Март 1991 г. *Том 161, № 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

621.372.8

ЭНЕРГИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНОВОДА КАК МЕРА ЕГО КРИТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ

Л. А. Ривлин

(Московский институт радиотехники, электроники и автоматики)

1. Аналогия между дисперсионным уравнением для моды волновода

$$\omega^2 = \omega_n^2 + (ck_n)^2 \qquad (1)$$

и релятивистским выражением для функции Гамильтона свободной частицы

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (cp)^2 \qquad (2)$$

давно и неоднократно отмечалась разными авторами (см., например, [1]); здесь ω — частота и k_n — постоянная распространения волны в волноводе для моды с индексом n и критической частотой ω_n, а E — полная энергия, p — импульс частицы с массой покоя m_0, c — скорость света. Сопоставлению подвергаются пары величин: частота — полная энергия, критическая частота — масса покоя, постоянная распространения — импульс.

Так, проводя эту аналогию, де Бройль говорит [1]: «...Все происходит так, как будто фотон имеет собственную массу, определенную формой волновода и рассматриваемым собственным значением...; в данном волноводе фотон может обладать целой серией собственных масс». Далее он, к сожалению, продолжает: «оставим в стороне все эти соображения, удаляющие нас от предмета...», между тем как в указанной аналогии ощущается эвристическое содержание [2], быть может, именно приближающее к пониманию существа предмета.

Формально критическая частота моды ω_n определяется, разумеется, как одно из собственных значений волнового уравнения в граничных условиях, заданных формой поперечного сечения волновода.

Наглядное кинематическое представление о критической частоте строится обычно на картине интерференции парциальных волн (в простом случае прямоугольного сечения — плоских волн), суперпозиция которых составляет поле моды, удовлетворяющее граничным условиям. По мере приближения частоты волны ω к критическому значению ω_n волновой вектор парциальной волны также приближается к нормали к продольной оси волновода, а при $\omega = \omega_n$ оказывается направленным строго по нормали к ней, и распространение продольной бегущей волны прекращается ($k_n = 0$).

Понятие критической частоты ω_n волновода несет на себе, однако, и еще одну раскрываемую ниже смысловую нагрузку: энергия $\hbar\omega_n$, соответствующая критической частоте, численно равна наименьшей работе w_n, совершаемой при образовании волновода конечного сечения из неограниченного свободного пространства:

$$\hbar\omega_n = w_n, \tag{3}$$

а масса покоя фотона в волноводе равна

$$m_n = \frac{w_n}{c^2}. \tag{4}$$

2. Содержание высказанных утверждений удобно вскрыть на простейшем примере планарного электромагнитного волновода, образованного двумя неограниченными параллельными металлическими плоскостями, разделенными вакуумным промежутком толщиной a. Поле в таком волноводе можно представить как суперпозицию двух парциальных плоских волн, отражающихся от ограничивающих металлических плоскостей под углами падения θ. Граничные условия оказываются выполненными как результат интерференции парциальных волн, если

$$\cos\theta_n = \frac{\omega_n}{\omega}, \tag{5}$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi c n}{a} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

— критические частоты мод двух альтернативных поляризаций: TE_n ($n = 1, 2, \ldots$) и TM_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) (мода TM_0 подлежит отдельному рассмотрению ниже).

Каким трансформациям подвергается электромагнитное поле моды при изменении промежутка a, т. е. при сближении или удалении металлических плоскостей с постоянными скоростями $\pm c\beta$ относительно плоскости симметрии волновода? Из преобразований Лоренца следует, что при каждом отражении парциальной волны на границе волновода происходит изменение как ее частоты ω (эффект Допплера), так и угла падения (отражения) θ:

$$\omega^{\text{отр}} = \omega^{\text{пад}}(1 + \beta\cos\theta^{\text{пад}})^2(1 - \beta^2)^{-1}, \tag{7}$$

$$\cos\theta^{\text{отр}} = \frac{\cos\theta^{\text{пад}} + 2\beta(1-\beta^2)^{-1}}{2\beta(1-\beta^2)^{-1}\cos\theta^{\text{пад}} + 1} \tag{8}$$

($\beta \gtrless 0$ при сближении (удалении) металлических плоскостей).

