

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ А.Д. САХАРОВА

535.14

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНА И ПОЗИТРОНА
ПРИ РОЖДЕНИИ ПАР

А.Д. Сахаров

(Физический институт им. П.Н. Лебедева АН СССР)

(ЖЭТФ. 1948. Т. 18, вып. 7. С. 63-1 — 635)

Изучено влияние взаимодействия компонент на дифференциальную вероятность образования пар.

1. При вычислениях вероятности образования пар никогда не учитывают взаимодействия компонент пар. Некоторые авторы (Гайтлер [1]) высказывают мнение о невозможности решить эту задачу в рамках теории "дырок".

Наш метод основывается на следующих замечаниях:

а) Взаимодействие компонент существенно сказывается на дифференциальной вероятности лишь при малой относительной скорости компонент в конечном состоянии. Поэтому такое взаимодействие можно трактовать в системе центра тяжести электрона и позитрона как простое кулоновское взаимодействие e^2/r .

б) Это взаимодействие нельзя трактовать как возмущение, а необходимо учитывать при вычислении собственных функций электронно-позитронной системы, что видно из найденного нами поправочного фактора (8) для вероятности, в который заряд электрона входит существенно-трансцендентным образом.

2. Мы пользуемся ниже системой единиц, в которой положено: $\hbar = c = m$ (масса электрона) = 1.

Остальные обозначения: $e = 137^{-1/2}$ — заряд электрона, E_+ , E_- , p_+ , p_- — энергии и импульсы позитрона и электрона в "лабораторной" системе координат, k_+ , k_- — импульсы позитрона и электрона в той системе координат, в которой $k_+ \approx k_-$ (система центра тяжести), v — относительная скорость электрона и позитрона. Легко видеть, что

$$v = \sqrt{1 - (E_+ E_- - p_+ p_-)^{-2}} \approx \sqrt{p^2 \vartheta^2 + (|p_+| - |p_-|)^2 E^{-2}}. \quad (1)$$

Здесь ϑ — угол между электроном и позитроном; приближенная формула для v относится к случаю $v \ll p/E$ (т.е. $p_+ \rightarrow p_-$).

$\Psi_{\mathbf{p}_+\mathbf{p}_-}(q)$ — волновая функция, описывающая электрон и позитрон, q — совокупность аргументов волновой функции; в обычной формулировке теории «дырок» это есть совокупность координат электронов всех занятых уровней.

Мы пользуемся такой системой собственных функций, которые на бесконечности координатного пространства электрона и позитрона переходят в плоские волны. Индексы \mathbf{p}_+ и \mathbf{p}_- суть импульсы, соответствующие этим плоским волнам (импульсы на бесконечности); $\Psi_0(q)$ — волновая функция, описывающая вакуум; V — матричный элемент перехода; \tilde{V} — матричный элемент, вычисленный без учета взаимодействия компонент. Вообще, значком \sim мы будем обозначать величины, вычисленные без учета взаимодействия компонент, в отличие от «точных» величин.

Искомый поправочный множитель для дифференциальной вероятности $d\omega$ равен

$$T = d\omega/d\tilde{\omega} = |V/\tilde{V}|^2. \quad (2)$$

3. При вычислениях по методу теории возмущений гамильтониан представляют в виде суммы двух слагаемых: $H = H_0 + H_1$. Первое слагаемое используется для вычисления собственных функций: $H_0\Psi = E_0\Psi$, а второе служит для вычисления матричного элемента. Для процессов первого порядка

$$V_{\mathbf{p}'_+\mathbf{p}'_-} = \int \Psi_0^* H_1 \Psi_{\mathbf{p}_+\mathbf{p}_-} d\mathbf{q}. \quad (3)$$

(Процессам высшего порядка посвящен следующий параграф.) Мы будем считать взаимодействие компонент W включенным в H :

$$H_0 = \tilde{H}_0 + W.$$

Собственные функции Ψ оператора H являются линейной комбинацией собственных функций $\tilde{\Psi}$ оператора \tilde{H}_0 . Имеем

$$\Psi_{\mathbf{p}_+\mathbf{p}_-} = \int d^3\mathbf{p}_+ d^3\mathbf{p}_- (\rho_+\rho_- |c| \mathbf{p}'_+\mathbf{p}'_-) \tilde{\Psi}_{\mathbf{p}_+\mathbf{p}_-} \quad (4)$$

(спиновые переменные опущены для краткости здесь и ниже). c есть некоторая унитарная сингулярная матрица, весьма близкая к δ -матрице. Действительно, в предельном случае $e \rightarrow 0$:

$$c \rightarrow \tilde{c} = \delta(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}'_+) \delta(\mathbf{p}_- - \mathbf{p}'_-).$$

Точный вид c будет выяснен в дальнейшем.

