

530.182

**КИНЕМАТИКА АВТОВОЛНОВЫХ СТРУКТУР  
В ВОЗБУДИМЫХ СРЕДАХ**

*B.A. Давыдов, В.С. Зыков, А.С. Михайлов*

(Московский институт радиотехники, электроники и автоматики,  
Институт проблем управления АН СССР,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение . . . . .	45
2.	Основные закономерности движения автоволновых фронтов . . . . .	49
3.	Кинематические уравнения . . . . .	51
4.	Стационарная циркуляция спиральных автоволн на плоскости . . . . .	55
5.	Квазистационарное приближение . . . . .	59
6.	Резонанс и дрейф спиральных волн на плоской поверхности . . . . .	61
7.	Спиральные волны в анизотропных возбудимых средах . . . . .	64
8.	Спиральные волны на искривленных поверхностях . . . . .	68
9.	Циклоидная циркуляция . . . . .	73
10.	Трехмерные автоволновые структуры . . . . .	77
11.	Заключение . . . . .	82
	Список литературы . . . . .	83

## 1. Введение

Современная физика все чаще сталкивается с необходимостью применения существенно нелинейных моделей для объяснения широкого круга природных явлений. К числу таких специфически нелинейных эффектов относятся и так называемые *процессы самоорганизации*, проявляющиеся в образовании, эволюции и распаде сложных пространственно-временных структур. Изучение процессов самоорганизации в настоящее время является одной из актуальнейших задач в исследовании разнообразных физических, химических и биологических систем [25, 51, 55, 57, 115, 123, 125]. Это бурно развивающееся междисциплинарное научное направление получило название синергетика [48, 49, 63].

Яркими примерами явлений самоорганизации служат автоволновые структуры, наблюдающиеся в так называемых *возбудимых средах* [15, 46].

Распределенная возбудимая среда состоит из связанных локально друг с другом активных элементов, способных формировать импульс в ответ на приход внешнего сигнала. Импульсы, распространяющиеся в возбудимых средах, часто называют автоволнами, подчеркивая тот факт, что их характеристики (форма, скорость и т.д.) определяются, в основном, параметрами среды и практически не зависят от начальных и граничных условий.

Свойствами возбудимых сред обладают нервные и мышечные ткани живых организмов [42], некоторые растворы химических реагентов [8, 24, 25],

электронные твердотельные системы [6, 19, 60], магнитные сверхпроводники [13], экологические системы [59] и т.д.

Особым типом автоволновых режимов в двухмерных возбудимых средах являются вращающиеся спиральные волны. Они наблюдаются в растворах с реакцией Белоусова—Жаботинского [65, 102, 103, 121] (рис. 1), колониях микроорганизмов [82], в сетчатке глаза [69, 83] и в ткани сердечной мышцы [66, 72, 123].

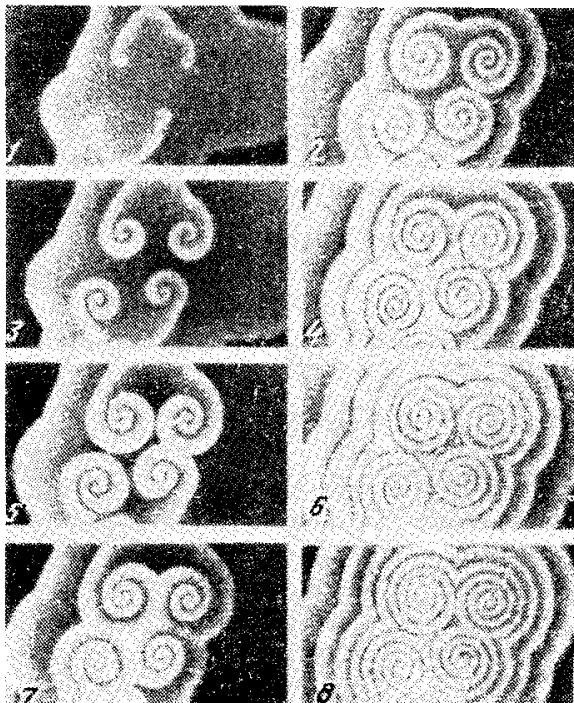


Рис. 1. Образование спиральной волны в результате разрыва фронта концентрической волны в реакции Белоусова — Жаботинского

В трехмерных средах наблюдаются автоволновые структуры в виде цилиндрических свитков или вихревых колец [45, 46, 122, 125]. При их взаимодействии могут появиться трехмерные образования весьма сложной топологии [126].

В настоящее время общепринятым математическим описанием возбудимых сред являются системы параболических уравнений типа "реакция—диффузия"

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \hat{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{U}$  — вектор состояния элементарного объема возбудимой среды. В среде химической природы компоненты вектора  $\mathbf{U}$  представляют концентрации реагентов, матрица  $\hat{\mathbf{D}}$  определяет коэффициенты их диффузии, нелинейная функция  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  задает интенсивность химических реакций, протекающих в каждом элементарном объеме. В средах иной природы компоненты вектора  $\mathbf{U}$  могут иметь смысл температуры или величины электрического потенциала, а коэффициенты матрицы  $\hat{\mathbf{D}}$  могут являться коэффициентами теплопроводности или удельной электрической проводимости.

Как правило, реальные возбудимые среды описываются многокомпонентными системами (1.1). Тем не менее многочисленные исследования [32, 123, 130] свидетельствуют, что основные закономерности образования автоволновых структур воспроизводятся в рамках двухкомпонентной системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= D_E \Delta E + F(E, g), \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= D_g \Delta g + \epsilon G(E, g).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Специфические "возбудимые свойства" системы (1.2) определяются И-образной формой нелинейной функции  $F$ . При этом функция  $G$  может быть монотонной или даже линейной. Обычно функция  $F(E, g)$  задается полиномами или кусочно линейными функциями [78, 105, 108, 110, 111, 117]. В качестве примера на рис. 2 представлена кусочно линейная функция  $F(E, g)$ , которая впервые была предложена в [47] и достаточно часто используется в современных работах по исследованию автоволновых структур [23, 32, 54, 94, 106]. Эта функция задается выражением

$$F(E, g) = f(E) + g,\tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}f(E) &= -Ek_1, \quad E < \sigma, \\ &= (E - a)k_f, \quad \sigma \leq E \leq 1 - \sigma, \\ &= (1 - E)k_2, \quad 1 - \sigma < E,\end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{a - \sigma}{\sigma} k_f, \quad k_2 = \frac{1 - \sigma - a}{\sigma} k_f.$$

Функция  $G(E, g)$  при этом задается следующим образом:

$$\begin{aligned}G(E, g) &= k_g E - g \quad \text{при } k_g E - g \geq 0, \\ &= k_\epsilon (k_g E - g) \quad \text{при } k_g E - g < 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Предельный случай системы (1.2) при  $\epsilon = 0$ , по существу, соответствует однокомпонентной системе, имеющей два устойчивых состояния. В такой системе возможно появление волн перехода из одного устойчивого состояния в другое. Такого типа волны рассматривались применительно к задачам о "диффузии генов" [43] и о распространении пламени [27, 62].

В более общем случае системы (1.2), когда  $\epsilon \neq 0$ , существует единственное состояние равновесия ( $E = 0, g = 0$ ), устойчивое по отношению к малым возмущениям. В результате надпороговых возмущений в системе генерируется распространяющийся импульс, передний фронт которого соответствует волне перехода из состояния покоя в возбужденное состояние, а задний фронт — возвращению системы в исходное состояние (рис. 3).

Важно отметить, что форма импульса и скорость его распространения асимптотически приближаются к стационарным значениям, которые не зависят от начальных условий.

Рассмотрение рис. 3 показывает, что приближение значения переменной  $E$  (ее часто называют "активатором") к значению  $E = 0$  еще не означает, что система возвратилась в исходное состояние. Значение второй компоненты  $g$  (которую называют "ингибитором") в течение некоторого времени еще сильно отличается от стационарного состояния. Из анализа решений системы (1.2) с  $\epsilon = 0$  и  $g > 0$  [53] следует, что увеличение значения медленной переменной  $g$  в области фронта автоволны уменьшает скорость его распространения вплоть до полной его остановки и смены направления распространения. В силу этого

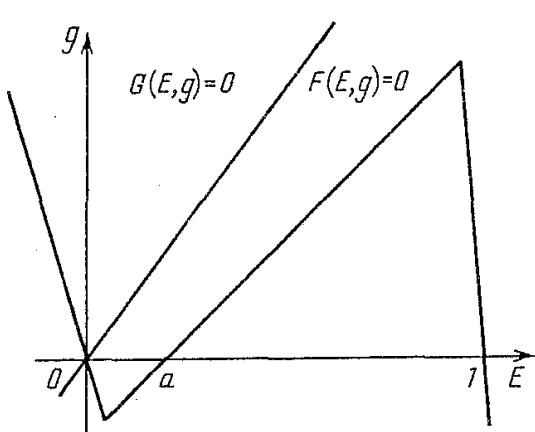


Рис. 2. Кусочно линейная аппроксимация нуль-изоклин модели (1.2)

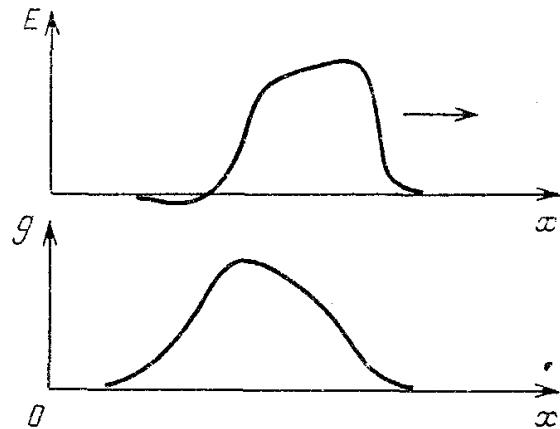


Рис. 3. Профиль автоволны в двухкомпонентной модели возбудимой среды

отмеченная особенность структуры автоволнового импульса приводит к двум важным следствиям. Во-первых, импульсы, распространяющиеся навстречу друг другу, подавляют один другого, аннигилируют. Во-вторых, скорость импульсов в их периодической последовательности меньше, чем скорость одиночного импульса, и уменьшается с увеличением частоты их следования (это свойство возбудимой среды называется рефрактерностью). Более того, существует настолько малый период следования импульсов  $T_{\min}$ , при котором стационарное распространение последовательности импульсов становится невозможным. Если период  $T$  следования импульсов велик по сравнению с  $T_{\min}$ , то их взаимным влиянием (т.е. рефрактерностью среды) можно пренебречь и рассматривать их как уединенные.

К настоящему времени накоплено большое число данных экспериментальных исследований возбудимых сред, а также проведены многочисленные вычислительные эксперименты на моделях типа "реакция—диффузия". Систематизация этих данных, их объяснение с единых позиций и указание новых направлений экспериментальных исследований является основной задачей теории автоволновых структур.

Важно отметить, что весьма полную информацию о процессе эволюции автоволновой структуры можно получить, описывая только изменение со временем положения фронта волны. Эта идея, кардинальным образом упрощающая рассмотрение автоволновых процессов, лежит в основе кинематического подхода к описанию автоволновых структур, которому посвящен настоящий обзор.

Впервые эта идея была сформулирована в работе [119] и развивалась в дальнейшем применительно к так называемым аксиоматическим моделям [5, 17, 18, 44, 76, 77, 109, 112], в рамках которых закономерности движения автоволновых фронтов задавались эвристически, опираясь, по существу, только на результаты рассмотрения автоволновых процессов в одномерных моделях типа "реакция—диффузия". В силу этого чрезмерного упрощения результаты применения аксиоматических моделей при исследовании двухмерных и трехмерных сред в ряде случаев противоречат данным натурных и вычислительных экспериментов.

Очевидно, однако, что наибольшее практическое значение имеет исследование двухмерных и трехмерных возбудимых сред, автоволновые процессы в которых несравненно сложнее, интереснее и разнообразнее, чем в одномерных средах. Именно при исследовании двухмерных и трехмерных структур

кинематический подход, излагаемый ниже, демонстрирует свои преимущества перед другими приближенными методами: универсальность и относительную простоту. При этом область приложения кинематического подхода не ограничивается рассмотрением стационарных автоволновых структур, а включает и рассмотрение эволюционных задач.

## 2. Основные закономерности движения автоволновых фронтов

Для отыскания скорости и формы стационарной волны в одномерной среде, описываемой системой (1.2) с  $D_g = 0$ , в ней производится замена переменных  $\xi = -x + V_0 t$ , что дает

$$\begin{aligned} D_E \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} &= V_0 \frac{\partial E}{\partial \xi} - F(E, g), \\ V_0 \frac{\partial g}{\partial \xi} &= \epsilon G(E, g). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Наличие в полученной системе малого параметра  $\epsilon$  позволяет применить к ее изучению метод возмущений [70]. При этом обнаружено, что система (2.1) допускает два решения. Одно решение представляет собой импульс, распространяющийся со скоростью  $V_0$ , близкой к скорости волны перепада  $V_{00}$  в той же системе, но с  $\epsilon = 0$ . В первом приближении

$$V_0 = V_{00} - V_1 \epsilon, \quad (2.2)$$

где коэффициент  $V_1 > 0$ .

Второе решение представляет собой импульс, скорость которого  $V^h$  значительно меньше величины  $V_0$ . Это решение неустойчиво [70, 78] и не наблюдается в физических системах.

При увеличении  $\epsilon$  скорость устойчивого импульса уменьшается, а скорость неустойчивого — увеличивается. При  $\epsilon = \epsilon_{kp}$  два решения сливаются в одно, а при  $\epsilon > \epsilon_{kp}$  стационарно распространяющиеся импульсы в системе (1.2) отсутствуют.

В двухмерной возбудимой среде распространение автоволны с прямолинейным фронтом также будет описываться системой (2.1). Однако в двухмерном случае на скорость распространения фронта должна оказывать влияние и его кривизна [9, 26, 95]. Действительно, стационарное движение фронта волны с кривизной  $K$ , в соответствии с [37, 41], описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} D_E \frac{d^2 E}{d\xi^2} &= (V - D_E K) \frac{dE}{d\xi} - F(E, g), \\ V \frac{dg}{d\xi} &= \epsilon G(E, g). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Очевидно, что скорость распространения импульса  $V$  в системе (2.3) будет зависеть от кривизны фронта  $K$ . В [30] показано, что определение зависимости  $V(K)$  сводится к нахождению зависимости  $V_0(\epsilon)$ :

$$V(K) = V_0 \left( \epsilon \frac{V - D_E k}{V} \right) + D_E K. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) с учетом (2.2) преобразуется к виду

$$V(K) = \frac{1}{2} \left( V_{00} - V_1 \varepsilon - D_E k \right) + \\ + \left[ \frac{1}{4} \left( V_{00} - V_1 \varepsilon - D_E K \right)^2 - V_1 \varepsilon D_E K \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.5) скорость распространения выпуклого фронта уменьшается с ростом его кривизны (рис. 4). Легко видеть, что при малых кривизнах

$$V(K) = V_0 - D_E(V_{00} + V_1 \varepsilon) [(V_{00} - V_1 \varepsilon)K]^{-1}. \quad (2.6)$$

При  $K > K^*$  стационарное распространение фронта невозможно. Предельная допустимая величина кривизны фронта  $K = K^*$  определяется выражением

$$K^* = [(V_{00} - V_1 \varepsilon) + 2(V_{00} V_1 \varepsilon)^{1/2}] D_E^{-1}. \quad (2.7)$$

Таким образом, анализ решений системы (1.2) устанавливает факт зависимости скорости распространения волны от кривизны ее фронта и доказывает существование критической кривизны, ограничивающей возможность стационарного распространения выпуклого фронта. Эти выводы подтверждаются и данными натурных экспериментов [79].

Но найденными закономерностями не ограничивается специфика распространения автоволн в двухмерной среде.

Поскольку до прохождения волны возбуждения и после выхода из состояния возбуждения среда находится в одном и том же состоянии покоя, авт волн в двухмерной среде может иметь свободный край (обрыв), не соприкасающийся с границей среды. Такой свободный край имеется, например, вблизи ядра спиральной волны (см. рис. 1). Очевидно, что закономерности эволюции

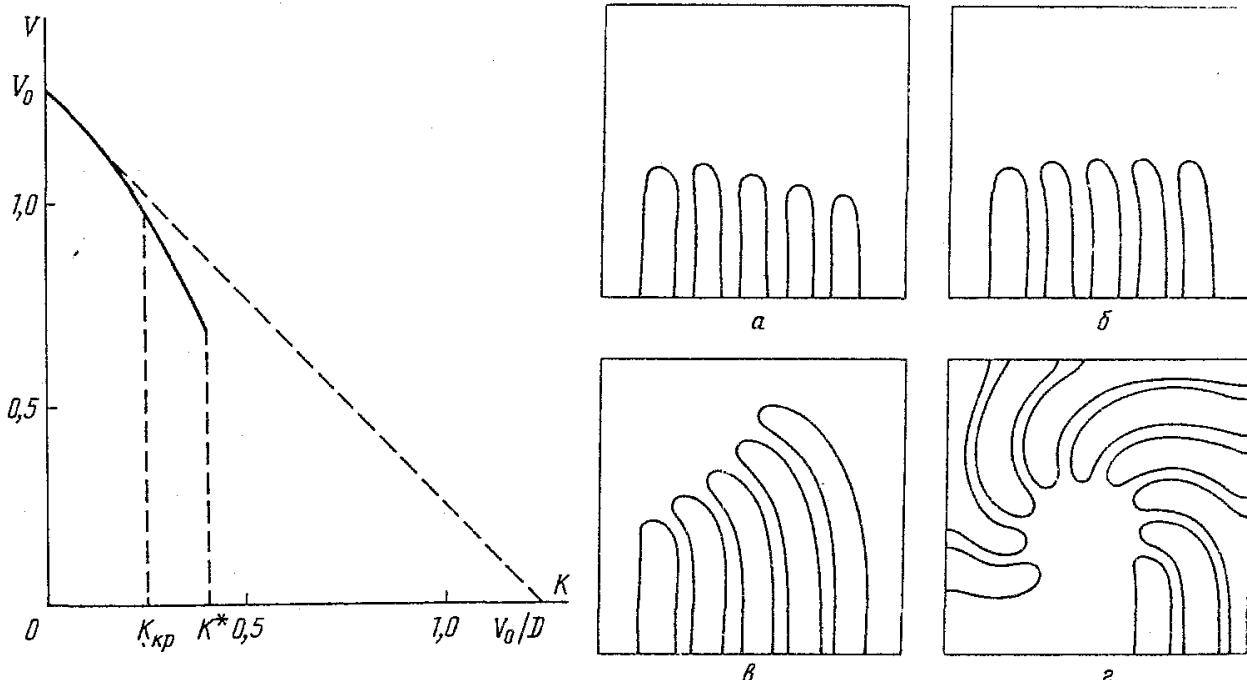


Рис. 4. Зависимость скорости распространения авт волн от кривизны ее фронта для модели (1.2), рассчитанная при  $k_f = 1,7$ ,  $k_g = 2,0$ ,  $d = 0,1$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $k_\varepsilon = 0,01$  и  $\varepsilon = 0,35$

Рис. 5. Эволюция обрыва волны с прямолинейным фронтом в модели (1.2) при различной возбудимости среды. *a* —  $\varepsilon = 0,4$ , *b* —  $\varepsilon = 0,388$ , *c* —  $\varepsilon = 0,35$ , *d* —  $\varepsilon = 0,3$

свободного края автоволны необходимо учитывать при описании кинематики ее движения.

