АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УФН 1991

ТОМ СТО ШЕСТЬДЕСЯТ ПЕРВЫЙ

Журнал издается с апреля 1918 г.

Август 1991 г. Том 161, № 8

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

534.222

КЛАССИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ХАОС ЛУЧЕЙ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С.С. Абдуллаев, Г.М. Заславский

(НИИ "Биокибернетика" при УзНПО "Кибернетика" АН УзССР, Ташкент,
Институт космических исследований АН СССР, Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 2
2. Формулировка основных уравнений для лучей 4
2.1. Гамильтоновы уравнения для лучей. 2.2. Лучи в неоднородной движущейся среде. 2.3. Оптико-механическая аналогия. 2.4. Лучевые уравнения в неоднородной среде. 2.5. Переменные действие—угол. 2.6. Спектр волновых чисел.
3. Динамика лучей в волноводе с периодическими продольными неоднородностями . . . 10
3.1. Пространственный нелинейный резонанс лучей. 3.2. Скорость распространения сигнала вдоль резонансных лучей. 3.3. Примеры.
4. Численный анализ. "Дьявольская лестница" 18
5. Динамика лучей в неоднородной движущейся среде 24
6. Динамический хаос лучей 29
6.1. Регулярный волновод с показателем преломления (3.18). 6.2. Волновод с гофрированной стенкой. 6.3. Численный анализ хаотического поведения звукового луча.
7. Волноводы со сложным поперечным сечением 33
7.1. Внутренний нелинейный резонанс лучей. 7.2. Хаотическая неустойчивость лучей. 7.3. Специфический пример волновода.
8. Динамика лучей и спекл-структура волнового поля в многомодовых волноводах 38
8.1. Волноводный канал, однородный вдоль оси z и с регулярной динамикой лучей. 8.2. Случай хаотической неустойчивости. 8.3. Вопрос о различии между спекл-структурами.
9. Заключение 40
Примечания 42
Список литературы 42

© С.С. Абдуллаев, Г.М. Заславский 1991

1. Введение

Геометрическая оптика является наиболее старым объектом применения законов классической механики в кругу явлений, природа которых слишком далека от каких-либо механических проявлений. Современные методы достаточно хорошо описывают те условия, в которых аппарат геометрической оптики оказывается адекватным физической картине. Существует сильный параллелизм между квазиклассическим приближением в квантовой механике и приближением геометрической оптики (или в более общем случае — лучевой динамики) в общей динамике волн. Малость параметра

$$\frac{\hbar}{I} \ll 1 \tag{1.1}$$

в квантовой механике, где I—характерное действие частицы и $\hbar$—постоянная Планка, соответствует условию

$$kl \ll 1, \tag{1.2}$$

где l — характерный размер задачи о распространении волн. В обоих случаях (1.1) и (1.2) происходит слабая дисперсия волнового пакета, и это обстоятельство позволяет применить приближение, в котором вместо динамики волнового пакета рассматривается динамика значительно более простого объекта — частицы или луча[1*].

Значительный прогресс в понимании классической нелинейной динамики привел к пониманию нового явления, называемого динамическим хаосом, или просто хаосом [1 — 4]. Отражение новых идей в задачах лучевой динамики находится пока лишь в начальной стадии, и настоящий обзор является первым[2*], в котором распространение лучей в слабо неоднородных средах в приближении геометрической оптики исследуется методами современной нелинейной теории, позволяющими описать явления различных нелинейных резонансов и хаоса.

Причиной дальнего распространения и сверхдальнего распространения волн является существование в соответствующей среде немонотонной зависимости фазовой скорости волны от поперечных к направлению распространения волны координат (например, от глубины в океане и от высоты в атмосфере). Примерами волноводного распространения волн являются распространение низкочастотных звуковых волн в океане и атмосфере, коротких радиоволн в ионосфере, сейсмических волн в земной коре, оптического излучения в световодах [5 — 12].

Существует много причин, ограничивающих дальность распространения волны в неоднородной среде. Среди них следует отметить регулярные неоднородности среды вдоль оси распространения волны. Примерами таких неоднородностей волноводных сред являются периодические и квазипериодические продольные неоднородности в ионосфере [13, 14], внутренние волны в океане [7]. Реальные масштабы этих неоднородностей l вдоль и поперек оси распространения волны таковы, что можно использовать лучевое приближение (см., например, [5, 15, 16]).

Таким образом, проблема распространения волны в волноводной среде может быть приведена к соответствующей проблеме о динамике лучей. Динамика лучей в неоднородной среде может быть описана в гамильтоновом приближении [11, 16].

Исследования нелинейной динамики лучей в регулярно неоднородных

волноводах приводят к ряду новых интересных эффектов, возникающих в результате взаимодействия лучей с регулярными неоднородностями среды. Среди них отметим следующие.

Первый эффект, который называется нелинейным резонансом лучей [17], заключается в формировании эффективного волноводного канала, в который захватывается определенная группа лучей в окрестности резонансного с периодическими неоднородностями луча (раздел 3). В частности, это приводит к фрактальным свойствам локализации и другим свойствам лучей [18] (раздел 4). Аналогичный эффект также наблюдается в волноводах со сложным двумерным сечением [19].

Описанный эффект представляет собой аналог нелинейного резонанса в классической механике [1 — 4].

Второй эффект представляет собой хаотическую неустойчивость лучей в регулярно неоднородном (неслучайном!) волноводе и представляет собой аналог стохастической неустойчивости в нелинейной механике. Это явление приводит к образованию стохастического слоя лучей вблизи сепаратрисы, из которого происходит эффективная потеря излучения, к случайному распределению времени распространения сигнала вдоль канала, к необратимому искажению волнового фронта поля [20].

Использование методов нелинейной динамики для исследования динамики лучей в неоднородных средах позволяет не только сформулировать многие задачи в значительно более удобной форме, но и зачастую получать неожиданные ответы очень коротким и физически прозрачным путем. Достаточно, например, заметить, что стандартные методы исследования лучевой динамики используют в той или иной форме идею разделения пространственных переменных, что значительно сужает диапазон возможностей теории. Вместе с тем, техника современного нелинейного анализа позволяет формулировать задачи и находить их решения, "забыв" вообще о разделении переменных, и, тем самым, избавиться от одного из наиболее неприятных мест старой теории.

Еще один формальный прием позволяет записать уравнения движения лучей в движущейся среде в форме гамильтоновских уравнений заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле. При этом устанавливается аналогия между скоростью движения среды и вектор-потенциалом эквивалентной гамильтоновской динамики.

Материал, составляющий основу настоящего обзора, включает основные результаты, полученные авторами в течение ряда последних лет в совместной работе. Первый пример стохастической неустойчивости лучей в регулярно неоднородных волноводах был описан в [21]. Нелинейный резонанс лучей и формирование стохастического слоя в регулярном волноводе с периодическими продольными неоднородностями и со сложным поперечным сечением рассматривались в наших работах [17, 19]. Влияние нелинейности колебаний луча на параметрический резонанс лучей в параболическом волноводе изучено в [24]. Эффект формирования стохастического слоя в регулярном волноводе также был рассмотрен в [221 на примере ионосферного волнового канала. Численный анализ стохастической неустойчивости лучей в регулярном горизонтально неоднородном океане проведен в работах [23, 25, 26]. Фрактальные свойства лучей в волноводе с периодической гофрировкой одной из его стенок установлены в [18]. Связь между динамическим хаосом лучей и структурой волнового фронта поля в волноводах исследована в [20]. В обзор также включены некоторые новые результаты, полученные авторами в последнее время.

В заключении обзора обсуждается новый аспект динамики лучей, который

устанавливает аналогию между задачами распространения лучей и формирования изображения и задачами так называемого квантового хаоса [2].

2. Формулировка основных уравнений для лучей

2.1. Гамильтоновы уравнения для лучей. Рассмотрим распространение скалярной монохроматической волны с частотой ν: $u(\mathbf{R}, t) = u(\mathbf{R})\exp(-i\nu t)$ в среде с неоднородным в пространстве распределением фазовой скорости волны $c(\mathbf{R})$ ($\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$, $\mathbf{r} = x, y$). Когда характерный масштаб l изменения скорости волны $c(\mathbf{r}, z)$ в пространстве значительно превышает длину волны излучения: $\lambda/l \ll 1$, то поле волны можно представить в виде

$$u(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\exp(ikS(\mathbf{R})) \tag{2.1}$$

с медленно меняющимися в пространстве амплитудой $A(\mathbf{r}, z)$ и фазовой функцией $S(\mathbf{r}, z)$, удовлетворяющим уравнениям

$$(\nabla S)^2 = n^2(\mathbf{r}, z), \quad n(\mathbf{r}, z) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r}, z)},$$
$$\nabla(A^2\nabla S) = 0, \tag{2.2}$$

где $n(\mathbf{r}, z)$ — показатель преломления среды, $c(\mathbf{r}, z)$ — фазовая скорость волны. В (2.1) и (2.2) величина $k = 2\pi/\lambda$ и c_0 соответственно волновое число и скорость волны в однородной среде.

Первое уравнение в (2.2) называется уравнением эйконала, представляющее собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка и относящееся к уравнениям типа Гамильтона—Якоби [27]. Оно решается методом характеристических уравнений, наиболее удобный вид которых можно записать в представлении Гамильтона. Вводя обобщенный импульс $\mathbf{p} = \nabla S$, запишем уравнение эйконала (2.2) в виде

$$H = H(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0, \tag{2.3}$$

где $H(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ — некоторая функция координат $\mathbf{R}$ и обобщенных импульсов $\mathbf{p}$.

Вид функции H определяется уравнением эйконала и зависит от выбора независимой переменной τ, функциями которой являются характеристические кривые $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\tau)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau)$ в шестимерном пространстве $(\mathbf{R}, \mathbf{p})$. Вспомогательная переменная τ определяет уравнения луча в параметрической форме, которые находятся с помощью канонических уравнений Гамильтона [16, 35]

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}, \quad \frac{dS}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}\partial S}{\partial \mathbf{p}} \tag{2.4}$$

с функцией Гамильтона $H = H(\mathbf{R}, \mathbf{p})$. Независимая переменная τ связана с элементом длины дуги луча $d\sigma = (d\mathbf{R}^2)^{1/2}$ соотношением

$$d\sigma = \left|\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right| d\tau,$$

которое следует из первого уравнения в (2.4).

Обычно проекцию характеристических кривых $\mathbf{R}(\tau)$, $\mathbf{p}(\tau)$ на трехмерное конфигурационное пространство называют лучом.

Рассмотрим некоторые представления функции Гамильтона H. Пусть $H(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(n^2 - \mathbf{p}^2) = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение Гамильтона в этом случае имеет вид

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = n(\mathbf{R})\nabla n(\mathbf{R}). \tag{2.6}$$

В этом представлении длина дуги луча $d\sigma = n d\tau$. При этом касательный вектор $d\mathbf{R}/d\tau$ к лучу направлен по нормали $\mathbf{p}$ к поверхности постоянной фазы $S(\mathbf{R}) = \text{const}$.

Во многих задачах волноводного распространения волн удобным является представление, в котором в качестве независимой переменной выбирается координата, направленная вдоль оси волновода. Пусть координата z направлена вдоль оси волновода. Тогда лучевые координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z)$, $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}_\perp(z)$ определяются уравнениями Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{r}}{dz} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\perp}, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},$$

$$H \equiv -p_\parallel = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\perp, z) = -[n^2(\mathbf{r}, z) - \mathbf{p}_\perp^2]^{1/2}, \quad \mathbf{p}_\perp = (p_x, p_y). \tag{2.7}$$

Нетрудно установить связь между проекциями нормального вектора $\mathbf{p}$ к поверхности постоянной фазы $S = \text{const}$ на поперечную плоскость (x, y) и углами θ и ψ, составляющими соответственно углы между вектором $\mathbf{p}$ и осью z и между его проекцией $\mathbf{p}_\perp$ и осью x:

$$p_x = n(\mathbf{r}, z)\sin\theta\cdot\cos\psi, \quad p_y = n(\mathbf{r}, z)\sin\theta\cdot\sin\psi,$$

$$H = -n(\mathbf{r}, z)\cos\theta. \tag{2.8}$$

При распространении волны в слабо неоднородной среде с характерным масштабом неоднородностей l, значительно превышающим длину волны λ (см. неравенство (1.2)), рассеяние волны происходит на малые углы θ. Тоща функцию Гамильтона (2.8) можно упростить, используя малость угла $\theta \ll 1$ в (2.8). Считая также неоднородную часть показателя преломления $n(\mathbf{r}, z)$ малой, т.е.

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, z) = n^2(\mathbf{r}, z) - 1 \ll 1,$$

нетрудно получить следующее приближенное выражение для H:

$$H = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_\perp^2 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, z). \tag{2.9}$$

Соответствующее приближение для лучей называется *параксиальным*.

2.2. Лучи в неоднородной движущейся среде. Наибольший интерес в акустике природных сред представляет собой исследование распространения звука в неоднородной движущейся среде, примерами которых могут служить атмосфера при наличии неоднородности скорости ветра по высоте и океан, в котором происходит неоднородное течение водных масс. При исследовании распространения звука в этих средах наиболее удобно использовать приближение геометрической акустики. Уравнение эйконала в движущихся неоднородных средах было получено в [29] из уравнений гидроди-

намики. Наиболее удобный гамильтонов формализм решения уравнения эйконала был развит в [31 — 33]. Обзор основных положений и последних результатов лучевой теории распространения звука в неоднородной движущейся среде дан в [28]. Ниже рассмотрим некоторые аспекты лучевых уравнений в движущихся неоднородных средах, используя результаты работы [30], где была введена аналогия уравнений движения луча с уравнениями движения заряженной частицы в электромагнитных полях.

Уравнение эйконала в неоднородной движущейся среде имеет вид [29]

$$(\nabla S)^2 = \frac{[c_0 - (\mathbf{v}\nabla S)]^2}{c^2(\mathbf{R})}, \tag{2.10}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R})$ — поле скоростей движения среды.

Введем обобщенный импульс $\mathbf{p} = \nabla S$. Функция Гамильтона, которая при $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ переходит в (2.5), имеет вид

$$H = H(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2}n^2(\mathbf{R})(1 - \mathbf{PA})^2 = 0, \tag{2.11}$$

где $n(\mathbf{R}) = c_0/c(\mathbf{R})$, $\mathbf{A} = \mathbf{v}(\mathbf{R})/c_0$ — вектор нормированной скорости движения среды. Она определяет уравнения лучей:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}.$$

Интересную и простую форму приобретают уравнения для лучей в случае слабо неоднородной и медленно движущейся среды, какими являются атмосфера и океан, т.е. при $\bar{\varepsilon} \ll 1$ и $|\mathbf{v}|/c_0 \ll 1$. В этом случае в (2.11) можно пренебречь членами более высокого порядка малости типа $\bar{\varepsilon}^2$, v^2/c_0^2, $\bar{\varepsilon}v/c_0$. В результате получим

$$H = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + \mathbf{PA} - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(\mathbf{R}) = 0. \tag{2.12}$$

Лучевые уравнения принимают вид

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \mathbf{P} + \mathbf{A}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = -\frac{1}{2}\nabla(\bar{\varepsilon}(\mathbf{R}) + \mathbf{PA}).$$

Вводя новый обобщенный импульс $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{A}$, уравнение для лучей может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c_0}[\mathbf{p}, \mathcal{H}], \tag{2.13}$$

где

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\nabla\bar{\varepsilon}(\mathbf{R}), \quad \vec{\mathcal{H}} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{R}).$$

Величина $\mathcal{H}$ представляет собой вихревой вектор движущейся среды, взятый с обратным знаком.

Заметим, что в движущейся среде, в отличие от случая неподвижной среды, касательный вектор к лучу $\mathbf{p} = d\mathbf{r}/d\tau$ не совпадает с нормальным вектором $\mathbf{p} = \nabla S$ к поверхности постоянной фазы волны $S(\mathbf{R}) = \mathrm{const}$, т.е. $\mathbf{P} \neq \mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{A}$.

Рассмотрим параксиальное приближение. Пусть лучи распространяются

под малыми углами к преимущественному направлению распространения волны, совпадающему с осью z. Тогда в слабо неоднородной и медленно движущейся среде лучи определяются гамильтонианом [30]

$$H = H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, z) = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_\perp^2 + \mathbf{P}_\perp \mathbf{A}_\perp - \frac{1}{2}\left(\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, z) - \frac{2v_z}{c_0}(\mathbf{r}, z)\right), \tag{2.14}$$

где $\mathbf{P}_\perp = \partial S/\partial \mathbf{r}$, v_z — продольная компонента вектора скорости движения среды, $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{v}_\perp/c_0$ есть поперечный вектор нормированной скорости движения среды. Выражение (2.15) определяет уравнения луча в движущейся среде с каноническими переменными $(\mathbf{r}, \mathbf{P}_\perp)$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dz} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_\perp}, \quad \frac{d\mathbf{P}_\perp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.15}$$

Приложение приведенных уравнений к конкретной модельной задаче распространения звука в неоднородной движущейся среде будет рассмотрено в разделе 6.