Подставляя (4) в (3) и меняя порядок интегрирования по q и p , имеем

$$V_{\mathbf{p}'_+\mathbf{p}'_-} = \int d^3\mathbf{p}_+ d^3\mathbf{p}_- (\mathbf{p}_+\mathbf{p}_- |c| \mathbf{p}'_+\mathbf{p}'_-) \tilde{V}_{\mathbf{p}_+\mathbf{p}_-}. \quad (5)$$

В силу δ -образного характера c мы можем вынести \tilde{V}' из-под знака интеграла и написать

$$J = V/\tilde{V} = \int d^3\mathbf{p}_+ d^3\mathbf{p}_- \cdot c. \quad (6)$$

Далее мы можем перейти в систему центра тяжести электрона и позитрона:

$$\mathbf{p}_+ \rightarrow \mathbf{k}_+, \quad \mathbf{p}_+' \rightarrow \mathbf{k}_+' \text{ и т.д. } \mathbf{k}_+' \approx -\mathbf{k}_-'$$

$$(\mathbf{k}_+ \mathbf{k}_- | c_k | \mathbf{k}_+' \mathbf{k}_-') = \sqrt{\lambda \lambda'} (\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_- | c | \mathbf{p}_+' \mathbf{p}_-').$$

Здесь $\lambda(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-)$ и $\lambda'(\mathbf{p}_+', \mathbf{p}_-')$ суть якобианы преобразования, множитель $\sqrt{\lambda \lambda'}$ обеспечивает сохранение унитарности матрицы c :

$$\int d^6 \mathbf{p} \cdot c^* c = \delta(\mathbf{p}_+' - \mathbf{p}_+'') \delta(\mathbf{p}_-' - \mathbf{p}_-'),$$

$$\int d^6 \mathbf{k} (k | c_k^* | \mathbf{k}') (k | c | \mathbf{k}'') = \delta(\mathbf{k}_+' - \mathbf{k}_+'') \delta(\mathbf{k}_-' - \mathbf{k}_-').$$

При вычислении J [формула (6)] мы можем считать $\lambda' \approx \lambda$ (из-за δ -образного характера c) и написать

$$J = \int \lambda^{-1} c_k d^6 \mathbf{p} = \int c_k d^6 \mathbf{k}.$$

Наконец, мы можем осуществить преобразование Фурье

$$\int c_k d^6 \mathbf{k} = (2\pi)^3 (00 | c_x | \mathbf{k}_+' \mathbf{k}_-'). \quad (7)$$

Здесь c_x есть волновая функция в координатном пространстве электрона и позитрона, которая удовлетворяет (в нерелятивистском приближении) уравнению Шрёдингера

$$-(1/2)(\Delta_+ + \Delta_-)c_x - (e^2/r)c_x = (1/2)(\mathbf{k}_+'^2 + \mathbf{k}_-'^2)c_x.$$

Вводим обычным образом относительные координаты и полученное уравнение с приведенной массой $1/2$ решаем разделением переменных в параболических координатах (ср. у Бете [2] решение задачи о рассеянии электрона). Имеем (нормировка на интервал $d^3 \mathbf{k}_+' d^3 \mathbf{k}_-'$):

$$c_x = \frac{F(i\varepsilon, 1, i[(\mathbf{k}_+' - \mathbf{k}_-')(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-) + |\mathbf{k}_+' - \mathbf{k}_-'| |\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-|])}{|F(i\varepsilon, 1, i\infty)|} \tilde{c}_x,$$

$$\tilde{c}_x = (2\pi)^{-3} \exp[i(\mathbf{k}_+' \mathbf{x}_+ + \mathbf{k}_-' \mathbf{x}_-)].$$

Здесь F — гипергеометрическая функция, $\varepsilon = e^2/v$, где v — относительная скорость электрона и позитрона в конечном состоянии (1), $\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-$ — радиус-векторы.