Расчеты движения полуволны, выполненные для модели (1.2), показывают, что эволюция обрыва существенно зависит от возбудимости среды (рис. 5). Если возбудимость среды мала ( $\epsilon = 0,4$ ), то полуволна укорачивается (рис. 5,а). При достаточно высокой возбудимости среды ( $\epsilon = 0,35$ ) полуволна удлиняется (рис. 5,в). Удлинение и искривление формы волны может приводить к образованию спиральной волны (рис. 5,г), вращающейся вокруг круглой зоны (ядра), остающейся невозбужденной.

Заметим, что в образовавшейся спиральной волне через все точки среды, за исключением точек ядра, проходит периодическая последовательность импульсов возбуждения. Поэтому скорость распространения волновых фронтов будет зависеть не только от их кривизны, то и от периода  $T$  вращения спирали. Однако в тех случаях, когда период вращения  $T \gg T_{\min}$ , последнюю зависимость можно не принимать во внимание и строить кинематическое описание движения автоволны, учитывая только зависимость скорости фронта волны от его кривизны.

### 3. Кинематические уравнения

Математическая модель, лежащая в основе кинематического подхода, учитывает рассмотренные выше основные особенности движения автоволновых фронтов в возбудимых средах. Ее точная формулировка такова. Рассмотрим на плоскости произвольную гладкую кривую без самопересечений, задающую фронт волны. Необходимо иметь в виду, что эта кривая как бы имеет "лицо" и "изнанку", т.е. в каждой ее точке согласованным образом выделено одно из двух нормальных направлений. С течением времени каждый участок кривой смещается вдоль направления выделенной нормали со скоростью  $V$ . Обрыв фронта (если он имеется), помимо смещения в направлении нормали, испытывает также гладкое тангенциальное "прорастание" или сокращение со скоростью  $C$ .

Как известно (см. [56]), всякую кривую на плоскости можно задать ее натуральным уравнением  $K = K(l)$ , которое устанавливает связь между длиной дуги  $l$  и ее кривизной  $K$  в соответствующей точке. При движении фронта его кривизна, очевидно, будет также зависеть и от времени  $t$ :  $K = K(l, t)$ .

Рассмотрим положение фронта волны в некоторый момент  $t$ . Пусть его кривизна в точке  $a$  (рис. 6) равнялась в этот момент  $K_a$ . Через промежуток времени  $dt$  малая окрестность точки  $a$  на фронте переместится в окрестность точки  $b$ , а кривизна в этой точке станет равной  $K_b$ . Найдем связь между  $K_a$  и  $K_b$ . Для этого удобно перейти в полярную систему координат с полюсом в центре кривизны малого участка фронта, лежащего в окрестности точки  $a$ . В этом случае справедливо соотношение:

$$\rho_b = \rho_a + Vdt, \quad (3.1)$$

где  $\rho_a = 1/K_a$  — радиус кривизны в точке  $a$ , а  $\rho_b$  — полярный радиус в точке

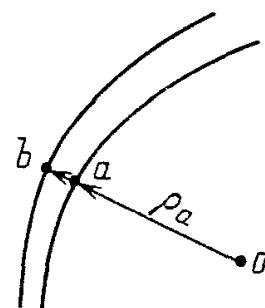


Рис. 6. К выводу основного кинематического уравнения

b. Кривизна кривой, описываемой в полярных координатах уравнением  $\rho = \rho(\phi)$ , вычисляется по следующей формуле:

$$K = (\rho^2 - 2\rho'^2 - \rho\rho'') (\rho^2 + \rho'^2)^{-3/2}, \quad (3.2)$$

где "штрих" в данном случае означает дифференцирование по  $\phi$ . Подставляя (3.2) в выражение (3.1), получаем с точностью до членов первого порядка по  $dt$

$$K_b = K_a - \left( VK_a^2 + K_a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) dt \quad (3.3)$$

(мы здесь учли, что  $\partial \rho_a / \partial \phi = 0$ , поскольку  $\rho_a$  — радиус кривизны в точке  $a$ ).

Перейдя в (3.3) к дифференцированию по длине дуги  $l$  ( $dl = \rho_a d\phi$ ), получим

$$K_b - K_a = dK = - \left( K_a^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \right) dt. \quad (3.4)$$

С другой стороны,  $dK = (\partial K / \partial l) dl + (\partial K / \partial t) dt$ . Для приращения длины дуги  $dl$  за время  $dt$  нетрудно получить выражение

$$dl = \left( \int_0^l KV d\xi \right) dt + C dt. \quad (3.5)$$

Первое слагаемое в (3.5) описывает увеличение длины дуги за счет изменения радиусов кривизны в каждой точке кривой. Второму слагаемому отвечает увеличение длины дуги за счет "прорастания" фронта на его свободном крае, который выбран за начало отсчета длины  $l$ .

Комбинируя (3.4) и (3.5), приходим к уравнению

$$\frac{\partial K}{\partial l} \left( \int_0^l KV d\xi + C \right) + \frac{\partial K}{\partial t} = -K^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial l^2}. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) представляет собой основное уравнение кинематики автоволновых фронтов на плоской поверхности. Впервые оно было получено в [28], но долгое время использовалось лишь для исследования стационарных режимов движения автоволновых фронтов [29, 30, 32]. Специфика стационарных режимов состоит в том, что прорастание или сокращение свободного края фронта волны при этом отсутствует и, естественно, исключается из рассмотрения.

При рассмотрении нестационарных процессов движения автоволн прорастание фронта в концевой точке волны играет очень важную роль. Впервые количественное описание этого процесса было предложено в работе [22]. При этом было отмечено, что если пренебречь рефрактерным влиянием фронтов друг на друга, то скорость тангенциального смещения свободного края  $C$  может зависеть только от кривизны фронта  $K_0$  вблизи него:  $C = C(K_0)$ , где

$$K_0 = \lim_{l \rightarrow 0} K(l).$$

Как показывают вычислительные эксперименты (см. рис. 5), при изменении возбудимости среды сокращение свободного края может сменяться про-

растанием. Поскольку искривление фронта автоволны в некотором смысле эквивалентно изменению возбудимости среды (см. п. 2), то направление тангенциального смещения свободного края волны изменяет знак при некотором значении кривизны  $K_{kp}$  вблизи концевой точки. Это свойство зависимости  $C(K_0)$  воспроизводит линейная функция вида

$$C = \gamma(K_{kp} - K_0), \quad \gamma > 0. \quad (3.7)$$

Зависимость скорости распространения фронта автоволны от его кривизны, обсуждавшаяся в п. 2, также может быть представлена линейной функцией

$$V = V_0 - DK. \quad (3.8)$$

Достаточным условием применимости линейного приближения (3.8) является наличие малого параметра  $p$

$$p \equiv \frac{DK_{kp}}{V_0} \ll 1. \quad (3.9)$$

Натуральное уравнение описывает кривую лишь с точностью до ее положения на плоскости. Чтобы полностью описать перемещение фронта, достаточно указать закон движения одной какой-либо его точки относительно выбранной системы координат. Этот закон удобно сформулировать для свободного края фронта. Например, если  $x_0$  и  $y_0$  — декартовы координаты концевой точки на плоскости, а  $\alpha_0$  — угол между касательным вектором к фронту в точке  $l = 0$  и осью  $X$ , то они подчиняются следующим уравнениям:

$$\dot{x}_0 = -V(l = 0) \sin \alpha_0 - C \cos \alpha_0, \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_0 = V(l = 0) \cos \alpha_0 - C \sin \alpha_0,$$

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{\partial V}{\partial l} \Big|_{l=0} + CK_0. \quad (3.11)$$

Первое слагаемое в правой части (3.11) представляет собой изменение угла  $\alpha_0$  за счет различий скоростей распространения в разных точках фронта, а второе — за счет гладкого прорастания свободного края [10, 11, 21, 22].

Уравнения (3.6) — (3.8) вместе с (3.10) и (3.11) представляют собой полную систему уравнений для определения формы и закона движения автоволнового фронта с обрывом. Таким образом, в рамках кинематического подхода возбудимая среда характеризуется набором малого числа феноменологических параметров, а именно:  $V_0$ ,  $K_{kp}$ ,  $D$ ,  $\gamma$ . Эти параметры должны быть получены из экспериментов или путем решения уравнений (1.2), которые с точки зрения кинематики являются "микроскопическими". При этом оказывается, что в ряде случаев значения некоторых коэффициентов не зависят от конкретного вида функций  $F(E, q)$  и  $G(E, g)$  в (1.2). Так, если коэффициент диффузии ингибитора  $D_g$  равен нулю, то коэффициент  $D$  равен коэффициенту диффузии активатора с точностью до членов порядка  $\epsilon$  (см. (2.6)). Если же  $D_E = D_g$ , то  $D = D_E = D_g$ , а коэффициент  $\gamma$  при этом обращается в нуль [10].

Сформулированная модель допускает естественное обобщение на случай, когда автоволна распространяется не на плоскости, а на искривленной поверхности. При этом кривизна  $K$  будет геодезической кривизной фронта на поверхности. Приведем вывод основного уравнения кинематики в этом более общем случае, следя работе [11].

Если сделать стробоскопический снимок процесса распространения уединенного автоволнового фронта на двухмерной поверхности, мы получим ряд последовательных положений фронта, т.е. однопараметрическое семейство кривых с временем  $t$  в качестве параметра. Введем в рассмотрение криволинейную ортогональную систему координат  $(\phi, t)$ , в которой координатные линии  $t = \text{const}$  совпадают с линией фронта автоволны в момент времени  $t$ . В этой системе первая квадратичная форма (квадрат дифференциала длины дуги) имеет вид

$$ds^2(t, \phi) = V^2(t, \phi)dt^2 + B^2(t, \phi)d\phi^2, \quad (3.12)$$

где  $V$  и  $B$ —коэффициенты Ламе, причем, очевидно,  $V$ —скорость нормального распространения фронта. Гауссова кривизна поверхности выражается через коэффициенты Ламе [52], как

$$\Gamma = -\frac{1}{VB} \left[ \left( \frac{B_t}{V} \right)_t + \left( \frac{V_t}{B} \right)_\phi \right], \quad (3.13)$$

где индексы  $t$  и  $\phi$  означают соответствующие частные производные. Геодезическая кривизна  $K$  (кривизна на поверхности) координатной линии также может быть выражена через коэффициенты Ламе [52]:  $K = B/VB$ . Тогда, используя (3.13), имеем

$$\Gamma = -K^2 - \frac{1}{V} \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{1}{VB} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right). \quad (3.14)$$

Перейдем теперь от переменной  $\phi$  к переменной  $l$ , имеющей смысл длины фронта. Из (3.12) следует, что  $dl = Bd\phi$ . Переход к новым переменным в (3.14) осуществляется путем замены  $d/dt \rightarrow \partial/\partial t + (dl/dt)\partial/\partial l$ , где

$$\frac{dl}{dt} = \int_{\phi_0}^{\phi} B_t d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi} KV B d\phi = \int_0^l KV d\xi, \quad (3.15)$$

причем прорастание фронта может быть учтено путем добавления величины скорости  $C$  к правой части соотношения (3.15). В новых переменных окончательно получаем из (3.14)

$$\frac{\partial K}{\partial l} \left( \int_0^l KV d\xi + C \right) + \frac{\partial k}{\partial l} + K^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = -\Gamma V. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) и представляет собой основное уравнение кинематики автоволнового фронта на искривленной поверхности с гауссовой кривизной  $\Gamma$ . В частном случае плоскости ( $\Gamma = 0$ ) (3.16) переходит в (3.6).

Соотношение (3.16) должно быть дополнено уравнениями движения свободного края фронта, аналогичными (3.10), (3.11). Их конкретный вид будет зависеть от выбора системы координат на искривленной поверхности.

Несмотря на то что основные кинематические уравнения (3.6) и (3.16) представляют собой нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных относительно функции  $K(l, t)$ , их исследование, как мы увидим ниже, оказывается гораздо более простой задачей, чем решение "микроскопических" уравнений (1.2). Кроме того, важно отметить, что эти уравнения могут применяться при исследовании не только автоволновых, но и некоторых других эволюционных процессов. Так, в работе [67] уравнение

(3.6) было получено независимо от более ранних работ [11, 28] применительно к описанию процесса роста дендритов. Специфика рассматриваемой задачи сводилась при этом к использованию вместо выражения (3.8) другой зависимости скорости распространения фронта  $V$  от его кривизны  $K$  [68]. Затем уравнение (3.6) с зависимостью (3.8) было использовано в работе [99] для описания эволюции парных спиральных волн. Однако при этом скорость прорастания  $C$  не определялась выражением (3.7), а полагалась равной некоторой константе. Это, естественно, не позволяет даже качественно описать особенности нестационарных автоволновых процессов.

#### 4. Стационарная циркуляция спиральных автоволн на плоскости

Уравнение (3.6) имеет тривиальное стационарное решение  $K(l, t) \equiv 0$ , при  $l \geq 0$ , которое отвечает плоскому фронту с обрывом, смещающемуся вперед со скоростью  $V_0$ . Однако это решение неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Численные расчеты для уравнения (3.6) [39, 73] показывают (рис. 7), что независимо от вида малого начального возмущения из плоской полуволны всегда рождается спиральная волна, вращающаяся вокруг неподвижного центра с постоянной угловой скоростью. Уравнение (3.6) позволяет аналитически рассчитать основные характеристики установления стационарной циркуляции спиральной волны.

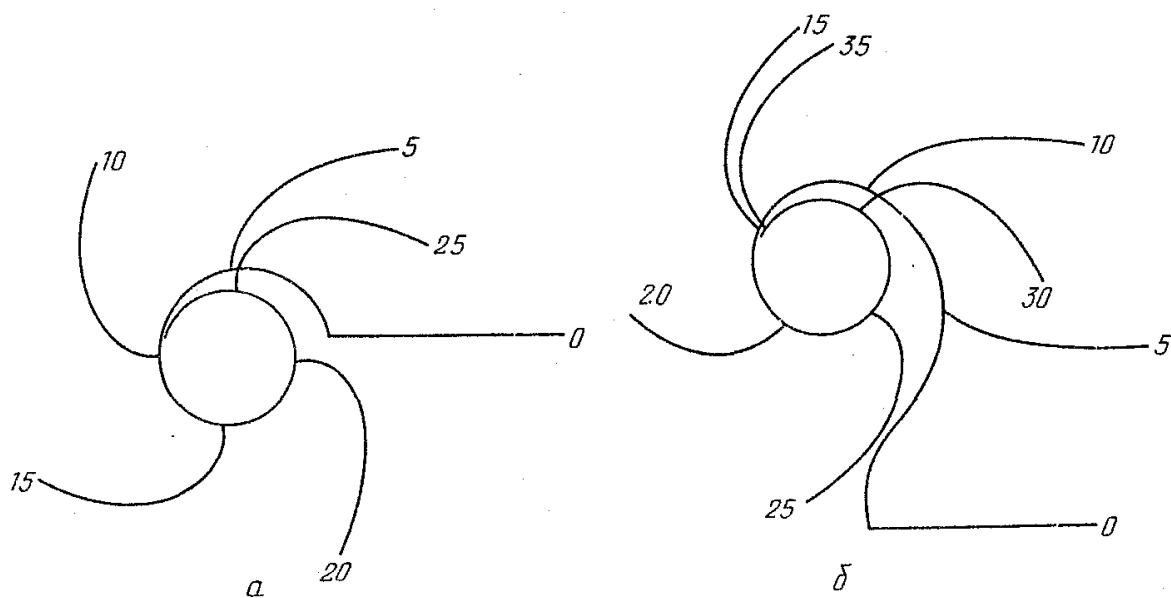


Рис. 7. Эволюция прямолинейного фронта в кинематической модели движения волны возбуждения при различных начальных возмущениях. а —  $K(0,0) = 0,1K_{kp}$ , б —  $K(0,0) = -0,1K_{kp}$

При стационарной циркуляции форма волнового фронта постоянна. Изменяется со временем лишь положение кривой на плоскости. Поэтому зависимость  $K$  от  $t$  отсутствует. Кроме того, при стационарной циркуляции нет ни прорастания, ни сокращения свободного края волны. Это обусловлено тем, что в процессе установления стационарного режима кривизна фронта волны вблизи свободного края  $K(l = 0) \equiv K_0$  достигла значения  $K_{kp}$ , а следовательно, в силу (3.7)  $C \equiv 0$ .

