P(\rho)$ — термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы жидкости при постоянной температуре (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — § 3).

(4*) Электромагнитные формулы в статье записаны в системе MKS. См., например: *Сивухин Д.В.* Курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука (несколько изданий).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Minkowski H.*//Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1908. S. 53; Math. Ann. 1910. Bd. 68, S. 473.
2. *Abraham M.*//Rend. Circolo Mat. Palermo. 1909. V. 28. P. 1; 1910. V. 30. P. 33.
3. *Gordon J.*//Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 14.
4. *Jones R. V., Richards J.C.G.*//Proc. Roy. Soc. London. A. 1954. V. 221. P. 480.
5. *Jones R.V., Leslie B.*//Ibidem. 1978. A. V. 360. P. 347.
6. *Richter G.*//Zs. Phys. 1940. Bd. 115. S. 97.
7. *Thellung A.*//Ann. Phys., New York. 1980. V. 127. P. 289.
8. *Peierls R.* Surprises in Theoretical Physics. — Princeton, N.Y., 1979. — Sect. 4.2. — (Перевод: *Пайерлс Р.* Сюрпризы в теоретической физике/Пер. под ред. М.И. Каганова. — М.: Наука, 1988).
9. *Peierls R.*//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1983. V. 390. P. 1.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957. — § 56; М.: Наука, 1982. — § 75.
[11] *Peierls R.*//Proc. Roy. Soc. London. 1976. V. 347. P. 475.
12. *Lai H.M., Suen W.M., Young K.*//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 177; Phys. Rev. A. 1982. V. 75. P. 1755.
13. *Peierls R.*//Proc. Roy. Soc. London. A. 1977. V. 355. P. 141.