На основании (7) имеем

$$J = |F(i\varepsilon, 1, i\infty)|^{-1} = [2\pi\varepsilon/(1 - e^{-2\pi\varepsilon})]^{1/2}.$$

Наконец, на основании (2):

$$T = J^2 = 2\pi\varepsilon/(1 - e^{-2\pi\varepsilon}). \quad (8)$$

4. Обобщение этого вывода на процессы второго (и более высокого) порядка не составляет труда. Матричный элемент вычисляется в виде суммы (или интеграла, для общности) по так называемым промежуточным состояниям \mathbf{p}^i . Вместо (3) для процессов первого порядка, для процессов второго порядка имеем

$$V_{\mathbf{p}'} = \int d^3\mathbf{p}_+^i d^3\mathbf{p}_-^i \{ \int \Psi_0^* H_1 \Psi_i dq \} \{ \int \Psi_i^* H_1 \Psi_{\mathbf{p}'} dq \} \Delta_i^{-1}, \quad (9)$$

где Δ_i есть изменение энергии в промежуточном состоянии по сравнению с начальным. Конечная функция $\Psi_{\mathbf{p}'} = \Psi_{\mathbf{p}_+^i \mathbf{p}_-^i}(q)$ входит в эту формулу линейно. Учет взаимодействия компонент пары в конечном состоянии проводится точно так же, как в случае процессов первого порядка, и приводим опять к (8).

Мы остановимся здесь на вопросе о влиянии взаимодействия компонент в промежуточном состоянии на дифференциальную вероятность. Уже без вычислений ясно, что точка обращения в нуль относительной скорости \mathbf{v}^i в промежуточном состоянии не может быть особой точкой для поправочного фактора T (подобно тому, как такой особой точкой является точка обращения в нуль \mathbf{v} в конечном состоянии). Дело в том, что относительная скорость \mathbf{v}^i в промежуточном состоянии не есть релятивистски-инвариантная величина. Если $\mathbf{v}^i = 0$ в одной системе отсчета, то в других системах отсчета она отлична от нуля.

Мы покажем на типичном примере, что взаимодействие в промежуточном состоянии вовсе несущественно. Рассмотрим образование пары квантом в поле ядра, т.е. слагаемое матричного элемента V , обусловленное цепочкой

$$\mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-^i \rightarrow \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- + \mathbf{q},$$

\mathbf{p}_γ — импульс кванта, \mathbf{q} — импульс, переданный ядру. Здесь $\mathbf{v}^i = 0$ при $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_\gamma/2$, релятивистская неинвариантность этого условия очевидна.

Имеем, подставляя (4) в (9):

$$V = \int d\mathbf{p}_+^i d\mathbf{p}_-^i \Delta_i^{-1} \{ \int \tilde{V}_1(\mathbf{p}^1 | c | \mathbf{p}^i) \delta(\mathbf{p}_+^1 + \mathbf{p}_-^1 - \mathbf{p}_\gamma) d\mathbf{p}^1 \} \times \\ \times \{ \int \tilde{V}_2(\mathbf{p}^2 | c^* | \mathbf{p}^i) \delta(\mathbf{p}_+^2 - \mathbf{p}_+) d\mathbf{p}^2 \}.$$

Вынося медленно меняющиеся множители из-под знака интеграла, имеем $V = \tilde{V}J$, где $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \tilde{V}_2 / \tilde{\Delta}_i$, а

$$J = \int d\mathbf{p}^i d\mathbf{p}^1 d\mathbf{p}^2 \delta(\mathbf{p}_+^2 - \mathbf{p}_+) \delta(\mathbf{p}_+^1 + \mathbf{p}_-^1 - \mathbf{p}_\gamma) (\mathbf{p}^1 | c | \mathbf{p}^i) (\mathbf{p}^2 | c^* | \mathbf{p}^i). \quad (10)$$