Учитывая, что  $\partial K / \partial t \equiv 0$  и  $C \equiv 0$ , уравнение (3.6) можно один раз проинтегрировать [11, 29], получая

$$K \int_0^l KV d\xi - D \frac{dK}{dl} = \omega . \quad (4.1)$$

Постоянная интегрирования  $\omega$  равна угловой скорости вращения спиральной волны. Это следует из (3.11), поскольку  $C = 0$ , а  $dV/dl = -DdK/dl$  (см. (3.8)).

Для получения аналитического решения (4.1) вначале устремим  $D$  к нулю. В этом случае уравнение (4.1) имеет следующее решение:

$$K = (\omega / 2V_0 l)^{1/2} . \quad (4.2)$$

Заметим, что величина  $R = V_0/\omega$  есть радиус окружности (границы ядра спиральной волны), по которой движется свободный край фронта. Таким образом, линия фронта волны определяется натуральным уравнением

$$K = (2Rl)^{-1/2} , \quad (4.3)$$

которое описывает эволовенту этой окружности. При  $l \gg R$  она представляет собой архimedову спираль с шагом  $h = 2\pi R$ .

Этот результат был получен еще в классической работе [119]. Позднее он был воспроизведен в работе [122], где подчеркивалось, что при  $l \rightarrow 0$  кривизна фронта  $K \rightarrow \infty$  (см. (4.2)). Это означает, что зависимостью скорости фронта от его кривизны нельзя пренебречь при малых  $l$ , т.е. вблизи границы ядра.

Перейдем теперь к расчету параметров спиральной волны при учете зависимости скорости фронта от его кривизны. Частота вращения спиральной волны  $\omega = \omega_0$ , входящая в качестве неизвестного параметра в уравнение (4.1), может быть найдена из следующих соображений. Вдали от центра спирали кривизна ее фронта должна стремиться к нулю, т.е.  $K \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ . При этом, как уже отмечалось, кривизна  $K_0$  вблизи свободного края фронта равна величине  $K_{kp}$ . Таким образом, интересующее нас решение обязано удовлетворять двум граничным условиям:

$$K(0) = K_{kp}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} K(l) = 0 . \quad (4.4)$$

Поскольку (4.1) является уравнением первого порядка, два граничных условия (4.4) могут быть одновременно выполнены лишь при определенном значении  $\omega_0$ . Таким образом, уравнение (4.1) вместе с граничными условиями (4.4) представляет собой нелинейную задачу на собственные значения, решение которой дает частоту  $\omega_0$ .

Численно эта задача анализировалась в [29, 32, 37], где было получено приближенное выражение для  $\omega$ , аппроксимирующее результаты численных расчетов:

$$\omega = V_0 K_{kp} \psi(p) , \quad (4.5)$$

где

$$\psi(p) = c_1 p^{1/2} - c_2 p - c_3 p^2 , \quad (4.6)$$

а константы  $c_1 = 0,685$ ,  $c_2 = 0,06$  и  $c_3 = 0,293$ .

В соответствии с (4.5) угловая скорость спиральной волны возрастает с увеличением  $K_{kp}$ . Заметим, однако, что, в силу (3.8), величина  $K_{kp}$  не может

превышать значение  $V_0/D$ . Поэтому максимальное значение  $\omega$  достигается при  $K_{kp} = V_0/D$ , что соответствует  $p = 1$ . Скорость нормального распространения свободного края волны при этом обращается в нуль. Этот частный случай был рассмотрен впервые в работе [7] применительно к описанию динамики роста спиральной дислокации в кристалле. Полученное при этом выражение для угловой скорости спиральной дислокации  $\omega = 0,33V_0K_{kp}$  в точности соответствует формуле (4.6) при  $p = 1$ .

Для другого важного частного случая ( $p \ll 1$ ), соответствующего слабой возбудимости среды, в работе [22] был проведен приближенный аналитический расчет, основанный на "сшивке" внутреннего и внешнего решений, являющийся одним из методов решения сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старшей производной [16]. Действительно, при достаточно больших  $l$  можно пренебречь слагаемым с производной в левой части (4.1). В этой области решение дается формулой (4.2). С другой стороны, из (4.1) следует, что при  $l = 0$  величина производной  $dK/dl = -\omega_0/D$ . Поэтому при малых  $l$  натуральное уравнение фронта волны имеет вид

$$K = K_{kp} - \frac{\omega_0}{D} l. \quad (4.7)$$

Выражения (4.2) и (4.7) представляют собой внешнюю и внутреннюю аппроксимации единой фазовой траектории, а поэтому они должны "сшиваться" между собой. Потребуем, чтобы в некоторой точке  $l = l_0$  совпадали как значения двух этих функций, так и величины их первых производных. Эти условия дают два уравнения:

$$K_{kp} - \omega_0/Dl_0 = \left( \frac{2V_0l_0}{\omega} \right)^{-1/2}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\omega_0}{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{2V_0}{\omega_0} \right)^{-1/2} l_0^{-3/2}. \quad (4.9)$$

Их решения имеют вид

$$\omega_0 = \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} (DV_0)^{1/2} K_{kp}^{3/2}, \quad (4.10)$$

$$l_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{D}{K_{kp}V_0} \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Заметим, что результаты этого приближенного аналитического рассмотрения находятся в хорошем соответствии с данными численного интегрирования уравнения (4.1). Действительно, при  $p \ll 1$  получаем из (4.5) выражение для угловой скорости

$$\omega_0 = \xi(DV_0)^{1/2} K_{kp}^{3/2}, \quad \xi = 0,685, \quad (4.12)$$

которое отличается от (4.10) лишь более точным значением числового коэффициента. С точностью до членов порядка  $p = DK_{kp}/V_0$  радиус ядра спиральной волны вычисляется из условия  $\omega_0 R_0 = V_0$  и равен

$$R_0 = \xi^{-1} \left( \frac{V_0}{D} \right)^{1/2} K_{kp}^{-3/2}. \quad (4.13)$$

Обсудим полученные результаты. Как видно, при  $K_{\text{кр}} \rightarrow 0$  частота вращения спиральной волны  $\omega_0$  убывает и стремится к нулю; при этом радиус  $R_0$  ядра спиральной волны неограниченно возрастает. Всюду, кроме узкого пограничного слоя ширины порядка  $l_0$  вблизи границы ядра, фронт спиральной волны имеет вид эвольвенты окружности радиуса  $R_0$  и дается выражением (4.3) при  $R = R_0$ . Ширина погранслоя мала по сравнению с радиусом ядра:  $l_0/R_0 \sim p = DK_{\text{кр}}/V_0 \ll 1$ .

Форма спиральной волны, вращающейся вокруг отверстия, также описывается уравнением (4.1). Заметим, однако, что край спиральной волны, движущийся вдоль непроницаемой для диффузии границы отверстия, не является свободным. Его кривизна может превышать значение  $K_{\text{кр}}$ . Тем не менее, она должна оставаться меньше, чем значение критической кривизны  $K^*$  для сплошного фронта (см. (2.7) и рис. 4). Поэтому наименьший радиус отверстия  $R^*$ , по границе которого может циркулировать спиральная волна, определяется из (4.13) с заменой  $K_{\text{кр}}$  на  $K^*$ :

$$R^* = \xi^{-1} \left( \frac{V_0}{D} \right)^{1/2} (K^*)^{-3/2}. \quad (4.14)$$

При дальнейшем уменьшении радиуса край волны отрывается от отверстия, а частота вращения скачком понижается до значения  $\omega_0$ . Этот эффект наблюдался и в численном эксперименте на модели типа "реакция—диффузия" [107].

Заметим также, что спиральная волна, вращающаяся центрально-симметричным образом внутри круга радиуса  $R_{\text{тр}}$ , подчиняется тому же кинематическому уравнению (4.1), но граничные условия отличаются от (4.4) [32]. Действительно, в этом случае нормальная скорость смещения фронта на границе круга должна удовлетворять условию

$$V(K_{\text{тр}}) = \omega R_{\text{тр}}, \quad (4.15)$$

которое и определяет кривизну фронта в точке касания. В результате скорость вращения спиральной волны оказывается тем выше, чем меньше радиус  $R_{\text{тр}}$ .

В рамках использованной нами кинематической модели предполагалось, что скорость  $V$  зависит только от локальной кривизны фронта  $K$ , т.е.  $V = V(K)$ . Вообще говоря, для участков фронта, близких к его свободному краю, скорость  $V$  может также зависеть и от длины дуги  $l$ :  $V = V(l)$ . При такой зависимости основные характеристики спиральных волн были рассчитаны в [11]. Этот эффект, однако, не дает существенных отличий, и мы его подробно не обсуждаем.

Отметим также, что выше мы пренебрегли рефрактерными свойствами среды, которые обусловливают зависимость скорости распространения волн от интервала  $T$  их следования. Эта зависимость чрезвычайно важна и для уточнения количественных характеристик спиральных волн, и для воспроизведения многих весьма существенных качественных эффектов. Авторы работ [92, 118] при построении теории стационарных спиральных волн исходят именно из этой зависимости, а влияние кривизны фронта учитывают в качестве поправок. Методология кинематического подхода, излагаемого в настоящей работе, предполагает обратный порядок: сначала построить описание спиральной волны, пренебрегая рефрактерными свойствами среды, и лишь

потом уточнять его, вводя в рассмотрение дисперсионную зависимость (см. п. 9). Для стационарной циркуляции оба подхода, естественно, приведут к одному результату: скорость фронта является функцией двух переменных  $V = V(K, T)$ . Однако преимущество излагаемого подхода проявляется при описании нестационарных автоволновых процессов, которые при альтернативном подходе не поддаются рассмотрению.

## 5. Квазистационарное приближение

Основное уравнение кинематики автоволновых фронтов (3.6) можно использовать также для описания различных нестационарных режимов. Допустим, что мы внесли малое возмущение в форму фронта стационарно вращающейся спиральной волны, локализованное на удалении  $l$  от свободного края. Как следует из (3.6), оно будет с течением времени удаляться от центра волны на периферию, одновременно расплываясь и затухая за счет "диффузии" с коэффициентом  $D$ . Согласно (3.6) скорость этого сноса вблизи от свободного края, где  $K \approx K_{kp}$ , можно приближенно оценить как  $K_{kp} V_0 l$ .

Итак, локализованное на удалении  $l$  возмущение смещается со скоростью порядка  $K_{kp} V_0 l$ , и его ширина растет как  $(Dt)^{1/2}$ . Поставим вопрос: на каком расстоянии должно быть первоначально локализовано возмущение, чтобы, несмотря на сносовое движение, оно могло достичь свободного края волны? Для этого необходимо, чтобы на протяжении некоторого интервала времени ширина расплытия возмущения  $L_{\text{диф}} \approx (Dt)^{1/2}$  превышала удаление его центра от свободного края волны  $L_u \approx l + K_{kp} V_0 t$ . Сравнение этих двух выражений показывает, что  $L_{\text{диф}}$  может превысить  $L_u$  лишь при условии, что начальное удаление  $l$  не превышает величины порядка  $(D/K_{kp} V_0)^{1/2}$ . Но, согласно (4.11), именно такова ширина погранслоя вблизи границы ядра.

Таким образом, оказать влияние на движение концевой точки могут лишь те возмущения фронта, которые возникают в пределах узкого погранслоя на удалении порядка  $l_0$  от свободного края. Эти возмущения формы фронта затухают за время порядка

$$\tau_D \approx \frac{l_0^2}{D} \approx (K_{kp} V_0)^{-1}. \quad (5.1)$$

Отметим, что характерное время релаксации возмущения формы фронта  $\tau_D$  в слабо возбудимых средах всегда мало по сравнению с периодом циркуляции спиральной волны [10]. Действительно, из (4.12) и (5.1) следует, что

$$\omega \tau_D \sim p^{1/2} = (DK_{kp}/V_0)^{1/2} \ll 1. \quad (5.2)$$

Отметим, что в случае, когда коэффициент  $\gamma$  в (3.7) равен нулю, прорастание отсутствует и величина  $K_0$  остается неизменной во времени. Спиральная волна при этом приобретает стационарную форму за характерное время  $\tau_D$ . Частота вращения этой волны определяется соотношением (4.12) с заменой  $K_{kp}$  на  $K_0$ .

Если же коэффициент  $\gamma$  отличен от нуля и положителен, то прорастание или сокращение фронта сопровождается изменениями  $K_0$  во времени такими, что отклонения кривизны  $K_0$  от значения  $K_{kp}$  затухают с характерным временем  $\tau_c$ . Если величина  $\gamma$  достаточно мала, то соответствующее время ре-

лаксации  $\tau_c \gg \tau_D$ , и осуществляется квазистационарный режим.

В этом режиме форма фронта у ядра спиральной волны адиабатически подстраивается к мгновенному значению кривизны  $K_0(t)$  на свободном крае, а эта кривизна, в свою очередь, медленно изменяется из-за прорастания или сокращения. Легко понять, что уравнение, описывающее это изменение в условиях квазистационарного режима, может быть получено из (3.6) [10] и имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} \Big|_{l=0} = -c \frac{\partial k}{\partial l} \Big|_{l=0} \quad (5.3)$$

Производная  $(\partial K / \partial l) \Big|_{l=0}$  определяется равенством (ср. (4.7))

$$\frac{\partial k}{\partial l} \Big|_{l=0} = -\omega / D, \quad (5.4)$$

в котором  $\omega$  определяется из (4.12) с заменой  $K_{kp}$  на  $K_0$ .

Таким образом, при квазистационарном режиме на свободном крае кривизна  $K_0$  меняется со временем, подчиняясь следующему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{dK_0}{dt} = -\xi\gamma \left(\frac{V_0}{D}\right)^{1/2} K_0^{3/2} (K_0 - K_{kp}). \quad (5.5)$$

Для малых возмущений  $\delta K_0 = K_0 - K_{kp}$  уравнение (5.5) линеаризуется и приобретает вид

$$\frac{d\delta K_0}{dt} = -\frac{\delta K_0}{\tau_c}, \quad (5.6)$$

где характерное время релаксации  $\tau_c$  равно

$$\tau_c = D/\gamma\omega_0. \quad (5.7)$$

Используя (5.1), (5.2) и (5.7), найдем условие применимости квазистационарного приближения [10]:

$$\frac{\gamma}{D} \ll \left(\frac{V_0}{DK_{kp}}\right)^{1/2} = p^{-1/2}. \quad (5.8)$$

По оценкам для типичных моделей возбудимых сред величина коэффициента  $\gamma$  меняется от нуля до значений порядка  $D$ . Поэтому, поскольку  $(V_0/DK_{kp})^{1/2} \gg 1$ , условие (5.8) почти всегда выполняется и квазистационарное приближение справедливо.

Чтобы в рамках квазистационарного приближения полностью описать эволюцию спиральной волны, необходимо, кроме уравнения (5.5), располагать дополнительными уравнениями, которые определили бы изменение во времени положения концевой точки фронта на плоскости и ориентацию фронта. Движение концевой точки, как отмечалось выше, описывается уравнениями (3.10). Ориентация фронта определяется углом  $\alpha_0$  наклона касательной к фронту в концевой точке. Эта величина подчиняется уравнению (3.11). При условии (5.8) это уравнение приобретает более простой вид, поскольку в этом случае  $(\partial V / \partial l) \Big|_{l=0} = \omega$ , где  $\omega$  находится из (4.12) с заменой  $K_{kp}$  на  $K_0$ . Поэтому уравнение (3.11) приобретает вид

$$\dot{\alpha} = \xi \left( \frac{V_0}{D} \right)^{1/2} K_0^{3/2} + \gamma K_0 (K_{kp} - K_0). \quad (5.9)$$

Таким образом, в условиях квазистационарного приближения движение спиральной волны описывается системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — (5.5), (3.10) и (5.9). Эти уравнения гораздо проще, чем основное кинематическое уравнение (3.6), не говоря уже об исходной "микроскопической" системе уравнений "реакция—диффузия".

## 6. Резонанс и дрейф спиральных волн на плоской поверхности

Варьируя параметры среды, можно менять ее возбудимость, а следовательно, и величину  $K_{kp}$ . Пусть эта величина периодически меняется со временем по гармоническому закону:

$$K_{kp}(t) = K_{kp} + K_1 \cos(\omega_1 t + \phi), \quad (6.1)$$

причем  $K_1 \ll K_{kp}$ , и частота модуляции  $\omega_1$  близка к собственной частоте  $\omega_0$  спиральной волны. Периодическое изменение во времени величины  $K_{kp}$  приведет к периодическому изменению скорости прорастания  $C$  (см. (3.7)), которое будет сопровождаться периодическими изменениями кривизны  $K_0$  вблизи обрыва. В результате возникают периодические изменения угловой скорости. Модуляция скорости прорастания и частоты вращения вызовет движение центра спиральной волны.

