ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Здесь молекулярное притяжение конденсированных тел вычисляется как результат изменения спектра электромагнитных флуктуаций. Как указывает автор, частный случай притяжения металлических тел ранее изучен Казимиром [16].

[2] Более точная формула этого члена:

$$\int \frac{dk}{k}(BR^2 + CR^{ik}R_{ik} + DR^{iklm}R_{iklm}) + ER^{iklm}R_{iklm}(A, B, C, D, E \sim 1).$$

Согласно [3, 4] $\int k^{-1}dk \sim 137$, поэтому третий член существен при $R \gtrsim 1/137$ (в гравитационных единицах), т.е. в окрестности особой точки фридмановской модели Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. а) *Лифшиц Е.М.*//ЖЭТФ. 1954. Т. 29. С. 94.
   б) *Casimir H.B.C.*//Proc. Nederl. Akad, Wetensch. 1948. V. 60. P. 793.
2. *Зельдович Я.Б.*// Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 900.
3. *Фрадкин Е.С.*// ДАН СССР. 1954. Т. 98. С. 47; 1955. Т. 100. С. 897; ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 750.
   Ландау Л.Д., Померанчук И.Я.//ДАН СССР. 1955. Т. 102. С. 489.
4. *Зельдович Я.Б.*//Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 1233.

539.12.01

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

А.Д. *Сахаров*

(физический институт им. П.Н. Лебедева АН СССР)

(ТиМФ. 1975. Т. 23, № 2. С. 178 — 190)

Эффективная функция Лагранжа поляризации вакуума выражена через спектральную плотность собственных значений волнового уравнения и через связанную с ней 5-мерную функцию Грина, введенную В.А. Фоком в его методе 5-й координаты. Метод применим для произвольно сильных внешних полей, но в пренебрежении взаимодействием вакуумных полей. Конкретные вычисления проведены для поляризации вакуума гравитационным и электромагнитным полями.

1. Введение. Статья является методическим и математическим дополнением к работам автора [1] и [2]. В этих работах была изложена гипотеза "нулевого лагранжиана" гравитационного и электромагнитного полей (в последнем случае исходная идея принадлежит Померанчуку и Ландау, Фрадкину и Зельдовичу [3]). В простейшей форме гипотеза сводится к тому, что функция Лагранжа бозонных полей (гравитационного, электромагнитного и мезонных) порождена эффектами поляризации вакуума фермионов. Термин поляризация вакуума в этой работе употребляется в более широком смысле, чем это обычно принято, — к поляризации отнесены лагранжевы функции свободных бозонных полей и даже космологическая постоянная.

В этой работе мы изложим метод вычисления поляризационной эффективной функции Лагранжа, основанный на понятии спектральной плотности волнового уравнения (раздел 2). В разделе 3 находится связь спектральной плотности с функцией Грина, определенной в пятимерном пространстве (физическое пространство, дополненное пятой вспомогательной координатой). Вспомогательная пятая координата ("собственное время") впервые была введена В.А. Фоком в 1937 г. [9]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах Швингера и других авторов [10]. Наш способ вывода общей формулы (25) для эффективной поляризационной функции Лагранжа отличается от подхода этих авторов.

В разделе 4 общий метод применяется к гравитационному полю. В модельной теории формальным обрезанием расходящихся интегралов найдено выражение для гравитационной постоянной, имеющее правильный знак ($G > 0$). В разделе 5 метод иллюстрируется на примере электромагнитного поля, вновь получены хорошо известные формулы поляризации вакуума электромагнитным полем. Обозначения: сигнатура метрического тензора $(+\ -\ -\ -)$; применяются гравитационные единицы, в которых $G = \hbar = c = 1$.

2. Спектральная плотность собственных значений волнового уравнения. В работе [2] содержится предварительный набросок идеи нового метода расчета поляризации вакуума. В целях связности изложения часть этого раздела (формулы (1) — (5)) представляют собой повторение этих идей с некоторыми необходимыми уточнениями.

Рассматривается эффект поляризации вакуума внешним полем $\psi(x)$, которое считаем заданным. Все те элементарные поля, с которыми взаимодействует поле ψ, обозначим $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j, \ldots$. Пренебрегаем взаимодействием полей φ между собой. Это основное предположение этой работы, эквивалентное ограничению "однопетлевыми" диаграммами. Благодаря этому предположению физическое значение работы не слишком велико, она скорей носит методический или математический характер. Для наиболее простой иллюстрации идеи работы [2] поля φ будем считать нейтральными скалярными, а поле ψ — заданным нейтральным тензорным g_{ik} или векторным A_i полем. g_{ik} — метрический тензор гравитационного поля, A_i — потенциал электромагнитного поля.