Совместимы ли эти изменения частоты и угла падения с волноводными условиями (5) и (6)? Иными словами, сохраняется ли волноводная интерференционная структура поля при перемещении отражающих поверхностей? Опираясь на (7) и (8), можно показать, что за один цикл пробега парциальной волны от одной до другой отражающей поверхности величина волноводного промежутка a испытывает приращение

$$\Delta a = -2a\beta\,\frac{1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2}{(1 + 3\beta)\cos\theta + \beta(3 + \beta^2)}, \tag{9}$$

а изменение частоты ω и угла падения θ характеризуются величинами

$$\Delta\omega = \omega\beta\,\frac{2\cos\theta + \beta(1 + \cos^2\theta)}{1 - \beta^2}, \tag{10}$$

$$\Delta\cos\theta = 2\beta\sin^2\theta\cdot(1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2)^{-1}. \tag{11}$$

Полный ход частоты ω и угла θ как результат многократных отражений при изменении волноводного промежутка от a_0 до a можно получить, перейдя от конечных разностей к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\theta}{da} = \frac{\sin\theta}{a}\frac{\cos\theta + 3\beta + 3\beta^2\cos\theta + \beta^3}{(1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2)^2}, \tag{12}$$

$$\frac{d\omega}{da} = -\frac{\omega}{2a}\frac{2\cos\theta + \beta(1 + \cos^2\theta)}{1 - \beta^2}\frac{\cos\theta + 3\beta + 3\beta^2\cos\theta + \beta^3}{1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2} \tag{13}$$

и проинтегрировав ее.

Нулевое приближение по β интегралов системы (12), (13) отвечает эффекту Допплера первого порядка при медленном перемещении отражающих плоскостей $(\beta \ll 1)$ и дает

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{a_0}\operatorname{tg}\theta_0, \tag{14}$$

$$\omega = \omega_0\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} = \omega_0\frac{a_0}{a}\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}, \tag{15}$$

где ω_0 и θ_0 — начальные значения частоты и угла при $a = a_0$.

Отсюда следует несколько заключений. При $\beta \to 0$ частота ω и угол падения θ не остаются неизменными (как на первый взгляд ожидалось бы), причем их текущие значения однозначно задаются величиной волноводного промежутка a. Если в исходном положении ($a = a_0$) выполнено волноводное условие (5), то оно выполняется и при любых текущих значениях a. Это дает положительный ответ на вопрос о сохранении интерференционной структуры поля волновода при медленном перемещении образующих его отражающих поверхностей: частота излучения и угол падения θ в силу преобразований Лоренца непрерывно *подстраиваются* под волноводные условия. При немалой скорости перемещения β условие (5) для текущих значений ω и θ не сохраняется и стационарная интерференционная структура разрушается. Здесь возникает отдельная интересная задача о рассеянии фотонов из одной моды однородного волновода в другую с отличными от исходных индексами n, критическими частотами ω_n и массами фотона m_n.

3. Исключение угла θ из системы (14), (15) приводит к линейному уравнению относительно квадратов частот в волноводе с перемещающимися отражающими поверхностями

$$\omega^2 - \omega_n^2 = \omega_0^2 - \omega_{n0}^2 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

где ω_{n0} — критическая частота n-й моды при $a = a_0$. Это уравнение означает неизменность постоянной распространения k_n, что очевидно и из кинематических соображений для неограниченного однородного волновода. Отсюда же следуют выражения для фазовой $(v_n/\omega = v_{n0}/\omega_0 = \mathrm{const})$ и групповой $(u_n\omega = u_{n0}\omega_0 = \mathrm{const})$ скоростей (v_{n0} и u_{n0} — их начальные значения при $a = a_0$).

Важным частным случаем является начальный волновод неограниченного поперечного размера $a_0 \to \infty$, т. е. *свободное пространство,* когда по (6) $\omega_{n0} \to 0$, а две исходные парциальные волны сливаются в одну плоскую волну с волновым вектором, параллельным продольной оси волновода:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_n^2. \tag{17}$$

Видно, что при компрессии поля из неограниченного свободного пространства в волновод конечного поперечного сечения последний оказывается заполненным полем с частотой ω, слагаемой из квадратов начальной частоты ω_0 и текущей критической частоты ω_n.

Пусть исходное поле является чисто *статическим* с начальной частотой $\omega_0 = 0$. В этом предельном случае в волноводе возникает *волновое* поле с ненулевой частотой, равной критическому значению

$$\omega = \omega_n. \tag{18}$$

Иными словами, статическое поле свободного пространства выступает как порождающее по отношению к волновому полю критического волновода конечного сечения.

Разумеется, в обратном ходе явлений от конечного волновода к свободному пространству прослеживается деградация волнового поля вплоть до статического.

4. Довольно очевидно, что энергия электромагнитного поля, возникающего в волноводе с перемещающимися отражающими поверхностями, обязана своим происхождением работе, совершаемой против сил светового давления на них.