Расчет характеристик этого движения удобно провести в рамках квазистационарного приближения [21]; С учетом (6.1) уравнение (5.5) для  $K_0(t)$  принимает следующий вид:

$$\frac{dK_0}{dt} = \frac{\gamma}{D} \bar{\omega}_0 \left( \frac{K_0}{K_{kp}} \right)^{3/2} (K_{kp} + K_1 \cos(\omega_1 t + \phi) - K_0), \quad (6.2)$$

где  $\bar{\omega}_0 = \xi(DV_0)^{1/2} \bar{K}_{kp}^{3/2}$ . Поскольку  $K_1 \ll K_{kp}$ , то решение уравнения (6.2) можно искать в виде:  $K_0 = K_{kp} + \delta K_0(t)$ , где  $\delta K_0 \ll K_{kp}$ . Оставляя в (6.2) только члены первого порядка по  $\delta K_0$  и предполагая, что  $|\bar{\omega}_0 - \omega_1| \ll \bar{\omega}_0$ , получим следующий закон изменения кривизны  $K_0(t)$  вблизи свободного края фронта во времени:

$$K_0(t) = K_{kp} + K_1 \frac{\gamma/D}{1 + (\gamma/D)^2} \left[ \sin(\omega_1 t + \phi) + \frac{\gamma}{D} \cos(\omega_1 t + \phi) \right].$$

Подставляя это выражение в (5.9), легко найти зависимость угла  $\alpha_0$  от времени, после чего с помощью (3.10) рассчитать закон движения концевой точки спиральной волны, а следовательно, и центра ее ядра. Опуская громоздкие, но несложные выкладки, приведем окончательный результат [21]: при периодическом изменении величины  $K_{kp}$ , в соответствии с (6.1), центр ядра спиральной волны будет двигаться со следующими скоростями:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{ц}} &= v \cos[(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \phi + \sigma], \\ \dot{Y}_{\text{ц}} &= -v \sin[(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \phi + \sigma], \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$v = \frac{3}{4} V_0 \frac{K_1}{K_{kp}} \frac{\gamma/D}{[1 + (\gamma/D)^2]^{1/2}}, \quad (6.4)$$

$$\sigma = \arccos [1 + (\gamma/D)^2]^{1/2}. \quad (6.5)$$

Рассмотрение выражений (6.3) — (6.5) показывает, что центр ядра спиральной волны движется по окружности. Радиус этой окружности равен

$$R_u = \frac{(3/4)V_0(K_1/K_{kp})\gamma/D}{|\omega_1 - \bar{\omega}_0| [1 + (\gamma/D)^2]^{1/2}}. \quad (6.6)$$

Он тем больше, чем ближе  $\omega_1$  к собственной частоте  $\omega_0$ , т.е. движение имеет резонансный характер. Скорость движения  $v$  пропорциональна глубине модуляции  $K_1$ . При точном совпадении частот  $\omega_1$  и  $\omega_0$ , т.е. при полном резонансе, центр ядра смещается с постоянной скоростью (6.4) вдоль прямой линии, причем направление этого движения определяется начальной фазой модуляции  $\phi$  и направлением вращения спиральной волны (по или против часовой стрелки).

Аналитические расчеты резонансного дрейфа спиральной волны подтверждаются численными экспериментами на модели "реакция—диффузия" [21] (рис. 8).

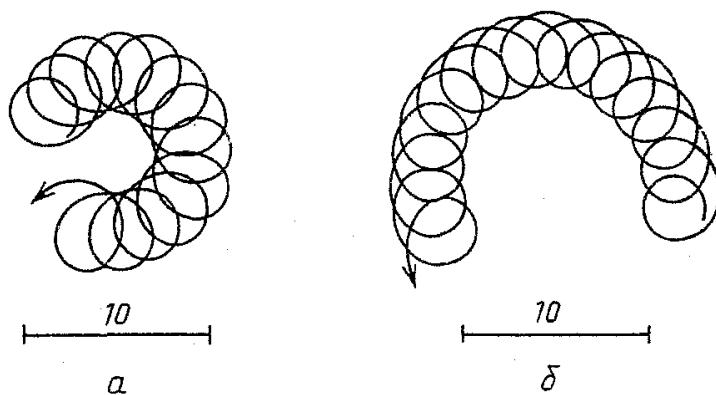


Рис. 8. Траектории движения концевой точки спиральной волны, полученные в модели (1.2) при периодической модуляции величины параметра  $\varepsilon$  с частотой  $\omega_1$ .  $a$  —  $\omega_1 = 0,23$ ,  $b$  —  $\omega_1 = 0,255$ . Угловая скорость спиральной волны  $\omega_0 = 0,24$

Резонанс спиральных волн наблюдался и в экспериментах с использованием светочувствительной реакции Белоусова—Жаботинского [3]. В среде первоначально создавали спиральную волну. Затем начинали периодически и однородно изменять освещенность раствора, что вело к периодической модуляции возбудимости. Через равные интервалы времени проводилось фотографирование волновой картины на фоне неподвижных реперных линий. На рис. 9 показаны последовательные фотографии ( $a$  —  $e$ ) спиральной волны с интервалом времени 10 мин в условиях полного резонанса (период модуляции выбран равным собственному периоду вращения волны). Видно, что центр вращения смещается с постоянной скоростью вдоль одной из реперных линий; суммарное смещение составляет 2 см.

Если в среде были созданы две спиральные волны с противоположными направлениями вращения, то, подбирая начальную фазу модуляции, можно добиться движения центров двух волн навстречу друг другу и их аннигиляции [3].

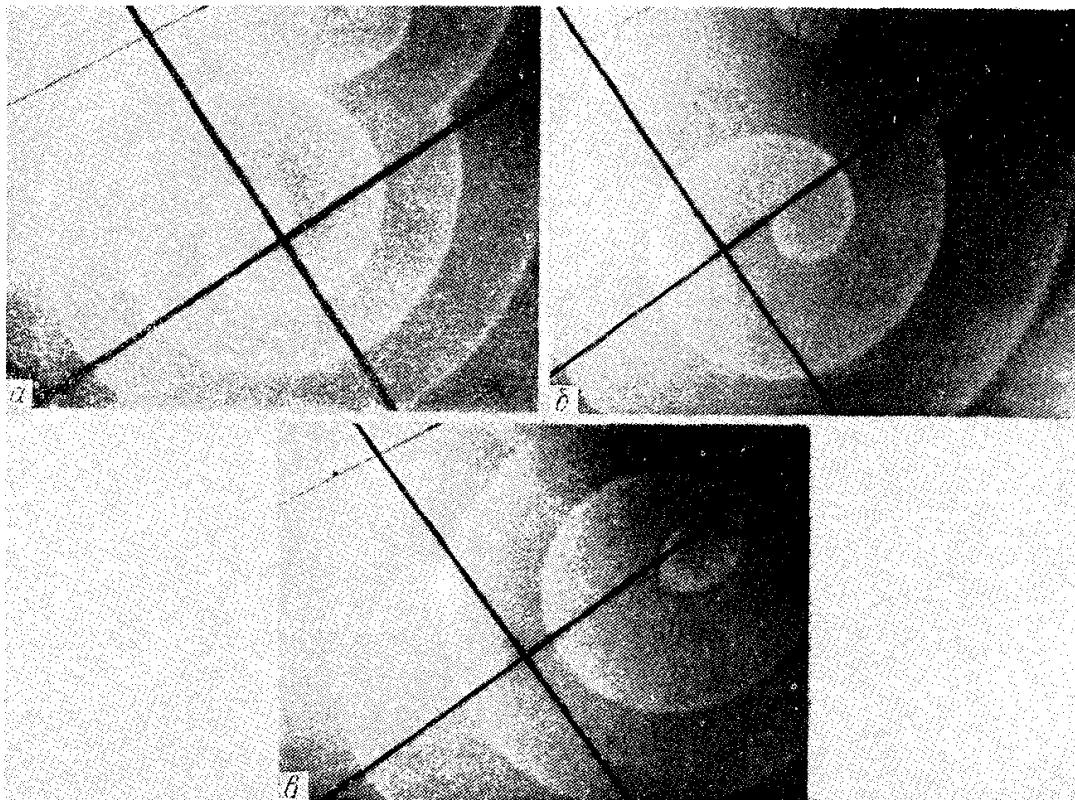


Рис. 9. Смещение центра ядра спиральной волны в эксперименте со светочувствительной реакцией Белоусова — Жаботинского

Перейдем теперь к рассмотрению явления дрейфа спиральной волны в неоднородной возбудимой среде. Этот эффект неоднократно исследовался в численных экспериментах [21, 58, 87]. Проводились и эксперименты с химической реакцией Белоусова—Жаботинского. Однако удовлетворительная теория этого эффекта отсутствовала. Ниже мы рассмотрим явление дрейфа в рамках кинематического подхода [21, 73].

Пусть величина  $K_{kp}$  плавно меняется вдоль оси  $x$ , так что изменения  $K_{kp}$  на расстоянии, равном радиусу ядра  $R_0$ , мало:

$$\frac{\partial K_{kp}}{\partial x} \ll K_{kp}/R_0. \quad (6.7)$$

При движении в неоднородной среде свободный край спиральной волны последовательно проходит через области с различными значениями  $K_{kp}$ . Поэтому концевая точка движется так, как если бы критическая кривизна менялась со временем:

$$K_{kp}(t) = K_{kp}(x_0 + R \cos \omega_0 t) = K_{kp} + bR_0 \cos \omega_0 t; \quad (6.8)$$

где  $x_0$  — положение центра спиральной волны на оси  $x$ ,  $K_{kp} = K_{kp}(x_0)$ ,  $b = (\partial K_{kp} / \partial x)_{x=x_0}$ .

Таким образом, задача о дрейфе спиральной волны в слабо неоднородной среде сводится к рассмотренной выше задаче о резонансе при полном совпадении частот и равной нулю начальной фазе модуляции  $\phi_0$ . Подстановка (6.8) в (6.3)—(6.5) приводит к выражению для скорости дрейфа [21, 73]. С течением времени центр спиральной волны медленно смещается по прямой линии под некоторым углом  $\theta$  по отношению к оси  $x$ . Скорость дрейфа равна

$$v_{\text{др}} = \frac{(3/4)V_0}{[1 + (D/\gamma)^2]^{1/2}} \frac{R_0}{K_{\text{кр}}} \left| \frac{\partial K_{\text{кр}}}{\partial x} \right|, \quad (6.9)$$

а тангенс угла  $\theta$  дается выражением

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\gamma}{D}. \quad (6.10)$$

Изменение знака угловой скорости  $\omega_0$  меняет знак компоненты скорости дрейфа вдоль оси  $y$ . При этом направление движения вдоль оси  $x$  остается неизменным. Выражение (6.10) показывает, в частности, что эффект дрейфа спиральной волны весьма удобно использовать для определения коэффициента  $\gamma$  данной возбудимой среды.

Заметим, что дрейф спиральной волны не может продолжаться очень долго. В неограниченной среде ядро спиральной волны, дрейфуя, рано или поздно окажется в такой области, где кинематическое описание будет несправедливым, например, в силу нарушения условий (6.7) или (3.9). Следует подчеркнуть, однако, что в экспериментах с химической реакцией Белоусова — Жаботинского, а также при численном моделировании размеры среды невелики. Дрейфуя с постоянной скоростью, спиральная волна попадает на границу среды и там исчезает.

Выше мы рассмотрели наиболее интересные эффекты, связанные с циркуляцией спиральных волн в неоднородных и нестационарных средах. Если же свойства среды зависят как от координат, так и от времени, т.е. среда является одновременно и нестационарной, и неоднородной, то движение в ней спиральных волн приобретает новые черты. Так, например, в средах с периодически меняющимся градиентом неоднородности резонанс (т.е. движение центра ядра по прямой) возможен на удвоенной частоте циркуляции; при этом резонанс на частоте  $\omega_0$  отсутствует [2].

Интересно отметить, что резонанс и дрейф спиральных волн наблюдаются и в так называемых  $\lambda - \omega$ -системах. Этот важный класс неравновесных сред тоже описывается системами типа "реакция—диффузия", в которых существуют решения в виде спиральных волн [84 — 86]. В то же время ряд существенных отличий не позволяет применить к их описанию излагаемый кинематический подход [49]. В связи с этим исследование резонансных эффектов в  $\lambda - \omega$ -системах потребовало разработки специальных методов [4].

## 7. Спиральные волны в анизотропных возбудимых средах

При исследовании автоволновых процессов в возбудимых средах, как правило, ограничиваются рассмотрением случая изотропных сред. Вместе с тем, многие возбудимые среды (например, полупроводниковые системы, биологические ткани и др.) существенно анизотропны. Поэтому исследование возникающих в них автоволновых структур представляет значительный интерес.

В анизотропных средах коэффициенты диффузии представляют собой тензорные величины  $\hat{D}$ . На плоскости в системе главных осей тензора  $\hat{D}$  схема уравнений "реакция—диффузия" (1.2) с  $\hat{D}_g = 0$  принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = F(E, g) + D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \varepsilon G(E, g). \quad (7.1)$$

Введем новые пространственные координаты  $x' = x$ ,  $y' = y\lambda$ , где  $\lambda = (D/D_1)^{1/2}$ . В этих координатах система (7.1) совпадает с (1.2). Иными словами, в новой системе координат среда становится изотропной и коэффициент диффузии равен  $D$ . Поэтому для исследования движения автоволны в анизотропной среде достаточно провести соответствующие расчеты в "штрихованной" системе координат, где среда изотропна, после чего совершить обратное преобразование к исходной "лабораторной" системе.

Так, нетрудно получить зависимость скорости плоского фронта автоволны в анизотропной среде от направления его распространения [20]:

$$V_0(\theta) = V_0(\lambda^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} \lambda^{-1}, \quad (7.2)$$

где  $V_0$  — скорость плоского фронта в изотропной среде с коэффициентом диффузии  $D$ ,  $\theta$  — угол между направлением распространения и осью  $x$ . Отметим, что в [89] приведено другое, ошибочное, выражение для величины  $V_0(\theta)$ .

В штрихованной системе координат автоволновой фронт описывается натуральным уравнением  $K' = K'(l')$ . Из определения кривизны

$$K'(l') = - \frac{d\alpha'}{dl'}, \quad (7.3)$$

где  $\alpha'$  — угол наклона касательной к оси  $x'$ . Нетрудно получить следующие формулы для координат участка фронта в лабораторной системе координат [20]:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^{l'} \cos(\alpha'_0 - \int_0^{\xi'_1} K'(\xi'_2) d\xi'_2) d\xi'_1, \\ y &= y_0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{l'} \sin(\alpha'_0 - \int_0^{\xi'_1} K'(\xi'_2) d\xi'_2) d\xi'_1, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $x_0, y_0$  — координаты свободного края в лабораторной системе,  $\alpha'_0$  — угол между касательной к фронту в концевой точке и осью  $x$  в штрихованной системе. Формулы (7.4) могут трактоваться как параметрическое задание кривой, где параметром является  $l'$  — длина дуги в штрихованной системе координат. Имея параметрическое представление линии фронта, можно стандартным образом вычислить его кривизну. Например, кривизна при подходе к концевой точке оказывается функцией времени:

$$K_0(t) = \lambda^2 K_{kp} [1 + (\lambda^2 - 1) \cos^2(\omega_0 t + \phi)]^{-3/2}. \quad (7.5)$$

Это рассмотрение иллюстрирует рис. 10 (из [20]), на котором представлены результаты расчета движения спиральной волны в анизотропной среде, описываемой уравнениями (7.1) при  $D = 1$  и  $D_1 = 2$ . Видно, что форма фронта спиральной волны нестационарна и претерпевает периодические изменения.

Несмотря на то что кривизна фронта зависит от времени, все-таки можно говорить о стационарной циркуляции спиральной волны в анизотропной среде, подчеркивая тот факт, что ядро волны, имеющее форму эллипса с полуосами

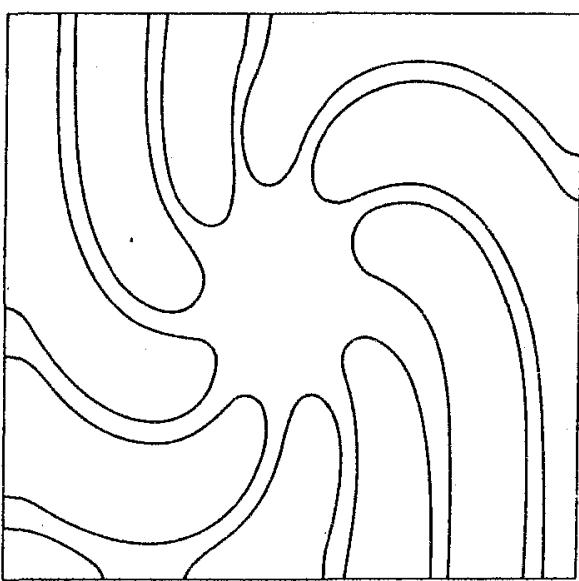


Рис. 10. Последовательные положения спиральной волны в модели (7.1) анизотропной возбудимой среды.  $D = 1$ ,  $D_1 = 2$

нейшем будет происходить релаксация этого начального значения к "стационарному" значению (7.5) в анизотропной среде. При этом произойдет смещение центра ядра. В рамках квазистационарного приближения это смещение несложно рассчитать [20]:

$$\Delta x_0 = \frac{\mu V_0}{2\omega_0} F_1 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right), \quad \Delta y_0 = \frac{\mu V_0}{2\omega_0} F_2 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right), \quad (7.6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin^2 \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0 - \Phi \frac{(\gamma/D) \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0}{(\gamma/D)^2 + 1}, \\ F_2 &= \sin^3 \alpha_0 + \Phi \frac{(\gamma/D) \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0}{(\gamma/D)^2 + 1}, \\ \Phi &= \left( 3 - 2p^{1/2} \frac{\gamma}{D} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha_0 \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

В (7.6), (7.7) опущены члены высших порядков, малые вследствие условия  $p \equiv DK_{kp}/V_0 \ll 1$ .

Аналогично можно определить смещение центра ядра спиральной волны при скачкообразном переходе от анизотропной среды (7.9) к изотропной с коэффициентом диффузии  $D$ :

$$\Delta x_0 = -\frac{\mu V_0}{2\omega_0} F_1 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right), \quad \Delta y_0 = -\frac{\mu V_0}{2\omega_0} F_2 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right), \quad (7.8)$$

Пусть теперь величина коэффициента диффузии в направлении оси  $y$  описывается выражением

$$D_1 = D - \frac{\Delta D}{2} [1 + \text{sign} (\sin \omega_1 t)], \quad (7.9)$$

$R_0$  и  $R_0/\lambda$ , остается неподвижным.

Перейдем теперь к рассмотрению нестационарных эффектов, связанных с эволюцией спиральных волн в средах с меняющейся во времени анизотропией. Исследуем вначале движение спиральной волны при мгновенном изменении анизотропии среды. Пусть при  $t < 0$  в изотропной среде (7.1) с коэффициентом диффузии  $D_1 = D$  вращалась стационарная спиральная волна, а при  $t = 0$  произошло мгновенное изменение анизотропии среды, так что  $D_1 = D + \Delta D$ , при  $t > 0$ , причем  $\mu = \Delta D/D \ll 1$ .