Пусть поле $\psi(x)$ задано в некотором 4-мерном объеме V. Суммарное действие полей φ_j в этом объеме есть функционал $S(\psi)$. Значение функционала при $\psi = 0$ (вакуумное значение) обозначим 5(0). Очевидно, $S(\psi) - S(0)$ есть эффект поляризации вакуума полем ψ. По гипотезе нулевого лагранжиана эта разность и есть эффективное действие поля ψ. Функционал $S(\psi) = \Sigma S_j$ есть сумма функционалов для отдельных полей φ_j. Вычисляем одно из этих слагаемых (опуская для краткости индекс j). Разлагаем φ в ряд по собственным функциям волнового уравнения (в простейшем случае это просто разложение в четырехмерный ряд Фурье):

$$\varphi = \sum z_i\varphi_i, \quad \Box_\psi\varphi_i + (m^2 + \Lambda_i)\varphi_i = 0, \tag{1}$$

$$\int dx(-g)^{1/2}\varphi_i\varphi_{i'}^{+} = \delta_{ii'}. \tag{2}$$

Здесь символ $\Box_\psi$ означает обобщенный оператор Д'Аламбера в присутствии заданного поля ψ. При $\psi = 0$ имеем

$$\Box_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Если $\psi = A_i$ — электромагнитное поле, то заменяем $\nabla \to \nabla_\psi = \nabla - ieA$. Если $\psi = g_{ik}$, то $\Box_\psi$ есть оператор Бельтрами[1] ●. ψ_i^+ — собственная функция сопряженного уравнения, Λ_i — собственное значение волнового уравнения, каждое Λ_i есть функционал ψ. Если $\psi = 0$, $\Lambda_i = \omega_i^2 - k_i^2 - m^2$. Классическое действие для поля φ примем равным

$$S_{\text{кл}} = \sum_i S_i, \quad S_i = \frac{z_i^2}{2}\Lambda_i. \tag{3}$$

Эта формула находится в соответствии с классическими уравнениями движения. Действие квантовых флуктуаций находим как фазу континуального интеграла при вариации φ:

$$S = \arg\int\{\delta\varphi\}e^{iS_{\delta\varnothing}} = \sum_i \arg\int_{-\infty}^{+\infty} dz_i e^{iz_i^2\Lambda_i/2} = \frac{\pi}{4}\sum \operatorname{sign}\Lambda_i. \tag{4}$$

Интеграл по dz_i вычислен заменой переменных

$$iz_i^2 = -\zeta_i^2 \operatorname{sign}\Lambda_i, \quad dz_i = d\zeta_i e^{i(\pi/2)\operatorname{sign}\Lambda_i}.$$

Обобщая (4) на наличие спинорных полей φ_j и учитывая статистический вес g_j, имеем общую формулу

$$S(\psi) = \frac{\pi}{4}\sum_j g_j C_j \sum_i \operatorname{sign} r\Lambda_{ij}. \tag{5}$$

Здесь

$$C_j = \begin{cases} +1, & \text{если поле } \varphi_j \text{ бозонное,} \\ -1, & \text{если поле } \varphi_j \text{ фермионное.} \end{cases} \tag{5а}$$

Множитель C_j учитывает, что для спинорных полей вклад в действие имеет обратный знак. В сумме (5) формально введен фактор сходимости неизвестной физической природы. "Обрезанная" весовая функция равна

$$\operatorname{sign} r\Lambda = \begin{cases} \operatorname{sign}\Lambda & \text{при} \quad |\Lambda| < \Lambda_0, \\ 0 & \text{при} \quad |\Lambda| > \Lambda_0 \end{cases} \tag{5б}$$

или

$$\operatorname{sign} r\Lambda = e^{-|\Lambda|/\Lambda_0} \operatorname{sign} \Lambda, \tag{5в}$$

Λ_0 — квадрат обрезающей массы. Примем $\Lambda_0 \sim 1$ в гравитационных единицах.

Для дальнейшей дискуссии отвлечемся от конкретного вида функции $\operatorname{sign} r\Lambda$ и рассмотрим сумму с произвольной функцией $\Phi(\Lambda)$

$$\Sigma_\Phi = \sum_i \Phi(\Lambda_i). \tag{6}$$

Сумма Ф является расходящейся, так как в любом интервале $(\Lambda, \Lambda + d\Lambda)$ содержится бесконечное число собственных значений Λ_i. Например, в случае $\psi = 0$, приняв в качестве объема V параллелепипед, находим, что точки k_{i0}, k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} образуют бесконечную периодическую 4-мерную решетку. Между двумя гиперболоидами $\Lambda = \mathrm{const}$ и $\Lambda + d\Lambda = \mathrm{const}$ расположен бесконечный объем, содержащий бесконечное число узлов решетки. Аналогичным образом обстоит дело в общем случае.

Введем понятие "условной сходимости" суммы Ф. Для простоты ограничимся случаем, когда объем V топологически эквивалентен 4-мерному кубу. Непрерывно деформируя V в куб L^4 и устремляя $\psi \to 0$, переводим функции φ_i в функции вида $\exp[(2\pi i/L)(n_0x_0 - n_1x_1 - n_2x_2 - n_3x_3)]$. Определим инвариант процесса деформации: $J(i) = n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Сумма Ф условно сходящаяся, если существует предел

$$\lim_{J_0 \to \infty} \sum_i e^{-J(i)/J_0} \Phi(\Lambda_i) \overset{\text{def}}{=} \Sigma_\Phi. \tag{7}$$

Возможны и другие эквивалентные определения.

Сумма (6) является условно сходящейся, если выполнены условия суммируемости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \Phi(\Lambda) = 0, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \Lambda \Phi(\Lambda) = 0, \tag{9}$$

и функция $\Phi(\Lambda)$ достаточно быстро убывает при $\Lambda \to \infty$; идея доказательства этого утверждения намечена в следующем разделе.

Определим теперь спектральную плотность собственных значений волнового уравнения $P(\Lambda)$, потребовав

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \{\sum_i \Phi_k(\varepsilon\Lambda_i) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(\varepsilon\Lambda) P(\Lambda) d\Lambda\} = 0. \tag{10}$$

Функции Φ_k удовлетворяют некоторым условиям, зависящим от k. При

$k = 1{,}2$ предполагаем, что $\Phi(\varepsilon\Lambda)/\varepsilon$ не стремится к бесконечности при $\delta \to 0$.