2.3. Оптико-механическая аналогия. Впервые Гамильтон указал на аналогию между классической механикой и оптикой [34]. Оказалось, что "тело" ведет себя в потенциальном поле аналогично свету в среде и существует следующая связь между потенциальной энергией U и показателем преломления n:

$$n = c[2m(E - U)]^{1/2}/E, \tag{2.16}$$

где m и E — масса и энергия частицы, c — скорость света в вакууме. Действительно, подставляя (2.16) в (2.3) и определяя импульс частицы $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}E/c$, получим классическое выражение для частицы в потенциальном поле

$$E = \mathbf{p}_m^2/2m + U(\mathbf{r}). \tag{2.17}$$

Кроме отмеченной прямой аналогии существует также формальная аналогия между уравнениями классической механики и геометрической оптики (см., например, [11]). Как видно из (2.9), гамильтониан параксиального приближения совпадает по виду с классическим выражением для энергии частицы.

При этом импульсу соответствует величина $\mathbf{p}_\perp$, а потенциальной энергии — неоднородная часть показателя преломления $-\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$, деленная на 2, пространственным координатам соответствуют поперечные координаты луча $\mathbf{r} = (x, y)$. Роль времени играет координата z, вдоль которой происходит преимущественное распространение волны.

Интересная аналогия существует также между динамикой лучей в неоднородной движущейся среде, описываемых уравнениями (2.3) — (2.15), и динамикой заряженной частицы в неоднородных электрическом и магнитном полях. Как нетрудно заметить из (2.13) и (2.14), скалярному потенциалу электромагнитного поля соответствует неоднородная часть показателя преломления $\bar{\varepsilon}(\mathbf{R})$, а векторному потенциалу — поле скорости движения среды $\mathbf{v}(\mathbf{R})$, взятой с обратным знаком. Соответственно напряженности электрического поля соответствует градиент от $\bar{\varepsilon}(\mathbf{R})$ и напряженности магнитного поля — вихревой вектор среды $(-\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{R}))$.

Описанная аналогия позволяет использовать методы динамики частиц для задач лучевой теории распространения волн в неоднородных средах.

2.4. Лучевые уравнения в неоднородной среде. Показатель преломления волноводной среды при его возмущении регулярными неоднородностями представим в виде

$$n^2(\mathbf{r}, z) = n_0^2(\mathbf{r}) + \varepsilon n_1(\mathbf{r}, z), \tag{2.18}$$

где $n_0(\mathbf{r})$ соответствует случаю невозмущенной волноводной среды, однородной вдоль оси z, а $\varepsilon n_1(\mathbf{r}, z)$ описывает возмущение среды вдоль оси z. Величина $\varepsilon \ll 1$ представляет собой безразмерный малый параметр возмущения. Учитывая его малость, функцию Гамильтона (2.7) можно представить в виде

$$H = H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\perp) + \varepsilon V(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\perp, z), \tag{2.19}$$

где

$$H_0 = -[n_0^2(\mathbf{r}) - \mathbf{p}_\perp^2]^{1/2}, \quad \varepsilon V(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\perp, z) = \frac{\varepsilon n_1(\mathbf{r}, z)}{2H_0}. \tag{2.20}$$

Лучи в невозмущенном волноводе определяются гамильтонианом H_0. Таким образом, динамика лучей в неоднородной волноводной среде эквивалентна соответствующей динамике действия нестационарного возмущения на частицу или динамике взаимодействия различных степеней свободы частицы, совершающей финитное движение, описываемое гамильтонианом H_0.

В случае плоского волновода, когда n не зависит, например, от y, уравнения (2.7) принимают вид

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p = p_x, \tag{2.21}$$

$$H = H_0(x, p) + \varepsilon V(x, p, z), \quad H_0 = -(n_0^2(x) - p^2)^{1/2}.$$

2.5. Переменные действие—угол. Траектории лучей, захваченных волноводным каналом, являются ограниченными вдоль поперечных координат (x, y) и периодическими вдоль продольной координаты z. Поэтому для их описания наиболее удобно использовать переменные действие—угол (I, ϑ) [35]. В случае плоского волновода они вводятся следующим образом:

$$I = (2\pi)^{-1}\oint p\,dx, \quad \vartheta = \frac{\partial}{\partial I}\int^x p\,dx, \quad p = (n_0^2(x) - H^2)^{1/2}. \tag{2.22}$$

В этих переменных уравнения движения лучей в возмущенном волноводе принимают вид

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{\varepsilon \partial V}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \omega(I) + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial I},$$

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, z), \tag{2.23}$$

где

$$\omega(I) = \frac{dH_0(I)}{dI}$$

— нелинейная пространственная частота колебаний луча вдоль оси z в невозмущенном волноводе. Величина

$$L(I) = \frac{2\pi}{\omega(I)}$$

определяет пространственный цикл луча.

Координаты луча $x(z)$, $p(z)$ в невозмущенном волноводе являются периодическими функциями угла ϑ. Поэтому имеет место разложение в ряд Фурье:

$$x(\vartheta) = \sum_m x_m(I)\exp(im\vartheta), \quad p(\vartheta) = \sum_m p_m(I)\exp(im\vartheta). \tag{2.24}$$

Рассмотрим теперь случай волновода с двумерным поперечным сечением с показателем преломления $n(\mathbf{r}) = n(x, y)$. Пусть в невозмущенном волноводе, кроме интеграла движения $E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, существует не зависимый от него дополнительный интеграл движения $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Тогда существует инвариантный двумерный тор, на поверхность которого наматываются траектории луча, совершающие ограниченные колебания, т.е. волноводные лучи. Переменные действие—угол $(\mathbf{I}, \vartheta) \equiv (I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ в этом случае определяются следующим образом [36]:

$$I_k = (2\pi)^{-1} \oint_{C_k} \mathbf{p}d\mathbf{r}, \quad \vartheta_k = \frac{\partial}{\partial I_k} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} p(\mathbf{I}, \mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (k = 1,2), \tag{2.25}$$

где C_k — базисные контуры двумерного тора.

В этих переменных невозмущенный гамильтониан $H = H(I_1, I_2)$. Координаты луча $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ описываются периодическими функции переменных ϑ_k, с периодом 2π и с частотами колебаний вдоль оси z

$$\omega_k(I_1, I_2) = \frac{\partial H(I_1, I_2)}{\partial I_k}.$$

При отсутствии второго интеграла $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, который наблюдается в случае поперечного сечения волновода с профилем общего положения, инвариантные торы отсутствуют и тогда контуры C_k не существуют. Этот случай соответствует неодномерной динамической системе с разрушенными интегралами движения, в которой развивается динамический хаос [1 — 4], и будет рассмотрен в разделе 7.

Переменные действие—угол, по-видимому, впервые успешно были использованы в [37] в задачах волноводного распространения волн для исследования статистики лучей в статистически нерегулярных световодах.

Гамильтоновая формулировка лучевых уравнений в переменных действие—угол оказывается также удобной для исследования распространения лучей в плавно регулярных волноводах с помощью теории возмущений [39]. Этот метод является значительно более простым и общим по сравнению с асимптотическими методами, используемыми для исследования плавно регулярных волноводов (см. литературу в [39]).

2.6. Спектр волновых чисел. Отметим одну из важных особенностей переменных действие—угол (I_k, ϑ_k) в задачах распространения волн в волноводе. Рассмотрим интегрируемый случай, когда существуют два интеграла движения H и W. При этом переменные действия $(I_{1,2})$ также яв-

ляются интегралами движения. Тогда спектр волновых чисел k_m волнового поля определяется краевой задачей

$$[\Delta + k^2 n^2(r)]u_m(\mathbf{r}) = k_m^2 u_m(\mathbf{r}), \quad u_m(\mathbf{r}) \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \to \infty. \tag{2.26}$$

В коротковолновом приближении значения k_m определяются зависимостью соответствующего гамильтониана H (2.7) от действий I_1, I_2 (см., например, [37, 38]):

$$k_m = -kH(I_1, I_2), \quad k = \frac{\nu}{c}, \tag{2.27}$$

где ν частота волны, действия I_1, I_2 пропорциональны номерам мод $m = (m_1, m_2)$:

$$kI_i = m_i \quad (i = 1,2). \tag{2.28}$$

Соотношение (2.27) позволяет довольно легко определить спектр волновых чисел поля волновода k_m и групповую скорость волны v_m с помощью соотношения

$$\frac{c_0}{v_m(I_1, I_2)} = \frac{dk_m}{d\nu} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 - H(I_1, I_2), \tag{2.29}$$

не прибегая к решению краевой задачи (2.26), а используя лишь классические лучевые уравнения.

3. Динамика лучей в волноводе с периодическими продольными неоднородностями

Рассмотрим для простоты случай плоского волноводного канала. При периодическом возмущении среды вдоль оси волноводного канала z гамильтониан возмущения $V(I, \vartheta, z)$ в (2.23) можно представить в виде разложения в двойной ряд Фурье:

$$\varepsilon V(I, \vartheta, z) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{m,s} V_{ms}(I)\exp(im\vartheta + is\Omega z) + \text{к.с.}, \tag{3.1}$$

где Ω — пространственная частота возмущения среды вдоль оси z ($2\pi/\Omega$ есть пространственный период возмущения), к.с. означает члены, комплексно сопряженные к предыдущим.

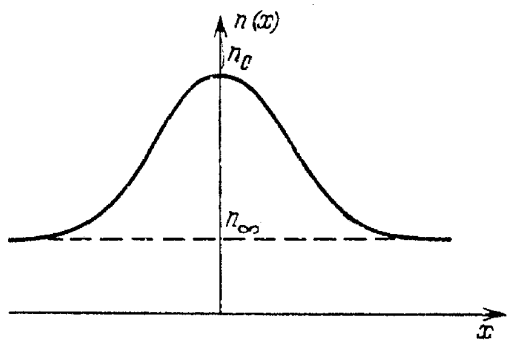

Рис. 1. Профиль показателя преломления $n(x)$ плоско-слоистого волновода

3.1. Пространственный нелинейный резонанс лучей. Реально встречающиеся в природе и на практике зависимости показателя преломления $n(x)$ от поперечной координаты x таковы (рис. 1), что пространственные колебания луча вдоль оси z являются в общем случае нелинейными и их разложения в ряд Фурье содержат большое число гармоник.

При распространении лучей в среде, возмущенной периодическими неоднородностями (3.1), наиболее сильное влияние возмущения лучей происходит при выполнении условия резонанса

$$m\omega(I) + s\Omega = 0, \tag{3.2}$$

где m, s — целые числа.

Пусть I_0 есть резонансное значение действия I, удовлетворяющее условию (3.2) при определенных числах (m, s). Рассмотрим траекторию луча в окрестности одного единственного резонанса. Будем предполагать, что выполнено условие умеренной нелинейности

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \varepsilon^{-1}, \quad \alpha = \frac{I}{\omega}\left|\frac{d\omega}{dI}\right|, \tag{3.3}$$

где α — безразмерный параметр нелинейности. Тогда в уравнениях (2.23) с возмущением (3.1) можно пренебречь нерезонансными членами. Далее, вводя новые канонические переменные

$$\Delta I = I - I_0, \quad \Psi = m\vartheta + s\Omega z,$$

уравнение для лучей в малой окрестности резонансного действия I_0 можно записать в следующей гамильтоновой форме:

$$\frac{d\Delta I}{dz} = -\frac{\partial H_u}{\partial \Psi}, \quad \frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial H_u}{\partial \Delta I}, \tag{3.4}$$

с универсальным гамильтонианом

$$H_u = \frac{1}{2} m\omega'(I_0)(\Delta I)^2 + \varepsilon m|V_{ms}|\cos\Psi, \tag{3.5}$$

$$\omega'(I_0) = \frac{d\omega(I_0)}{dI}.$$

Из системы уравнений (3.4) можно получить уравнение для фазовых колебаний:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} - \bar{\Omega}^2 \sin\Psi = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\bar{\Omega} = m|\varepsilon V_{ms}\omega'(I_0)|^{1/2} \tag{3.7}$$

есть частота модуляционных колебаний. Уравнение (3.6) эквивалентно уравнению колебаний маятника с частотой малых колебаний $\bar{\Omega}$.

Согласно (3.5) лучи, для которых значение H_u удовлетворяет условию

$$H_u < \varepsilon m|V_{ms}|,$$

совершают ограниченные по Ψ фазовые колебания, т.е. происходит синхронизация пространственных колебаний луча вдоль оси z с периодической неоднородностью среды. Другими словами, происходит захват лучей в нелинейный резонанс. Ширина области захваченных резонансом лучей по действию I и по частоте ω определяется, согласно (3.5), выражениями

$$\Delta I = 2\max|I - I_0| = 4\left|\frac{\varepsilon V_{ms}}{\omega'(I_0)}\right|^{1/2},$$

$$\Delta\omega = \Delta I \left| \frac{d\omega}{dI} \right| = 4 \left| \varepsilon V_{ms} \omega'(I_0) \right|^{1/2}. \tag{3.8}$$

Описанное явление можно назвать пространственным нелинейным резонансом лучей. Он фактически представляет собой аналог нелинейного резонанса в классической механике [1 — 4], который развивается в данном случае не во времени, а в пространстве. Его исследование было описано в [17].

Физический смысл нелинейного резонанса лучей заключается в следующем. В отсутствие возмущения траектория луча представляет собой осциллирующую линию вдоль оси z с пространственным периодом $L = 2\pi/\omega$. Под действием периодического возмущения вдоль оси z группа лучей в окрестности невозмущенного луча, соответствующего резонансному действию I_0, захватывается в резонанс, в котором лучи совершают дополнительные колебания с частотой модуляции $\bar{\Omega} = m\Delta\omega$.

Другими словами, вдоль оси невозмущенного луча с действием I_0 образуется дополнительный эффективный волноводный канал с эффективной шириной ΔI. Число дополнительных волноводных каналов определяется числом возможных неперекрывающихся резонансов типа (3.2).

Следует отметить, что рассмотренное приближение изолированного нелинейного резонанса справедливо лишь в случае, когда ширина резонанса $\Delta\omega$ значительно меньше расстояния $\delta\omega$ между соседними резонансами, т.е. при

$$K = \left(\frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \right)^2 \ll 1. \tag{3.9}$$

3.2. Скорость распространения сигнала вдоль резонансных лучей. Исследуем влияние пространственного нелинейного резонанса лучей в волноводе на важные характеристики излучения, распространяющегося в нем, такие, как время прохождения и скорость распространения сигнала вдоль лучей. Пусть $t(z)$ есть время прохождения сигнала вдоль луча от плоскости $z = 0$ до плоскости $z = \text{const}$ и $v(z)$ есть локальная скорость распространения сигнала вдоль луча в направлении оси волновода, определяемые выражениями

$$t(z) = \int_\gamma \frac{d\sigma}{c(\mathbf{r}, z)}, \quad v(z) = \frac{c_0}{dt(z)/dz}, \tag{3.10}$$

где интегрирование проводится вдоль дуги луча γ, $d\sigma = (dR^2)^{1/2}$.

Используя представление Гамильтона (2.7) с независимой переменной z, выражение для времени прохождения сигнала (3.10) можно записать в виде [11]

$$t(z) = c_0^{-1} \int_0^z \left(\mathbf{p}_\perp \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\perp} - H \right) dz. \tag{3.11}$$

Подынтегральное выражение в (3.11) является инвариантом по отношению к выбору канонических переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\perp)$. Выбирая в качестве последних переменные действие—угол (I, ϑ), получим

$$t(z) = c_0^{-1} \int_0^z \left(\mathbf{I}(z') \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}} - H \right) dz'. \tag{3.12}$$

В частном невозмущенном случае, когда волновод однороден вдоль оси

z и система обладает интегралами движения $\mathrm{I} = (I_1, I_2)$, имеем

$$t_0(\mathrm{I}, z) = \left(\mathrm{I}\omega(\mathrm{I}) - H_0(\mathrm{I})\right)\frac{z}{c_0},$$

$$\frac{c_0}{v_0(\mathrm{I})} = \mathrm{I}\omega(\mathrm{I}) - H_0(\mathrm{I}). \tag{3.13}$$

Последнее выражение для скорости распространения сигнала совпадает с соответствующим выражением (2.29), полученным другим способом.