В момент времени  $t = 0$  кривизна фронта вблизи свободного края спиральной волны  $K_0 = K_{kp}$ . В даль-

причем  $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$ . Благодаря периодическим скачкам степени анизотропии, смещения центра ядра от одиночных скачков будут накапливаться, и концевая точка будет двигаться вдоль некоторой траектории, определяемой при  $\mu \ll 1$  уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\mu V_0}{2\pi} F_1 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 + (\omega_0 - \omega_1)t \right), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu V_0}{2\pi} F_2 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 + (\omega_0 - \omega_1)t \right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

В частности, в случае полного резонанса ( $\omega_1 = \omega_0$ ) смещение центра циркуляции будет происходить вдоль прямой со скоростью

$$U = \frac{\mu V_0}{2\pi} \left[ F_1^2 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right) + F_2^2 \left( \frac{\gamma}{D}, p, \alpha_0 \right) \right]^{1/2}. \quad (7.11)$$

Заметим, что в отличие от случая резонанса в изотропной среде (где движение центра ядра происходит с постоянной скоростью при любом  $\alpha_0$ ), скорость в анизотропной среде существенным образом зависит от фазы  $\alpha_0$ .

Но этим не ограничиваются отличия резонансных эффектов в анизотропной среде. Действительно, интегрирование уравнения (7.10) показывает [20], что траектория центра ядра в этом случае не окружность и не эллипс, а достаточно причудливая кривая. На рис. 11 показан ряд характерных форм траекторий, полученных при различных значениях отношения  $\gamma/D$  и  $p = 0$ . Важно, что изменения начальной фазы  $\alpha_0$  и модуля разности частот  $|\omega_0 - \omega_1|$  не приводят к изменениям формы получаемых траекторий и сказываются только на их положении (но не ориентации) на плоскости и геометрических размерах.

Результаты проведенного кинематического рассмотрения движения спиральной волны в возбудимой среде с периодической модуляцией степени анизотропии интересно сопоставить с расчетами приведенной выше модели типа "реакция—диффузия" (7.1), величина коэффициента диффузии в которой описывается выражением (7.9). На рис. 12,а представлена траектория центра спиральной волны, рассчитанная при  $\Delta D = 0,2$  и  $\omega_1 = 0,12$ . Заметим, что для моделируемой среды скорость распространения  $V_0$  и частота циркуляции  $\omega_0$ , измеренные в вычислительном эксперименте, имеют значения  $V_0 = 1,3$  и  $\omega_1 = 0,11$ . Учитывая, что коэффициент  $D \approx 1$ , по этим данным можно определить, используя (4.6), величину параметра  $p = DK_{kp}/V_0$ :  $p = 0,21$ . Как показал предшествующий анализ, при заданном значении параметра  $p$  форма резонансной траектории определяется только величиной инерционности  $\gamma/D$ , которая нам неизвестна. На рис. 12,б — г приведены три формы траекторий, рассчитанных по уравнению (7.10) при различных значениях  $\gamma/D$ . Видно, что при  $\gamma/D = 3,3$  траектория не имеет вогнутых участков, в отличие от траектории на рис. 12,а. Такие участки появляются при увеличении  $\gamma/D$  (см. рис. 12,в,г), но траектория на рис. 12,г имеет слишком большой наклон относительно оси  $y$ . Сравнение рис. 12,а и в показывает, что кинематический подход дает правильную качественную картину явления резонанса в анизотропной среде. Кроме того, полученные данные дают основания для количественной оценки величины  $\gamma/D$ . Так, можно считать, что в моделируемой среде отношение  $\gamma/D = 6$ .

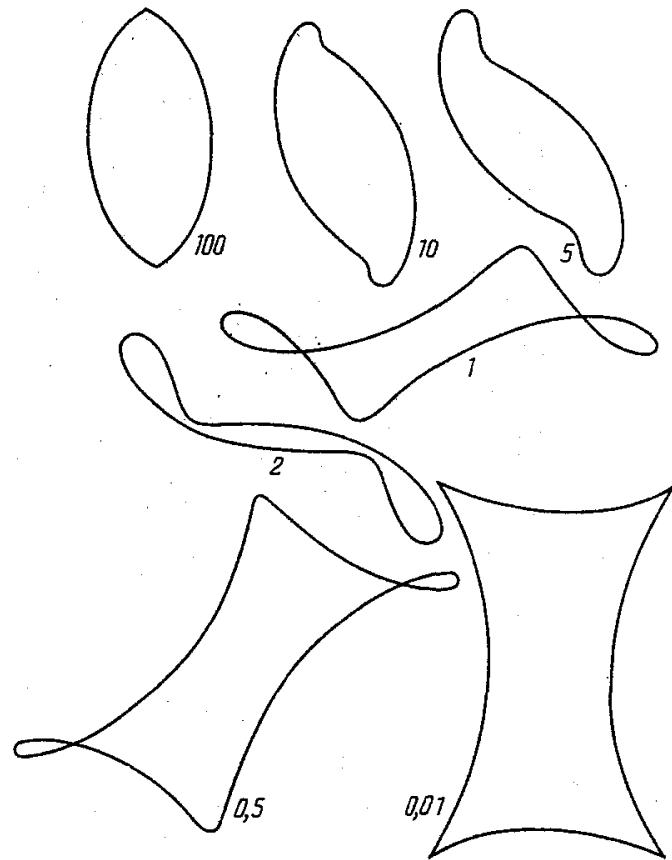


Рис. 11. Формы резонансных траекторий, полученные в кинематической модели движения автоворовны при модуляции степени анизотропии, соответствующие указанным значениям  $\gamma/D$  и  $p=0$

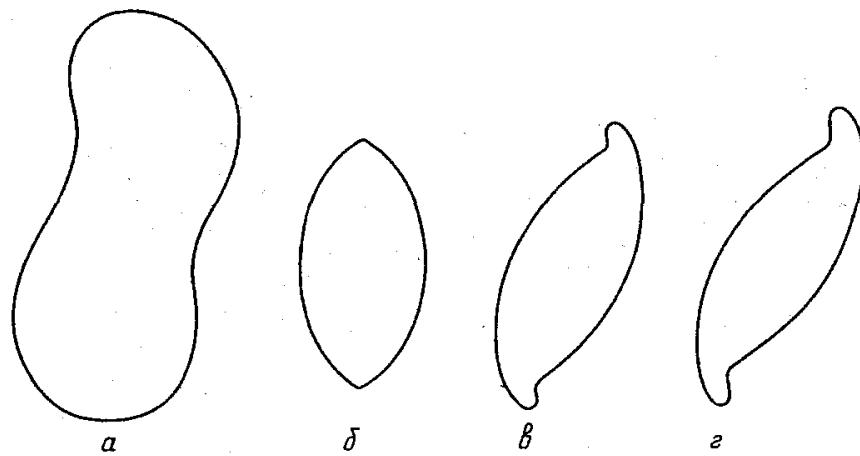


Рис. 12. Формы резонансных траекторий, полученные при периодической модуляции степени анизотропии в модели (7.1) (а) и в кинематической модели при  $\gamma/d = 3,3$  (б),  $\gamma/D = 6,0$  (в) и  $\gamma/D = 9,0$  (г)

## 8. Спиральные волны на искривленных поверхностях

Основой исследования кинематики автовороновых структур на искривленных поверхностях является уравнение (3.16), выведенное в [11]. Рассмотрим вначале стационарную циркуляцию спиральной волны на поверхности сферы радиуса  $R_0$ , гауссова кривизна которой постоянна и равна  $\Gamma = 1/R_0^2$ . В ста-

ционарном случае уравнение (3.16), будучи один раз проинтегрировано с учетом (3.8), принимает вид

$$K \int_0^l KV d\xi + \Gamma_0 \int_0^l V d\xi - D \frac{dK}{dl} = A, \quad (8.1)$$

где  $A$  — константа интегрирования, которая в отличие от плоского случая не является частотой вращения спиральной волны  $\omega$ , а связана с ней соотношением

$$\omega^2 = A^2 + V_0^2 \Gamma_0. \quad (8.2)$$

Пусть радиус сферы достаточно велик, так что  $R_0 K_{kp} \gg 1$ . Тогда метод сшивки внутреннего и внешнего решений, примененный выше для исследования спиральной волны на плоскости (см. п. 4), может быть без труда обобщен и на случай сферической поверхности. Внешнее решение уравнения (8.1) может быть получено, если пренебречь в (8.1) членом  $DdK/dl$ , т.е. фактически пренебречь зависимостью скорости распространения фронта от его кривизны. В отличие от плоского случая здесь существуют два решения: антисимметричное  $K_a(l)$  и симметричное  $K_s(l)$  относительно экватора [11]:

$$K_a = \left( \frac{A}{V_0} - \Gamma_0 l \right) \left( \frac{2Al}{V_0} - \Gamma_0 l^2 \right)^{-1/2}, \quad (8.3)$$

$$K_s = |K_a(l)| - \frac{2A}{V_0} \Gamma_0^{-1/2} \delta \left( 1 - A(V_0 \Gamma_0)^{-1} \right). \quad (8.4)$$

Наличие во втором слагаемом в (8.4)  $\delta$ -функции говорит о том, что линия фронта, описываемая симметричным решением  $K_s(l)$ , имеет излом на экваторе, в точке  $l = A/V_0 \Gamma_0$ . Антисимметричное решение (8.3), как показано в [11], не имеет физического смысла.

Как видно из (8.3), кривизна неограниченно возрастает при  $l \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow 2A/V_0 \Gamma_0$ , т.е. вблизи верхнего и нижнего полюсов сферы. Это означает, что в узких слоях вблизи полюсов необходимо учитывать зависимость скорости волны от геодезической кривизны. Иными словами, вблизи полюсов сферы должны иметься пограничные слои. Как следует из (8.1), в пределах погранслоев кривизна должна описываться следующими выражениями для верхнего и нижнего погранслоев соответственно:

$$K = K_{kp} - Al/D, \quad K = K_{kp} - A(L-l)/D, \quad (8.5)$$

где  $L$  — полная длина фронта.

Итак, линия фронта стационарно вращающейся спиральной волны на сфере симметрична относительно экваториальной плоскости (рис. 13). У волны имеется два ядра, расположенных вблизи полюсов. В пределах погранслоев у верхнего и нижнего полюсов зависимость  $K$  от  $l$  линейна. В случае линейной зависимости скорости волны  $V$  от кривизны  $K$  излом линии фронта на экваторе исчезает. При этом вблизи экватора появляется третий погранслой, внутри которого кривизна отрицательна и квадратично зависит от  $l$ .

Из условий сшивки внутреннего и внешнего решений вблизи одного из ядер оказывается возможным найти величину константы интегрирования  $A$ ,

а затем, с помощью (8.2), и частоту вращения  $\omega$  [1]:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{V_0^2}{2\omega_0^2} \Gamma \right) \equiv \omega_0 \left( 1 + \frac{V_0 \Gamma_0}{2\xi^2 D K_{kp}^3} \right), \quad (8.6)$$

где  $\omega_0$  — угловая скорость спиральной волны на плоскости, определяемая выражением (4.12). Таким образом, для данной возбудимой среды угловая скорость вращения спиральной волны на сфере выше, чем на плоскости.

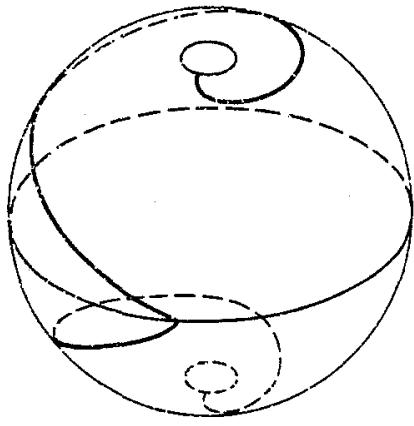


Рис. 13. Фронт спиральной автоволны на поверхности сферы

Отметим, что эволюция спиральных волн на поверхности сферы недавно экспериментально исследовалась в [97]. Спиральные волны возбуждались в растворе с химической реакцией Белоусова—Жаботинского на поверхности маленькой ( $R_0 \approx 0,6$  мм) бусинки. При этом за время эксперимента не наблюдалось выхода на стационарный режим, рассмотренный выше. По-видимому, это связано с тем, что, во-первых, использовались слишком малые сферические поверхности: на сфере едва умешался один виток спирали, а во-вторых, применялась среда с большой рефрактерностью (характерная ширина фронта на фотографиях в [97] вполне сравнима с радиусом сферы), а в этом случае и на плоскости появляются нестационарные (циклоидные) режимы вращения спиральных волн [33], о которых речь пойдет ниже.

Для исследования эволюции спиральных волн на поверхностях с переменной кривизной удобно вначале рассмотреть задачу о динамике спиральной волны на сфере, радиус которой периодически меняется со временем по закону

$$R = R_0 + R_1 \cos(\omega_1 t + \beta), \quad R_1 \ll R_0. \quad (8.7)$$

При этом гауссова кривизна сферы испытывает колебания с амплитудой  $\Gamma_1 = 2R_1/R_0^3$ . Обозначим через  $\theta_0$  и  $\phi_0$  полярный и азимутальный углы центра ядра спиральной волны, а через  $\theta$  и  $\phi$  — сферические координаты движущейся концевой точки автоволнового фронта. Для удобства расчетов выберем ось сферической системы координат таким образом, чтобы центр ядра спиральной волны находился вблизи экватора:  $(\pi/2) - \theta_0 \ll 1$ . Кроме того, ограничимся рассмотрением случая  $D_E = D_g$  в (1.2), для которого  $\gamma = 0$ . Это значительно упрощает выкладки, поскольку при этом  $C = 0$ , но не вносит существенных искажений в качественную картину эволюции спиральной волны [1].

При  $C = 0$  и  $r_0 \ll R_0$  скорости движения концевой точки в сферических координатах описываются следующими выражениями:

$$\dot{\theta} = -\frac{V_0}{R} \sin \omega t, \quad \dot{\phi} = \frac{V_0}{R} \frac{\cos \omega t}{\sin \theta_0}. \quad (8.8)$$

Пусть частота изменения радиуса сферы близка к частоте вращения спиральной волны  $\omega$ :  $|\omega - \omega_1| \ll \omega$ . Подставим в (8.8) выражения (8.6) (где  $\Gamma_0$  заменено на  $\Gamma_0 - \Gamma_1 \cos(\omega t + \beta)$ ) и (8.7). Проведя усреднение по времени (т.е. оставив только члены, медленно осциллирующие с частотой  $|\omega_1 - \omega|$ ), получим, что при периодической модуляции радиуса сферы центр спиральной

волны должен дрейфовать по ее поверхности со следующими угловыми скоростями:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{V_0 R_0 \Gamma_1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \frac{V_0}{DK_{kp}} \frac{\Gamma_0}{K_{kp}^2} \right) \sin [(\omega_1 - \omega)t + \beta], \quad (8.9)$$

$$\dot{\phi}_0 = \frac{V_0 R_0 \Gamma_1}{4 \sin \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \frac{V_0}{DK_{kp}} \frac{\Gamma_0}{K_{kp}^2} \right) \cos [(\omega_1 - \omega)t + \beta].$$

Как и в случае периодического изменения параметров плоской возбудимой среды [21, 73], этот дрейф имеет резонансный характер. Траектория смещения центра ядра является замкнутой кривой, характерный размер которой увеличивается при приближении  $\omega_1$  к  $\omega$ . При  $\omega = \omega_1$  направление дрейфа определяется начальной фазой модуляции  $\beta$ , а его скорость пропорциональна амплитуде изменений гауссовой кривизны  $\Gamma_1$ .

При исследовании движения спиральной волны по поверхности с переменной кривизной следует ожидать появления ее дрейфа, как это имеет место в неоднородной среде (см. п. 6). Однако можно доказать [1], что на поверхностях с постоянной гауссовой кривизной, но, возможно, меняющейся средней кривизной (например, цилиндр, конус, псевдосфера), дрейф отсутствует. Поэтому неоднородность средней кривизны не является достаточным условием дрейфа спиральной волны, а необходимым его условием является неоднородность поверхности по гауссовой кривизне.

Рассмотрим спиральную волну на сфере, поверхность которой слабо деформирована так, что гауссова кривизна  $\Gamma$  является функцией полярного угла  $\theta$ . Говоря о слабой деформации сферы, мы имеем в виду, что гауссова кривизна  $\Gamma$  слабо меняется на расстоянии порядка ядра спиральной волны, так что  $d\Gamma/d\theta(r_0/R_0) \ll \Gamma_0$ . При движении по такой неоднородно искривленной поверхности концевая точка спиральной волны последовательно проходит через области с различными значениями гауссовой кривизны. Поэтому она движется так, как если бы гауссова кривизна поверхности менялась со временем по закону

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{d\Gamma}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \frac{r_0}{R_0} \cos \omega t. \quad (8.10)$$

Таким образом, задача об эволюции спиральной волны на неоднородно искривленной поверхности сведена нами к рассмотренной выше задаче о движении спиральной волны по сферической поверхности с периодически меняющимся радиусом. Причем закон изменения кривизны (8.7) характеризуется в этом случае параметрами

$$\Gamma_1 = \frac{d\Gamma}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \frac{r_0}{R_0}, \quad \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega.$$

При этих значениях параметров из (8.9) получаем выражения для скоростей дрейфа [1, 74]:

$$\dot{\theta}_0 = 0, \quad (8.11)$$

$$\dot{\phi}_0 = \frac{V_0 r_0}{4 \sin \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \frac{V_0}{DK_{kp}} \frac{\Gamma_0}{K_{kp}^2} \right) \frac{d\Gamma}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}.$$

Рассмотрение соотношений (8.11) позволяет сформулировать следующие

закономерности дрейфа спиральных волн по неоднородно искривленным поверхностям. Во-первых, скорость дрейфа спиральной волны пропорциональна модулю градиента гауссовой кривизны. Во-вторых, движение происходит в направлении, перпендикулярном градиенту. Отметим также, что слагаемое  $V_0\Gamma_0/(\xi^2 D K_{kp}^3)$ , стоящее в скобках в (8.11), мало по сравнению с единицей, поскольку оно имеет порядок  $(r_0/R_0)^2$ . Поэтому знак угловой скорости  $\phi_0$  определяется только знаком  $d\Gamma/d\theta$ . Так, на поверхности вытянутого эллипсоида вращения спиральная волна, вращающаяся в его северном "полушарии" в направлении против часовой стрелки, должна дрейфовать с угловой скоростью  $\phi_0 < 0$ .