В силу условий (8), (9) функция $P(\Lambda)$ определяется формулой (10) неоднозначно, а именно с точностью до прибавления произвольной линейной функции Λ.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\Lambda)P(\Lambda)\mathrm{d}\Lambda$ не изменяется при преобразовании

$$P(\Lambda) \to P(\Lambda) + A\Lambda + B. \tag{11}$$

Представляя функцию $P(\Lambda)$ в виде ряда

$$P(\Lambda) = C_0\lambda\ln\frac{|\lambda|}{\lambda_0} + C_1\ln\frac{|\lambda|}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda} + \frac{C_3}{\lambda^2} + \ldots, \tag{12}$$

где $\lambda = m^2 + \Lambda$, определяем коэффициенты C_0, C_1 и т.д. последовательно из формулы (10). Эти коэффициенты не зависят от вида функции Φ. Коэффициенты λ_0 и λ_1 произвольны в соответствии с (11).

3. Метод функций Грина в пятимерном пространстве. В работе Мак-Кина и Зингера [4] рассмотрено уравнение Гельмгольца в n-мерном римановом пространстве с дефинитной метрикой (мы слегка изменим их обозначения):

$$\Delta\varphi_i + \lambda_i\varphi_i = 0. \tag{13}$$

Показано, что сумма

$$\Sigma(\tau) = \sum_i e^{-i\lambda_i\tau} \tag{14}$$

может быть вычислена с помощью функции Грина во вспомогательном $n + 1$-мерном пространстве. Здесь функция Грина $G(x_0, x_1, \tau)$ — это нормированное сингулярное решение уравнения

$$\Delta G = \partial G/\partial\tau. \tag{15}$$

В [4] доказано, что

$$\Sigma(\tau) = \int\mathrm{d}x(g)^{1/2}G(x, x, \tau), \quad x = x_0 = x_1. \tag{16}$$

Как указывают Мак-Кин и Зингер, одним из авторов исходной идеи является М. Кац.

Мы применим здесь аналогичный метод к нахождению функции плотности $P(\Lambda)$ в случае реального физического пространства, т.е. для волнового уравнения (1). Обозначив вспомогательную пятую перменную буквой l, напишем по аналогии с (15) уравнение для пятимерной функции Грина

$$\Box_\psi G = i\partial G/\partial l. \tag{17}$$

Уравнение типа (17) впервые введено В.А. Фоком [9]. Функция Грина G зависит от 9 переменных t_0, x_0, y_0, z_0 (сокращенно x_0), t_1, x_1, y_1, z_1 (сокращенно x_1), $l = l_1 - l_0$. Если функция φ многокомпонентная, G зависит также от дискретных чисел начального и конечного по l состояния, т.е. является матрицей $G_{m_0 m_1}$ (не должно вызывать путаницы обозначение одной и той же буквой дискретной переменной и массы поля m). Функция Грина , определенная формулой (17), удовлетворяет интегральному соотношению, аналогичному формуле (16),

$$\Sigma(l) = \sum_i e^{i\lambda_i l} = \int (\mathrm{d}x)(-g)^{1/2} \mathrm{Sp}\, G_{m_0 m_1}(x, x, l), \quad x = x_1 = x_0, \tag{18}$$

λ_i в этой формуле — собственные числа волнового уравнения

$$\Box_\psi \varphi_i + \lambda_i \varphi_i = 0, \quad \lambda_i = \Lambda_i + m^2.$$

Доказательство формулы (18) основано на представлении функции Грина в форме условно сходящейся суммы (см. выше (7)):

$$G_{m_0 m_1}(x_0, x_1, l) = \lim_{J_0 \to \infty} \sum_i \exp\{-\frac{J}{J_0} + il\lambda_i\} \varphi_i(x_1, m_1) \varphi_i^+(x_0, m_0). \tag{19}$$

Определенная (19) функция удовлетворяет уравнению (17) и переходит в четырехмерную δ-функцию при $l \to 0$ в силу соотношений ортогональности

$$\lim_{J_0 \to \infty} \sum_i e^{-J/J_0} \varphi_i(x_1, m_1) \varphi_i^+(x_0, m_0) = \delta(x_0 - x_1) \delta_{m_0 m_1}.$$

Полагая в (19) $x_1 = x_0 = x$ и $m_1 = m_0 = m$, интегрируем по x и суммируем по m. Приходим к (18), где сумма по i также подразумевается в смысле (7). Факт сходимости суммы находится в соответствии с тем, что функция $e^{i\lambda l}$ удовлетворяет при $l \neq 0$ условиям (8) и (9). Покажем теперь, каким образом эти условия связаны со сходимостью суммы (7) для произвольной весовой функции $\Phi(\Lambda)$. Положим

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(l) e^{i\lambda l} \mathrm{d}l, \quad f(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{-i\lambda l} \mathrm{d}\lambda.$$

Из (8) и (9) следует $f(0) = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)(0) = 0$, что допускает сходимость интеграла $I = \int \mathrm{d}l \mathrm{d}x\, \mathrm{Sp}\, G(x, x, l) f(l)$ в окрестности $l = 0$, несмотря на наличие у $G(t)$ особенности при $l = 0$ вида

$$\frac{\alpha}{l|l|} + \frac{\beta}{|l|}$$

(см. ниже (23)). Интеграл сходится в этом случае при наличии дополнительных мало ограничительных условий на функцию $\Phi(\Lambda)$ (например, при

$\Phi(\Lambda)$, ограниченной по модулю и убывающей при $\lambda \to \pm\infty$ таким образом, что обеспечивается абсолютная сходимость интеграла этой функции).