Исследуем поведение длины оптического пути вдоль луча $S(I, z) = c_0 t(z)$ и локальной скорости сигнала $v(z)$ в окрестности одного изолированного резонанса. Пусть I_0 есть значение действия I, при котором выполняется условие нелинейного резонанса (3.2) при определенных числах (m, s). Тогда, используя решение уравнения Гамильтона (3.4), (3.5), в окрестности изолированного нелинейного резонанса нетрудно получить следующие выражения для $S(z)$ и $v(z)$:

$$S(I, z) = S_0(I_0, z) - \frac{\bar{H}}{m^2\omega'(I_0)}z + \frac{2I_0}{m}\arccos \mathrm{dn}(\bar{\Omega}z, \rho) +$$

$$+ \left(1 + \frac{I_0\omega''(I_0)}{2\omega'(I_0)}\right)\Delta I_{ms}\frac{\rho}{m}\int_0^{\bar{\Omega}z} \mathrm{cn}^2(u, \rho)\mathrm{d}u, \tag{3.14}$$

$$\frac{c_0}{v(I, z)} = \frac{c_0}{v_0(I_0)} + \frac{I_0\rho\bar{\Omega}}{m}\mathrm{cn}(\bar{\Omega}z, \rho) - \frac{\bar{H}}{m^2\omega'(I_0)} +$$

$$+ \left(1 + \frac{I_0\omega''(I_0)}{2\omega'(I_0)}\right)\Delta I_{ms}\frac{\bar{\Omega}\rho^2}{m}\mathrm{cn}^2(\bar{\Omega}z, \rho), \tag{3.15}$$

где $\mathrm{cn}(u, \rho)$ и $\mathrm{dn}(u, \rho)$ — эллиптические функции Якоби с модулем $\rho = [(\bar{H} + \bar{\Omega}^2)/2\bar{\Omega}^2]^{1/2}$; $\bar{H} = H_u$ имеет порядок малого параметра возмущения $\varepsilon \ll 1$, ΔI_{ms} — ширина нелинейного резонанса.

Из (3.14) и (3.15) видно, что время прохождения сигнала $t(z)$ и локальная скорость сигнала $v(z)$ промодулированы вдоль оси распространения волны z с пространственной частотой порядка $\bar{\Omega}$. Разности $S(I, z) - S_0(I_0, z)$ и $c/v(I, z) - c/v_0(I_0)$ меняются мало при изменении исходных координат луча. Согласно (3.15) средняя скорость распространения сигнала вдоль луча

$$\bar{v} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{t(z)}, \tag{3.16}$$

с точностью до членов порядка малого параметра возмущения $\varepsilon \ll 1$, остается равной ее невозмущенному значению $v_0(I_0)$ при резонансном значении действия I_0. В то же время соответствующая скорость распространения сигнала по невозмущенным лучам $v_0(I)$ меняется в окрестности резонансного действия I_0 с шириной, равной ширине резонанса ΔI_{ms}, на значительно бо́льшую ве-

личину. Действительно, согласно (3.3), (3.8), (3.13), имеем

$$\Delta \frac{c_0}{v_0(I)} = \left(\frac{d}{dI}\frac{c_0}{v_0(I)}\right)\Delta I_{ms} = I\frac{d\omega}{dI}\Delta I_{ms} \backsim (\varepsilon\alpha)^{1/2} \gg \varepsilon \backsim \Delta\bar{v}, \tag{3.17}$$

где $\Delta\bar{v}$ — соответствующее изменение средней скорости сигнала (3.16) резонансных лучей в интервале с шириной ΔI_{ms}.

Этот результат означает, что при распространении сигнала вдоль захваченных в резонанс лучей происходит значительно более слабое уширение импульса, чем при распространении вдоль соответствующих невозмущенных лучей. Этот эффект может иметь важное практическое значение в проблемах дальнего распространения волн для подавления уширения сигнала, вызванного межмодовой дисперсией.

3.3. Примеры. Приведем несколько примеров волноводных каналов, возмущенных периодической неоднородностью вдоль оси z.

3.3.1. Сначала рассмотрим *волновод с периодическим отклонением его оси от прямой*, направленной вдоль z. Пусть показатель преломления описывается выражением [17]:

$$n(x, z) = n_0(x - f(z)),$$

$$n_0^2(x) = n_\infty^2 + \frac{n_0^2\Delta}{\mathrm{ch}^2(x/a)}, \tag{3.18}$$

где $f(z) = f_0\cos\Omega z$ описывает периодическое отклонение оси волновода от оси z. При малых отклонениях ($\varepsilon = f_0/a \ll 1$) выражение для возмущения V, согласно (2.18) и (2.20), имеет вид

$$\varepsilon V(x, p, z) = \frac{\varepsilon n_1(x, z)}{2H_0} = -f(z)\frac{dp}{dz}. \tag{3.19}$$

В отсутствие возмущения траектория луча является периодической с пространственным шагом $L = 2\pi/\omega(I)$, где

$$\omega(I) = \frac{I_s - I}{a^2|H_0(I)|}, \tag{3.20}$$

$$H_0(I) = -\left[n_\infty^2 + n_0^2\Delta\left(1 - \frac{I}{I_s}\right)^2\right]^{1/2}, \quad I_s = n_0\Delta a.$$

Величины $I = I_s$ и $H_s = H_0(I_s) = -n_\infty$ соответствуют сепаратрисе.

Условие нелинейного резонанса в рассматриваемом случае принимает вид

$$(2m + 1)\omega(I) = \Omega, \tag{3.21}$$

так как разложение обобщенного импульса p в рад Фурье содержит лишь гармоники с нечетными номерами.

Ширина нелинейного резонанса вблизи сепаратрисы ($I \to I_s$) по действию I и частоте ω определяется выражениями

$$\frac{\Delta I}{I_s} = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon\omega n_\infty}{\omega_0 n_0}\right)^{1/2}, \tag{3.22}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon\omega n_0}{\omega_0 n_\infty}\right)^{1/2}, \quad \omega_0 = \omega(0).$$

3.3.2. В качестве второго примера рассмотрим *волновод с однородным заполнением и идеально отражающими стенками,* одна из которых периодически гофрирована (рис. 2). Пусть периодическое отклонение гофрированной стенки от ее невозмущенного состояния описывается периодической функцией $f(z) = f(z + l)$ с пространственным периодом l.

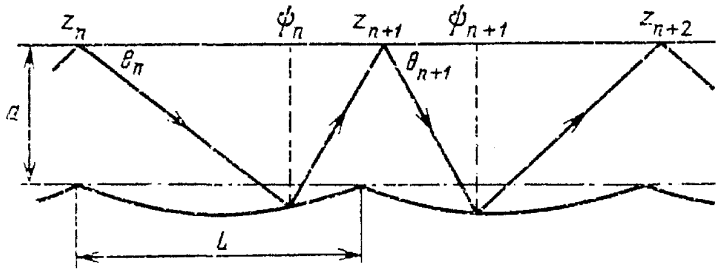

Рис. 2. Лучи в волноводе с гофрированной стенкой

Лучи в невозмущенном волноводе представляют собой прямые линии, периодически отражающиеся от стенок волновода с пространственным периодом луча:

$$L = \frac{2\pi}{\omega(I)} = \frac{2\pi I_0^2 |H_0(I)|}{I} = 2a \operatorname{ctg}\theta, \tag{3.23}$$

где

$$I_0 = \frac{a}{\pi}, \quad H_0(I) = -\left[n_0^2 - \frac{I^2}{I_0^2}\right]^{1/2},$$

θ — угол между осью z и лучом, a — ширина волновода.

Пусть периодическое возмущение описывается функцией

$$f(z) = 4b\xi(1 - \xi), \tag{3.24}$$

где b — максимальное отклонение гофрированной стенки от ее невозмущенного уровня, $\xi = \{z/l\}$ — дробная часть нормированной продольной координаты z/l.

Условие нелинейного резонанса (3.2) в рассматриваемом случае определяет углы $\theta^{(m,s)}$, соответствующие резонансным лучам:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2a}{l}\frac{m}{2s+1} \tag{3.25}$$

$$(m = 1,2,3, \ldots; \quad s = 0,1,2,3, \ldots).$$

Ширина изолированного нелинейного резонанса с номерами (m, s) по углу θ определяется выражением

$$\Delta\theta = \frac{8}{\pi m}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\sin\theta. \tag{3.26}$$

Лучи, распространяющиеся в окрестности резонанса угла $\theta^{(m,s)}$ с шириной (3.26), захватываются в эффективный волноводный канал. Наибольшую ширину резонанса имеет основной резонанс ($m = 1$, $s = 0$).

3.3.3. *Раскачка лучей в параболическом волноводе.* Рассмотрим, наконец, пример волноводного канала с квадратичным профилем и с периодически меняющейся шириной вдоль его оси, на примере которого изучался механизм вывода энергии излучения из ионосферного волноводного канала раскачкой луча периодическими неоднородностями среды [47]. Учет нелинейности колебаний луча вдоль оси канала приводит к ограничению амплитуды раскачки луча [24]. Здесь мы рассмотрим эту задачу несколько более наглядным и простым методом, используя фазовые портреты лучей.

Пусть показатель преломления волновода описывается выражением

$$n^2(x, z) = n_0^2 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2(z)}, \tag{3.27}$$

где $a(z) = a_0 + \varepsilon a_0 \sin(\Omega z)$ — периодически меняющаяся ширина волновода с пространственной частотой Ω и малой относительной амплитудой $\varepsilon \ll 1$ в окрестности невозмущенной ширины a_0.

Вводя переменные действие—угол (I, ϑ) с помощью невозмущенного гамильтониана H_0 (при $\varepsilon = 0$), лучевые уравнения (2.23) запишем в виде

$$\frac{dI}{dz} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = 2\varepsilon I\omega(I)\sin\Omega z\cdot\sin 2\vartheta, \tag{3.28}$$

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \omega(I) - \varepsilon\frac{dI\omega(I)}{dI}\sin\Omega z(1 - \cos 2\vartheta),$$

где

$$\omega(I) = \frac{dH_0(I)}{dI} = \left(n_0^2 - \frac{2I}{a_0}\right)^{-1/2} a_0^{-1}, \tag{3.29}$$

$$H_0(I) = -\left(n_0^2 - \frac{2I}{a_0}\right)^{1/2}$$

— невозмущенные частота колебаний луча вдоль оси z и гамильтониан.

Наиболее сильное влияние периодического возмущения будут испытывать лучи, частоты которых лежат в окрестности траекторного параметрического резонанса

$$2\omega(I) = \Omega. \tag{3.30}$$

Поэтому в уравнениях (3.28) можно пренебречь сильно осциллирующими членами. Тогда уравнение (3.28) при учете лишь резонансных членов можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{\partial\bar{H}}{\partial\psi}, \quad \frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial I}, \tag{3.31}$$

где

$$\bar{H}(I, \psi) = 2H_0(I) - I\Omega - \varepsilon I\omega(I)\sin\psi, \quad \psi = 2\vartheta - \Omega z.$$

Заметим, что $\bar{H}(I, \psi)$ является интегралом движения. Исследуем движение луча на фазовой плоскости (I, ψ). Введем безразмерные переменные $\xi = 2I/a_0$, $\varkappa = a_0\Omega/2$, а также положим $n_0 = 1$. Пусть I_0 — значение действия I, удовлетворяющее условию (3.30).

На рис. 3 приведены уровни постоянных значений гамильтониана $\bar{H}(I, \psi) = \text{const}$ на фазовой плоскости (ξ, ψ), полученные численным анализом при значении возмущения $\varepsilon = 0{,}01$ и для трех значений безразмерной величины $\varkappa = 1{,}05$; 1,4 и 3,0, которым соответствуют резонансные значения безразмерного действия $\xi_0 = 1 - \varkappa^{-2} = 0{,}093$; 0,49 и 0,889. Как видно из рисунка, в малой окрестности резонансного действия $\xi_0 = 2I_0/a_0$ динамика луча существенно видоизменяется по сравнению с невозмущенным случаем. При этом часть лучей начинает совершать ограниченные фазовые колебания по ψ (кривые *1* и *2*), т.е. захватываются в резонанс. Не захваченные резонансом лучи описываются кривыми типа *4*, которые могут быть получены легкой дефор-

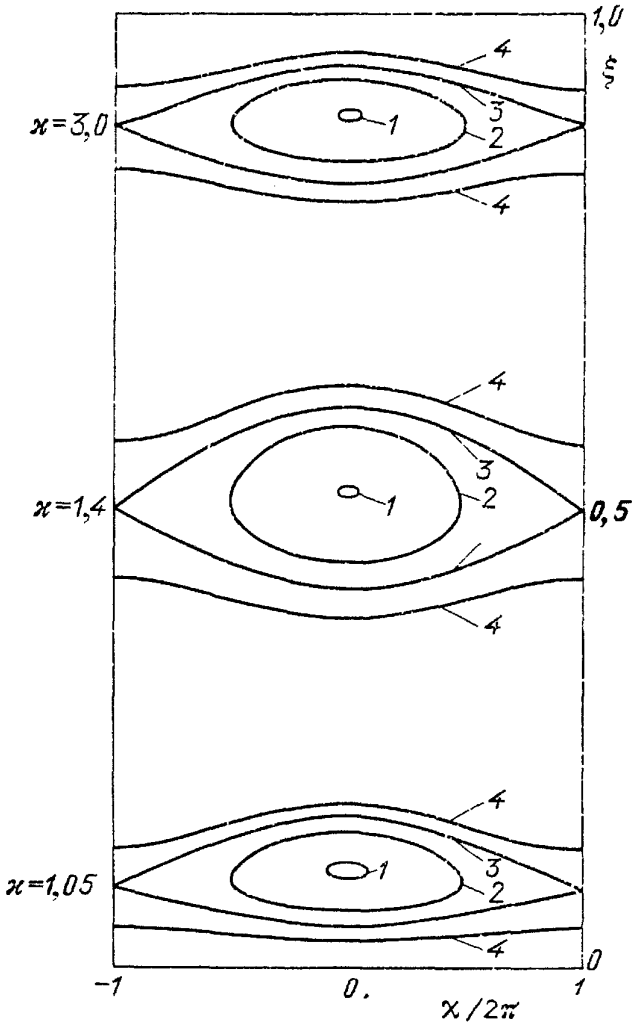

Рис. 3. Фазовый портрет лучей, описывающий параметрический резонанс лучей в параболическом волноводе с периодически меняющейся шириной. Кривые *1*, *2* — захваченные резонансом лучи, *3* — сепаратриса, *4* — незахваченные лучи

мацией соответствующих невозмущенных прямых $\xi = \text{const}$. Отмеченные кривые разделяются сепаратрисой *3*.

Таким образом, под действием периодического возмущения амплитуда колебаний луча, захваченного в параметрический резонанс (3.30), совершает модуляционные колебания в окрестности резонансной амплитуды

$d_0 = (2I_0a_0)^{1/2}$. Приведем оценки для ширины параметрического резонанса. При малых значениях резонансного действия $\xi \ll 1$ ширина параметрического резонанса равна

$$\Delta\xi = 2[8(\varkappa - 1)\varepsilon + \varepsilon^2]^{1/2}. \tag{3.32}$$

При резонансных значениях ξ_0, близких к 1, ширина резонанса определяется выражением

$$\Delta\xi = 2[2\varepsilon(1 - \varkappa^{-2})]^{1/2}/\varkappa. \tag{3.33}$$

Нетрудно убедиться, что эта оценка совпадает с соответствующей величиной (3.8) в приближении нелинейного резонанса.

Полученные результаты показывают, что учет нелинейности колебаний луча приводит к ограничению амплитуды раскачки луча и препятствует выводу энергии излучения из волноводного канала под действием периодических неоднородностей вдоль его оси.

4. Численный анализ. "Дьявольская лестница"

4.1. Изучим пример распространения волны в волноводе с гофрированной стенкой, рассмотренный в разделе 3, используя метод построения дискретного отображения.

Пусть источник излучения расположен на верхней стенке волновода с продольной координатой $z = 0$. Обозначим через z_n продольную координату луча в точке n-го отражения луча от верхней невозмущенной стенки волновода, через θ_n обозначим угол между лучом и осью z после n-го отражения. Связь между величинами (z_n, θ_n) и (z_{n+1}, θ_{n+1}) после одного отражения от гофрированной стенки непосредственно определяется из геометрических соображений. Она задается следующим точным отображением:

$$\begin{gathered}\theta_{n+1} = \theta_n - 2\,\mathrm{arctg}\, f'(\psi_n),\\ \psi_n = z_n + (a + f(\psi_n))\mathrm{ctg}\,\theta_n,\\ z_{n+1} = \psi_n + (a + f(\psi_n))\mathrm{ctg}\,\theta_{n+1}, \quad f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z},\end{gathered} \tag{4.1}$$

где продольная координата ψ_n точки, в которой луч отражается от нижней периодически гофрированной стенки на своем пути после n-го отражения от верхней прямой стенки.