Приведем теперь оценки скорости дрейфа для среды с реакцией Белоусова—Жаботинского. Возьмем типичные значения  $V_0 = 3$  мм/мин и  $r_0 = 0,5$  мм. Пусть спиральная волна вращается на поверхности вытянутого эллипсоида вращения, причем малая полуось  $a = 2$  мм, большая полуось  $b = 3$  мм, а положение центра ядра на сфере определяется углом  $\theta_0 \approx \pi/6$ . Используя выражение (8.11), получаем значение угловой скорости  $\phi = 0,035 \text{ мин}^{-1}$ , что соответствует скорости дрейфа  $V_d \approx 0,04$  мм/мин. Таким образом, центр спиральной волны в этих условиях смещается на расстояние порядка радиуса ядра приблизительно за 10 оборотов спиральной волны.

Эффект дрейфа спиральных волн по неоднородно искривленным поверхностям исследовался также в вычислительных экспериментах на модели типа (1.2) с заданием функций  $F$  и  $G$  в виде (1.3) при следующих значениях коэффициентов  $k_f = 1,7$ ,  $k_g = 2$ ,  $d = 0,1$ ,  $\epsilon = 0,15$ ,  $k_\epsilon = 6$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $D_E = D_g = 1$ . Для данной среды скорость распространения  $V_0 \approx 0,4$ , а радиус ядра  $r_0 \approx 2$ . Первоначальное положение центра ядра спиральной волны определялось значениями углов  $\theta_0 \approx 0,56$  и  $\phi_0 \approx 0,2$ .

Траектория движения концевой точки спиральной волны, полученная в результате расчетов, показана на рис. 14. Форма витка траектории в виде эллипса обусловлена использованием угловых координат. В метрических координатах форма границы ядра спиральной волны — окружность. Как видно из рис. 14, дрейф ядра спиральной волны происходит только вдоль параллели эллипсоида ( $\theta_0 = 0$ ) в направлении, определяемом формулой (8.11). Кроме того, оценка скорости дрейфа по формуле (8.11) ( $\phi = 2,8 \cdot 10^{-5}$ ) хорошо совпадает с результатами численных расчетов ( $\phi = 3,6 \cdot 10^{-5}$ ).

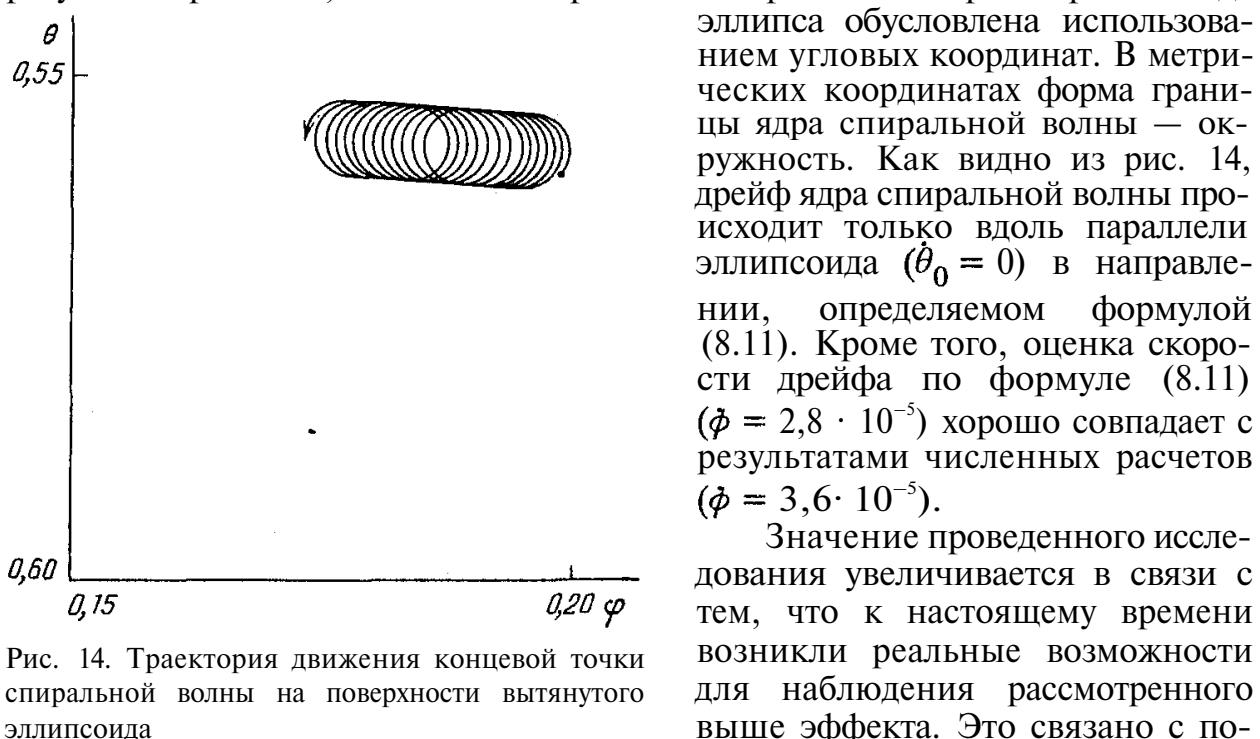


Рис. 14. Траектория движения концевой точки спиральной волны на поверхности вытянутого эллипсоида

Значение проведенного исследования увеличивается в связи с тем, что к настоящему времени возникли реальные возможности для наблюдения рассмотренного выше эффекта. Это связано с по-

явлением модификаций реакции Белоусова—Жаботинского с иммобилизованным катализатором. В этой модификации реакция происходит не во всем объеме раствора, а лишь в тонком придонном слое. Напомним, что предсказанные в рамках кинематического подхода [21, 73] резонансные эффекты для спиральных волн на плоскости уже получили прямое экспериментальное подтверждение [3]. Это убеждает и в существовании обнаруженного эффекта дрейфа, а приведенные оценки показывают, что смещение спиральной волны вполне доступно для визуального наблюдения. Поэтому, если иммобилизовать катализатор на неоднородно искривленной поверхности заданного рельефа, можно получить принципиально новые возможности для управления спиральными волнами. В частности, можно добиться движения спиральных волн в нужных направлениях, стационарного вращения в определенной области или аннигиляции пар спиральных волн с разноименными топологическими зарядами. Очень важно, что при этом не требуется создавать неоднородности свойств возбудимой среды, что существенно упрощает реализацию таких способов управления спиральными волнами.

## 9. Циклоидная циркуляция

Все рассмотренные выше примеры применения кинематического подхода были связаны с исследованием таких автоволновых режимов, при которых период циркуляции спиральных волн значительно превышал время рефрактерности. В этих условиях взаимное влияние импульсов возбуждения, последовательно проходящих через одни и те же точки среды, мало и им можно пренебречь. Однако, строго говоря, при стационарной циркуляции спиральной волны через каждую точку возбудимой среды, за исключением точек ядра, проходит периодическая последовательность искривленных волновых фронтов. И это обстоятельство необходимо учитывать, если период циркуляции не слишком велик.

Рассуждения, проведенные аналогично случаю одиночных импульсов (см. п. 2), показывает [39, 130], что зависимость  $V(K, T)$  определяется уравнением, обобщающим (2.8):

$$V(K, T) = D_E K + V_{\pi}(\varepsilon^*, \varepsilon T), \quad (9.1)$$

где функция  $V_{\pi}(\varepsilon, \varepsilon T)$  определяет скорость распространения последовательности волн с прямолинейными фронтами, следующих с периодом  $T$ . Зависимость  $K^*(T)$ , найденная в [39] для модели (1.2) при  $D_g = 0$ , изображена на рис. 15,а. На рис. 15,б представлена зависимость скорости распространения автоволны от кривизны фронта  $K$  и периода следования  $T$ , определенная для модели (1.2).

Предположим, что скорость распространения фронта волны, как и ранее, зависит только от его кривизны, а величина периода  $T$  — некий параметр, характеризующий эту зависимость, но не имеющий отношения к значению величины  $\omega$ . Тогда, как следует из п. 4, величина угловой скорости  $\omega$  определяется выражениями (4.5) или (4.12) и будет зависеть только от двух величин: скорости плоского фронта  $V_{\pi}$  и критической кривизны  $K_{kp} \approx K^*$ . Заметим, однако, что теперь величины в правой части выражений (4.5) или (4.12) являются функциями от периода  $T$  следования волн, который при стационарной циркуляции определяется угловой скоростью поворота волны  $T = 2\pi/\omega$ . Таким образом, выражение (4.5) превращается в нелинейное ал-

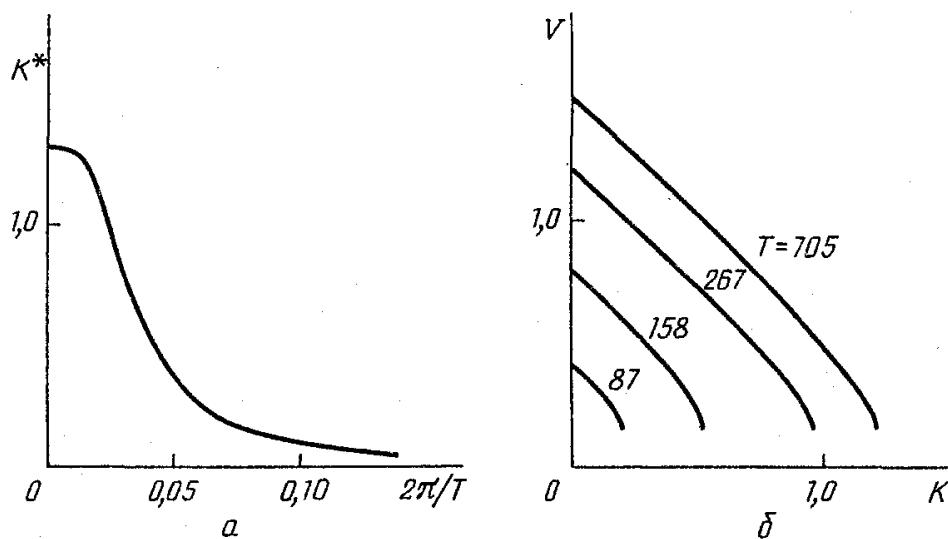


Рис. 15. Критическая кривизна  $K^*$  (а) и скорость распространения фронта  $V$  (б) в периодической последовательности автоволн

алгебраическое уравнение относительно величины угловой скорости циркуляции

$$\omega = V_n^2 \left( \varepsilon, \frac{2\pi\varepsilon}{\omega} \right) \psi K^* \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \left( V_n \left( \varepsilon, \frac{2\pi\varepsilon}{\omega} \right) \right)^{-1}. \quad (9.2)$$

Зависимости  $V_n(\varepsilon, \varepsilon T)$  и  $K^*(T)$ , входящие в (9.2), как отмечалось выше, могут быть найдены эффективными численными методами или выражены аналитически (см., например, [32, 50, 100]). В последнем случае получение оценки угловой скорости циркуляции сводится к решению алгебраического уравнения (9.2).

Легко видеть [31, 32, 40], что правая часть уравнения (9.2) убывает с увеличением  $\omega$ , поэтому оно имеет единственное решение. При этом найденное значение угловой скорости будет меньше, чем в случае отсутствия рефрактерности. Это количественное отличие отмечалось во многих работах [75, 88, 91, 117, 118], именно на нем концентрировалось внимание.

Однако взаимное влияние витков спирали приводит и к появлению качественно новых эффектов [31 — 33, 39, 93, 98, 130], а именно, к нарушению устойчивости круговой циркуляции спиральной волны и возникновению циклоидных режимов циркуляции, обнаруженных в вычислительных экспериментах [33] и натурных экспериментах с реакцией Белоусова—Жаботинского [113, 123, 126]. Специфика этого режима заключается в том, что траектория свободного края спиральной волны в однородной и стационарной среде не окружность, а сложная кривая, напоминающая циклоиду.

В рамках кинематического подхода существование циклоидного режима получает достаточно простое объяснение. Для иллюстрации этого используем простейшие линейные зависимости  $V(K, T)$  и  $K_{kp}(T)$  [34, 39, 130]:

$$\begin{aligned} V(K, T) &= V_0 + K - (V_0 - V_{kp}) T_{min} T^{-1}, \quad K \geq K^*(T), \\ K_{kp}(T) &= -(V_0 - V_{kp})(1 - T_{min} T^{-1}), \quad V_{min} = \kappa V_{kp} = V(K^*, T), \\ V_{kp} &= V(K_{kp}, T). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь величина  $V_0$  определяет скорость уединенной волны с прямолинейным

фронтом, а величина  $V_{\min}$  соответствует минимально возможной скорости стационарного распространения волн.

При стационарной циркуляции, как было отмечено выше, фронт волны проходит через точки среды с одинаковым временным интервалом  $T$ , равным периоду циркуляции. В общем случае интервал следования волн может быть различен для разных точек среды и может изменяться во времени:  $T = T(x, y, t)$ . Для построения функции  $T(x, y, t)$  отметим момент последнего прихода фронта волны в данную точку среды  $T^*(x, y, t)$ . Тогда функция  $T(x, y, t)$ , входящая в (9.3), определяется простым выражением

$$T = t - T^*[X(s, t), Y(s, t), t], \quad (9.4)$$

где  $X(s, t)$  и  $Y(s, t)$  — декартовы координаты линии фронта волны.

Функция  $T(x, y, t)$  вычисляется в узлах квадратной сети с шагом  $H$ , а затем между узлами производится линейная интерполяция величины  $1/T$ .

На рис. 16 показаны два примера процесса образования спиральной волны из прямолинейного полубесконечного фронта при различных значениях параметра  $T_{\min}$ . Эти расчеты выполнялись в соответствии с основным кинематическим уравнением (3.6), а скорость распространения волны определялась выражением (9.3) при  $\theta_0 = 1,5$ ,  $\theta_{kp} = 0,86$ ,  $\chi = 0,9$ ,  $\gamma = 5$ ,  $H = 1$ .

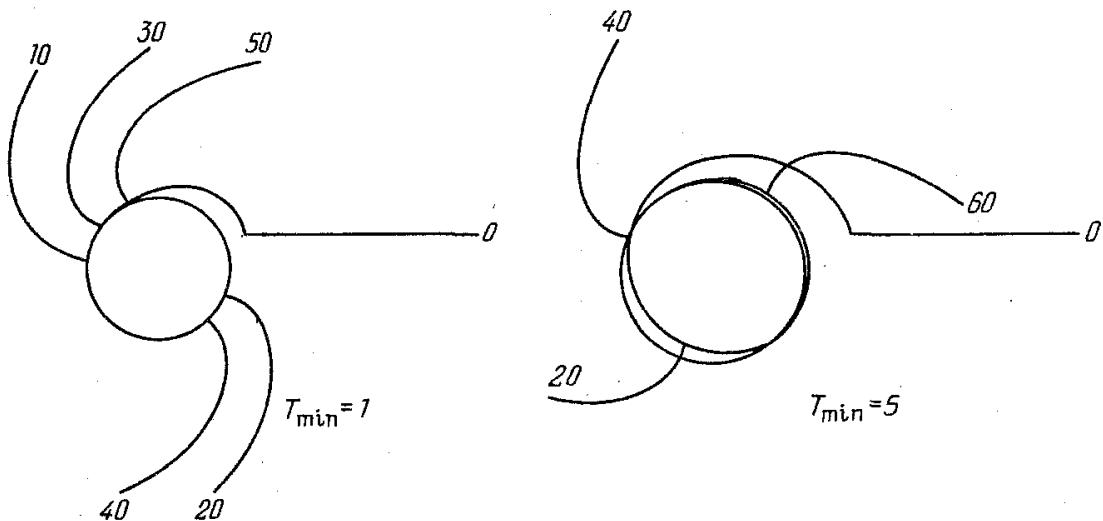


Рис. 16. Образование спиральной волны в кинематической модели спиральной волны при различной рефрактерности среды

Из рисунка видно, как, постепенно изгинаясь, фронт волны приобретает стационарную форму, а траектория концевой точки переходит в окружность. Радиус этой окружности и период вращения точно соответствуют расчетам характеристик стационарной циркуляции. Если величина  $T_{\min}$  мала, то период циркуляции близок к величине  $T_0$ , определяемой зависимостью скорости фронта только от его кривизны. При выбранных на рис. 16 параметрах этой зависимости  $T_0 = 34$ .

При увеличении  $T_{\min}$  увеличивается и период циркуляции, и радиус траектории движения концевой точки. При дальнейшем увеличении  $T_{\min}$  качественно изменяется и характер процесса: стационарная циркуляция становится невозможной. Угловая скорость и мгновенный радиус поворота концевой точки не остаются постоянными, а колеблются. В результате траектория концевой точки уже не окружность, а напоминает циклоиду (рис. 17).

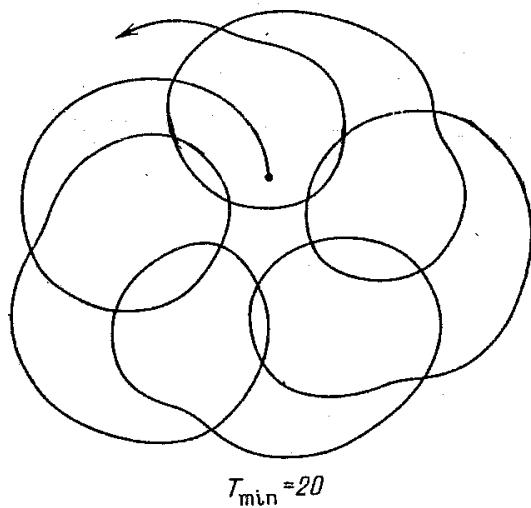


Рис. 17. Траектория движения концевой точки фронта в кинематической модели движения автоволн при большой длительности рефрактерного периода

искажает круговой режим циркуляции. Однако в рассматриваемом случае неоднородность имеет специфический характер, благодаря чему при некоторых условиях все же обеспечивается устойчивость кругового режима циркуляции спиральной волны.

