

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.871

**О СРЕДНЕЙ СИЛЕ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ*****В. С. Кривицкий, В. Н. Цытович***

(Институт общей физики АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	125
2. Общие соотношения	127
3. Действующая на электрон в первом порядке теории возмущений сила: сила Лоренца и магнитный момент электрона	130
4. Сила радиационного трения	133
5. Заключение	140
Список литературы	141

1. Введение. Как известно, ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны, и вследствие этого на него действует дополнительная сила — так называемая сила реакции излучения, или сила радиационного трения. С ее учетом уравнение, описывающее движение заряда e (будем говорить для определенности об электроне) во внешних заданных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях, имеет в нерелятивистском случае вид (см. [1, 2])

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_0 = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (1)$$

(здесь и ниже всюду, где это особо не оговорено, используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$ и постоянная Планка $\hbar = 1$).

Уравнением (1) можно пользоваться без риска получить «самоускоряющиеся» решения (или столкнуться с парадоксами, связанными с нарушением принципа причинности), когда второй член в (1) мал по сравнению с первым, представляющим собой силу Лоренца. Не останавливаясь на обсуждении этого момента, подробно разобранный в [1–3], отметим, что в случае, когда сила радиационного трения мала, ее учет в (1) можно проводить по теории возмущений, причем в первом приближении $m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0$, а в следующем

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \delta\mathbf{F}, \quad \delta\mathbf{F} = \frac{2e^3}{3m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2)$$

В общем релятивистском случае уравнение (2) принимает вид (см. [1])

$$m \frac{du^\mu}{ds} = e F^{\mu\nu} u_\nu + \delta F^\mu, \quad (3)$$

$$\delta F^\mu = \frac{2e^3}{3m} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} u_\nu u^\lambda + \frac{2e^4}{3m^2} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\nu} u^\lambda (u_\nu u^\mu - \delta_\nu^\mu),$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, u^μ — 4-скорость частицы, s — собственное время.

Уравнение (1) можно получить в рамках классической электродинамики, учитывая тот факт, что движущийся заряд создает собственное электромагнитное поле $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$. Таким образом, уравнение движения заряда во внешних полях $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ приобретает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) + e\mathbf{v} \times (\dot{\mathbf{H}}_s + \mathbf{H}_s). \quad (4)$$

Выражая $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ через $\mathbf{r}(t)$ с помощью классического выражения для запаздывающих потенциалов, после ряда несложных преобразований, включающих разложение по запаздыванию, можно привести (4) к виду (см. [2, 41])

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{r}} - \delta m \ddot{\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Следует подчеркнуть, что для получения уравнения (5) необходимо провести в (4) разложение по запаздыванию (именно по малому параметру $e^2/mc^3 t$). Поэтому, вообще говоря, даже выражение (1) для силы радиационного трения нельзя считать «абсолютно» точным.

Появление члена $\delta m \ddot{\mathbf{r}}$ в (5) следует интерпретировать как возникновение у заряженной частицы «дополнительной» массы электромагнитного происхождения $\delta m \sim e^2/r_0 c^2$ (r_0 — «радиус» частицы, на котором приходится проводить обрезание расходящихся интегралов) и необходимости проводить перенормировку массы уже в классической теории. Перенормировка сводится к тому, что суммарная масса $m + \delta m$ объявляется наблюдаемой массой частицы. Введение δm релятивистски-инвариантным образом провести затруднительно; а для точечной частицы ($r_0 = 0$) величина δm является функционалом $\mathbf{r}(t)$. Переход к пределу $r_0 \rightarrow 0$ фактически делает необходимым квантовое рассмотрение движения частицы в заданном внешнем электромагнитном поле (на что редко обращается внимание). Действительно, классическая электродинамика становится логически противоречивой теорией при $r_0 \sim e^2/mc^2$ (классический радиус электрона), в то время как квантовые эффекты начинают играть роль уже при гораздо больших расстояниях — r порядка комптоновской длины волны $\hbar/mc$, что в $\hbar c/e^2 \approx 137$ раз больше классического радиуса электрона. Поэтому фактически вся проблема может быть решена только в квантовой теории. Необходимо также отметить, что последовательно и однозначно перенормировку можно провести также лишь в квантовой теории. Попытки проведения перенормировки в классической теории (см., например, [5]) сталкиваются с естественными трудностями: перенормировка массы зависит от характера движения частицы $\mathbf{r}(t)$, и для того, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла, приходится вводить дополнительные фиктивные токи (см. [5]) вблизи заряда, зависящие от $\mathbf{r}(t)$; процедура проведения классической перенормировки становится неоднозначной и т. д.