Отображение (4.1) соответствует случаю, когда луч отражается от возмущенной стенки не более одного раза на одном периоде l. Однако при распространении луча под малыми углами θ к оси z возможно отражение луча на одном периоде более чем один раз. Описание этого случая можно найти в [18].

Непосредственно можно показать, что отображение (E_n, z_n) (E_{n+1}, z_{n+1}), где $E_{n+1} = \cos\theta_{n+1}$, сохраняет площадь, т.е. якобиан

$$\left|\frac{\partial(E_{n+1}, z_{n+1})}{\partial(E_n, z_n)}\right| = 1.$$

Важно отметить, что отображение (4.1) при малых значениях угла и возмущения переходит в точное отображение Улама в задаче об ускорении Ферми (см., например, [2, 3]).

Результаты численного анализа отображения (4.1) даны на рис. 4. На рисунке приведена зависимость нормированной пространственной частоты колебания луча вдоль оси z

$$\varkappa = \lim_{N\to\infty} \frac{Nl}{z_N} \tag{4.2}$$

от исходного угла выхода из источника θ_0, вычисленная с шагом $\Delta\theta_0 = 0{,}01$, а на вставке — десятикратно увеличенное отображение области, обведенной на рис. 4 прямоугольником, и с шагом вычисления $\Delta\theta_0 = 10^{-3}$. Параметры волновода выбраны равными: $a/l = 1/3$, $b/l = 10^{-2}$. Заметим, что пространственная частота колебаний луча $\varkappa$ эквивалентна так называемому углу вращения для динамической системы.

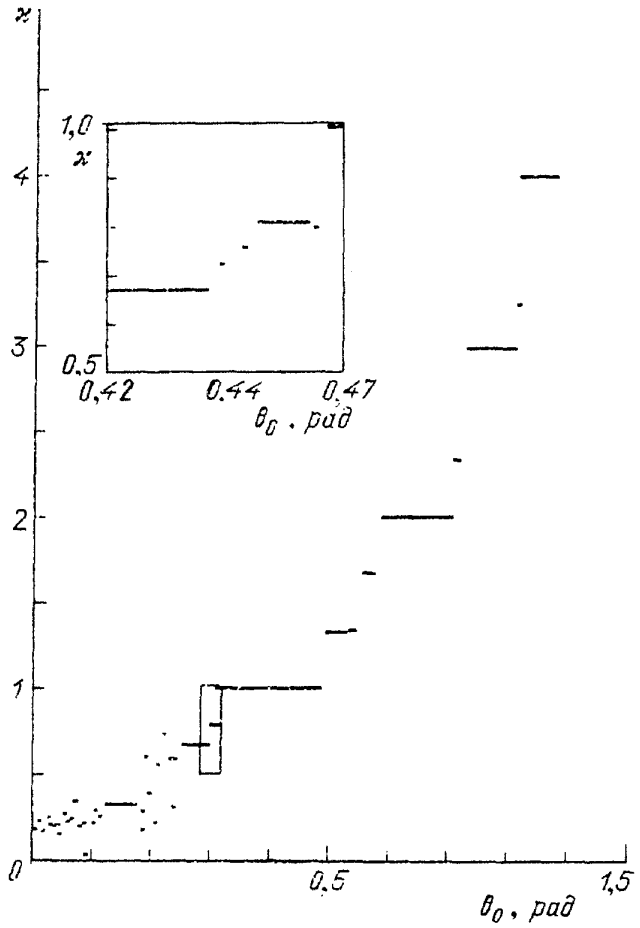

Рис. 4. Фрактальная зависимость нормированной пространственной частоты $\varkappa$ от угла выхода луча из источника θ_0, вычисленная с шагом $\Delta\theta_0 = 0{,}01$. На вставке — десятикратно увеличенная картина области, обведенной прямоугольником, и вычисленная с шагом $\Delta\theta_0 = 10^{-3}$. Параметры волновода: $a/l = 1/3$, $b/a = 3\cdot10^{-3}$

В невозмущенном волноводе зависимость $\varkappa$ от θ_0 представляется плавной функцией

$$\varkappa = \frac{l}{2a}\,\mathrm{tg}\,\theta_0,$$

которая следует из формул (3.23) и (4.2). Под действием периодического возмущения эта зависимость резко меняется. Вычисления показывают, что существуют интервалы углов $\Delta\theta(P/Q)$ выхода луча из источника, в которых значения частоты к остаются постоянными и принимают в этом случае лишь рациональные значения $\varkappa = P/Q$, где P и Q — целые числа.

Другой особенностью зависимости $\varkappa(\theta_0)$ является ее самоподобное изме-

нение при изменении шага вычисления.

Зависимость пространственной частоты $\varkappa$ от угла θ_0, приведенная на рис. 4, называется "дьявольской лестницей". Существует множество других задач гамильтоновского типа, в которых те или иные зависимости проявляются в форме "дьявольской лестницы" (например, в одномерной модели Изинга [48], в модели Френкеля—Конторовой [49]). "Дьявольская лестница" представляет собой определенный случай фрактального объекта [52 — 54]. Фрактальное поведение угла рассеяния от прицельного параметра наблюдается также в классической задаче рассеяния частицы в потенциальном поле [50, 51].

Фрактальная размерность зависимости $\varkappa$ от θ_0 определяется показателем D в степенной зависимости числа щелей $N(\Delta\theta_0)$ от шага вычисления $\Delta\theta_0$ в графике зависимости $\varkappa$ от θ_0 [52], т.е.

$$N(\Delta\theta_0) = \left(\frac{1}{\Delta\theta_0}\right)^D . \tag{4.3}$$

Определим фрактальную размерность D зависимости $\varkappa$ от θ_0 для волновода с параметрами: $a/l = 1/3$, $b/l = 0{,}001$. На рис. 5 показана соответствующая зависимость $N(\Delta\theta_0)$ от шага вычисления $\Delta\theta_0$ в интервале углов $0{,}2 < \theta_0 < 0{,}3$, откуда следует, что $D = 0{,}45$.

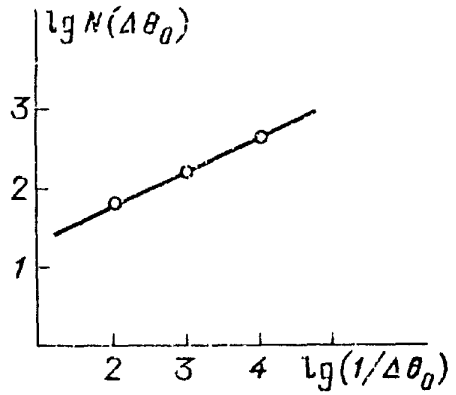

Рис. 5. Зависимость величины $N(\Delta\theta_0)$ от шага вычисления $\Delta\theta_0$

Физическая причина описанного явления объясняется нелинейным резонансом и заключается в следующем. Из рис. 4 нетрудно заметить, что каждая ступенька в зависимости $\varkappa$ от θ_0 расположена в окрестности резонансных углов $\theta^{(m,s)}$, определяемых условием нелинейного резонанса (3.24). Значение пространственной частоты $\varkappa$, соответствующее резонансу с номерами (m, s), определяется, согласно (3.2), (3.23) и (3.24), числами m и $2s + 1$:

$$\varkappa = \frac{\omega(I)l}{2\pi} = \frac{l}{2a}\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{m}{2s+1} . \tag{4.4}$$

Ширина ступеньки $\Delta\theta(P/Q)$ должна определяться соответствующей шириной нелинейного резонанса (3.26). Лучи с частотой осцилляции $\varkappa = 1/1$ имеют наибольшую ширину $\Delta\theta(1/1)$, равную $\Delta\theta(1/1) = 0{,}260$ при вычислении с шагом $\Delta\theta_0 = 10^{-2}$. Согласно (3.26) для этого резонанса ($m = 1$, $s = 0$) получим следующую оценку $\Delta\theta^{(1,0)} = 0{,}245$ при значениях параметра волновода $b/l = 10^{-2}$, $a/l = 1/3$. Эта оценка хорошо согласуется с результатом численного расчета.

Динамика луча в окрестности нелинейного резонанса может быть изучена с помощью портрета отображения (4.1) на фазовой плоскости (z, θ). На рис. 6 представлен соответствующий фазовый портрет при значениях параметра волновода $b/l = 5\cdot 10^{-3}$, $a/l = 1/3$. По вертикальной оси отложена координата $\xi_n = \{(z_n/l) + (1/2)\}$, по горизонтальной — θ_n. Из рисунка видно, что координаты лучей, захваченных в нелинейный резонанс, образуют регулярные замкнутые кривые.

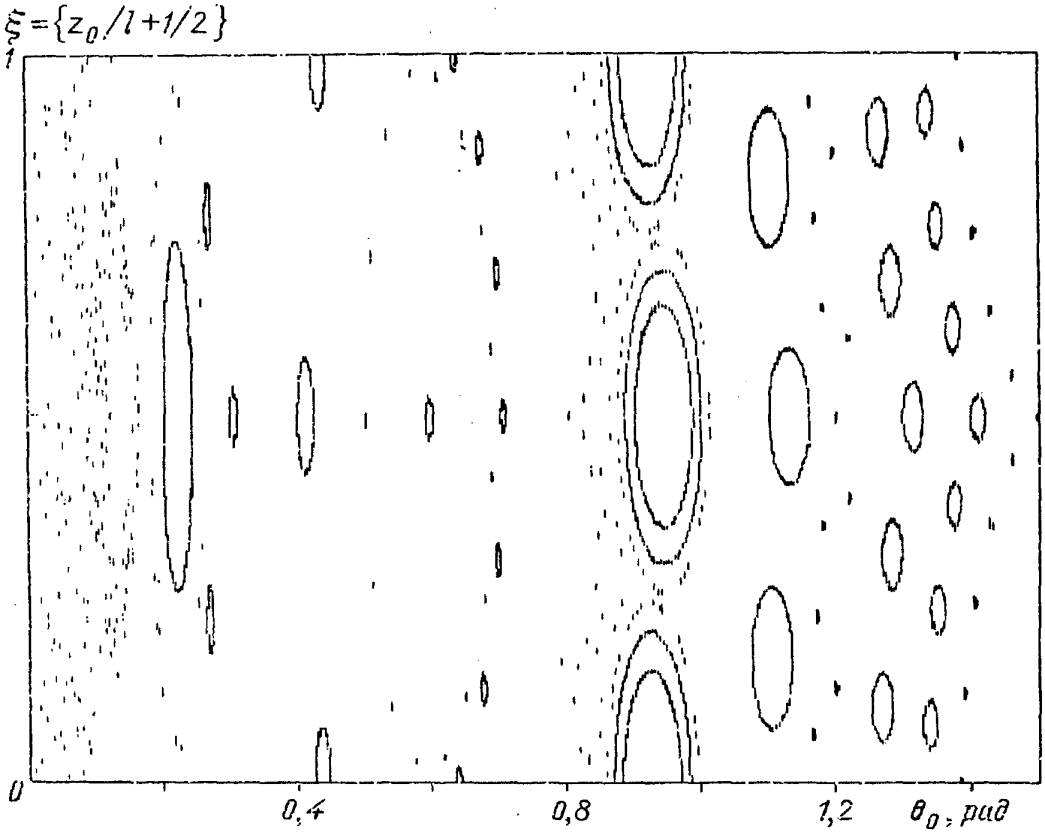

Рис. 6. Фазовый портрет отображения (4.1) на плоскости $\xi = \{(z/l) + (1/2)\}$, θ для 15 начальных углов выхода луча из источника с интервалом $\Delta\theta = 0{,}1$

Более детальное рассмотрение рис. 4 и 6 показывает присутствие случайного распределения пространственной частоты $\varkappa$ и координаты (ξ_n, θ_n) в интервале малых углов выхода луча из источника θ_0. Это связано с развитием стохастической неустойчивости лучей в этом интервале углов и более подробно будет рассмотрено в разделе 6.

4.2. Рассмотрим влияние неоднородности показателя преломления среды вдоль поперечной оси x. Пусть

$$n_0(x) = \left(1 - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad \text{при } 0 < x < a + f(z), \tag{4.5}$$

где $\alpha < 1$ — постоянный параметр, характеризующий неоднородность показателя преломления среды.

В этом случае часть лучей, выходящих от верхней невозмущенной стенки волновода под малыми углами θ, меньшими $\theta_c = \arcsin \alpha$, не касается нижней гофрированной стенки (кривые типа *1* на рис. 7). Лучи начинают отражаться от этой стенки, начиная с $\theta > \theta_0$ (кривые типа *2*). В этом случае точное отображение типа (4.1) имеет вид

$$\psi_n = z_n + \frac{aH_n}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha(1 + f(\psi_n)/a)}{(1 - H_n^2)^{1/2}},$$

$$H_{n+1} = n_0(a + f(\psi_n))\cos\left[\arccos \frac{H_n}{n_0(a + f(\psi_n))} - 2\operatorname{arctg} f'(\psi_n)\right],$$

$$z_{n+1} = \psi + \frac{aH_{n+1}}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha(1 + f(\psi_n)/a)}{(1 - H_{n+1}^2)^{1/2}}, \tag{4.6}$$

где $H_n = n_0 \cos\theta_n$ — величина интеграла движения, сохраняющаяся между отражениями от гофрированной стенки, а координаты ψ_n, z_n и z_{n+1} показаны на рис. 7.

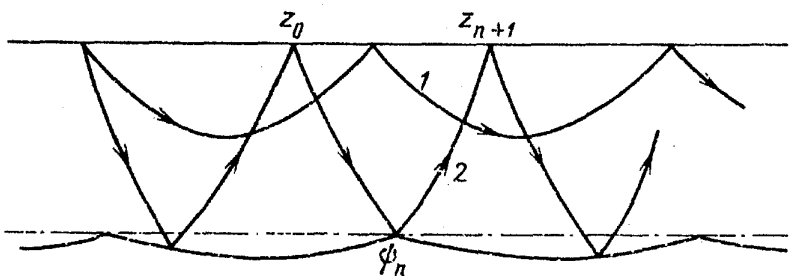

Рис. 7. Типы лучей в волноводе с неоднородным профилем (4.4). *1* — лучи, не достигающие гофрированной стенки, *2* — лучи, отражающиеся от гофрированной стенки

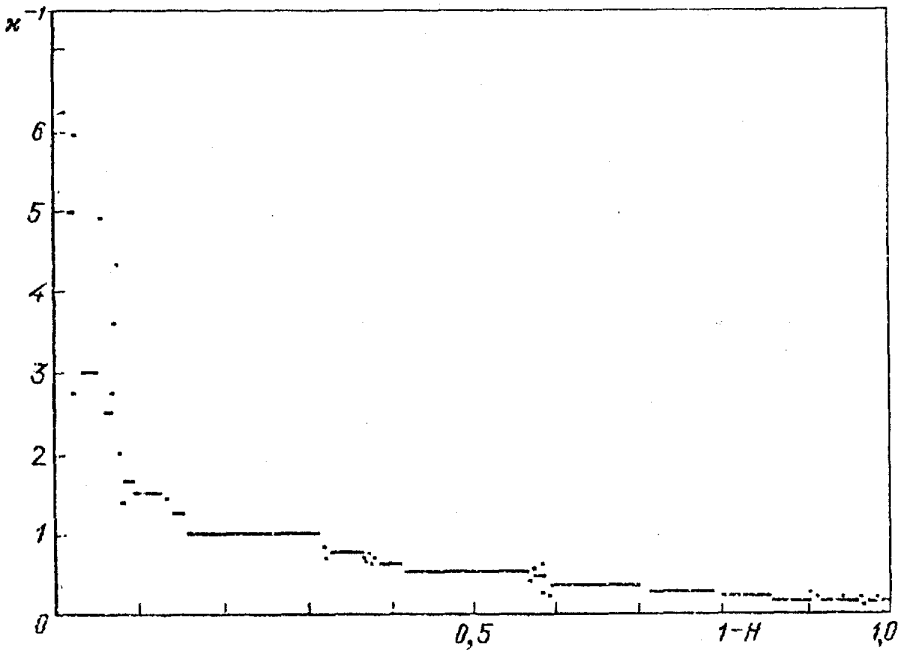

Рис. 8. Фрактальная зависимость величины $\varkappa^{-1}$ от $H = \cos\theta_0$, где θ_0 — исходный угол выхода луча из источника

На рис. 8 показана зависимость величины, обратной к нормированной пространственной частоте луча $\varkappa$, т.е. $f = \varkappa^{-1}$ от величины $H = \cos\theta_0$, где θ_0 — исходный угол выхода луча из источника, расположенного на верхней стенке. Численный анализ отображения проводился при значениях параметров волновода $a/l = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}01$ и $b/l = 0{,}01$. Возмущение имело вид (3.24). Каждая из ступенек в "дьявольской лестнице" расположена в окрестности резонансных значений H, определяемых из условия нелинейного резонанса:

$$m\omega(H) = s \cdot \frac{2\pi}{l}, \tag{4.7}$$

где

$$\omega(H) = \frac{\pi\alpha}{aH \arcsin[\alpha(1 - H^2)^{1/2}]}$$

— пространственная частота колебаний луча в волноводе с профилем (4.5) в отсутствие возмущения, т.е. при $f(z) \equiv 0$. Выражение для $\omega(I)$ было получено введением переменных действие—угол с помощью соотношений, приведенных в разделе 2.5.