Предположим, что в возбудимой среде с  $T_{\min} \neq 0$  установилась круговая циркуляция спиральной волны, а затем концевая точка волны, в силу случайных флуктуаций, попала внутрь ядра, где величина  $K_{kp}$  имеет другое значение. Это приведет к появлению перемещения концевой точки в тангенциальном направлении (т.е. к центру ядра) со скоростью  $C$  (см. (3.7)). При этом изменение кривизны фронта в концевой точке будет подчиняться, в силу (3.7) и (5.3), следующему уравнению:

$$\frac{\partial K_0}{\partial t} = \gamma \frac{\partial K}{\partial l} \Big|_{l=0} (K_{kp} - K_0). \quad (9.5)$$

Но и величина  $K_{kp}$  вблизи свободного края спирали будет изменяться, так как концевая точка перемещается в области, где среда неоднородна, причем  $\partial K_{kp}/\partial r = \partial K_{kp}/\partial l$  (здесь  $r$  — расстояние до центра ядра):

$$\frac{\partial K_{kp}}{\partial t} = \gamma \frac{\partial K_{kp}}{\partial l} \Big|_{l=0} (K_{kp} - K_0). \quad (9.6)$$

Легко видеть [35, 39], что решение системы (9.5), (9.6) устойчиво при

$$\frac{\partial K_{kp}}{\partial l} \Big|_{l=0} < \frac{\partial K}{\partial l} \Big|_{l=0}. \quad (9.7)$$

Это неравенство является достаточным условием устойчивости круговой циркуляции спиральной волны. Действительно, если условие (9.7) выполнено, то с течением времени скорость  $C$  тангенциального перемещения концевой точки уменьшается до нуля, и она проникает в глубь ядра на расстояние тем меньшее, чем меньше начальная флуктуация. В противном случае даже малая

Простое качественное объяснение наблюдаемого режима состоит в том, что в режиме стационарной циркуляции для всех точек среды, через которые проходит фронт волны, интервал следования импульсов  $T(x, y, t) = T_c$ , где  $T_c$  — период циркуляции, но в ядре спиральной волны, ограниченном траекторией концевой точки, величина  $T(x, y, t)$  монотонно и неограниченно возрастает со временем, так как фронт волны никогда не заходит в эту область среды.

Таким образом, при  $T_{\min} \neq 0$  в процессе циркуляции спиральной волны создается неоднородность условий распространения фронта. Например, величина  $K_{kp}$ , в силу (9.3), различна вне и внутри ядра. Неоднородность свойств возбудимой среды, как показано в п. 6,

флуктуация может привести к значительным искажениям траектории движения концевой точки.

Это условие было проверено и подтверждено в вычислительных экспериментах на кинематической модели (3.6) [39].

## 10. Трехмерные автоволновые структуры

Для описания некоторых трехмерных автоволновых структур удается предложить в ряде случаев аналитические методы [45, 54, 90, 118, 127]. Кинематическое описание, развитое для двухмерных возбудимых сред, также допускает обобщение на трехмерный случай и дает возможность с единых позиций рассмотреть динамику различных автоволновых структур.

Как и прежде, будем считать, что автоволна полностью описывается путем задания ее ориентированной поверхности фронта. Всякая поверхность в трехмерном пространстве обладает в каждой своей точке двумя главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  (или двумя главными кривизнами:  $K_1 = 1/R_1$  и  $K_2 = 1/R_2$ ). В [10] показано, что скорость нормального смещения участка фронтальной поверхности зависит лишь от суммы главных кривизн, т.е. от удвоенной средней кривизны:  $2H = K_1 + K_2$ , согласно формуле

$$V = V_0 - 2DH. \quad (10.1)$$

На линии своего обрыва (если он имеется) фронтальная поверхность может прорастать или сокращаться. Скорость этого тангенциального прорастания  $C$  зависит не только от средней кривизны фронтальной поверхности при подходе к обрыву, но и от геодезической кривизны  $\kappa$  самой линии обрыва:

$$C = \gamma_1(K_{kp} - 2H) - \gamma_2\kappa, \quad (10.2)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — некоторые положительные коэффициенты; кривизну  $\kappa$  считаем положительной, если линия обрыва является в данной точке выпуклой по отношению к фронту.

Коэффициент  $\gamma_1$  аналогичен коэффициенту  $\gamma$ , определяющему скорость прорастания концевой точки линии фронта в двухмерной среде. В то же время коэффициент  $\gamma_2$  появляется лишь в трехмерном случае. Как и другие кинематические параметры, коэффициент  $\gamma_2$  может быть определен путем решения "микроскопических" уравнений (1.2). Вместе с тем, удается показать [10], что если коэффициенты диффузии активатора и ингибитора близки друг к другу ( $D_E \rightarrow D_g = D$ ), то  $\gamma_2 \rightarrow D$ . Напомним, что в этом случае  $\gamma_1 \rightarrow 0$ .

Применим теперь кинематическое описание для расчета эволюции некоторых трехмерных автоволновых структур.

Вращающуюся на плоскости спиральную волну можно рассматривать как плоское сечение некоторой цилиндрической поверхности. Эта поверхность — простейшая трехмерная автоволновая структура: прямолинейный вращающийся свиток. По своим свойствам такой вихрь аналогичен спиральной волне. Роль ядра у вихря играет цилиндр, ось которого называется нитью свитка.

Нить свитка может быть искривлена и, в частности, замкнута в окружность. В результате получается вихревое кольцо (рис. 18, а). Такие структуры наблюдаются в натурных экспериментах [121, 123, 125, 126], а также в вычислительных экспериментах [45, 106, 126] на моделях типа "реакция—диффузия".

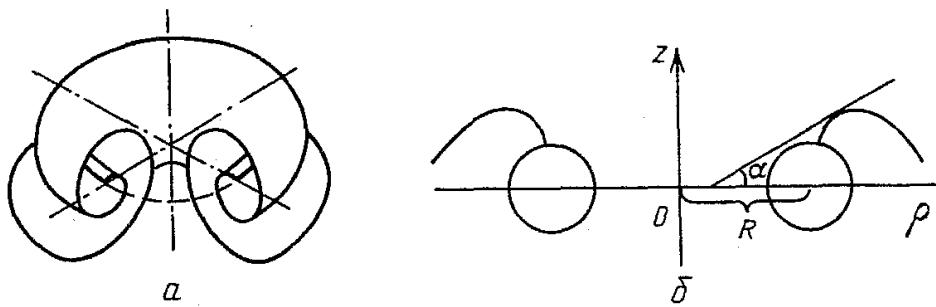


Рис. 18. Вихревое кольцо в трехмерной возбуждимой среде (а) и аксиальное сечение вихревого кольца (б)

Вихревое кольцо — локальный автоволновой источник; на больших расстояниях от центра оно создает картину сферических расходящихся волн. Расчеты на ЭВМ [54] показывают, что вихревое кольцо в зависимости от параметров возбуждимой среды может либо сжиматься, либо расширяться, одновременно смещаясь при этом в направлении, перпендикулярном плоскости нити. Скорости этих смещений тем меньше, чем больше радиус  $R$  нити кольца. В частности, аналитическое рассмотрение эволюции вихревого кольца в двухкомпонентной модели для случая одинаковых коэффициентов диффузии [54, 127] показало, что скорость сжатия нити вихревого кольца пропорциональна  $D/R$ . Поэтому, если нить вихревого кольца искривлена слабо, появляется возможность применить для описания его эволюции квазистационарное кинематическое рассмотрение, введенное выше.

Введем цилиндрическую систему координат  $(x, \rho, \varphi)$  с осью  $z$ , являющейся осью аксиальной симметрии вихревого кольца. Вследствие цилиндрической симметрии задачи достаточно рассмотреть эволюцию линии, образуемой сечением вихревого кольца плоскостью  $\rho, z$ , т.е. его меридиана (рис. 18, б). Поскольку эта линия плоская, то очевидно, что ее эволюция описывается основным кинематическим уравнением (3.6). Однако, в отличие от спиральной волны на плоскости, скорости нормального смещения меридиана и тангенциального прорастания концевой точки будут зависеть не только от его кривизны. Действительно, в силу (10.1), скорость нормального смещения определяется средней кривизной, которая легко вычисляется для точек меридиана

$$H = \frac{1}{2} (K - \rho^{-1} \sin \alpha), \quad (10.3)$$

где  $\rho$  — расстояние от оси  $z$  до соответствующего участка фронтальной поверхности,  $\alpha$  — угол между касательной к меридиану кольца и осью  $\rho$  (см. рис. 18, б).

Тангенциальная кривизна линии обрыва фронтальной поверхности определяется выражением

$$\kappa = -\rho_0^{-1} \cos \alpha_0; \quad (10.4)$$

здесь  $\alpha_0$  и  $\rho_0$  значения угла  $\alpha$  и расстояния  $\rho$  при подходе к концевой точке меридиана.

Заметим, что, в силу определения кривизны линии, следует

$$\alpha = \alpha_0 - \int_0^l K dl'. \quad (10.5)$$

Поскольку, как подчеркивалось выше, угловая скорость в квазистацио-

нарном режиме определяется формой фронта вблизи свободного края спиральной волны, нам необходимо исследовать движение только тех участков поверхности вихревого кольца, которые непосредственно примыкают к ядру.

Движение концевой точки меридиана вихревого кольца определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_0}{dt} &= -V(l=0)\sin\alpha_0 - C \cos\alpha_0, \\ \frac{dz_0}{dt} &= V(l=0)\cos\alpha_0 - C \sin\alpha_0,\end{aligned}\quad (10.6)$$

аналогичными (3.10).

Кроме того, уравнение (3.11) также остается справедливым

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = \frac{dV}{dl} \Big|_{l=0} + CK_0. \quad (10.7)$$

Величина  $\partial V / \partial l$ , как следует из (3.8), (10.3) и (10.4), определяется выражением

$$\frac{\partial V}{\partial l} = D \frac{\partial K}{\partial l} - DK \frac{\cos\alpha}{\rho}. \quad (10.8)$$

Подстановка (10.1), (10.3) и (10.8) в (3.6) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ K_0 \int^l K(V_0 - DK) dl - D \frac{\partial K}{\partial l} \right] = \frac{\partial K}{\partial t} + \left( C - D \frac{\cos\alpha_0}{R} \frac{\partial K}{\partial l} \right). \quad (10.9)$$

Рассмотрение (10.9) показывает, что уравнение (5.3), описывающее квазистационарный режим в двухмерной среде, следующим образом модифицируется для случая вихревого кольца:

$$\frac{dK_0}{dt} = - \left( C - D \frac{\cos\alpha_0}{R} \right) \frac{\partial K}{\partial l} \Big|_{l=0}. \quad (10.10)$$

С учетом указанных отличий уравнения (5.7) и (5.9) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{K}_0 &= \xi \left( \frac{V_0}{D} \right)^{1/2} [\gamma_1(K_{kp} - K_0 + R^{-1}\sin\alpha_0) + R^{-1}(\gamma_2 - D)\cos\alpha_0] K_0^{3/2}, \\ \dot{\alpha}_0 &= \xi \left( \frac{V_0}{D} \right)^{1/2} K_0^{3/2} - DK_0 R^{-1}\cos\alpha_0 + K_0 [\gamma_2 R^{-1}\cos\alpha_0 + \\ &\quad + \gamma_1(K_{kp} - K_0 + R^{-1}\sin\alpha_0)].\end{aligned}\quad (10.11)$$

Система (10.11) полностью определяет зависимость угла  $\alpha_0$  и кривизны  $K_0$  от времени в условиях квазистационарного режима. Интегрируя ее, подставляя решение в (10.6) и усредняя по периоду циркуляции, получаем уравнения, описывающие эволюцию нити вихревого кольца:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3V_0}{4K_{kp}} \frac{(\gamma_1/D)^2 + [(\gamma_2 - D)/D]}{(\gamma_1/D)^2 + 1} \frac{1}{R} - \frac{D}{R}, \quad (10.12)$$

$$\frac{dz_0}{dt} = -\frac{3V_0\gamma_1}{4RK_{kp}D} \frac{(\gamma_2 - D)/D - 1}{(\gamma_1/D)^2 + 1} - \frac{V_0}{DK_{kp}} \frac{\gamma_2 - D}{2\xi R}. \quad (10.13)$$

Напомним, что мы рассматриваем вихревые кольца большого радиуса в средах с низкой возбудимостью ( $DK_{kp} \ll V_0$ ), поэтому в полученных выражениях опущены члены высших степеней  $R^{-1}$  и малые, вследствие неравенства  $p \equiv DK_{kp}/V_0 \ll 1$ , а также условия квазистационарности  $\gamma_1/D \ll p^{-1/2}$ .

Заметим, что для частного случая двухкомпонентной возбудимой среды с одинаковыми коэффициентами диффузии получим [10]  $\gamma_2 = D$  и  $\gamma_1 = 0$ . Подставляя эти значения в (10.12) и (10.13), получаем

$$dR/dt = -D/R, \quad dz/dt = 0,$$

что совпадает с результатами численных расчетов и аналитическим рассмотрением, выполненным независимым способом [54].

Таким образом, вихревое кольцо практически всегда нестабильно. Оно либо сжимается ( $R < 0$ ), либо расширяется ( $R > 0$ ) с течением времени.

Существует, однако, узкий интервал значений параметров, в котором скорость  $R$  очень мала и проходит через нулевое значение. В пределах этого интервала наряду с линейными по  $1/R$  слагаемыми в выражении для  $R$  необходимо учитывать также члены следующих, более высоких порядков. Детальный анализ показывает [49], что слагаемые порядка  $1/R^2$  отсутствуют, а член порядка  $1/R^3$  входит в выражение для скорости  $\dot{R}$  с положительным коэффициентом. Поэтому, если в линейном по  $1/R$  приближении вихревое кольцо сжимается, но скорость сжатия очень мала, это нелинейное положительное слагаемое порядка  $1/R^3$  может скомпенсировать сжатие и стабилизировать вихревое кольцо.

Кроме того, численные расчеты [10, 126] показывают, что могут наблюдаться и малые вихревые кольца стабильного размера. Механизм стабилизации коллапса в этом случае обусловлен взаимодействием волновых фронтов, сталкивающихся на оси симметрии вихревого кольца.

Эволюцией вихревого кольца можно управлять при помощи периодической модуляции свойств возбудимой среды. Так, если критическая кривизна  $K_{kp}$  зависит от времени по закону (6.1) с  $\omega_1 = \omega_0$ , то можно заставить колапсирующее кольцо раздуваться, а также поменять направление дрейфа вдоль оси  $z$  на противоположное, подбирая амплитуду и фазу модуляции. Интересно, чтоенным выбором  $K_1$  и  $\phi$  можно одновременно стабилизировать размер кольца и остановить его дрейф, т.е. полностью стабилизировать кольцо [2]. В зависимости от параметров возбудимой среды это положение равновесия может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым.

Хотя приведенные выше результаты относились непосредственно лишь к эволюции кругового вихревого кольца, они позволяют описать в первом приближении поведение во времени любого вихря, нить которого изогнута произвольно, но не очень сильно. В самом деле, если рассмотреть небольшой участок такого вихря [10], он будет выглядеть как часть вихревого кольца соответствующего радиуса. Пусть исходно мы имели прямой вихрь (цилиндрический свиток) и немного деформировали локально его нить. Если параметры среды таковы, что вихревое кольцо в ней сжимается, то деформация будет стремиться уменьшиться с течением времени. В обратном случае, когда вихревое кольцо расширяется, всякий "вырост" на нити раздувается — нить

вихря стремится к удлинению. В результате прямой цилиндрический свиток оказывается неустойчивым по отношению к малым деформациям его нити. В безграничных возбудимых средах это должно приводить к формированию очень сложных структур.

Эти качественные соображения о динамике нити трехмерного автоволнового вихря можно формализовать. Так, в работах [90, 92] для описания эволюции трехмерных автоволновых структур предложена особая система кинематических уравнений, в основу которых положены зависимости скоростей перемещения точек нити от ее формы.

Обсудим в заключение свойства скрученных вихрей, которые отличаются от прямолинейных вихрей тем, что линия обрыва у них представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр-ядро (рис. 19). Количественно "скрученность" вихря можно характеризовать параметром  $\mu = 2\pi/h$ , где  $h$  — шаг винтовой линии. Для неоднородно скрученных вихрей более удобным является другое определение:  $\mu(z) = d\alpha/dz$ , где  $\alpha$  — азимутальный угол, определяющий положение соответствующего участка винтовой линии обрыва на цилиндре-ядре. В зависимости от того, является ли винтовая линия обрыва правой или левой, скрученность вихря  $\mu$  будет соответственно либо положительной, либо отрицательной.

Фронтальная поверхность однородно скрученного вихря представляет собой геликоид. Рассмотрим профиль, образованный сечением геликоида плоскостью  $z = \text{const}$ . Очевидно, что его эволюция описывается уравнением (3.6), где  $K$  — кривизна линии профиля, а скорость  $V$  в нашем приближении не зависит от  $\mu$  (первая поправка к скорости за счет кручения пропорциональна  $\mu^2$ ).