В соответствии с вышеизложенным естественно возникает следующая задача: попытаться получить выражение для радиационной силы трения (2) (или (3), что эквивалентно (2) в силу лоренц-инвариантности теории)

в квантовой электродинамике с помощью S-матрицы рассеяния и последующим переходом к классическому пределу. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

При этом в отличие от предшествующих работ [4, 6] мы будем последовательно проводить процедуру усреднения по состояниям системы, наиболее близким к классическим (когерентным состояниям, если использовать представление Фарри во внешнем поле). Выяснено, что весьма существенны отклонения от таких средних, т. е. флуктуации. Это решает вопросы, связанные с самоускоряющимися решениями (1). Самоускорение в (1) возникает на временном интервале $\Delta t \sim e^2/mc^3$, который в $e^2/\hbar c$ меньше $\hbar/mc^2$ — характерного времени квантовых флуктуаций.

Отметим, что в рамках настоящего рассмотрения сила радиационного трения будет получена по теории возмущений, что предполагает ее малость по сравнению с силой Лоренца F_0 в (1). Анализ вопроса о применимости выражений (2), (3), когда $F_0 = 0$, и связанные с ним проблемы «самоускоряющихся» решений, нарушения принципа причинности и выполнения законов сохранения импульса, энергии и момента импульса (им уделено достаточно большое внимание в литературе; см., например, [2—4]) остаются за границами настоящего рассмотрения.

Следует отметить, что в литературе неоднократно предпринимались попытки получения силы реакции излучения в форме (1) в квантовой электродинамике непertурбативными методами (см., например, [4, 6]), а также цитируемую в обзоре [3] литературу). Идеологически эти попытки были близки к методу получения уравнения (1) в классической электродинамике. Однако проблемы, возникающие при таком подходе в связи с необходимостью проведения перенормировки, не удается разрешить корректным образом. Имеющийся корректный способ проведения перенормировки в квантовой электродинамике основан на применении инвариантной теории возмущений и устранении расходимостей из S-матрицы, разложенной в ряд по степеням константы взаимодействия e . Ответ на вопрос, как корректно вывести (1) в квантовой теории непertурбативными методами (и возможно ли это), остается открытым; в связи с этим все наше дальнейшее изложение будет построено на использовании S-матрицы. Мы только обращаем внимание на необходимость учета квантовых флуктуаций и, следовательно, бессодержательность усредненных уравнений на малых временных интервалах.

2. Общие соотношения. Будем считать 4-вектор потенциала внешнего поля $\varphi^\mu(t, \mathbf{r})$, в котором движется электрон, равным

$$\varphi^\mu(t, \mathbf{r}) = \int d^4q d\mathbf{q} \varphi^\mu(q^\nu) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - iq^0t), \quad (6)$$

заданным и некантованным, т. е. представляющим собой c -число (греческие индексы $\mu, \nu, \dots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3; 4-вектора $q^\nu = (q^0, \mathbf{q})$, $\varphi^\mu = (\varphi^0, \varphi)$, $\dots$; используется метрика $g_{\mu\nu}$, в которой $g_{00} = 1$, $g_{0i} = 0$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$, где индексы $i, j, \dots$ пробегают значения 1, 2, 3 (или x, y, z), а δ_{ij} — символ Кронекера).

Напряженность этого поля будем предполагать малой по сравнению с величиной $m^2/e (= m^2c^3/e\hbar)$, при которой необходим учет возможности рождения внешним полем пар. Помимо поля φ^μ существует кантованное поле $\hat{A}^\mu$, взаимодействие с которым отвечает возможности испускания и поглощения электроном фотона и приводит к радиационным поправкам. Оператор поля ${}^\mu \hat{A}$ дается (в используемой ниже трехмерно-поперечной

калибровке) выражением

$$\begin{aligned} \hat{A}^0 &= 0, \\ \hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left(\frac{4\pi}{2|\mathbf{k}|} \right)^{1/2} [\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} e_{\mathbf{k}\alpha} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i|\mathbf{k}|t) + \\ &\quad + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ e_{\mathbf{k}\alpha}^* \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i|\mathbf{k}|t)], \end{aligned} \quad (7)$$

где нормировочный объем V положен равным единице; индекс α отвечает различным поляризациям фотона и пробегает значения 1, 2; $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+$ являются операторами уничтожения и рождения фотона с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией α ; вектор $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ есть единичный вектор поляризации: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} = 0$, $|\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}| = 1$. Выражение (7) нормировано «на одну частицу в объеме $V = 1$ ».

Аналогичное выражение можно записать и для операторов полевых функций электрон-позитронного поля $\psi_a(t, \mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_a(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{p}})^{1/2}} [\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} u_{\mathbf{p}\sigma a}^{(+)} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\varepsilon_{\mathbf{p}}t) + \\ &\quad + \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}^+ u_{-\mathbf{p}-\sigma a}^{(-)} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r} + i\varepsilon_{\mathbf{p}}t)], \end{aligned} \quad (8)$$

где a — спинорный индекс, пробегающий значения 1, 2, 3, 4 (в дальнейшем часто опускаемый); σ нумерует поляризационные состояния и пробегает значения $\pm 1/2$; $\varepsilon_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$; $\hat{a}$ — оператор уничтожения электрона, $\hat{b}^+$ — оператор рождения позитрона. Спинорные амплитуды $u^{(\pm)}$ нормированы инвариантным условием: $\bar{u}_{\pm\mathbf{p}\pm\sigma}^{(\pm)} u_{\pm\mathbf{p}\pm\sigma}^{(\pm)} = \pm 2m$.