Из (18) следует

$$I = \int \mathrm{d}l \lim_{J_0\to\infty} \sum_i \exp\{-\frac{J}{J_0} + i\lambda_i l\} f(l)$$

или, меняя порядок суммирования и интегрирования,

$$\lim_{J_0\to\infty} \sum_i e^{-J/J_0} \Phi(\lambda_i) = I.$$

Таким образом, сумма (7) сходится к конечному значению I.

Введем теперь локальную спектральную плотность волнового уравнения $\rho_m(\lambda, x)$, связанную с интегральной плотностью $P(\lambda)$ соотношением

$$\sum_m \int \mathrm{d}x(-g)^{1/2} \rho_m(\lambda, x) = P(\lambda) \tag{20}$$

(напомню, что $\lambda = m^2 + \Lambda$).

Из (18) и (20) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda, x, m) e^{i\lambda l} \mathrm{d}\lambda = G_{mm}(x, x, l). \tag{21}$$

Найдем вид функции G в плоском пространстве при $\psi = 0$. Имеем

$$G_0 = G_t G_x G_y G_z, \quad G_t = a_t \frac{1}{(4\pi l)^{1/2}} e^{-it^2/4l}, \quad G_x = \frac{a_x}{(4\pi l)^{1/2}} e^{ix^2/4l}$$

и аналогично для y, z. Нормировочные коэффициенты определяются из условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t G_t(t, t, l) = 1$$

и т.д. отдельно для $l > 0$ и $l < 0$.

Находим

$$G_0 = -\frac{i \operatorname{sign} l}{(4\pi l)^2} e^{-i(t^2 - x^2)/4l}. \tag{22}$$

Записав $\rho(\lambda)$ и $G(l)$ в виде рядов, имеем

$$\rho_m = a_0 \lambda \ln\frac{|\lambda|}{\lambda_0} + a_1 \ln\frac{|\lambda|}{\lambda_1} + a_2\lambda^{-1} + a_3\lambda^{-2} + \ldots, \tag{23}$$

$$G_{mm} = \operatorname{sign} l\{A_0 l^{-2} + A_1 l^{-1} + A_2 + A_3 l + \ldots\},$$

$$a_0 = iA_0/\pi = 1/16\pi^3, \quad a_1 = -A_1/\pi, \quad a_2 = -iA_2/\pi,$$

$$a_3 = -A_3/\pi, \quad a_4 = 2iA_4/\pi \ \text{и т.д.}$$

Указанная связь коэффициентов a и A следует из формулы (21). Из формулы (5) следует, что приращение эффективного лагранжиана, обусловленное поляризацией вакуума частиц поля φ при наличии некоторого внешнего поля ψ,

$$\Delta\mathcal{L}_j = \frac{\pi C_j}{4}\sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \operatorname{sign} r\Lambda\cdot(\rho_\psi - \rho_0). \tag{24}$$

Применяя к (24) и (20) теорему теории интегралов Фурье о свертке, подставим $\Delta\mathcal{L}_j$ в виде интеграла по вспомогательной переменной l:

$$\Delta\mathcal{L}_j = \frac{\pi C_j}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dl Z(l) R_\psi(l),$$

$$R_\psi(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_m(\rho_\psi - \rho_0)e^{i\lambda l}d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{Sp}\, G_\psi - \mathrm{Sp}\, G_0),$$

$$Z(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sign} r(\lambda - m_j^2)e^{-i\lambda l}d\lambda = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}e^{-im_j^2 l}\mathrm{Reg}(1/l),$$

где $\mathrm{Reg}(1/l)$ означает функцию, "обрезанную" при $|l| \lesssim 1/\Lambda_0$ (используя (5в), имеем $\mathrm{Reg}(1/l) = l/l^2 + \Lambda_0^{-2})$. Подставляя, находим

$$\Delta\mathcal{L}_j = -\frac{iC_j}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dl\, \mathrm{Reg}(1/l)e^{-im_j^2 l}(\mathrm{Sp}\, G_\psi - \mathrm{Sp}\, G_0) =$$

$$= \frac{C_j}{2}\int_{1/\Lambda_0}^{\infty}\frac{dl}{l}\,\mathrm{Im}\{e^{-im_j^2 l}(\mathrm{Sp}\, G_\psi - \mathrm{Sp}\, G_0)\} =$$

$$= \frac{C_j}{2}\int_{1/\Lambda_0}^{\infty}\frac{dl}{l}\{\cos m_j^2 l\,(\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\, G_\psi - \mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\, G_0) - \sin m_j^2 l\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\, G_\psi\}. \tag{25}$$

4. Космологическая постоянная и поляризация вакуума гравитационным полем. Лагранжева функция $_0$ плоского пространства при $\psi = 0$ с точностью до знака есть космологическая постоянная Эйнштейна (ср. с постановкой проблемы и вычислениями в работе Я.Б. Зельдовича [5]). При выполнении условий суммирования (8) и (9) на основании (5) имеем

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\pi}{4}\sum_j g_j C_j \sum_i \operatorname{sign} r\Lambda_{ij} = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \sum_j C_j\rho_{0j}(\lambda)\operatorname{sign} r(\lambda - m_j^2), \tag{26}$$