Ширина соответствующего нелинейного резонанса по переменной H, согласно (3.8), равна

$$\Delta H = 4\sqrt{2}\,\frac{m}{s}\left(\frac{b\alpha}{aq}\right)^{1/2}\left[\frac{(1 - H^2)^{1/2}}{\pi^2 m^2 - q^2}\,\frac{1 - (-1)^m \cos q}{1 + \dfrac{k}{q(1 - k^2)^{1/2}}\,\dfrac{H^2}{1 - H^2}}\right]^{1/2}, \qquad (4.8)$$

где $k = \alpha/(1 - H^2)^{1/2}$, $q = \arcsin k$. Эта аналитическая оценка для ширины резонансов удовлетворительно согласуется с результатами численного счета.

Одной из особенностей рассмотренной задачи является, в отличие от случая волновода с однородным профилем, отсутствие случайного распределения величины $\varkappa$ в области малых углов θ_0.

4.3. Как отмечалось в разделе 3.2, наиболее важной характеристикой излучения в волноводе является скорость распространения сигнала вдоль его оси. Для численного анализа этой величины рассмотрим волновод с гофрированной стенкой и однородным заполнением.

Пусть $S(\theta_0, z)$ представляет собой длину оптического пути вдоль луча как функция угла θ_0 выхода луча из источника, расположенного в точке ($x = 0$, $z = 0$). Здесь z — расстояние до плоскости наблюдения $z = \text{const}$.

На рис. 9 приведены результаты численного расчета разности длины пути

$$\Delta S(\theta_0, z) = S(\theta_0, z) - z \qquad (4.9)$$

в зависимости от угла θ_0 при значениях параметров волновода, равных $a/l = 1/3$, $b/l = 0{,}005$ и $z = 50l$. Плавная кривая описывает соответствующую зависимость в невозмущенном случае ($b = 0$).

Из рис. 9 видно, что существуют интервалы углов выхода луча из источника $\Delta\theta(P/Q)$, для которых оптические пути $S(\theta_0, z)$ остаются почти постоянными, тогда как в невозмущенном случае оптические пути меняются значительно в соответствующем интервале. Такое поведение $S(\theta_0, z)$ аналогично поведению пространственной частоты луча в виде "дьявольской лестницы", рассмотренной в разделе 4.1.

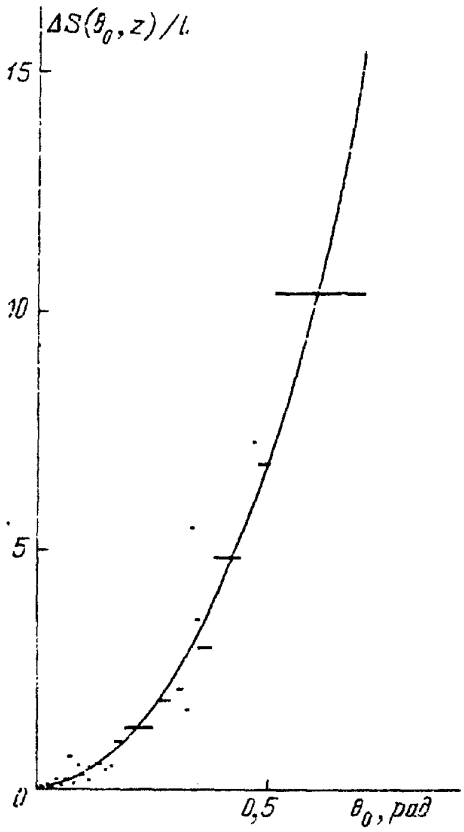

Рис. 9. Фрактальная зависимость разности оптического пути $\Delta S(\theta_0, z) = S(\theta_0, z) - z$ от начального угла θ_0. Кривая описывает случай невозмущенного волновода

Наибольшее значение ширины $\Delta\theta(P/Q)$ соответствует основному резонансу ($m = 1$, $s = 0$) и равно $\Delta\theta(1/1) = 0{,}19 = 10{,}9°$ при значении величины возмущения $b/l = 0{,}005$. Качественная оценка ширины основного резонанса (1,0), согласно (3.25), дает значение $\Delta\theta^{(1,0)} = 0{,}173 = 10{,}0°$, которое удовлетворительно согласуется с результатом численного анализа. Максимальная разность длины оптических путей, соответствующих лучам основного резонанса, почти на два порядка меньше, чем соответствующая разность для невозмущенного волновода.

Этот результат согласуется с результатами анализа времени прохождения сигнала и скорости его распространения вдоль резонансных лучей, проведенного в разделе 4.

5. Динамика лучей в неоднородной движущейся среде

В этом разделе рассмотрим некоторые особенности лучевых траекторий в неоднородных движущихся средах. В задачах распространения звука в атмосфере и океане, представляющих собой примеры движущихся сред, типична ситуация, когда характерные масштабы изменения параметров среды вдоль горизонтальной координаты значительно превышают соответствующий масштаб вдоль вертикальной координаты. Поэтому многие особенности распространения звука в атмосфере и океане объясняются моделью стратифицированной среды, в которой параметры среды зависят только от вертикальной координаты. В этом случае лучевые уравнения с гамильтонианом (2.11), описывающие распространение звука в движущейся среде, полностью интегрируются, поскольку существуют три интеграла движения: гамильтониан $H = 0$ и две горизонтальные компоненты обобщенного импульса $\mathbf{P}$. Более того, в этом случае соответствующие уравнения для лучей интегрируются в квадратурах (см. обзор [28]).

При изменении параметров среды вдоль горизонтальных координат уже не существует точных решений лучевых уравнений. Для исследования особенностей лучевых траекторий в этом случае приходится прибегать к приближенным методам.

Ниже мы рассмотрим задачу распространения звука в модели океана с медленно меняющимися вдоль горизонтали скоростями звука и течения [30]. Для решения этой задачи воспользуемся методом адиабатического инварианта классической механики [35].

Для простоты рассмотрим распространение звука под малыми углами к оси z. Тогда можно воспользоваться параксиальным приближением для лучевых уравнений (2.14), (2.15). Пусть ось x совпадает с вертикальной координатой. Будем считать, что параметры среды являются медленно меняющимися функциями горизонтальной координаты z, вдоль которой происходит преимущественное распространение волны, т.е.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(x, z), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, z).$$

Величина $\bar{\varepsilon}(x, z)$ выражается через неоднородную часть скорости звука $\Delta c(x, z) = c(x, z) - c_0$ следующим образом:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{2\Delta c(x, z)}{c_0}.$$

Рассмотрим горизонтальное течение, которое также медленно меняется вдоль оси z:

$$\mathbf{v}(x, z) = (0, v_y(x, z), v_z(x, z)). \tag{5.1}$$

Поскольку параметры среды не зависят от поперечной координаты y, то из уравнения движения (2.15) следует, что сохраняется y-компонента обобщенного импульса

$$P_y = p_y - v_y(x, z) = P_y^0 = \text{const}. \tag{5.2}$$

Это позволяет свести гамильтоновую систему (2.14), (2.15) с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, описываемой гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2} P_x^2 + U(x, z), \tag{5.3}$$

где

$$U(x, z) = \frac{1}{c_0} (\Delta c(x, z) + v_z(x, z)) + \frac{1}{c_0} P_y v_y(x, z).$$

Рассмотрим волноводный режим распространения звука. Пусть характерный масштаб l изменения скорости звука $c(x, z)$ и течения $v(x, z)$ вдоль направления распространения звука z значительно превышает длину цикла луча L: $l \gg L$. Тогда переменная действия I, определяемая соотношением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_x(x, z) \mathrm{d}x, \quad p_x(x, z) = [2(\bar{H} - U(x, z))]^{1/2}, \tag{5.4}$$

где интегрирование проводится для одного цикла луча вдоль оси x, является адиабатическим инвариантом, сохраняющимся вдоль горизонтальной координаты z. В новых переменных действие—угол (I, ϑ), где угловая переменная ϑ определяется соотношением

$$\vartheta = \frac{\partial}{\partial I} \int_{x_0}^{x} p(x', z) \mathrm{d}x',$$

гамильтониан $\bar{H} = \bar{H}(I, z)$ есть функция действия I, а z входит как параметр. Лучевые траектории $x = x(I, \vartheta)$, $p = p(I, \vartheta)$ являются периодическими функциями угловой переменной $\vartheta = \omega(I; z)z + \vartheta_0$ с периодом 2π. Пространственная частота колебаний луча $\omega(I; z) = \mathrm{d}\bar{H}(I, z)/\mathrm{d}I$ и пространственный период $L = 2\pi/\omega(I; z)$ являются локальными функциями продольной координаты z.

Координаты луча вдоль оси y, определяемые из соотношения (5.2) и $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = p_y$, равны

$$y = y_0 + P_y^0(z - z_0) + \frac{1}{c_0} \int_{z_0}^{z} v_y(x, z) \mathrm{d}z =$$

$$= y_0 + p_y^0(z - z_0) + \frac{1}{c_0} \int_{z_0}^{z} (v_y(x, z) - v_y(x_0, z_0)) \mathrm{d}z, \tag{5.5}$$

где p_y^0 и P_y^0 — значения y-компоненты касательного вектора к лучу p и нор-

мального вектора к волновому фронту в исходной плоскости $z = z_0$, (x_0, y_0) — исходные координаты луча в этой плоскости.

В случае однородного течения $v = \text{const}$ с отличной от нуля поперечной компонентой v_y направление луча будет лежать в вертикальной плоскости

$$y = y_0 + \left(P_y + \frac{v_y}{c_0}\right)(z - z_0), \tag{5.6}$$

составляющей определенный угол с направлением распространения волны вдоль оси z.

Если неоднородное по глубине течение имеет нулевую поперечную компоненту $v_y = 0$, то движущаяся среда эквивалентна неподвижной среде с эффективной скоростью звука

$$\Delta c_{\text{eff}} = \Delta c(x, z) + v_z(x, z)c_0^{-1}.$$

В этом случае лучи будут лежать в вертикальной плоскости.

Это свойство лучей теряется в случае появления неоднородного по глубине течения с отличной от нуля поперечной компонентой v_y. Траектории лучей будут описываться трехмерными кривыми в пространстве.

Рассмотрим конкретную модель океана с линейными профилями скоростей звука $c(x, z)$ и течения $\mathbf{v}(x, z)$ вдоль вертикальной координаты x:

$$c(x, z) = c_0(1 + g_0(z)x), \quad \mathbf{v}(x, z) = \mathbf{v}_0(z)\left(1 - \frac{x}{h}\right), \tag{5.7}$$

причем скорость звука возрастает с глубиной, а скорость течения убывает; здесь h — глубина океана, градиент скорости звука $g_0(z)$ и скорость течения $\mathbf{v}_0(z)$ медленно меняются вдоль оси z.

При распространении звука в этой среде образуется приповерхностный волноводный канал, в котором лучи распространяются, отражаясь от поверхности океана.

Лучевые траектории вдоль оси x описываются выражениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\, g(z)L^2(I; z)\left[\frac{\vartheta}{2\pi} - \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^2\right], \\ p_x &= g(z)L(I; z)\left(\frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{2\pi}\right), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta &= \omega(I; z)z + \vartheta_0, \\ L(I; z) &= \frac{2\pi}{\omega(I; z)} = \frac{\pi g(z)}{\sqrt{2}}\left(\frac{I}{I_0(z)}\right)^{-1/3}, \\ I_0(z) &= \frac{2\sqrt{2}}{3\pi g(z)}, \\ g(z) &= g_0(z) - \left(v_{0z}(z) + p_y^0 v_{0y}(z)\right)(c_0 h)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Координаты луча вдоль оси y определяются подстановкой (5.8) в (5.5).

Действие I связано с начальными координатами луча соотношением

$$I = [(p_x^0)^2 + 2g(z_0)x_0]^{3/2}(3\pi g(z_0))^{-1}. \tag{5.10}$$

Из (5.5) и (5.8) следует, что луч в присутствии поперечного течения представляет собой трехмерную кривую, проекция которой на плоскость x, z представляет собой параболу, периодически отражающуюся от поверхности океана $x = 0$ (рис. 10). Максимальное отклонение луча от поверхности океана равно

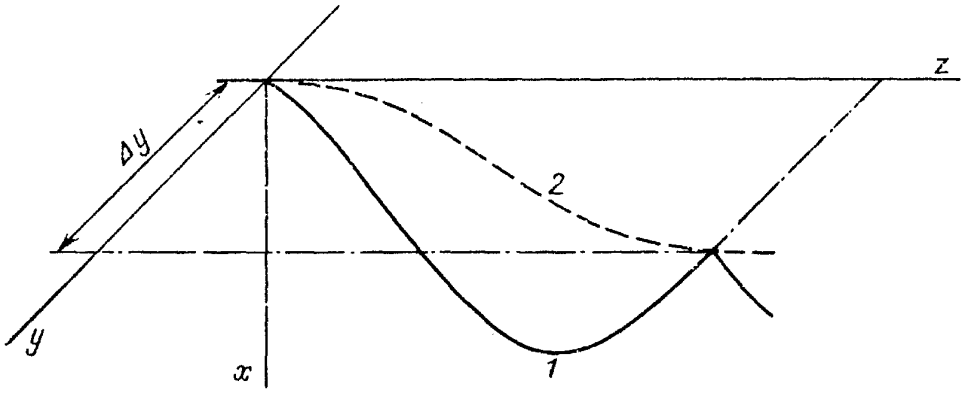

Рис. 10. Траектория луча в океане с линейными профилями скоростей звука и течения. Начальные координаты луча: $x_0 = y_0 = p_y^0 = 0$

$x_m = g(z)L^2(I;z)/8$. Луч, отражающийся от поверхности океана под углом $\theta_0 = \arcsin p_x^0$, где $p_x^0 = (2hg(z))^{1/2}$, достигает дна океана (угол θ отсчитывается относительно поверхности океана $x = 0$).

Как видно из рис. 10, луч после одного цикла смещается вдоль поперечной координаты y на определенное расстояние Δy от исходной плоскости выхода луча из источника. Этот эффект можно назвать поперечным дрейфом луча. Он аналогичен дрейфу заряженной частицы в поперечном магнитном поле при наличии отражающейся поверхности [2].

Согласно (5.5) поперечное смещение луча Δy на одном цикле от исходной плоскости выхода луча равно:

$$\Delta y = \frac{1}{c_0}\int_z^{z+L} (v_y(x(z'), z') - v_y(x(z), z))\mathrm{d}z' =$$

$$= \frac{1}{c_0}\oint (v_y(x, z) - v_y(x_0, z_0))p_x^{-1}(x, z)\mathrm{d}x, \tag{5.11}$$

где

$$p_x(x, z) = (2(\bar{H} - U(x, z)))^{1/2} = \sqrt{2}[\bar{H}(z) - 2(\Delta c(x, z) + v_z(x, z))c_0^{-1} -$$

$$- 2P_y(v_y(x, z) - v_y(x_0, z_0))c_0^{-1}]^{1/2}. \tag{5.12}$$

Используя (5.3) и (5.9), выражение для поперечного смещения луча на одном цикле луча можно переписать в виде

$$\Delta y = -2\pi \frac{\partial I}{\partial P_y}, \tag{5.13}$$

где I — действие, определяемое соотношением (5.3).

Для модели океана с линейными профилями скоростей звука и течения (5.7), используя соотношения (5.9) и (5.10), нетрудно получить следующее выражение для поперечного смещения луча:

$$\Delta y = -\frac{v_{0y}}{c_0 h} g(z) L^3(I; z) \tag{5.14}$$

для луча с исходными координатами $x_0 = p_y^0 = 0$.

Рассмотрим поперечный дрейф луча в глубинном волноводном канале. В этом случае лучи не достигают поверхности и дна океана. При этом поперечный дрейф луча вдоль y происходит лишь в случае, когда вторая производная от скорости течения по вертикальной координате x отлична от нуля, т.е. при $\mathrm{d}^2 v_y(x)/\mathrm{d}x^2 \neq 0$, означающем неоднородность вихревого вектора движущейся среды

$$\vec{\mathcal{H}} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

вдоль вертикальной координаты x.