Временная эволюция системы описывается S -матрицей:

$$|\Phi(t_2)\rangle = \hat{S}(t_2, t_1) |\Phi(t_1)\rangle, \quad (9)$$

$$\hat{S}(t_2, t_1) = T \exp \left(i \int_{t_1}^{t_2} \hat{\mathcal{L}}(t) dt \right), \quad (9)$$

где $|\Phi(t)\rangle$ — вектор состояния в момент времени t , а S -матрица является хронологической экспонентой от лагранжиана взаимодействия, равного

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(t) &= \hat{\mathcal{L}}_{\varphi}(t) + \hat{\mathcal{L}}_A(t) = - \int d\mathbf{r} \hat{j}_{\mu}(t, \mathbf{r}) (\varphi^{\mu}(t, \mathbf{r}) + \hat{A}^{\mu}(t, \mathbf{r})), \\ \hat{j}^{\mu}(t, \mathbf{r}) &= e : \hat{\bar{\psi}}(t, \mathbf{r}) \gamma^{\mu} \hat{\psi}(t, \mathbf{r}) :, \end{aligned} \quad (10)$$

где j^{μ} представляет 4-вектор тока, а символ $:...:$ означает нормальное произведение операторов, в котором все операторы рождения стоят левее всех операторов уничтожения. В дальнейшем нам неоднократно потребуются формулы для суммирования по поляризациям:

$$\sum_{\alpha} e_{\mathbf{k}\alpha}^i e_{\mathbf{k}\alpha}^{*j} = \delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2, \quad (11)$$

$$\sum_{\sigma} u_{\mathbf{p}\sigma a}^{(\pm)} \bar{u}_{\mathbf{p}\sigma b}^{(\pm)} = \Lambda_{\mathbf{p}ab}^{\pm}, \quad \Lambda_{\mathbf{p}}^{\pm} = \gamma^0 \varepsilon_{\mathbf{p}} \mp \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} \pm m. \quad (12)$$

Сила, действующая на электроны, является производной по времени от импульса электрона, причем последний дается средним значением от оператора

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{P}} - e\varphi - e\hat{\mathbf{A}}, \quad (13)$$

где первое слагаемое в (13) представляет собой обобщенный импульс, равный

$$\hat{\mathbf{P}}^i = \int d\mathbf{r} \hat{T}^{i0}, \quad \hat{T}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} : \left[\hat{\bar{\psi}} \gamma^\mu \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \hat{\bar{\psi}}}{\partial x_\nu} \gamma^\mu \hat{\psi} \right] :. \quad (14)$$

В последнем выражении $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса электрон-позитронного поля. Подставив (8) в (14), найдем, что

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \mathbf{p} (\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}). \quad (15)$$

Для перехода к классическому пределу нам потребуется усреднять по состояниям, «наиболее близким к классическому состоянию электрона». Эти состояния представляют собой волновые пакеты

$$|\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{r}_0; \sigma)\rangle = \sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\sigma\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} c(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\sigma\rangle, \quad (16)$$

$$c(\mathbf{p}) = (4\pi\lambda)^{3/4} \exp \left[-\frac{\lambda}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2 - i(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \mathbf{r}_0 \right]$$

(мы перешли в (16) от суммирования по импульсам к интегрированию); в состоянии $|\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{r}_0; \sigma)\rangle$ электрон характеризуется поляризацией σ , средним значением импульса $\mathbf{p}_0$ и средним значением координаты $\mathbf{r}_0$; $|\mathbf{p}\sigma\rangle$ — состояние с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ ; в (16) имеется нефиксированный параметр λ , характеризующий средний разброс импульса и координаты:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0,$$

$$\langle (\delta\mathbf{p})^2 \rangle = \langle \Phi | (\delta\mathbf{p})^2 | \Phi \rangle = \frac{3}{2\lambda}, \quad (17)$$

$$\langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle = \frac{3\lambda}{2}.$$

В (16) амплитуды $c(\mathbf{p})$ нормированы условием

$$\sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) = 1.$$

Волновые пакеты (16) минимизируют среднее значение $\langle (\delta\mathbf{p})^2 \rangle^{1/2} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle^{1/2}$, которое для (16) принимает значение (для каждой из трех координат): $\langle (\delta p_x)^2 \rangle^{1/2} \langle (\delta x)^2 \rangle^{1/2} = 1/2 (= \hbar/2)$. (Мы учитываем как поле Φ^μ , так и поле $\tilde{A}^\mu$ по теории возмущений. Если бы вместо этого мы учитывали поле $\tilde{A}^\mu$ по теории возмущений, а внешнее поле Φ^μ учитывали бы точно (при этом для построения S-матрицы вместо представления взаимодействия следовало бы использовать представление Фарри), то вместо (16) нужно было бы усреднять по когерентным состояниям электрона во внешнем поле Φ^μ .)