где

$$\rho_{0j} = g_j\left(\lambda \ln\frac{|\lambda|}{\lambda_0}\right)/16\pi^3.$$

Напомню, что $C_{.} = \pm 1$ для бозонов (фермионов). Условие суммируемости (8) выполняется автоматически (так как $\int \operatorname{sign} r(\Lambda)\mathrm{d}\lambda = 0$), условие (9) сводится к

$$\sum_j g_j C_j = 0. \tag{27}$$

Вычисление интеграла (26) при условии (27) можно произвести с помощью формулы типа (25)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\int\limits_{1/\Lambda_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}l}{l}\sum_j g_j C_j \frac{\cos m_j^2 l}{16\pi^2 l^2}. \tag{28}$$

Имеем (с логарифмической точностью)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{64\pi^2}\sum g_j C_j m_j^4 \ln\frac{\Lambda_0}{m_j^2}. \tag{29}$$

В действительности, как известно, величина $\mathcal{L}_0$ (с точностью до знака — космологическая постоянная Эйнштейна) или равна 0, или чрезвычайно мала. В модельной теории невзаимодействующих частиц равенство нулю $\mathcal{L}_0$ может иметь место в результате компенсации вкладов бозонов и фермионов. В более реалистической теории с учетом взаимодействия и спонтанного нарушения симметрии равенство нулю $\mathcal{L}_0$ следует рассматривать как физическое условие, налагаемое на постоянные, входящие в затравочный лагранжиан (2) ●.

В искривленном римановом пространстве (т.е. в пространстве, в котором тензор Римана R_{iklm} отличен от нуля) $\rho(\lambda)$, $G(l)$ и изменяются (поляризация вакуума гравитационным полем).

Представим функцию Грина в форме

$$G_{Rj} = G_{0j}(1 + iQRl - [U_j R^2 + V_j R^{ik}R_{ik} +$$

$$+ W_j R^{iklm}R_{iklm} + Y\Box R\,]l^2 + \ldots). \tag{30}$$

Коэффициенты Q, U и т.д. найдены в дополнении 1 для скалярного, спинорного и векторного поля φ_j.

Подставляя в (25), с учетом $G_{0j} = -ig_j \operatorname{sign} l/16\pi^2 l^2$, имеем поправку первого порядка

$$\Delta\mathcal{L}_{1j} = -\frac{RQ_j C_j g_j}{2}\int\limits_{1/\Lambda_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}l}{l}\frac{\sin m_j^2 l}{16\pi^2 l}. \tag{31}$$

Аналогичное выражение для поправки второго порядка следующее

$$\Delta\mathscr{L}_{2j} = \frac{[U_jR^2 + V_jR^{ik} + \ldots]}{2} \int\limits_{1/\Lambda_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}l}{l} \frac{\cos m_j^2 l}{16\pi^2}. \tag{32}$$

Вычисление интегралов в (31) и (32) с логарифмической точностью дает

$$\Delta\mathscr{L}_{1j} = \frac{RQ_jC_jg_j}{32\pi^2} m_j^2 \ln \frac{\Lambda_0}{m_j^2}, \tag{31a}$$

$$\Delta\mathscr{L}_{2j} = \frac{[U_jR^2 + \ldots]}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda_0}{m_j^2}. \tag{32a}$$

Приравнивая по гипотезе нулевого лагранжиана сумму $\sum\limits_j \Delta\mathscr{L}_{1j} = -R/16\pi G$, находим, что гравитационная постоянная

$$G = 2\pi \left(\sum_j Q_jC_jg_jm_j^2 \ln \frac{\Lambda_0}{m_j^2}\right)^{-1}. \tag{33}$$

Таким образом, в модельной теории с формальным обрезанием при $|\Lambda| \sim \Lambda_0$ найден правильный знак $G > 0$ с учетом $Q_jC_j \geq 0$. Формула (33) даст правильное численное значение G ($= 1$ в выбранных единицах), если спектр масс элементарных полей продолжается до $m_j \sim G^{-1/2}$. Выражение (32а) расходится для частиц с массой покоя $m_j = 0$ (нейтрино, фотон, гравитон; последний случай требует специального рассмотрения).

Квадратичную поправку $\mathscr{L}_{2j}$ для гравитонов рассмотрел Де Витт [6]. Он предположил, что для частиц нулевой массы логарифмическая расходимость обрезается на инфракрасном пределе на длинах, зависящих от характера размера задачи L. Наша методика, поскольку она не требует разложения в ряд по степеням тензора кривизны, автоматически приводит к обрезанию инфракрасной расходимости при $l \sim L^2$.

Продемонстрируем это на примере скалярного поля без конформного члена в уравнении движения. Рассмотрим пространство с метрикой

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - L^2 \mathrm{sh}^2 \frac{r}{L} (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2).$$

Применяя метод, описанный в дополнении, находим $G(0, 0, l) = G_0(0, 0, l)e^{-il/L^2}$. Подставляя в (25), имеем

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{1}{32\pi^2} \int\limits_{1/\Lambda_0}^{\infty} \mathrm{d}l \frac{\left(1 - \cos \frac{l}{L^2}\right)}{l^3} = \frac{\ln(L^2\Lambda_0)}{64\pi^2 L^4}. \tag{34}$$

Коэффициент в выражении с учетом $U = 1/72$, $6/L^2 = R$ соответствует формуле (32а) с обрезанием $l_{max} = L^2$, $l_{min} = 1/\Lambda_0$.