Действительно, согласно (5.11), имеем

$$\Delta y(z) = \frac{1}{c_0} \oint (v_y(x, z) - v_y(x_0, z_0)) p_x^{-1}(x, z) \mathrm{d}x \approx$$

$$\approx \oint \mathrm{d}x p_x^{-1}(x, z) \left[\left. \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \ldots \right]. \tag{5.15}$$

Интеграл от первого слагаемого в (5.15) обращается в нуль, поэтому поперечный сдвиг луча Δy на одном цикле луча вдоль оси y определяется, главным образом, вторым слагаемым, т.е.

$$\Delta y(z) = \frac{1}{c_0} \frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}x^2} \oint \mathrm{d}x \frac{(x - x_0)^2}{p_x(x, z)}. \tag{5.16}$$

Этот тип поперечного смещения лучей не связан с отражением луча от поверхности или дна океана и определяется скоростью изменения вихревого вектора вдоль вертикальной координаты. Он аналогичен дрейфу заряженных частиц в неоднородном поперечном магнитном поле [4].

Отметим, что в отличие от работы [46], где рассматривалась стратифицированная движущаяся среда, в случае плавно неоднородной среды в направлении распространения волны поперечный дрейф луча на одном цикле Δy не является одинаковым для всех циклов и медленно меняется от цикла к циклу.

Рассмотренное адиабатическое приближение теряет силу в случае, когда характерные масштабы неоднородностей среды вдоль оси распространения волны становятся порядка длины цикла луча L. В этом случае возможно резонансное взаимодействие луча с неоднородностями, что существенно будет менять характер распространения лучей в неоднородной движущейся среде.

6. Динамический хаос лучей

Одной из важных особенностей динамических систем является возможность появления в них случайного движения под действием регулярных (неслучайных) сил. Это явление, называемое динамическим хаосом [1 — 4], также может наблюдаться в лучевой теории распространения волн в регулярно неоднородных волноводных средах [17 — 26].

Ранее было показано (см., например, [1 — 4]), что периодическое возмущение образует в окрестности сепаратрисы так называемый стохастический слой, в котором траектория частиц является случайной. Главная особенность этого явления заключается в том, что стохастический слой образуется при периодических возмущениях произвольного вида и величины, и лишь ширина слоя определяется характером возмущения.

Аналогичные свойства лучей в регулярно неоднородных волноводных средах впервые были отмечены в работах [17, 21]. В частности, в работах [18, 20] показано, что стохастический слой образуется не только вблизи сепаратрисы, но и в других областях фазового пространства лучей, расположенных вдали от сепаратрисы.

Ниже рассмотрим несколько примеров регулярных волноводных каналов, в которых развивается стохастическая неустойчивость лучей. Для качественного исследования условий хаотической неустойчивости лучей будем использовать критерий перекрытия нелинейных резонансов, заключающийся в том, что при перекрытии резонансов, т.е. при выполнении условия $K \geq 1$, где параметр K определяется в (3.9), движение системы становится хаотически неустойчивым (критерий Чирикова [1 — 4]).

6.1. Регулярный волновод с показателем преломления (3.18). В окрестности сепаратрисы $\omega \to 0$, согласно (3.21), расстояние между соседними резонансами равно $\delta\omega \approx 2\omega^2/\Omega$. Согласно этому соотношению и (3.22), при приближении к сепаратрисе ($\omega \to 0$) величина $\delta\omega$ стремится к нулю быстрее, чем ширина резонансов $\Delta\omega$. Поэтому начиная с некоторого значения ω_c величина K достигает единицы и критерий $K \geq 1$ начинает выполняться. Таким образом, стохастический слой образуется вблизи сепаратрисы и его граница ω_c, определяемая из условия $K = 1$, равна

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = \left[4\pi^{-1/2}\varepsilon\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{n_0}{n_\infty}\right]^{1/3}. \tag{6.1}$$

Из соотношений (3.20) и (6.1) получим следующие оценки для ширины стохастического слоя в переменных действие I и H:

$$\frac{\delta I}{I_s} = \frac{n_\infty \omega_c}{n_0 \omega_0} = \left[4\pi^{-1/2}\varepsilon\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{n_\infty^2}{n_0^2}\right]^{1/3},$$

$$\frac{\delta H}{|H_s|} = \left(\frac{\delta I}{I_s}\right)^2. \tag{6.2}$$

Если начальное состояние луча лежит в области стохастичности (6.2), то его путь в пространстве вдоль оси z будет иметь характер диффузионного движения. Диффузия приводит к тому, что луч достигает области невозмущенной сепаратрисы и покидает волноводный канал. Таким образом, действие

неоднородности среды, как возмущения, приводит к эффективному уменьшению ширины волноводного канала.

Отметим следующую особенность рассмотренной задачи. Как следует из (6.2), ширина стохастического слоя по действию δI пропорциональна кубическому корню из малого параметра возмущения. Поэтому даже достаточно малые возмущения приводят к образованию стохастического слоя с заметной шириной.

6.2. Волновод с гофрированной стенкой. Согласно (3.25), (3.26) расстояние между соседними резонансами $\delta\theta$ уменьшается при приближении угла θ к нулю быстрее, чем ширина резонанса $\Delta\theta$. Следовательно, в области $\theta < \theta_c$ имеет место перекрытие нелинейных резонансов. Критический угол θ_c, определяемый из условия $K = 1$, равен

$$\theta_c = \arcsin\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{ab}{l^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.3}$$

Таким образом, лучи, распространяющиеся под малыми углами θ к оси z, становятся хаотически неустойчивыми. Область стохастического слоя определяется неравенством $0 < \theta < \theta_c$. Этот результат объясняет данные численного анализа динамики лучей с помощью отображений (4.1), проведенного в разд. 4. Рис. 4 показывает, что в области малых углов распространения лучей в интервале $0 < \theta_c < 0{,}16$ наблюдается случайное распределение пространст-

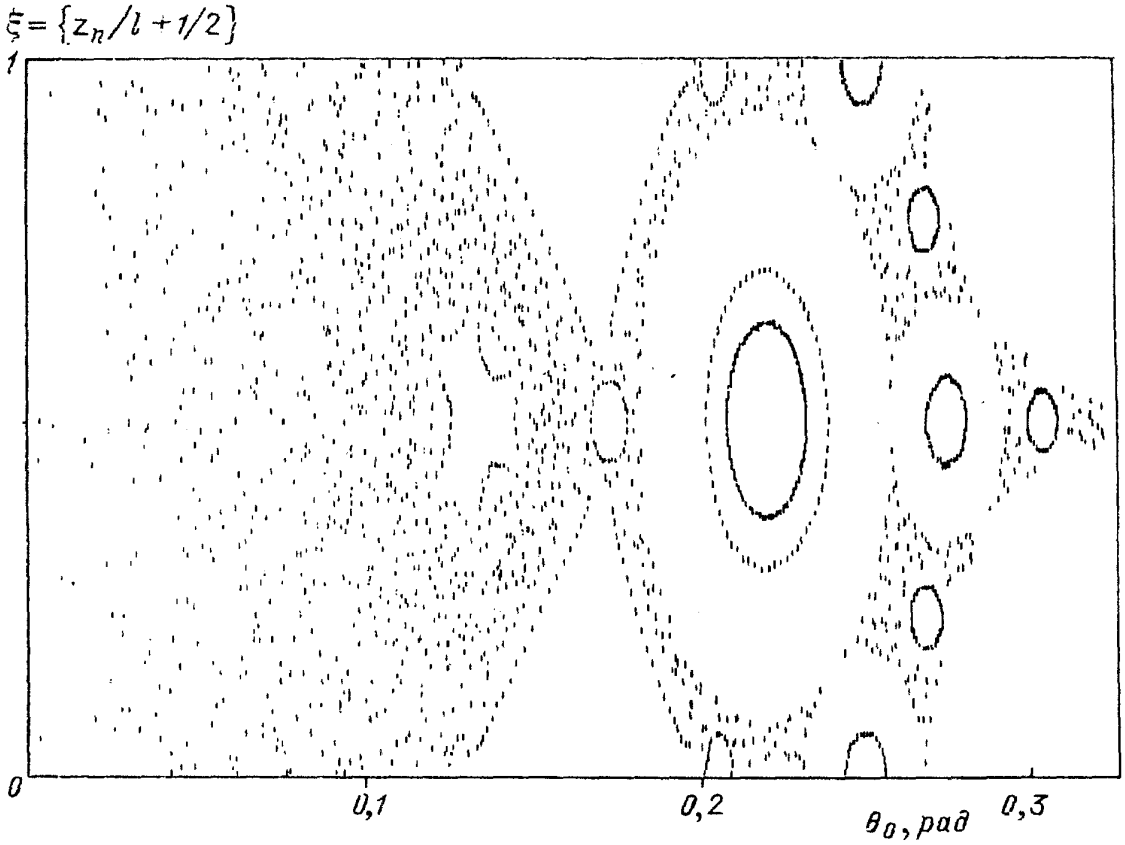

Рис. 11. Фазовый портрет отображения (4.1) на плоскости (ξ, θ) в области малых углов. Параметры волновода: $a/l = 1/3$, $b/a = 1{,}5\cdot10^{-2}$

венной частоты луча $\varkappa$. Значение θ_c, полученное с помощью аналитического выражения (6.3), равно $\theta_c = 0{,}148$ при соответствующих значениях параметров волновода, что удовлетворительно согласуется с результатами численного анализа.

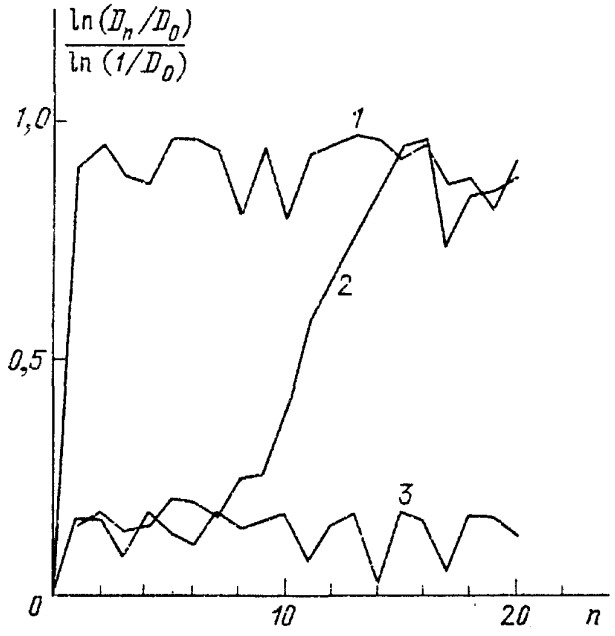

Рис. 12. Зависимость логарифма относительной расходимости лучей $\ln(D_n/D_0)/\ln(1/D_0)$ от шага отображения n при различных значениях угла θ_0: *1* — $\theta_0 = 0{,}03$, *2* — $\theta_0 = 0{,}12$, *3* — $\theta_0 = 0{,}25$

На рис. 11 представлен фазовый портрет отображения (4.1) на фазовой плоскости (ξ, θ) в интервале углов $0 < \theta_0 < 0{,}3$ при значениях параметров волновода $a/l = 1/3$, $b/a = 1{,}5\cdot 10^{-2}$. Точки траектории, определяемые отображением (4.1), располагаются на плоскости (ξ, θ) случайным образом в области малых углов, где имеет место хаотическая неустойчивость лучей.

Это также согласуется с расчетом расходимости лучей для трех значений исходных координат луча на фазовой плоскости (ξ, θ). На рис. 12 представлена зависимость величины

$$\frac{\ln(D_n/D_0)}{\ln(1/D_0)}, \tag{6.4}$$

где

$$D_n = [(\xi_n - \bar{\xi}_n)^2 + (\theta_n - \bar{\theta}_n)^2]^{1/2},$$

от шага отображения n. Здесь (ξ_n, θ_n) и $(\bar{\xi}_n, \bar{\theta}_n)$ — значения переменных на n-м шаге отображения для двух траекторий с близкими начальными условиями (ξ_0, θ_0) и $(\bar{\xi}_0, \bar{\theta}_0)$. Кривая *1* соответствует сильно неустойчивому лучу с начальными координатами $(\xi_0 = 0,\ \theta_0 = 0{,}03)$, кривая *2* соответствует слабо неустойчивому лучу на границе области стохастичности $(\xi_0 = 0,\ \theta_0 = 0{,}12)$, кривая *3* соответствует регулярному лучу $(\xi_0 = 0,\ \theta_0 = 0{,}25)$.

Наконец, рассмотрим особенности времени распространения сигнала вдоль лучей в области стохастичности лучей. На рис. 13 представлена зависимость разности оптического пути $\Delta S(\theta_0, z)$ вдоль лучей от угла выхода луча

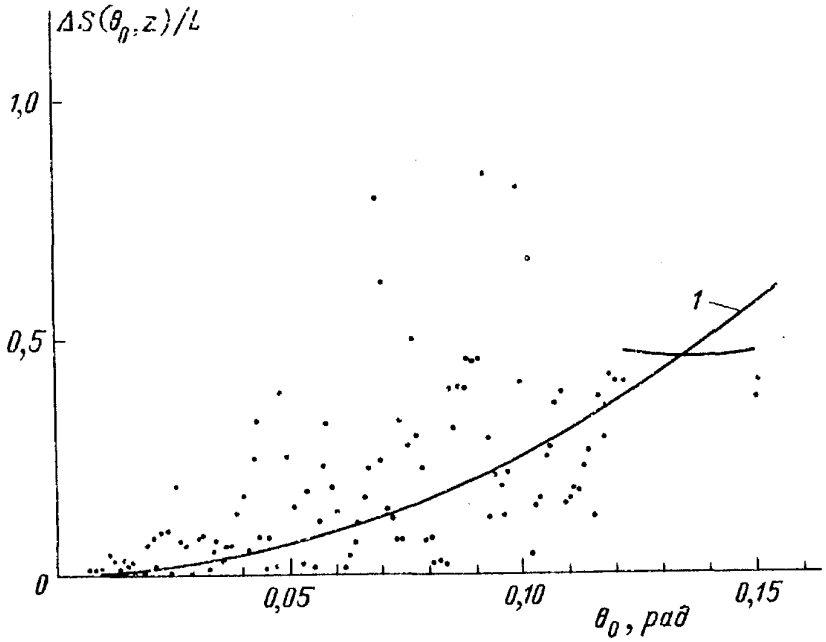

Рис. 13. Зависимость разности оптического пути (4.9) от θ_0 в области малых углов θ_0. Кривая соответствует невозмущенному случаю

из источника θ_0. Видно, что эта зависимость является случайной. Точки значений ΔS распределены в окрестности невозмущенной "регулярной" зависимости

$$\Delta S_0(\theta_0, z) = \frac{z}{\cos\theta_0} - z$$

от θ_0 (кривая). Значения параметров волновода равны: $a/l = 1/3$, $b/a = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ и $z = 50l$.

6.3. Численный анализ хаотического поведения звукового луча в горизонтально неоднородной модели океана проведен в работе [23]. Гамильтоновская система лучей рассмотрена в параксиальном приближении с гамильтонианом типа (2.9). Детерминистическая функция $\bar{\varepsilon}(x, z) = -V(x, z)$, где координата x направлена в глубь океана, а z — вдоль трассы распространения волны, выбрана в виде

$$V(x, z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(x)}\right) + \sqrt{2}Ae^{-3x/2B}\sin\frac{2\pi z}{R}, \tag{6.5}$$

где

$$c(x) = c_a[1 + \varepsilon(e^{-\eta} + \eta - 1)], \quad \eta = 2(x - x_a)^{-1}.$$

Выражение (6.5) описывает распространение звука в глубинном подводном звуковом канале с малыми периодическими неоднородностями вдоль горизонтальной координаты z с периодом R.

Численные вычисления были выполнены при значениях параметров мо-

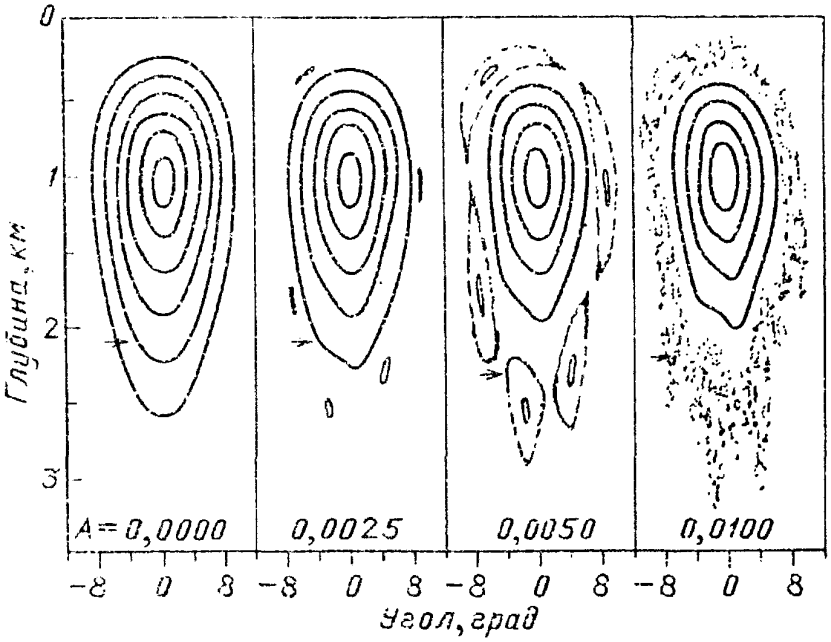

Рис. 14. Сечение Пуанкаре для серии лучей с начальными координатами x_0 = 1 км и ϕ_0 = 1,5°, 3,0°, 4,5°, 6,0°, 7,5° и 9,0° при различных значениях параметра возмущения A. Стрелка в каждом квадрате соответствует лучу с углом ϕ_0 = 7,5°, который становится стохастическим при $A \geq 4{,}612 \cdot 10^{-3}$

дели океана, равных $c_0 = c_2 = 1{,}5$ км/с, $x_a = B = 1$ км, $\varepsilon = 0{,}0057$, $R = 1{,}0$ км. Величина A представляет собой среднеквадратичное отклонение звука на поверхности океана и имеет порядок 10^{-3} для многих регионов океана.