В дальнейшем (см. ниже) при вычислении силы, действующей на электрон, в формулах будут фигурировать квадратичные комбинации $c(\mathbf{p}')^* c(\mathbf{p})$ и $u_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)} \bar{u}_{\mathbf{p}'\sigma}^{(+)}$, играющие роль матрицы плотности начального состояния электрона. Введем поэтому в рассмотрение матрицы

$$M_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \sigma) = u_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)} \bar{u}_{\mathbf{p}'\sigma}^{(+)}, \quad (18)$$

$$M_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} M_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \sigma), \quad (19)$$

которые будут играть роль матрицы плотности для поляризованного с поляризацией σ и неполяризованного состояний соответственно. Переписывая четырехкомпонентные спиноры через нерелятивистские двухкомпонентные спиноры w :

$$u_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_{\mathbf{p}} + m)^{1/2} w_{\sigma} \\ (\varepsilon_{\mathbf{p}} - m)^{1/2} w_{\sigma} \frac{\mathbf{p}^{\sigma}}{p} \end{pmatrix}, \quad w_{\sigma}^* w_{\sigma} = 1, \quad (20)$$

где σ в (20) — матрицы Паули, и выбирая для w базис в виде

$$w_{\sigma_z +1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{\sigma_z -1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

можно выписать явные выражения для матриц (18), (19). Отметим, что $M(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -\Lambda_{\mathbf{p}}^+/2$.

3. Действующая на электрон в первом порядке теории возмущений сила: сила Лоренца и магнитный момент электрона. Силу $\mathbf{F}(t)$, действующую на электрон, определим как

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \frac{d}{dt} \langle \Phi(t) | (\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{q} - e\hat{\mathbf{A}}) | \Phi(t) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \langle \Phi_0 | \hat{S}^+ (\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{q} - e\hat{\mathbf{A}}) \hat{S} | \Phi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

в котором начальное состояние $|\Phi_0\rangle$ будет выбираться в виде волнового пакета (16).

В первом порядке по константе взаимодействия e можно не рассматривать квантованное поле $\hat{\mathbf{A}}$, поскольку в вакуумных (с точки зрения фотонного поля) обкладках $|\Phi_0\rangle$: $\langle \Phi_0 | \hat{e} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \hat{e}^+ | \Phi_0 \rangle = 0$, и, следовательно, $\langle \Phi_0 | \hat{\mathbf{A}} | \Phi_0 \rangle = 0$. Отличным от нуля может быть лишь вакуумное среднее от квадратичной комбинации $\langle \Phi_0 | \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}} | \Phi_0 \rangle$, что имеет более высокий порядок по e , поскольку в формулы (10), (21) поле $\hat{\mathbf{A}}$ входит в виде произведения $e\hat{\mathbf{A}}$.

С учетом одного лишь поля φ^μ имеем, согласно (21), с точностью до членов порядка $o(e)$:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt} \left\langle \Phi_0 \left| \left(1 - i \int^t dt_1 \hat{\mathcal{L}}_{\varphi}(t_1) \right) (\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{q}) \left(1 + i \int^t dt_2 \hat{\mathcal{L}}_{\varphi}(t_2) \right) \right| \Phi_0 \right\rangle. \quad (22)$$

Производя в (22) дифференцирование по времени и собирая лишь члены, линейные по e , получим

$$\mathbf{F}(t) = \left\langle \Phi_0 \left| i [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}_{\varphi}(t)] - e \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right| \Phi_0 \right\rangle, \quad (23)$$

где $[\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}] = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}\hat{\mathbf{P}}$ есть коммутатор операторов.

Отметим, что вклад от слагаемого $(-e\mathbf{q})$ в силе (21) следует учитывать лишь в первом порядке по e . В самом деле, поскольку φ_μ есть c -число, φ_μ коммутирует с $\hat{S}$; следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Phi_0 | \hat{S}^+ (-e) \mathbf{q} \hat{S} | \Phi_0 \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \Phi_0 | \hat{S}^+ \hat{S} (-e) \mathbf{q} | \Phi_0 \rangle = \\ &= -e \left\langle \Phi_0 \left| \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right| \Phi_0 \right\rangle, \end{aligned}$$

так как S -матрица унитарна: $\hat{S}^+ \hat{S} = 1$.