5. Поляризация вакуума электромагнитным полем. Другой пример применения общего метода — поляризация вакуума заданным электромагнитным полем. Вектора E и H считаем не зависящими от координат. Если хотя бы один из инвариантов $J_1 = E^2 - H^2$ или $J_2 = (EH)^2$ отличен от нуля, существует преобразование Лоренца, в результате которого $\mathbf{E} \to \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} \to \mathbf{H}_0$, так что $E_0 \| H_0$ (и для определенности направлены по оси x). Вектор-потенциал в этой системе отсчета имеет компоненты $A_t = -xE_0/2$, $A_x = tE_0/2$, $A_y = -zH_0/2$, $A_z = yH_0/2$. Вычислим Δ в точке (0, 0, 0, 0). Рассмотрим сначала комплексное скалярное поле φ. Уравнение для функции Грина

$$\Box_A G_A = i\frac{\partial G_A}{\partial l}, \quad \Box_A = \left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_t\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - ie\mathbf{A}\right)^2, \tag{35}$$

имеет решение $G_A = G_1(0, 0, x, t, l)G_2(0, 0, y, z, l)$. Подставляя в (35)

$$G_1 = \frac{1}{4\pi l}\exp\{-i(t^2 - x^2)\alpha(l) + \beta(l)\},$$

$$G_2 = -\frac{i}{4\pi l}\exp\{i(y^2 + z^2)\gamma(l) + \beta(l)\}\operatorname{sign} l,$$

находим

$$\alpha = \frac{eE_0}{4}\operatorname{cth}(eE_0 l), \quad \beta = \ln\frac{eE_0 l}{\operatorname{sh}(eE_0 l)},$$

$$\gamma = \frac{eH_0}{4}\operatorname{ctg}(eH_0 l), \quad \delta = \ln\frac{eH_0 l}{\sin(eH_0 l)}.$$

Отсюда функция Грина скалярного комплексного поля при $x_1 = x_0 = (0, 0, 0, 0)$

$$G_A = -\frac{i\operatorname{sign} l}{(4\pi)^2}\frac{eE_0}{\operatorname{sh}(eE_0 l)}\frac{eH_0}{\sin(eH_0 l)}. \tag{36}$$

Для заряженного спинорного поля уравнение (35) следует рассматривать как четырехрядное с заменой (Σ_x и α_z — матрицы Дирака)

$$\begin{gathered}\Box_A \to \Box_{A'} = \delta_{m_0 m_1}\Box_A + \Sigma_x eH_0 + i\alpha_x eE_0,\\ G_{A'}(0, 0, l) = \delta_{m_0 m_1} G_A \exp l\{-ieH_0\Sigma + eE_0\alpha\}.\end{gathered} \tag{36a}$$

Вклад спинора с массой $m = m_j$ на основании (36а) и (25)

$$\Delta\mathcal{Z}_{jA} = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{1/\Lambda_0}^{\infty}\frac{dl}{l}\cos m^2 l\left\{\frac{e^2E_0H_0}{\operatorname{tg}(eH_0l)\operatorname{th}(eE_0l)} - \frac{1}{l^2}\right\} \tag{37}$$

(ср. с работой Баталина и Фрадкина [8]).

Разлагая cth и ctg в ряды[3] • и выражая полиномы по величинам E_0 и H_0 через инварианты J_1 и J_2, имеем для стоящего в фигурных скобках выражения (37)

$$\{\ldots\} = \frac{e^2J_1}{3} - e^4\left(\frac{J_1^2}{45} + \frac{7J_2}{45}\right)l^2 + e^6\left(\frac{2}{945}J_1^3 + \frac{13}{945}J_2J_1\right)l^4 + \ldots .$$

После интегрирования (37)

$$\Delta\mathcal{Z}_{jA} = \frac{e^2J_1}{24\pi^2}\ln\frac{\Delta}{m^2} + \frac{e^4(J_1^2 + 7J_2)}{360m^4\pi^2} + \frac{e^6(2J_1^3 + 13J_2J_1)}{1260\pi^2m^8} + \ldots . \tag{38}$$

Сумма логарифмических членов для всех заряженных частиц по гипотезе нулевого лагранжиана должна быть равна $\Delta\mathcal{Z}_1 = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)/8\pi$, из этого "правила сумм" может быть найдено значение постоянной тонкой структуры e^2 (Ландау и Померанчук [3]). Второй член в (38) — значение поляризации вакуума, найденное Вайскопфом в 1936 г. [7]. Третий член описывает 6-фотонные процессы.

6. Заключение. В работе содержится новый вывод формул метода собственного времени Фока — Швингера, основанный на понятии спектральной плотности волнового уравнения. Найдено выражение для поляризации гравитационным полем вакуума скалярных, спинорных и векторных частиц с точностью до членов, квадратичных относительно компонент тензора кривизны; для частиц нулевой массы получено выражение, не использующее разложение по степеням тензора кривизны и не содержащее инфракрасной расходимости. Метод проиллюстрирован также на примере электромагнитного поля. Развитая методика легко обобщается на любые процессы, которые можно описать однопетлевыми диаграммами. Например, методика вполне применима к вычислению эффективной плотности функции Лагранжа бозонных, а также фермионных полей с отличными от нуля массами и зарядами, к вычислению радиационных поправок к магнитному моменту частиц со спином в сколь угодно сильном внешнем поле (т.е. к вычислению не только "собственного" магнитного момента, но и поляризуемости), к вычислению эффективного лагранжиана векторных полей типа Янга — Миллса и т.п. Однако все эти расчеты при использовании методики в ее неизменном виде подразумевают ограничение однопетлевыми диаграммами. Пути обобщения методики на диаграммы более общего вида неясны.