На рис. 14 показано сечение Пуанкаре регулярных и хаотических лучей на фазовой плоскости (x, $\phi = \operatorname{arctg} p$), где $p = \mathrm{d}x/\mathrm{d}z$ для ряда начальных значений луча. Видно, что с увеличением амплитуды возмущения A возникает стохастический слой на фазовой плоскости луча.

7. Волноводы со сложным поперечным сечением

Волноводы со сложной формой поперечного сечения чаще всего встречаются в волоконной оптике, где наряду с традиционно рассматриваемыми волоконными световодами круглого поперечного сечения возрастает также интерес к волоконным световодам с некруглой формой сердцевины.

Основные результаты и обширная библиография работ по исследованию волноводов с некруглой формой поперечного сечения содержатся в [56 — 60].

Главной трудностью исследования структуры поля в таких волноводах является отсутствие разделения переменных в соответствующих уравнениях, описывающих распространение волн. Для исследования некоторого класса волноводов с двумерными профилями показателя преломления, описываемых функциями, близкими к квадратичным функциям поперечных координат (x, y), по-видимому, наиболее эффективным является использование хорошо известного в классической механике метода нормальных форм Биркгофа—Густавсона [40 — 45]. Ниже мы рассмотрим динамические явления, возникающие в лучевой теории распространения волн в волноводах с двумерным поперечным сечением с неразделяющимися переменными [19].

Рассмотрим волноводную среду, однородную вдоль оси волновода z и характеризуемую показателем преломления $n = n(x, y)$. Лучевые уравнения имеют вид (2.7) с функцией Гамильтона

$$H = H(r, \mathrm{p}_\perp) = -(n^2(x, y) - \mathrm{p}_\perp^2)^{1/2}. \tag{7.1}$$

Рассматриваемая система соответствует динамической системе с двумя взаимодействующими степенями свободы. В этом случае при достаточно общих формах поперечного сечения волновода возможны явления нелинейного резонанса лучей и их хаотической неустойчивости, вызванные взаимодействием различных степеней свободы луча [19]. Эти явления происходят даже в случае, когда профиль показателя преломления $n(x, y)$ не меняется вдоль оси z.

7.1. Внутренний нелинейный резонанс лучей. Показатель преломления волновода с неоднородным поперечным сечением представим в виде

$$n^2(\mathrm{r}) = n_0^2(\mathrm{r}) + \varepsilon n_1(\mathrm{r}), \tag{7.2}$$

где $n_0(\mathrm{r})$ соответствует интегрируемому случаю, в котором в переменных действие—угол $(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ гамильтониан системы имеет вид $H_0(I_1, I_2)$. Величина $\varepsilon n_1(\mathrm{r})$ описывает малое возмущение поперечного сечения. Тогда при $\varepsilon \ll 1$ имеем

$$H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon V(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2). \tag{7.3}$$

Возмущение εV, описывающее взаимодействие различных степеней свободы, можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$\varepsilon V(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m_1, m_2} V_{m_1 m_2}(I_1, I_2) \exp(i m_1 \vartheta_1 + i m_2 \vartheta_2) + \text{к.с.} \tag{7.4}$$

Наиболее сильное влияние возмущения на лучи происходит при выполнении условия

$$m_1 \omega_1(I_1, I_2) + m_2 \omega_2(I_1, I_2) = 0. \tag{7.5}$$

Пусть (I_1^0, I_2^0) есть резонансные значения действий I_1, I_2, при которых выполняется резонансное условие (7.5) для некоторых значений чисел (m_1, m_2). Тогда в малой окрестности резонансных действий (I_1^0, I_2^0) происходит синхронизация различных степеней свободы пространственных колебаний луча вдоль оси z, аналогичная описанному в разделе 3.1 для случая плоского волновода с продольными периодическими неоднородностями. Этот эффект, называемый внутренним пространственным нелинейным резонансом лучей и аналогичный внутреннему нелинейному резонансу в классической механике [2], описан для лучей в [19]. Другими словами, в окрестности резонансных значений действий (I_1^0, I_2^0) образуется эффективный волноводный канал, ширина которого по действиям (I_1, I_2) определяется соотношением [19]

$$\Delta I_k = [4\varepsilon \,|\, V_{m_1 m_2}(\omega_k^2(I_1^0, I_2^0) B(I_1^0, I_2^0))^{-1} \,|\,]^{1/2} \quad (k = 1,2), \tag{7.6}$$

где

$$B(I_1, I_2) = \sum_{l_1, l_2} (-1)^{l_1+l_2} (\omega_{l_1}\omega_{l_2})^{-1} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_{l_1} \partial I_{l_2}} \quad (l_{1,2} = 1,2).$$

При этом между действиями I_1 и I_2 в окрестности каждого резонанса имеет место соотношение

$$\mathcal{T} = m_2 I_1 - m_1 I_2 = \text{const}. \tag{7.7}$$

Величина $\mathcal{T}$ является дополнительным интегралом движения к интегралу энергии H.

Как и в случае волновода с продольными периодическими неоднородностями (см. раздел 2.6), характер распространения сигнала вдоль лучей, захваченных в эффективный волноводный канал, существенно меняется по сравнению со случаем невозмущенного волновода. Средняя скорость распространения сигнала $v(I_1, I_2, z)$ (3.16) с точностью до членов порядка $\varepsilon \ll 1$ равна скорости сигнала невозмущенного луча $v_0(I_1^0, I_2^0)$ (3.13) при резонансных действиях I_1^0, I_2^0 для всех лучей, захваченных в данный резонанс [19].

7.2. Хаотическая неустойчивость лучей. Для большинства форм поперечного сечения волновода существуют области пространств, в которых траектории лучей становятся хаотически неустойчивыми. В них дополнительный интеграл $\mathcal{T}$ (7.7) разрушается и единственным инвариантом движения остается интеграл энергии H. Как и в случае волновода с продольными периодическими неоднородностями, в рассматриваемом случае времена распространения лучей вдоль хаотических лучей будут распределяться случайным образом.

Полезно провести аналогию между задачей о динамике луча в волноводе с однородным показателем преломления внутри его поперечного сечения и задачами о движении частиц в бильярдах [2, 61 — 63]. Возможность стохастизации движения в рассеивающих бильярдах (бильярды Синая) исследована в работах Синая (см., например, [61]), а в нерассеивающих бильярдах — в [62]. Вывод условия стохастизации для некоторых специальных случаев приведен в [2].

В отличие от случая образования стохастического слоя в окрестности сепаратрисы в волноводе с продольными периодическими неоднородностями (см. раздел 6), в рассматриваемом случае энергия волны не излучается из области стохастичности лучей, поскольку сохраняется интеграл движения $H = \text{const}$, и лучи равномерно распределяются внутри стохастического слоя с заданным значением $H = \text{const}$.

Скорость распространения сигнала вдоль лучей в этом случае зависит лишь от интеграла движения $H = \text{const}$ и определяется формулой [65]

$$\frac{c}{v} = \frac{\iint n^2(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|H| \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \tag{7.8}$$

в которой интегрирование проводится по всей классически доступной области $n^2(x, y) - H^2 > 0$.

Аналогичное распределение лучей по одной из переменных при сохранении другой наблюдается в так называемых квазирегулярных световодах, в которых слабые случайные неоднородности среды приводят к интенсивной диффузии по одной из переменных, например в круглых волноводах по угловой переменной и значительно более слабой диффузии по радиальной координате [38].

7.3. Специфический пример волновода с формой поперечного сечения, близкого к форме "стадион" (рис. 15). Пусть показатель преломления внутри поперечного сечения равен $n_0 = \text{const}$, а вне равен n_∞ $(n_\infty < n_0)$. Деформация сторон AB и CD описывается функцией $\varepsilon f(x)$. Пусть $\varepsilon f(x) = d\cos(\pi x/2a)$ $(d \ll a, b)$.

В невозмущенном случае $(\varepsilon = 0)$ гамильтониан $H_0(I_1, I_2)$ в переменных действие—угол $(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ равен

$$H_0(I_1, I_2) = -\left(n_0^2 - \frac{I_1^2}{I_{10}^2} - \frac{I_2^2}{I_{20}^2}\right)^{1/2}, \quad I_k = \frac{2a_k}{\pi},$$

$$(a_1, a_2) = (a, b), \quad k = 1,2. \tag{7.9}$$

Деформация сторон AB и CD приводит к взаимодействию различных степеней свободы. При этом резонансное взаимодействие происходит при выполнении условия

$$\omega_1(I_1, I_2) = (2m + 1)\omega_2(I_1, I_2)$$

или

$$\frac{I_1}{I_{10}} = (2m + 1)\frac{a}{b}\frac{I_2}{I_{20}}. \tag{7.10}$$

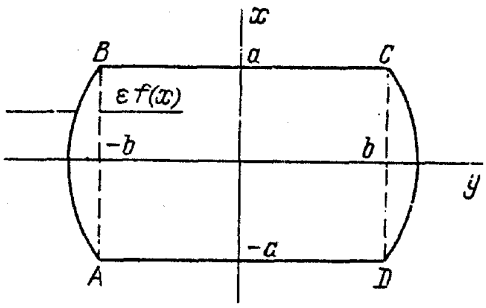

Рис. 15. Форма поперечного сечения типа "стадион"

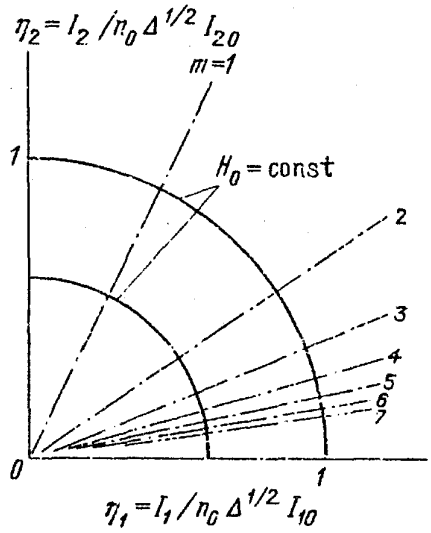

Рис. 16. Кривые постоянных значений $H_0(I_1, /2)$ и резонансные прямые (7.10) (m= 1, 2, 3, ...) в плоскости нормированных действий η_1, η_2

На рис. 16 приведены кривые постоянных значений $E = H_0(I_1, I_2)$ (сплошные линии 1) и резонасные прямые (7.10) в плоскости действий I_1, I_2. Как видно из рисунка, расстояние между соседними резонансами уменьшается при увеличении номера резонанса m. Ширина резонансов по переменной действие I_1 равна

$$\frac{\Delta I_1}{I_{10}} = \left\{4d\left[b(n_0^2 - E^2)\right]^{-1}\right\}^{1/2}\left(\frac{I_2}{I_{20}}\right)^2. \tag{7.11}$$

Наибольшей шириной обладает резонанс с номером $m = 1$, соответствующий большим значениям I_2/I_{20} (см. рис. 16).

Сгущение резонансов происходит при больших номерах m, т.е. при уменьшении отношения I_2/I_{20}. При этом расстояние между соседними резонансами уменьшается по закону

$$\frac{\delta I_1}{I_{10}} = 2a\left[b(n_0^2 - E^2)\right]^{-1}\left(\frac{I_2}{I_{20}}\right)^3. \tag{7.12}$$

Тогда из условия перекрытия резонансов получим область хаотического поведения лучей $I_2 < I_{20}$, где

$$\frac{I_{2c}}{I_{20}} = [(n_0^2 - E^2)bda^{-2}]^{1/2}. \tag{7.13}$$

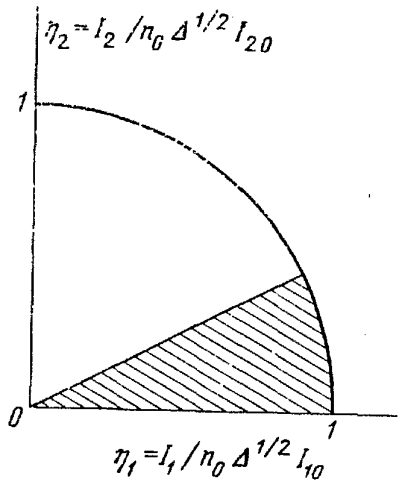

Рис. 17. Область стохастичности лучей (заштрихованная область)

На рис. 17 приведена область стохастичности лучей на плоскости действий (η_1, η_2). Критический угол φ_c определяет область хаоса лучей $0 < \varphi < \varphi_c$, где $\varphi = \mathrm{arctg}(\eta_1/\eta_2)$. Для φ_c можно получить следующее соотношение:

$$\varphi_c = \arcsin\left(\frac{db}{a^2}\right)^{1/2}. \tag{7.14}$$

При значениях параметров волновода, для которых $db/a^2 \geq 1$, почти все волноводные лучи становятся хаотическими. Это условие совпадает с соответствующим условием хаотизации движения частиц в бильярдах типа "стадион" [2].

Хаотическая динамика лучей в неоднородных волноводных резонаторах изучена в [64].

8. Динамика лучей и спекл-структура волнового поля в многомодовых волноводах

Одной из интересных и важных проблем является исследование связи между динамикой лучей и структурой волнового поля в регулярно неодно-

родных волноводах. Характерной особенностью волновых полей в многомодовых волноводах является то обстоятельство, что поле состоит из множества нерегулярно расположенных в пространстве пятен. Такая картина поля называется спекл-структурой, типичная ситуация образования которой состоит в отражении когерентного лазерного излучения от шероховатой поверхности, у которой размеры неоднородностей превышают длину волны [67, 68].

Механизм образования спекл-структуры поля в многомодовых волноводах связан с тем, что в точку наблюдения приходит большое число лучей, выходящих из плоскости возбуждения. Вследствие того, что оптические пути, проходимые различными лучами, вообще говоря, различны, поле в точке наблюдения будет представлять собой результат интерференции большого числа полей с различными фазами, соответствующими этим лучам. Образующаяся в этом случае спекл-структура будет регулярной, если динамика лучей в волноводе регулярная, и случайной, если лучи хаотические.

Обратимся к квазиклассическому представлению волнового поля $u(\mathbf{r}, z)$. Пусть в плоскости $z = 0$ волновод возбуждается когерентным полем $u_0(\mathbf{r})$. Тогда волновое поле в плоскости $z > 0$ задается соотношением [16, 66]

$$u(\mathbf{r}, z) = \sum_{j=1}^{N} u_0(\mathbf{r}_{0j}, z)\mathcal{J}_j^{1/2}\exp(ikS_j(\mathbf{r}, z) + \frac{1}{2} i\pi\mu_j); \tag{8.1}$$

здесь $u_0(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}, 0)$, $S_j(\mathbf{r}, z)$ — действие вдоль j-го луча:

$$S_j = \int_{\gamma_j} n(\mathbf{r}, z)\mathrm{d}\sigma, \tag{8.2}$$

где $\mathrm{d}\sigma$ — элемент длины дуги луча γ_j, $\mathbf{r}_{0j}$ — координата луча в плоскости $z=0$. Величина

$$\mathcal{J}_j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a_0},$$

где $\mathrm{d}a_0$ и $\mathrm{d}a$ соответственно площади поперечного сечения элементарной лучевой трубки на плоскостях $z = 0$ и $z = \mathrm{const}$, есть расходимость луча, μ_j — индекс Морса для j-го луча, $k = \nu/c_0$ — волновое число. Суммирование в (8.1) проводится по всем лучам, проходящим через точку наблюдения $(\mathbf{r}, z)$.