Подставив (6), (8)–(10), (15), (16) в (23), найдем, что первое слагаемое в (23) сводится к

$$\langle \Phi_0 | i [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t)] | \Phi_0 \rangle = -ie \int dq^0 d\mathbf{q} \varphi_\mu(q^0, \mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \times \\ \times \frac{1}{2(\varepsilon_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^{1/2}} \mathbf{q} \exp[i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q^0)t] \text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma^\mu) \quad (24)$$

как в случае неполяризованной M , так и в случае поляризованного начального состояния $|\Phi_0\rangle$.

Будем считать теперь переданный импульс $\mathbf{q}$ малым по сравнению с $\mathbf{p}$ и m . Тогда, согласно (16), $c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \approx c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}$ с точностью до членов порядка $\mathbf{q}$; $1/\varepsilon_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \approx 1/\varepsilon_{\mathbf{p}}^2$; $\exp[i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q^0)t] \approx \exp[i(\mathbf{q}\mathbf{v} - q^0)t]$, $\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma^\mu) \approx \text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \gamma^\mu) = 2p^\mu = 2(\varepsilon_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 2\varepsilon_{\mathbf{p}}(1, \mathbf{v})$. Поэтому (24) переходит в

$$\langle \Phi_0 | i [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t)] | \Phi_0 \rangle = -ie \int dq^0 d\mathbf{q} \sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) \mathbf{q} \exp\{i[\mathbf{q}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t) - q^0 t]\} \times \\ \times (\varphi^0(q^0, \mathbf{q}) - \mathbf{v}\varphi(q^0, \mathbf{q})) = -e \sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial \varphi^0(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t)}{\partial \mathbf{r}} - \right. \\ \left. - v_i \frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t)}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (25)$$

поскольку при обратном преобразовании Фурье по пространственным компонентам величины $\varphi^\mu(t, \mathbf{r})$ домножению на $i\mathbf{q}$ соответствует оператор дифференцирования $\partial/\partial \mathbf{r}$ (а $(-iq^0)$ аналогично переходит в $\partial/\partial t$).

Сумма по импульсам в (25) фактически отвечает усреднению по импульсам в пакете (16). После суммирования по импульсам в согласии с (16) имеем

$$\langle \Phi_0 | i [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t)] | \Phi_0 \rangle = -e \left(\frac{\partial \varphi^0(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t)}{\partial \mathbf{r}} - v_i \frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t)}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (26)$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0/\varepsilon_{\mathbf{p}_0}$ — средняя скорость в состоянии (16).

Второе слагаемое в (23) имеет вид (индекс 0 у $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ для краткости опускаем)

$$\langle \Phi_0 | (-e) \frac{d\varphi}{dt} | \Phi_0 \rangle = -e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(t, \mathbf{r} + \mathbf{v}t). \quad (27)$$

Собирая результаты (26) и (27), имеем

$$\mathbf{F}(t) = e \{ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t) + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t) \}, \\ \mathbf{E} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \varphi, \quad (28)$$

что соответствует силе Лоренца, действующей на частицу при движении во внешних электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях.

Произведем теперь более точное разложение выражения (24) по переданному импульсу $\mathbf{q}$ с точностью до членов порядка $\mathbf{q}^2$. Для простоты будем исследовать возникающую при этом дополнительную действующую на электрон силу $\Delta \mathbf{F}$ в системе отсчета, связанной с движущимся электроном, т. е. в которой $\mathbf{v}_0 = 0$.

Перед тем как разлагать выражение (24) по $\mathbf{q}$, необходимо сделать следующее замечание. В выражении (24) нужно разлагать по $\mathbf{q}$ величины, зависящие от $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ (например, $\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ и т. д.). В то же время нетрудно

видеть, что характерная величина $\delta p \sim \lambda^{-1/2}$ (согласно (17)) много больше q , что создает определенные трудности в разложении по q . В самом деле, сила, действующая на частицу, определяется не самими потенциалами Φ^μ , а их градиентами. Для того чтобы частица «чувствовала» эти градиенты, необходимо, чтобы характерное пространственное «размытие» $\delta r \sim \lambda^{1/2}$ частицы было много меньше «характерной длины изменения потенциалов Φ^μ », т. е. q^{-1} . В силу того, что $\delta p \cdot \delta r \sim 1$, условие $\lambda^{1/2} \sim \delta r \ll q^{-1}$ эквивалентно $\lambda^{-1/2} \sim \delta p \gg q$. (Отметим, что одновременно с этим условием нам для перехода к классическому пределу потребовалось также считать $\delta p \ll m$, что позволяет параметру λ лежать в интервале $m^{-2} \ll \lambda \ll q^{-2}$.)