Автор выражает благодарность участникам теоретического семинара ФИАН СССР за обсуждение предварительного варианта работы в июне 1970 г., а также Я.Б. Зельдовичу за многократные обсуждения исходных идей. Работы Я.Б. Зельдовича о космологической постоянной [5] и о нулевом лагранжиане электромагнитного поля [3] послужили важным толчком для данной работы. Автор благодарен И.М. Гельфанду за обсуждение и за обращение внимания на работу Мак-Кина и Зингера [4], а также за предоставление ее фотокопии.

Дополнение. Следуя методу Мак-Кина и Зингера, найдем функцию Грина n-мерного риманова пространства с дефинитной метрикой для скалярного, спинорного и векторного полей.

Представим функцию Грина уравнения (15) в форме

$$G_R = G_0(1 + QR\tau + [UR^2 + VR^{ik}R_{ik} + WR^{iklm}R_{iklm} + Y\Box R]\tau^2 + \ldots). \tag{D.1}$$

Коэффициенты Q, U и т.д. в этой формуле согласно [4] не зависят от размерности пространства n. Поэтому все коэффициенты, кроме У, могут быть найдены из рассмотрения решений для трех пространств различной размерности и постоянной кривизны (например, сферы S^2, гипосферы S^3 и суперсферы S^4).

Для каждого из этих пространств находятся собственные функции φ_i, определяются величины g_i и λ_i и составляется сумма

$$G(\tau) = G_0(\tau)(1 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots) = \frac{1}{V}\sum g_i e^{-\lambda_i\tau}. \tag{D.2}$$

Суммы вычисляем с помощью асимптотического ряда

$$\sum_0^\infty f(n) = \int_0^\infty f(n)\mathrm{d}n + \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{12} + \frac{f'''(0)}{720} + \ldots \tag{D.3}$$

Обозначим коэффициенты для сферы $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$ и аналогично для гиперсферы и суперсферы.

Коэффициент Q находим, как $a_1^{(2)}/R^{(2)}$, или как $a_1^{(3)}/R^{(3)}$, или как $a_1^{(4)}/R^{(4)}$ (используя значения инварианта кривизны $R^{(2)} = 2$, $R^{(3)} = 6$, $R^{(4)} = 12$, здесь и ниже радиус сферы равен 1). Результаты, конечно, совпадают. Коэффициенты U, V, W находим из трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_2^{(n)} = UR^{(n)^2} + VR^{(n)}{}_{ik}R^{(n)}_{ik} + WR^{(n)}{}_{iklm}R^{(n)}_{iklm} \tag{D.4}$$

(уравнения для $n = 2, 3, 4$).

В работе Мак-Кина и Зингера приблизительно этим методом рассмотрено скалярное поле без дополнительного члена — $R\varphi/6$ в уравнении движения.

Метод [4] отличается от нашего тем, что не рассматривается S^4, но зато используется дополнительное соотношение, связывающее U и $Q(U = Q^2/2)$. Для скаляра легко находим:

	g	λ
S^2	$2j + 1$	$j(j+1)$
S^3	$(J+1)^2$	$J(J+2)$
S^4	$\frac{1}{6}(I+1)(I+2)(2I+3)$	$I(I+3)$.

Особенно просто выполняется суммирование для S^3, разностные члены тождественно исчезают, и $G = G_0e^{\tau}$ (это символическая запись асимптотического ряда!).

Найденные таким образом значения Q, U и других коэффициентов мы относим к векторному случаю, а для скаляра учитываем член — $R\varphi/6$ в уравнении движения, что соответствует умножению функции Грина на множитель $e^{-R\tau/6}$, линейный в R член при этом исчезает.

Поясним вычисления для спинорного случая. Общий метод рассмотрения спиноров в криволинейном пространстве принадлежит Г. Вейлю и В.А. Фоку и основывается на отнесении спиноров к местному ортогональному реперу. В частных случаях, когда возможно введение ортогональной системы отсчета (в которой $g_{ik} = h_i^2\delta_{ik}$), заменяем ковариантный оператор $i\gamma\nabla$ на более простой $\frac{i\gamma_i}{h_i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln\frac{h_1h_2h_3h_4}{h_i}\right)$. В случае гиперсферы S^3 (метрика $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\Omega^2$) обычное выделение угловой части (соответствующей угловому моменту $j = 1/2, 3/2, \ldots$) и замена радиальных функций $R_A = \sin\rho f(\rho)$, $R_B = \sin\rho g(\rho)$ приводит к уравнению для функции $R(R_A$ и $R_B)$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{j(j+1)}{\sin^2\rho}R + \lambda R = 0$$

с краевым условием для одной из R-функций $R(0) = R(\pi) = 0$. Приведенное уравнение есть обычное уравнение для сферических функций с $m' \le n'$, m' и n' целые, если $\lambda = (n' + 1/2)^2 = J^2$, $m' = j + 1/2$. Очевидно, $J = j+1$, $j+2, j+3, \ldots$, т.е. имеет место вырождение по $j = J-1, J-2, \ldots, 1/2$ (так же как для скаляра, это следствие симметрии O_4);

$$g = 4\sum_{j=1/2}^{J-1}(2j+1) = 4J^2 - 1.$$

Вычисляем сумму

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{J=3/2} (4J^2 - 1)e^{-J^2\tau} = G_0(1 - \frac{\tau}{2})$$

(в этом случае разностные члены в формуле суммирования исчезают, как и для скаляра). Находим $a_{1j}^{(3)} = -1/2$, $a_{2j}^{(3)} = 0$.