8.1. Рассмотрим сначала волноводный канал, однородный вдоль оси z и с регулярной динамикой лучей. В этом случае фазы волн $\phi = kS_j$ определяются в переменных действие—угол (I, ϑ) соотношением (3.13). Спекл-структура поля образуется начиная с расстояния z, где разность фаз вдоль соседних лучей $\Delta\phi = k(S_j - S_{j+1})$ становится порядка 2π. Согласно (3.13) имеем

$$\Delta\phi = k\Delta I\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}I} = kzI\Delta\frac{I\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}I} \geq 2\pi. \tag{8.3}$$

Отсюда получим следующую оценку для критического расстояния z_0 образования спекл-структуры:

$$z_0 \approx 2\pi(k\omega\alpha\Delta I)^{-1}, \tag{8.4}$$

где ΔI — разность действий, соответствующих соседним лучам, α —параметр нелинейности (3.3).

Из (8.4) следует, что спекл-структура образуется лишь в волноводах, обладающих межмодовой дисперсией, т.е. при

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\frac{c}{v(I)} = \alpha\omega \neq 0. \tag{8.5}$$

Выражение для z_0 можно также записать через волновые числа k_m. Согласно (2.27) и (2.28), следует, что

$$z_0 \approx 2\pi\left[m\left|\frac{\mathrm{d}^2k_m}{\mathrm{d}m^2}\right|\right]^{-1}. \tag{8.6}$$

Таким образом, образование спекл-структуры возможно лишь в волноводах с неэквидистантным расположением волновых чисел k_m, т.е. при $\mathrm{d}^2k_m/\mathrm{d}m^2 \neq 0$ [75]. Образующаяся в этом случае спекл-структура поля будет регулярной и принципиально обратимой.

Исследование статистических свойств волнового поля со спекл-структурой, в частности, распределение дислокаций волнового поля в поперечном сечении регулярного волоконного световода проведено в [75].

8.2. Случай хаотической неустойчивости [20]. В этом случае вследствие сильной экспоненциальной неустойчивости лучей на достаточно малых расстояниях от плоскости ввода излучения в волновод расходимость лучей $\mathcal{T}_j$ и число лучей N, приходящих в точку наблюдения, растут экспоненциально, пропорционально $\exp(hz)$, где h — инкремент неустойчивости. При этом длина оптического пути $S_j(r, z)$ будет меняться нерегулярно при переходе от одного луча к другому и распределена в области стохастичности лучей случайным образом (см. рис. 13). Тогда можно ожидать, что фазы волн $\phi_j = kS_j \pmod{2\pi}$ вдоль лучей будут равномерно или почти равномерно распределены в интервале $(0,2\pi)$.

Таким образом, волновое поле (8.1) представляет собой сумму большого числа квазиплоских волн с фазами, равномерно распределенными в интервале $(0,2\pi)$. Вследствие случайности фаз образующаяся в результате интерференции картина волнового поля будет иметь нерегулярный характер со случайным распределением в пространстве максимумов и минимумов поля.

Вследствие экспоненциального развития хаотической неустойчивости лучей образование спекл-структуры происходит на самом коротком масштабе порядка длины расцепления корреляции фаз колебаний луча $z_r \approx 1/\omega \ln K$, где $K \gg 1$ — параметр, определяемый соотношением (3.9).

Это приводит к потере информации о деталях структуры волнового фронта исходного поля, т.е. к необратимости волнового поля волны.

Строгое рассмотрение описанной картины образования спекл-структуры волнового поля содержится в [20].

Следует отметить, что система периодических неустойчивостей лучей может также приводить к образованию регулярной спекл-структуры, несмотря на то что соседние лучи стохастические. Это явление, известное под названием "шрамы" в задачах квантового хаоса [76], пока еще не исследовано.

Полезно провести аналогию рассмотренной задачи с близкими задачами квантовой механики. Возможность появления квазислучайного рельефа вол-

новых функций в квантовых K-системах (т.е. в системах с динамическим хаосом в квазиклассическом пределе) обсуждалась в [2, 69, 70, 76]. Близкая к случаю спекл-структуры картина узловых линий волновых функций в квантовых K-системах была получена при численном анализе [71, 72].

8.3. Вопрос о различии между спекл-структурами, образующимися в волноводе с регулярной динамикой лучей и волноводе, где развивается стохастическая неустойчивость лучей.

Характерный масштаб образования спекл-структуры поля в случае стохастической неустойчивости лучей z_r существенно меньше соответствующей длины z_0 в регулярном волноводе: $z_r \ll z_0$. Наличие слабой частичной когерентности исходной волны в пространстве или во времени приводит к дополнительному замыванию спекл-структуры. Пусть исходное излучение обладает конечной шириной спектральной линии $\Delta\nu$ вокруг центральной частоты ν_0. Тогда в регулярном волноводе, обладающем межмодовой дисперсией, замывание спекл-структуры происходит на расстоянии $z_c \approx z_0\nu_0/\Delta\nu \gg z_0$ [74, 75], где z_0 — характерный масштаб образования спекл-структуры (8.4). С другой стороны, в случае хаотической неустойчивости, по-видимому, следует ожидать, что замывание спекл-структуры происходит на довольно коротком расстоянии, порядка $z_s \sim z_r \ln(\nu_0/\Delta\nu)$. При этом $z_s \ll z_c$. Однако на самом деле этот вопрос в настоящее время довольно сложный и требует строгого учета волновых эффектов.

Таким образом, наличие стохастической неустойчивости лучей в волноводных каналах приводит к двоякому эффекту:

1) распределение спеклов приобретает случайный характер;

2) любое слабое уширение на входе приводит к необратимому размытию изображения.

Экспоненциально быстрое замывание спекл-структуры поля при слабой некогерентности исходного поля имеет важное значение в системах передачи информации по волноводным каналам, и в частности в волоконно-оптических линиях связи для подавления шумов, вызванных спекл-структурой поля.

9. Заключение

Приведенные в обзоре результаты были получены в рамках геометрической оптики. Поэтому необходимо обсудить вопрос об ограничениях, накладываемых волновыми эффектами. Необходимым условием применимости приближения геометрической оптики является плавность изменения показателя преломления среды $n(\mathbf{r})$ в масштабах порядка длины волны.

Дополнительные ограничения возникают в процессе распространения волны вследствие накапливания волновых поправок, связанных с расплыванием волнового пакета либо из-за слабой нелинейной расходимости колебаний лучей, либо из-за их сильной стохастической расходимости.

Первый случай является достаточно обычным. Он связан с нелинейностью лучевой динамики и аналогичен расплыванию волнового пакета в квантовой механике частицы, движущейся в ангармоническом потенциале. Характерный масштаб z_D, начиная с которого проявляются волновые эффекты, определяется нелинейной частотой колебаний луча $\omega(I)$ и равен [17]

$$z_D \approx 2\pi k \left[\frac{d\omega(I)}{dI}\right]^{-1}, \tag{9.1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Для волновода с профилем показателя преломления (3.18) значение z_D имеет порядок

$$z_D \approx 2\pi k a^2 \left[n_\infty^2 + n_0^2 \Delta \left(\frac{I_s - I}{I_s} \right)^2 \right]^{1/2} n_0^{-1}. \tag{9.2}$$

Минимальное значение z_D имеет порядок дифракционной длины для пучка с радиусом порядка эффективной ширины волновода. Поскольку $ka \gg 1$, то из (9.2) и из результатов раздела 4 следует, что фрактальные свойства лучей (например, фрактальные свойства времени распространения сигнала) начинают проявляться раньше, чем волновые эффекты.

В случае стохастической неустойчивости лучей волновые эффекты по аналогии с соответствующими задачами квантовой механики [2] начинают проявляться на гораздо более близких расстояниях из-за экспоненциально быстрого расплывания волнового пакета. В этом, может быть, заключается одно из наиболее сильных проявлений стохастичности. Существует достаточно обстоятельное исследование вопроса о времени, в течение которого происходит нарушение квазиклассического приближения в квантовой механике [2, 69, 70, 77]. Можно указать два масштаба времени, на которых происходит нарушение квазиклассического описания квантовомеханической системы, хаотической в классическом пределе. На самом коротком масштабе времени t_0, порядка $\mathrm{const} \cdot \ln(1/\hbar)$, останавливается экспоненциальный рост расходимости близких траекторий [72]. Тем не менее классическая диффузия в системе продолжается до времени релаксации t_R

$$t_R \approx \hbar\rho = \frac{\hbar}{\Delta},$$

где ρ — плотность квазиэнергетического спектра квантовой системы, Δ — среднее расстояние между энергетическими уровнями [77].

Нечто аналогичное должно существовать и для оценки расстояний, на которых применимо приближение геометрической оптики. В квантовой механике малым параметром квазиклассичности является величина $\hbar/I_0$ (см. (1.1)), где I_0 — характерное действие задачи. Для лучей роль такого параметра играет величина $1/kl$, где l — характерный масштаб задачи. Поэтому можно ожидать, что продольное расстояние z_0, где нарушается простая геометрическая картина динамики лучей, так же как и в квантовой механике, будет порядка $\mathrm{const} \cdot \ln(\mathrm{const}/kl)$, а диффузия лучей продолжается до расстояний релаксации $z_R \sim \rho$, где ρ — плотность квазиволновых чисел волновода с периодическими неоднородностями вдоль его оси. Определение входящих сюда констант является очень важной задачей. В настоящее время результаты в этом направлении отсутствуют.

Следует подчеркнуть глубокую аналогию между проблемой стохастической динамики лучей и проблемой квантового хаоса. Аналоги эффектов подавления хаоса в квантовой механике (в частности, явление "шрамов" [76]) могут оказаться важными для различных физических приложений в области акустики и распространения волн в неоднородных средах. Открывающиеся здесь перспективы требуют специального обсуждения, выходящего за рамки данного обзора.

Авторы признательны Б.В. Чирикову за просмотр рукописи и ценные замечания. Мы также благодарны В.С. Булдыреву, В.С. Буслаеву, Р.Ф. Матвееву, Ю.А. Кравцову, А.С. Чиркину за обсуждение результатов, вошедших в обзор.

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) В действительности, условия (1.1) и (1.2) являются некоторым упрощением проблемы, и существуют более тонкие ограничения на возможность применения квазиклассического приближения и геометрической оптики.

(2) К моменту написания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Заславский Г.М., Чириков Б.В.*//УФН. 1971. Т. 105. С. 3.
2. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. — М.: Паука, 1984.
3. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1983.
4. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1989.
5. Акустика океана/Под ред. Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1974.
6. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Дж. Келлера, Дж. Пападакиса. — М.: Мир, 1980.
7. Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана/Под ред. А.С. Монина, В.М. Каменковича. — М.: Наука, 1978.
8. *Гуревич А.С., Цедилина Е.Е,* Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
9. *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980.
10. *Снайдер А., Лау Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Мир, 1987.
[11] *Маркузе Д.* Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
12. *Burridge R.* Some Mathematical Topics in Seismology. — Courant Inst. of Mathem. Sci., New York Univ., 1976.
13. *Кузнецов В.В.* Искусственные квазипериодические неоднородности в нижней ионосфере//Тр. Ин-та геологии и геофизики СО АН СССР, Новосибирск. 1987. Вып. 856.
14. *Дробжев В.И., Куделин Г.М., Нургожин Б.И. и др.*//Волновые возмущения в ионосфере. — Алма-Ата: Наука, 1975. С. 9
15. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука. 1970.
16. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Паука, 1980.
17. *Абдулов С.С., Заславский Г.М.*//ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 524.
18. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.*// Акуст. ж. 1988. Т. 34. С. 578.
19. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.*// ЖЭТФ. 1983. т. 85. с. 1573.
20. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.*// ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 763.
[21] *Чигарев А.В., Чигарев Ю.В.*//Акуст. ж. 1978. Т, 24. С. 765.
22. *Сливинский А.П.*//Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1981. Т. 24. С. 1386.
23. *Palmer D.R., Brown M.G., Tappert F.D., Bezdek H.F.*//Geophys. Res. Lett. 1988. V. 15. P. 569.
24. *Абдуллаев С.С., Кравцов Ю.А. и др.*//Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1986. Т. 29. С. 1928.
25. *Palmer D.R., Georges T.M., Jones R.M.*//Proc. of the First French Conference on Acoustics. — Lyon, April, 1990.
26. *Tappert F., Brown M., Goni G.*//Phys. Lett. Sen. A, 1991. V. 153. P. 181.
27. *Курант Р.* Уравнения в частных производных. — М.: Мир, 1964.
28. *Осташев В.Е.*// Изв. АН СССР. Сер. "ФАО". 1989. Т. 25. С. 899.
29. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. — М.: Наука, 1981.
30. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.*//Изв. АН СССР. Сер. "ФАО". 1987. Т. 23, С. 724.
[31] *Ugincius P.*// J. Acous. Soc. Am. 1972. V. 51. P. 1759,
32. *Chessel C.I.*//Ibidem. V. 53. P. 83.
33. *Thompson R.T.*//Ibidem. V. 51. P. 1675.
34. *Hamilton W.R.*// Trans. Roy. Irish. Acad., 1828. V. 15. P. 69; 1830. V. 16. P. 4, 93; 1837. V. 17. P. 1.
35. *Гольдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука, 1975.
36. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
37. *Шатров А.Д.*// Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1977. Т. 20. С. 1153.
38. *Беланов А.С., Григорьянц В.В., Потапов В.Т., Шатров А.Д.*//Итоги науки и техники. Сер. "Радиотехника". Т. 39. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1984.
39. *Нейштадт А.И.*//Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1982. Т. 25. С. 218.

40. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. — М.: О Г И З, 1941.
[41] *Gustavson F.G.*//Astronom. J. 1966. V. 71. P. 610.
42. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики//Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики". Т. 3. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985.
43. *Robnik M.*// J . Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 109.
44. *Ali M.K.*// J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2565.
45. *Wood R.W., Ali M.K.*// J. Phys. Ser. A. 1987. V. 20. P. 351.
46. *Franchi E.R., Jacobson M.J.*// J. Acous. Soc. Am. 1972. V. 52. P. 316.
47. *Афанасьев Н.Т., Свистунов К.Ф., Тинин М.В.*//Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1982. Т. 25. С 133.
48. *Bak P., Bruinsma R.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 249.
49. *Aubry S.*// J. de Phys. 1983. T. 44. P. 147.
50. *Aref H.*//Ann. Rev. Fliud Mech. 1983. V. 15. P. 345.
[51] *Bleher S., Ott E., Grebogi C.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 919.
52. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. — New York: W.H. Freeman and Co. 1982.
53. *Bak P.*//Phys. Today. Dec. 1986." P. 38.
54. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.*//УФН. 1985. Т. 146. С. 493.
55. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.*// Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1637.
56. *Yang S.*// Radio Sci. 1981. V. 16. P. 549.
57. *Brenchi M., Checcacci P.P., Faiciaci R., Scheggi A.M.*//Ibidem. P. 535.
58. *Bartelemy* A, *Arnaud J.*// J Opt. Soc. Am. 1981. V. 71. P. 32.
59. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивое А.Н. Шатров А.Д.*// РЭ. 1979. Т. 24. С. 1245.
60. *Колесниченко Ю.В., Шевченко В.В.*//РЭ. 1988. Т. 33. С. 1399; Радиотехника. 1988. № 8. С. 78.
[61] *Синай Я.Г.*//УМН. 1970. Т. 25, вып. 2. С. 141.
62. *Бунимович Л.А.*//Функц. анализ и его приложения. 1974. Т. 8. С. 73.
63. *Benettin G., Strelcyn J.-M.*//Phys. Rev. Ser. A. 1978. V. 17. P. 773.
64. *Абдуллаев С.С.*//Изв. вузов СССР. Сер. "Радиофизика". 1985. Т. 28. С. 1266.
65. *Шатров А.Д.*//Ibidem. 1981. Т. 26. С. 1.
66. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1975.
67. *Goodman J.W.*//Laser Speckle and Related Phenomenona. — Berlin; New York: Springer-Verlag, 1975.
68. *Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В.* Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
69. *Zaslavsky G.M.*//Phys. Rep. 1981. V. 80. P. 157.
70. *Berman G.P.*, *Zaslavsky G.M.*//Physica. Ser. A. 1978. V. 91. P. 450.
[71] *McDonald S.W., Kaufman A.M.*//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1189.
72. *Noid D.W.*, *Koszykowki M.L, Tabor M, Marcus R.A.*// J Chem. Phys. 1980. V. 72. P. 6169.
73. *Crosignani B., Di Porto P.*// J. Appl. Phys. 1973. V. 44. P. 4616.
74. *Дерюгин И.А., Абдуллаев С.С., Мирзаев А.Т.*//КЭ. 1977. Т. 4. С. 2173.
75. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.*//КЭ. 1987. Т. 14. С. 937.
76. *Богомольный Е.Б.*//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 436.
11. Chirikov B.V, Izrailev F.M., Shepelyansky D.L.//Physica. Ser. D. 1988. V. 33. P. 77.

Статья поступила 24.09.90 г.,
после доработки 16.05.91 г.