Итак, нам нужно разлагать по q величины, зависящие от $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$, в которых неопределенность первого слагаемого в аргументе $\delta p \gg q$. Несложные рассуждения показывают, что удобнее всего производить это разложение не «в точке $\mathbf{p}$ », а «в точке $\mathbf{f} = \mathbf{p} + (\mathbf{q}/2)$ », когда имеется некоторая симметрия выражения (24), зависящего лишь от комбинаций $\mathbf{f} + (\mathbf{q}/2)$ и $\mathbf{f} - (\mathbf{q}/2)$. Действительно, на основе уравнения (16) ($\mathbf{p}_0 = 0$) имеем для первого способа вычисления

$$c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} \exp \left[-\lambda \left(\mathbf{p}\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}^2}{2} \right) \right], \quad (29)$$

а для второго способа

$$c\left(\mathbf{f} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right)^* c\left(\mathbf{f} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) = c(\mathbf{f})^* c(\mathbf{f}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} e^{-\lambda \mathbf{q}^2/2}. \quad (30)$$

(В предыдущем изложении нам было достаточно более грубой оценки этого выражения в виде $c^* c \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0)$ с заменой последнего множителя в (29), (30) единицей, так что вопрос об отличии (29) от (30) не возникал.) В выражении (29) в последнем множителе фигурирует $\mathbf{p}$, что создает определенные сложности при последующем усреднении по импульсам (происходящем при взятии сумм $\sum_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})^* c(\mathbf{p}) \times \dots$), в то время как в (30) последний множитель не зависит от $\mathbf{f}$ и не влияет на процедуру усреднения по импульсам $\mathbf{f}$. Поэтому здесь и в следующем разделе мы будем пользоваться вторым способом разложения с использованием выражения (30). В соответствии с вышеизложенным при этом становится возможным сначала произвести в переписанной в новых терминах (через $\mathbf{f}$) формуле (24) усреднение по $\mathbf{f}$, сводящееся к замене на $\langle \mathbf{f} \rangle = 0$ (напомним, что мы вычисляем $\Delta \mathbf{F}$ в системе отсчета, движущейся вместе с электроном), а потом разлагать полученное выражение по q до членов порядка q^2 . Выполняя намеченную программу, имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | i [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{L}}_\Phi(t)] | \Phi_0 \rangle &= -ie \int d q^0 d \mathbf{q} \varphi_\mu(q^0, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} e^{-\lambda \mathbf{q}^2/2}, \\ \frac{1}{(4\varepsilon_{\mathbf{q}/2}^2)^{1/2}} \mathbf{q} \exp[i(\varepsilon_{\mathbf{q}/2} - \varepsilon_{-\mathbf{q}/2} - q^0)t] \text{Tr} \left(M\left(-\frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \gamma^\mu \right) &\approx \\ \approx -ie \int d q^0 d \mathbf{q} \varphi_\mu(q^0, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0 - iq^0 t) \frac{\mathbf{q}}{2m} \text{Tr} \left(M\left(-\frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \gamma^\mu \right), \end{aligned} \quad (31)$$

поскольку

$$\varepsilon_{\mathbf{q}/2} = \varepsilon_{-\mathbf{q}/2} = m + \frac{(\mathbf{q}/2)^2}{2m} + \dots = m + o(q).$$

С нужной степенью точности имеем $\text{Tr}(M\gamma^0) = 2m + o(q)$ (это соответствует найденной ранее силе Лоренца). Для неполяризованного состояния M имеем $\text{Tr}(M\gamma) = 0 + o(q)$, а для поляризованного M со средним значением спина s имеем $\text{Tr}(M\gamma) = -2i\mathbf{q} \times \mathbf{s} + o(q)$. Таким образом (ϵ^{ijk} — полностью антисимметричный тензор),

$$\Delta F^i = \frac{e}{m} \int dq^0 d\mathbf{q} \Phi^j(q^0, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0 - iq^0 t) q^i \epsilon^{jlm} q^l s^m, \quad (32)$$

т. е. при переходе от $i\mathbf{q}$ к $\partial/\partial\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{F} = \text{grad}(\mu\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = \text{rot } \varphi, \quad \mu = \frac{e}{m} s. \quad (33)$$

Полученный результат показывает, что в неполяризованном состоянии $\Delta\mathbf{F} = 0$, а в поляризованном состоянии электрон обладает магнитным моментом $\mu = \frac{e}{m} s = \frac{e}{2m} \left(= \frac{e\hbar}{2mc} \right)$ в обычных единицах

Завершая рассмотрение силы (21) в первом порядке по e , дадим удобную графическую интерпретацию полученным результатам. Пусть сплош-

$$\hat{S} = 1 + \text{---}\bullet\text{---} + \text{---}\{\text{---} + \text{---}\}\text{---} + \text{---}\{\text{---}\} + \dots$$

Рис. 1

ная линия отвечает электрону, штриховая — внешнему полю. Обозначая символически первое слагаемое в (13) в виде 1, а второе — в виде $\text{---}\bullet\text{---}$ и разлагая S-матрицу в ряд (рис. 1), можно записать (23) в виде суммы трех членов (рис. 2).

$$\text{---}\bullet\text{---} \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times \text{---}\bullet\text{---} + 1 \times \text{---}\bullet\text{---} \times 1$$