Полная сила светового давления равна

$$F = \frac{W}{a}\cos^2\theta, \tag{19}$$

где W — энергия поля волновода, а работа, совершаемая при изменении промежутка a, равна

$$\Delta W = -\frac{W}{a}\cos^2\theta\Delta a, \tag{20}$$

или с учетом (5), (6) и (16) и, переходя от конечных разностей к дифференциальному уравнению,

$$\frac{dW}{da} = -\frac{W/a}{1 + (a/a_0)^2[(\omega_0/\omega_{n0})^2 - 1]} \tag{21}$$

решение которого есть

$$\frac{W}{\omega} = \frac{W_{n0}}{\omega_0}, \tag{22}$$

где W_{n0} — начальное значение электромагнитной энергии моды волновода при $a = a_0$.

Выше было показано, что критическая частота ω_n определяется как частота поля ω, возникающего при компрессии неограниченного исходного волновода с нулевой начальной частотой, т. е. по (18) и (22)

$$\omega_n = \omega = \frac{\omega_0}{W_{n0}}W. \tag{23}$$

Здесь требует раскрытия неопределенность отношения W_{n0}/ω_0.

Для этого впервые по ходу изложения приходится изменить классической электродинамике и, что существенно, прибегнуть к квантовому языку. Энергия поля моды исходного волновода (неограниченного пространства) есть

$$W_{n0} = \hbar\omega_0\left(f_{n0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right), \tag{24}$$

где f_{n0} — фотонное число заполнения моды и единица $1 = 1/2 + 1/2$ олицетворяет вклад нулевых флуктуаций вакуума двух альтернативных направлений распространения в волноводе. Поэтому отношение равно

$$\frac{W_{n0}}{\omega_0} = \hbar\,(f_{n0} + 1) \tag{25}$$

и энергия, соответствующая критической частоте конечного волновода, есть

$$\hbar\omega_n = \frac{W}{f_{n0} + 1} \equiv w_n; \tag{26}$$

здесь w_n — работа, отнесенная к одному фотону поля исходного волновода, с учетом вакуумных флуктуаций, ответственных и за эффект Казимира.

Таким образом, энергия, отвечающая критической частоте ω_n волновода конечного сечения, численно равна работе, совершаемой для его образования из неограниченного свободного пространства против сил светового давления единичного фотона данной моды. При этом нет нужды в присутствии реальных начальных фотонов: для протекания процесса, достаточно всегда наличествующей энергии $\hbar\omega_0 = (\hbar\omega_0/2) + (\hbar\omega_0/2)$ нулевых флуктуаций вакуума, обладающих к тому же и нулевой частотой. Процесс состоит в «сгребании» (компрессии) из всего свободного пространства начального статического флуктуационного поля и повышении его частоты от нуля до ω_n.

Отдельного рассмотрения заслуживает термодинамика процесса компрессии, при котором наряду с совершением работы происходит и изменение энтропии электромагнитного поля.

5. Особое замечание касается моды TM_0 планарного волновода, имеющей нулевую критическую частоту $\omega_n = 0$ при любом значении промежутка a. В полном соответствии с развитыми выше соображениями и в их подтверждение это имеет причиной простое обстоятельство: поляризация волны TM_0 такова, что вектор электрического поля всегда перпендикулярен отражающей плоскости и, следовательно, световое давление на нее отсутствует, в результате чего равна нулю как работа w_n, так и критическая частота ω_n ($n = 0$).

Следует также отметить, что развитый подход применим и для раскрытия содержания понятия собственных частот резонатора.

6. В итоге проведенного рассмотрения оказывается, что понятие критической частоты волновода, исчерпывающе определяемое в рамках классической электродинамики, требует перехода к квантовому языку как только возникает вопрос об эволюции образов «свободное пространство — волновод конечного сечения». В этом, в сущности, проявляется действие соотношения неопределенности.

Критическая частота ω_n (3) и масса покоя фотона в волноводе m_n (4) генетически восходят к наипростейшему виду электромагнитной материи — статическому флуктуационному полю вакуума.

«Сгребание» из неограниченного свободного пространства укааяного статического поля, лишенного волновых признаков, придает ему волновые свойства и конечную массу-энергию.

Весь анализ использует простую планарную модель, которой, однако, присущи основные черты волноводов с поперечным сечением любой сложности. Поэтому можно ожидать, что более общее рассмотрение не внесет заметных коррективов в результат. Более того, этот результат может, по-видимому, быть распространен на целый класс задач на собственные значения различной физической природы.

И наконец, возвращаясь к упомянутой во вступлении аналогии, можно рискнуть ее продолжить, допустив, что массы покоя частиц имеют своим происхождением работу компрессии составляющего их вещества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Де Бройль Л.* Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах.— М.: ИЛ, 1948.
2. *Ривлин Л. А.*// КЭ. 1979. Т. 6. С. 1087.

Статья поступила 12.10.90 г.,
после переработки 13.11.90 г.