Поскольку  $\mu = \text{const}$ , форма профиля в сечении  $z = \text{const}$  не зависит от времени. Поэтому задача об определении угловой скорости вращения скрученного вихря сводится в линейном приближении по  $\mu$  к исследованному ранее вопросу о вращении спиральной волны на плоскости. Таким образом, частота вращения скрученного вихря дается выражением (4.10), в котором  $K_{\text{кр}}$  заменено на  $K(0)$ , где  $K(0)$  — кривизна линии профиля при подходе к ядру вихря. Кривизну  $K(0)$  найдем из условия равенства нулю скорости прорастания  $C$ . Используя стандартные методы теории поверхностей [52], получим [12], что средняя кривизна геликоида при подходе к ядру равна  $H(0) = 1/2K(0)$ , а тангенциальная кривизна линии обрыва  $x = |\mu|$ . Подставляя полученные кривизны в (10.2) и приравнивая  $C$  к нулю, получим кривизну линии профиля  $K(0)$ :

$$K(0) = K_{\text{кр}} + |\mu| \gamma_2 \gamma_1^{-1}. \quad (10.14)$$

Отсюда с учетом (4.9) получим выражение для угловой скорости вращения скрученного вихря

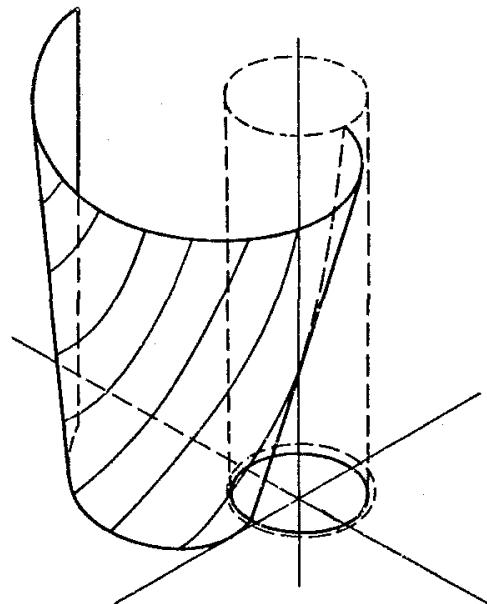


Рис. 19. Скрученный цилиндрический вихрь в трехмерной возбудимой среде

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1}{K_{kp}} |\mu| \right) \quad (10.15)$$

и радиус ядра

$$R = R_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1}{K_{kp}} |\mu| \right). \quad (10.16)$$

Таким образом, угловая скорость вращения скрученного вихря оказывается выше, чем у простого свитка. Увеличение частоты вращения наблюдалось в численных экспериментах [45], однако объяснения, которые давались этому явлению, без оснований предполагали, что радиус ядра скрученного вихря такой же, как и у нескрученного, и приводили не к линейной, а к квадратичной зависимости  $\omega$  от  $\mu$ .

Отметим, что динамика однородно скрученного вихря в модели Ринцеля—Келлера рассматривалась в [101], где также было показано, что угловая скорость его вращения увеличивается.

Перейдем теперь к динамике неоднородно скрученных вихрей. Пусть в начальный момент времени  $\mu = f(z)$ . Как следует из (10.15), участки вихря с различными значениями  $\mu$  будут вращаться с разными скоростями, что приведет к изменению скрученности. Используя (10.15), нетрудно получить уравнение, описывающее зависимость  $\mu$  от координаты  $z$  и времени  $t$ :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = u(\text{sign } \mu) \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad (10.17)$$

где  $u = (3/2)(\gamma_2/\gamma_1)\omega_0/K_{kp}$ . Это своеобразное нелинейное уравнение, относящееся к классу уравнений, описывающих так называемые кинематические волны [61], имеет следующее решение:

$$\mu = f(z + (\text{sign } \mu)ut). \quad (10.18)$$

Рассмотрение решения (10.18) показывает, что если в начальный момент времени вихрь скручен неоднородно, то по нему побегут "волны скрученности". Начальные возмущения скрученности, имеющие разные знаки, распространяются вдоль вихря в противоположных направлениях со скоростью  $u$ , и при их столкновениях образуются разрывы (или ударные волны).

## 11. Заключение

Как видно из приведенного обзора, кинематический подход представляет собой эффективное и достаточно универсальное средство для исследования эволюции различных автоволновых структур. Сфера его применения, конечно, не ограничивается приведенными выше наиболее характерными примерами. Развитый аппарат кинематического рассмотрения пригоден, например, для рассмотрения эволюции автоволн в неоднородных и одновременно нестационарных средах, неоднородных или нестационарных трехмерных средах, а также любых других комбинаций рассмотренных выше "элементарных" ситуаций. Кинематический подход может быть использован для исследования поведения спиральной волны вблизи границы возбужденной области и для описания взаимодействия спиральных волн между собой. Важной задачей также является совершенствование кинематического описания циклоидных режимов циркуляции спиральных волн.

Кинематический подход может быть использован не только для получения

аналитических описаний тех или иных закономерностей спиральных волн, но и как мощное средство повышения эффективности численного исследования автоволновых структур, поскольку приведенные кинематические уравнения значительно проще исходных систем типа "реакция—диффузия".

Важно также отметить, что идеи, лежащие в основе кинематического подхода, уже используются и при разработке альтернативных способов описания возбудимых сред. Так, в настоящее время возрождается интерес к описанию возбудимой среды в виде сети клеточных автоматов [36, 80, 81, 96]. Авторы этих клеточных моделей стремятся в максимальной степени воспроизвести основные кинематические закономерности движения автоволн, в частности, влияние формы фронта на скорость его распространения.

В то же время и в кинематическом подходе заложены возможности дальнейшего совершенствования с использованием идей и результатов альтернативных подходов.

Взаимное проникновение идей, безусловно, будет способствовать продвижению в понимании закономерностей образования и эволюции автоволновых структур.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамычев А.Ю., Давыдов В.А., Зыков В.С.//ЖЭТФ. 1990. Т. 97. С. 1188.
2. Абрамычев А.Ю., Давыдов В.А., Михайлов А.С.//Биофизика. 1990. Т. 34. С. 979.
3. Агладзе К.И., Давыдов В.А., Михайлов А.С.//Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 601.
4. Арансон И.С., Рабинович М.И. Динамика спиральных волн в неравновесных средах. — Препринт ИПФ АН СССР № 212. — Горький. 1988.
5. Балаховский И.С.//Биофизика. 1965. Т. 10. С. 1063.
6. Балкарей Ю.И., Никулин М.Г., Елинсон М.И.// Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. — С. 117.
7. Бартон В., Кабрера М., Франк Ф.//Элементарные процессы роста кристалла. — М.: ИЛ, 1959. — С. 93.
8. Белоусов Б.П.//Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. — М.: Медгиз, 1959. — С. 145; то же://Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. — С. 176.
9. Беркинблит М.Б., Ковалев С.А., Смолянинов В.В., Чайлахян Л.М.//Модели структурно-функциональной организации некоторых биологических систем. — М.: Наука, 1966. С. 71.
10. Бражник П.К., Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С.//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1725.
- [11] Бражник П.К., Давыдов В.А., Михайлов А.С.//ТМФ. 1988. Т. 74. С. 440.
12. Бражник П.К., Давыдов В.А., Михайлов А.С.//Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1989. Т. 32. С. 289.
13. Буздин А.И., Михайлов А.С.//ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 294.
14. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.//УФН. 1979. Т. 128. С. 625.
15. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987.
16. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
17. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л.//ДАН СССР. 1960. Т. 131. С. 1242.
18. Гельфанд С.И., Каждан Д.Л.// Ibidem. 1961. Т. 141. С. 527.
19. Гуляев Ю.В., Калафати Ю.Д., Рябова Л.А., Сербинов И.А.// Ibidem. 1981. Т. 256. С. 357.
20. Давыдов В.А., Зыков В.С.//ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 139.
- [21] Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С., Бражник П.К.//Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1988. Т. 31. С. 574.
22. Давыдов В.А., Михайлов А.С.//Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.— С. 261.
23. Ермакова Е.А., Перцов А.М., Шноль Э.Э.//ДАН СССР. 1988. Т. 301. С. 332.
24. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974.
25. Жаботинский А.М., Отмер Х., Филд Р. и др. Колебания и бегущие волны в химических системах, — М.: Мир, 1988.
26. Зельдович Я.Б.//Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. — М.: Наука, 1981. — С. 38.
27. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А.//ДАН СССР. 1938. Т. 19. С. 693.

28. Зыков В. С. // Управление сложными системами. — М.: Наука, 1975. — С. 59.
29. Зыков В.С.//Биофизика. 1980. Т. 25. С. 319.
30. Зыков В.С.//Биофизика. 1980. Т. 25. С. 888.
- [31] Зыков В. С. // Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. — С. 85.
32. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. — М.: Наука, 1984.
33. Зыков В.С.// Биофизика. 1986. Т. 31. С. 862.
34. Зыков В.С.//Биофизика. 1987. Т. 32. С. 337.
35. Зыков В.С.// Биофизика. 1989. Т. 34. С. 1031.
36. Зыков В.С., Михайлов А.С.// ДАН СССР. 1986. Т. 286. С. 341.
37. Зыков В.С., Морозова О.Л.//Биофизика. 1979. Т. 24. С. 717.
38. Зыков В.С., Морозова О.Л.//Биофизика. 1980. Т. 25. С. 1071.
39. Зыков В.С., Морозова О.Л. Кинематический метод исследования устойчивости спиральных автоволн. — Препринт. — М.: Институт проблем управления АН СССР, 1988.
40. Зыков В.С., Морозова О.Л., Пратусевич В.Р.//Вопросы кибернетики. 1982. Вып. 93. С. 43.
- [41] Зыков В.С., Петров А.А.//Биофизика. 1977. Т. 22. С. 300.
42. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. Математическая биофизика клетки. — М.: Наука, 1978.
43. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.// Бюлл. МГУ. Сек. А. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1; то же://Вопросы кибернетики. 1975. Вып. 12. С. 3.
44. Кринский В.И.// Проблемы кибернетики. 1968. Вып. 20. С. 59.
45. Кринский В.И., Медвинский А.Б., Панфилов А.В. Эволюция автоволновых вихрей. — М.: Знание, 1986.
46. Кринский В.И., Михайлов А.С. Автоволны. — М.: Знание, 1984.
47. Кринский В.И., Перцов А.М., Решетилов А.Н.// Биофизика. 1972. Т. 17. С. 271.
48. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика — теория самоорганизации: Идеи, методы, перспективы. — М.: Знание, 1983.
49. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990.
50. Михайлов А.С., Кринский В.И.//Биофизика. 1982. Т. 27. С. 875.
- [51] Николис Г., Пригожий И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
52. Норден А.П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956.
53. Островский Л.А., Яхно В.Г.//Биофизика. 1975. Т. 20. С. 489.
54. Панфилов А.В., Руденко А.Н., Кринский В.И.// Биофизика. 1986. Т. 31. С. 850.
55. Полак Л.С., Михайлов А.С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983.
56. Ращевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Физматгиз, 1956.
57. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернявский Д.С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
58. Руденко А.Н., Панфилов А.В.// S t u d i a Biophysica. 1983. V. 98. P. 183.
59. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987.
60. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении в электронике. — М.: Сов. радио, 1977.
- [61] Узем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
62. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.
63. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
64. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. — М.: Мир, 1979.
65. Agladze K.J., Krinsky V.I.//Nature. London. 1982, V. 296. P. 424.
66. Allessie M.A., Bonke F.J.M., Schopman F.J.G.//Circul. Res. 1973. V. 33. P. 54.
67. Brower R.C., Kessler D.A., Koplik J., Levins H.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1111.
68. Brower R.C., Kessler D.A., Koplik J., Levine H.// Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 29. P. 1335.
69. Bures J., Koroleva V.I., Gorelova N.A.//Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium/Ed. V.I. Krinsky. — Berlin a.o.: Springer-Verlag. 1984. — P. 180.
70. Casten R., Cochen H., Langerstrom P.//Quart. Appl. Math. 1975. V. 32. P. 365.
- [71] Cohen D.S., Neu J.C., Rosales R.R.//SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. P. 536.
72. Davidenko J.M., Kent P.P., Chialo D.R., Michaels B.C., Jalife J. Sustained Vortex-like Waves in Normal Isolated Nentricular Muscle. — Reprint. — Department of Pharmacology and Physiology SUNY, Health Science Center at Syracuse, 1990.
73. Davydov V.A., Mikhailov A.S., Zykov V.S.//Nonlinear Waves in Active Media//Ed. Yu. Engelbrecht. Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1989. — P. 38.
74. Davydov V.A., Zykov V.S.//Nonlinear World. — Kiev: Naukova Dumka, 1989. — V. 1. P. 81.
75. Dockery J.D., Keener J.P., Tyson J.J.//Physica. Ser. D. 1988. V. 30. P. 177.

76. *Fife P.O.*//Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems/Eds. C. Vidal, A. Pacault. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1984. — P. 76.
77. *Fife P.C.*// J Stat. Phys. 1985. V. 39. P. 687.
78. *FitzHugh R.*//Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
79. *Foerster P., Muller S.C., Hess B.*//Science. 1988. V. 241. P. 685.
80. *Gerhardt M., Schuster H., Tyson J.J.*//Science. 1990. V. 247. P. 1563.
- [81] *Gerhardt M., Schuster H., Tyson J.J.*//Physica. Ser. D. 1990. V. 46. P. 392.
82. *Gerisch C.*//Wilhelm Roux Archiv Entwickelungsmech. Organismen. 1965. Bd. 156. S. 127.
83. *Gorelova N.A., Bures J.*// J Neurobiology. 1983. V. 14. P. 353.
84. *Greenberg J.M.*//SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. P. 301.
85. *Greenberg J.M.*// A d v. Appl. Math. 1981. V. 2. P. 450.
86. *Hagan P.S.*//SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. P. 762.
87. *Hramov R.N., Rudenko A.N., Panfilov A.V., Krinsky V.I.*//Studia Biophysica. 1984. V. 102. P. 69.
88. *Keener J.P.*//SIAM J. Appl. Math. 1986. V. 46. P. 1039.
89. *Keener J.P.*// J. Math. Biol. 1988. V. 26. P. 41.
90. *Keener J.P.*//Physica. Ser. D. 1988. V. 31. P. 269.
- [91] *Keener J.P., Tyson J.J.*//Ibidem. 1986. V. 21. P. 307.
92. *Keener J.P., Tyson J.J.*//Ibidem. 1990. V. 44. P. 191.
93. *Kogan B.Ya., Zykov V.S., Petrov A.A.*//Simulation of Systems'79. Amsterdam: North-Holland. 1980. — P. 693.
94. *Lugosi E.*// Physica. Ser. D. 1989. V. 40. P. 331.
95. *Markstein G.H.*// J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. P. 199.
96. *Markus M., Hess B.*//Dissipative Structures in Transport Processes and Combustion. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1990. — P. 123.
97. *Maselko J., Showalter K.*//Nature, London. 1989. V. 339. P. 609.
98. *Meron E.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 684.
99. *Meron E., Pelce P.*//Ibidem. 1988. V. 60. P. 1880.
100. *Mikhailov A.S., Krinsky V.I.*//Physica. Ser. D. 1983. V. 9. P. 346.
- [101] *Mikhailov A.S., Panfilov A.V., Rudenko A.N.*//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 109. P. 246.
102. *Muller S.C., Plessner T., Hess B.*//Science. 1985. V. 230. P. 661.
103. *Muller S.C., Plessner T., Hess B.*//Physica. Ser. D. 1987. V. 24. P. 71.
104. *Muller S.C., Plessner T., Hess B.*// Ibidem. P. 87.
105. *Nagurno J., Arimoto S., Yoshizawa S.*//Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061.
106. *Nandapurkar P.J., Winfree A.T.*//Physica. Ser. D. 1987. V. 29. P. 69.
107. *Pertsov A.M., Panfilov A.V., Ermakova E.A.*//Ibidem. 1984. V. 14. P. 311.
108. *Rinzel J., Keller J.B.*//Biophys. J. 1973. V. 13. P. 1313.
109. *Rosenblueth A.*//Am. J. Physiol. 1958. V. 194. P. 491.
110. *Rossler O.E., Kahlert C.*//Zs. Naturforsch. 1979. Bd. 34a. S. 565.
- [111] *Rovinsky A.B.*// J. Phys. Chem. 1986. V. 90. P. 217.
112. *Selfridge O.*// Arch. Inst. Cardiol. Mexico. 1948. V. 18. P. 177.
113. *Skinner G.S., Swinney H.L.*//Physica. Ser. D. 1990. V. 45. P. 287.
114. *Sultan R., Ortoleva P.J.*// J Chem. Phys. 1986. V. 84. P. 6781.
115. *Thuring A.M.*//Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B. 1952. V. 237. P. 37.
116. *Tyson J.J., Alexander K.A., Manoranjan V.S., Murray J.D.*// Physica. Ser. D. 1989. V. 34. P. 193.
117. *Tyson J.J., Keener J.P.*//Ibidem. 1987. V. 29. P. 215.
118. *Tyson J.J., Keener J.P.*//Ibidem. 1988. V. 32. P. 327.
119. *Wiener N., Rosenblueth A.*// Arch. Inst. Cardiol. Mexico. 1946. V. 16. P. 3.
120. *Winfree A.T.*//Science. 1972. V. 175. P. 634.
- [121] *Winfree A.T.*//Science. 1973. V. 181. P. 937.
122. *Winfree A.T.*//Sci. Am. 1974. V. 230, No. 6. P. 82.
123. *Winfree A.T.* The geometry of biological time//Biornathema..cs. V. 8. — New York a.o.: Springer-Verlag, 1980.
124. *Winfree A.T.*//Physica. Ser. D. 1984. V. 12. P. 321.
125. *Winfree A.T.* When Time Breaks Down. — Princelon Univ. Press, 1987.
126. *Winfree A.T., Janke W.*//J. Phys. Chem. 1989. V. 93. P. 2823.
127. *Yakushevich L.V.*//Studia Biophysica. 1984. V. 100, No. 3. P. 195.
128. *Zaikin A.N., Zhabotinsky A.M.*//Nature, London. 1970. V. 225. P. 535.
129. *Zykov V. S.* Simulation of Wave Processes in Excitable Media. — Translation ed. by A.T. Winfree. — Manchester: University Press, 1988.
130. *Zykov V.S., Morozova O.L.*//Nonlinear Biology. 1990. V. 1, No. 2. P. 1.