Рис. 2

4. Сила радиационного трения. Разлагая S-матрицу в ряд по константе электромагнитного взаимодействия e (см. рис. 1, на котором квантовому полю $\hat{A}^\mu$ отвечает волнистая линия):

$$\begin{aligned} \hat{S}(t) \equiv \hat{S}(t, -\infty) = 1 + i \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{\mathcal{L}}_\Phi(t_1) + i \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) - \\ - \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{L}}_\Phi(t_1) \hat{\mathcal{L}}_A(t_2) - \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) \hat{\mathcal{L}}_\Phi(t_2) + \dots, \quad (34) \end{aligned}$$

можно получить выражения для следующих членов разложения силы (21) в ряда по степеням e . (Квантованное поле $\hat{A}^\mu$ «включается» в (34) в момент $t = -\infty$, т. е. существует всегда, и для простоты будем адиабатически «включать» внешнее поле Φ^μ также в момент $t = -\infty$). Члены, отвечающие силе радиационного трения, возникают в третьем ($\sim e^3$) и более высоких порядках по e . Классический предел первых двух членов силы радиационного трения ($\sim e^3$ и e^4) дается выражениями (2), (3). Поставим поэтому перед собой задачу получить первое слагаемое в (2), (3), соответст-

вующее порядку e^3 , с помощью развитых выше методов (аналогичным образом можно получить и член e^4).

Строго говоря, перед тем как анализировать возникающее в третьем порядке по e выражение для силы, действующей на электрон, мы должны исследовать член $\mathbf{F}^{(2)}$ порядка e^2 , также присутствующий в разложении выражения (21). Априори понятно, что такой член второго порядка по e может возникнуть лишь в квантовой теории (т. е. он должен обращаться в нуль при $\hbar \rightarrow 0$). Действительно, из соображений размерности становится ясно, что этот член может иметь вид (в обычных единицах)

$$\mathbf{F}^{(2)} = \text{const} \cdot \frac{e^2 \hbar}{m^2 c^3} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \left(\frac{\hbar q^0}{mc^2} \right)^n \quad (35)$$

(n — целое число), где последний множитель соответствует возможной зависимости $\mathbf{F}^{(2)}$ не от самих полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, но от их временных производных (как в уравнении (2)). Легко видеть, что при $\hbar \rightarrow 0$ выражение (35) стремится к нулю. Точный расчет приводит к следующему результату: $\mathbf{F}^{(2)}$ строго равно нулю, если частица не удовлетворяет условию черенковского резонанса во внешнем поле (см. также ниже).

Заметим предварительно, что в силу релятивистской инвариантности S -матрицы удобнее всего исследовать получаемые выражения в системе отсчета, связанной с движущимся электроном (аналогично тому, как это делалось в конце предыдущего раздела). Это не ограничивает общность нашего рассмотрения, поскольку потенциал внешнего поля φ^μ выбирается совершенно произвольным и его калибровка никак не фиксируется. Релятивистскую инвариантность проще всего восстановить уже в конечном результате, после того как будет получено выражение для силы радиационного трения $\delta \mathbf{F}$ в системе отсчета, в которой средняя скорость в волновом пакете в (16) $\mathbf{v}_0 = 0$.

Отметим еще, что из вида (2) нам заранее известно, что разложение по переданному импульсу q^μ нужно будет осуществлять до квадратичных по q^μ членов, в то время как для получения силы Лоренца достаточно было ограничиться линейными по q^μ выражениями; а также в соответствии с ожидаемым результатом (2), (3) не будем учитывать в разложении (34) члены более высоких, чем первая, степеней по внешнему полю φ^μ .

Итак, разложим в (21) S -матрицу до членов порядка e^3 включительно и соберем вместе члены, имеющие третий порядок по e (напомним отмеченное в предыдущем разделе обстоятельство, что в связи с тем, что φ^μ есть s -число и коммутирует с S -матрицей, в (21) уже не нужно учитывать член $(-e\varphi)$ в суммарном импульсе электрона). Рассмотрим для наглядности возникающие при этом слагаемые $\delta \mathbf{F}$ графически.

Исследуем вначале вклад $\delta \mathbf{F}_P$, возникающий от первого слагаемого (т. е. $\hat{\mathbf{P}}$) в (21). При этом в третьем порядке в $\delta \mathbf{F}_P$ возникают члены двух типов. Слагаемым первого типа соответствует случай, когда $\hat{S}$ (или $\hat{S}^+$) представлена в (21) членом порядка e^3 в разложении (34), а $\hat{S}^+$ (или соответственно S) представлена единицей. На рис. 3 показана половина таких слагаемых, когда $\hat{S} \sim e^3$ и $\hat{S}^+ = 1$ (исключая несвязные диаграммы).