Ниже приведены все найденные таким образом коэффициенты:

	Скаляр	Спинор	Вектор
Q	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
U	0	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{72}$
V	$-\frac{1}{180}$	$-\frac{1}{180}$	$-\frac{1}{180}$
W	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{7}{720}$	$\frac{1}{90}$
Y	—	—	$\frac{1}{30}$.

Коэффициент Y найден из рассмотрения $G(0)$ для метрики

$$ds^2 = dr^2 + S(r)d\varphi^2, \quad S(r) \neq a^2 \sin^2 \frac{r}{a}.$$

Найденные коэффициенты совпадают с коэффициентами в формуле (30) основного текста с учетом $\tau = -il$ и изменения сигнатуры $R_{\alpha}^{\alpha} \to -R_{\alpha}^{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Вообще говоря, уравнение для скаляра φ может содержать дополнительный член ($-R\varphi/16$; R — след тензора Риччи), обеспечивающий при $m = 0$ конформную инвариантность теории. Для обсуждения основ метода эти подробности несущественны.

[2] $\mathcal{L}_0 = 0$ в теориях с суперсимметрией и, возможно, в теориях со спонтанным нарушением суперсимметрии (сообщение В.И. Огиевецкого).

[3] Это разложение удобно производить на основании формул

$$\mathrm{cth}(2x) = \frac{1}{2}(\mathrm{cth}\, x + \frac{1}{\mathrm{cth}\, x}),$$

$$\mathrm{ctg}(2x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\, x - \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сахаров А.Д.*// ДАН СССР. 1967. Т. 177. С. 70.
2. *Sakharov А.Д.*// Gravitation and Field Theory; Collection of preprints. — M.: Inst. of Appl. Mathematics, October, 1967.
3. *Ландау Л.Д., Померанчук И.Я.*// ДАН СССР. 1955. Т. 102. С. 489.
   Фрадкин Е.С.// Ibidem. 1954. Т. 98. С. 47; 1955. Т. 100. С. 897; ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 750.
   Зельдович Я.Б.//Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 1233.
4. *McKean H.P., Jr., Singer I.M.*// J Differ. Geom. 1967. V. 1. P. 43.
5. *Зельдович Я.Б.*//УФН. 1968. Т. 95. С. 209; устное сообщение 1967 г.

6. *De Witt D.S.* Phys. Rev. 1967. V. 160. P. 1113; V. 162. P. 1192, 1239.
7. *Weisskopf V.//* Kgl. Danske Ved. Selsk. 1936. V. 14. P. 1.
8. *Баталин И.А., Фрадкин Е.С.* Препринт ФИАН СССР № 137. — Москва, 1967.
9. *Фок В.А.//* Изв. АН СССР. ОМЕН. 1937. Т. 5. С. 51.
10. *Schmnger J.//* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.

524.88

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ С ПОВОРОТОМ СТРЕЛЫ ВРЕМЕНИ

А.Д. Сахаров

(Физический институт им. П.Н. Лебедева АН СССР)

(ЖЭТФ. 1980. Т. 79, вып. 3(9). С. 689 — 693)

Рассматриваются космологические модели Вселенной с поворотом стрелы времени. Сформулированы ранее высказанная автором гипотеза космологической СРТ-симметрии и гипотеза многолистной открытой модели с отрицательной пространственной кривизной, с возможным нарушением СРТ-симметрии инвариантным комбинированным зарядом. Применительно к этим моделям обсуждается статистический парадокс обратимости. Малая безразмерная величина δ^2/a^2 (a — гиперболический радиус, δ^{-3} — плотность энтропии), характеризующая среднюю пространственную кривизну Вселенной, объясняется как результат эволюции Вселенной в ходе многих последовательных циклов расширения — сжатия.

Уравнения движения классической и нерелятивисткой квантовой механики, а также квантовой теории поля допускают обращение времени (в теории поля — одновременно с СР-преобразованием). Статистические уравнения, однако, необратимы. Это противоречие известно с конца XIX в. Мы будем говорить о нем как о "глобальном парадоксе обратимости" статистической физики. Традиционное объяснение относит необратимость к начальным условиям. Однако неравноправие двух направлений времени в картине мира при этом сохраняется.

Современная космология открывает возможность устранения этого парадокса. В настоящее время в космологии общепринята концепция расширяющейся Вселенной, согласно которой некоторый момент времени характеризуется обращением в нуль пространственного метрического тензора (ниже этот момент "фридмановской сингулярности" для краткости обозначен Ф). В 1966 — 1967 гг. автор предположил, что в космологии можно рассматривать не только более поздние, чем Ф, но и более ранние моменты времени, однако при этом статистические свойства состояния Вселенной в момент Ф таковы, что энтропия возрастает как вперед во времени, так и назад во времени:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}S/\mathrm{d}t > 0, \quad S(t) > S(0) \quad \text{при} \quad t > 0, \\ &\mathrm{d}S/\mathrm{d}t < 0, \quad S(t) > S(0) \quad \text{при} \quad t < 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, предположено, что при $t > 0$ действуют нормальные статистические уравнения, а при $t < 0$ — обращенные по времени. Это обращение