Матрица c содержит, в силу закона сохранения импульса, δ -образный множитель, который целесообразно выделить. Положим $\mathbf{p}_+^i + \mathbf{p}_-^i = \mathbf{p}_\sigma^i$, $\mathbf{p}_+^1 + \mathbf{p}_-^1 = \mathbf{p}_\sigma^1$ и т.д. Имеем

$$(\mathbf{p}_+^1 \mathbf{p}_-^1 | c | \mathbf{p}_+^i \mathbf{p}_-^i) = \delta(\mathbf{p}_\sigma^1 - \mathbf{p}_\sigma^i) (\mathbf{p}_-^1 | d | \mathbf{p}_-^i), \quad (11)$$

где новая матрица d тоже унитарна:

$$\int d\mathbf{p}_-^i (\mathbf{p}_-^1 | d | \mathbf{p}_-^i) (\mathbf{p}_-^2 | d^* | \mathbf{p}_-^i) = \delta(\mathbf{p}_-^1 - \mathbf{p}_-^2). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (10), находим

$$J = \int d\mathbf{p}_-^i d\mathbf{p}_-^1 (\mathbf{p}_-^1 | d | \mathbf{p}_-^i) (\tilde{\mathbf{p}}_-^i | d^* | \mathbf{p}_-^i),$$

что равно единице в силу (12). Итак, в том приближении, в котором построена вся теория (вынесение \tilde{V} и Δ из-под знака интеграла) взаимодействие в промежуточном состоянии действительно несущественно, что находится в согласии с требованиями инвариантности.

5. До сих пор мы пренебрегали спинowymi и релятивистскими эффектами. Повлияют ли они на наши результаты? Формула (5) сохраняется в точности, однако вид матрицы s несколько меняется, а при суммировании по спинowym переменным необходимо учитывать зависимость \tilde{V} от спинов. Последнее обстоятельство, однако, несущественно, так как спин сохраняется при кулоновском взаимодействии медленных частиц, а значит \tilde{V} можно вынести из-под знака суммирования по спинам.

Формулы (6) и (7) неприменимы, так как $(0, 0 | c_x |)$ обращается в бесконечность. Вместо вынесения в (5) \tilde{V} из-под знака интеграла, мы можем на основании известной теоремы преобразовать \tilde{V} и c по Фурье:

$$\int d^6\mathbf{p} \tilde{V}_p c_p = \int d^6\mathbf{x} V_x c_x. \quad (13)$$

Здесь V_x — некоторая δ -образная функция, размазанная на область пространства, ответственную за образование пар (в случае образования пар в результате ядерного перехода с запрещенным испусканием квантов начальный момент ядра $J = 0$; V_x соответствует колебаниям кулоновского потенциала; $V_x \neq 0$ внутри ядра; см. Сахаров [3], а также Оппенгеймер [4], Юкава и Саката [5]).

Функция c_x в (13) имеет «слабый» полюс степени порядка 137^{-2} (по аналогии с функцией одного электрона в кулоновском поле). Так как \tilde{V} размазано на область порядка размеров атомного ядра R или более, а c_x отлично от своего нерелятивистского значения в областях порядка электронного радиуса $r_0 \ll R$, то при вычислении (13) мы можем вместо точных значений c_x пользоваться ее нерелятивистским значением в начале координат. Приходим опять к (7).

6. Заметим, что область количественной применимости формулы (8) ограничена средними Z (заряд ядра) и релятивистскими скоростями электронов и позитронов в связи с "борновской" трактовкой кулоновского поля ядра. Напротив, относительная скорость компонент может быть сколь угодно малой, так как при трактовке взаимодействия мы не пользовались борновским

приближением (в отличие от работы Рудницкого [6], посвященной явлению аннигиляции; конечно, наши результаты относятся также и к аннигиляции).

Данная работа представляет собой выдержку из диссертации автора. Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность моему руководителю проф. И.Е. Тамму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гейтлер В.* Квантовая теория излучения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
2. *Бете Г.* Квантовая механика простейших систем. — М.; Л.; ОНТИ, 1935.
3. *Сахаров А.Д.* Диссертация. — М.: ФИАН СССР, 1947.
4. *Oppenheimer J.R., Sakata S.*//Phys. Rev. Ser. A. 1941. V. 59. P. 216.
5. *Yukawa H., Sakata S.*//Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 1935. V. 17. P. 10.
6. *Рудницкий В.В.*//ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 1303.

Статья поступила 26.12.47 г.