Диаграммы на рис. 3 содержат петли, что показывает необходимость проведения перенормировки при вычислении данных вкладов. Фактически же нет необходимости вычислять явно эти члены, подставляя (6)–(10) в (34) и затем в (21). Видно, что учет членов рис. 3 по сравнению с первым порядком (см. рис. 2) сводится к необходимости замены пропагаторов электромагнитного и электрон-позитронного полей и вершинного оператора на соответствующие перенормированные выраже-

ния. Производя вычитание расходимостей на массовой поверхности, получаем (см. [7, 8]), что внешние электронные линии на первой и второй диаграммах на рис. 2 не нуждаются в перенормировке, а вместо φ_μ , отвечающего линии внешнего фотонного поля на рис. 2, и вершинного оператора γ^μ в формулу (24) следует подставлять соответственно

$$\varphi_\mu(q) \rightarrow \varphi_\mu(q) + \frac{1}{4\pi} \mathcal{D}_{\mu\nu}(q) \mathcal{P}^{\nu\lambda}(q) \varphi_\lambda(q), \quad (36)$$

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu f(q^2) - \frac{1}{2m} g(q^2) \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} q_\nu, \quad (37)$$

где $q = q^\mu$, $q^2 = q_\mu q^\mu$; и в исследуемом порядке по e с нужной степенью точности при малых $|q^2| \ll m^2$: поляризационный оператор $\mathcal{P}_{\mu\nu}(q) = \mathcal{P}(q^2) [q_{\mu\nu} - (q_\mu q_\nu / q^2)]$, $\mathcal{P}(q^2) \approx -e^2 q^4 / (15\pi m^2)$; фотонный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}(q) = \mathcal{D}(q^2) [g_{\mu\nu} - (q_\mu q_\nu / q^2)] + \mathcal{L}^{(1)}(q^2) (q_\mu q_\nu / q^2)$, $\mathcal{D}(q^2) \approx 4\pi / q^2$;

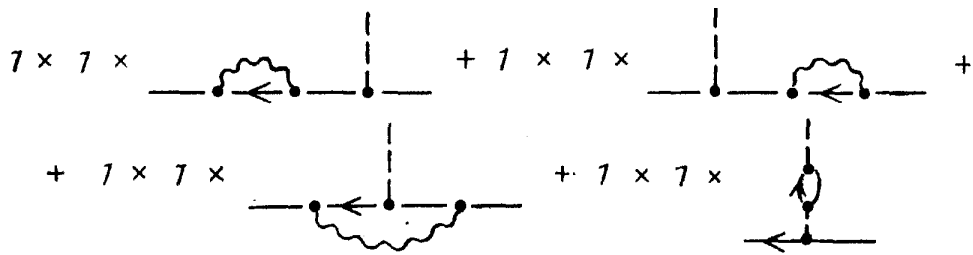


Рис. 3

формфакторы $f(q^2) \approx 1 + (e^2 q^2 / 3\pi m^2) \cdot [\ln(m/\lambda) - (3/8)]$, $g(q^2) \approx e^2 / 2\pi$ (λ — бесконечно малая масса, приписываемая фотону для регуляризации расходящейся в инфракрасном пределе функции f). Подставляя это в (24) и оставляя в (24) после разложения по q члены со степенями не выше второй, получаем, что в (36) нет необходимости учитывать радиационные поправки к $\varphi_\mu(q)$, а в (37) достаточно положить $f(q^2) = 1$, оставив лишь радиационную поправку $g(q^2)$. После ряда несложных преобразований, полностью аналогичных проделанным в п. 3, можно найти, что вклад в δF_P от (36), (37) (т. е. в конечном счете от диаграмм рис. 3) для неполяризованного состояния электрона равен нулю, а для поляризованного состояния указанная поправка приводит к появлению поправки Швингера к магнитному моменту электрона: момент электрона оказывается равным

$$\mu = \frac{e}{2m} \left(1 + \frac{e^2}{2\pi} \right) = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{e^2}{2\pi\hbar c} \right)$$

Второй тип вкладов, возникающих в δF_P , соответствует тому, что от $\hat{S}^+$ (или $\hat{S}$) в (21) входит член порядка e , а от $\hat{S}$ (соответственно $\hat{S}^+$) — член порядка e^2 . Эти диаграммы не содержат петель (поскольку мы проводим вычитание на массовой поверхности, учитывать диаграмму типа рис. 4, отвечающую массовому оператору, не нужно). Типичные представители этого второго типа вкладов изображены на рис. 5.

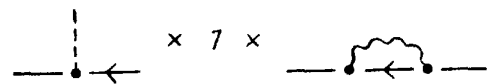


Рис. 4

Нетрудно видеть, что такие вклады в (21) вообще не нужно рассматривать. В самом деле, в (21) как состояние $\langle \Phi_0 | \hat{S}^+$, так и состояние $\hat{S} | \Phi_0 \rangle$ должно соответствовать какому-либо реальному состоянию электромагнитного и электрон-позитронного полей. В каждом из вкладов

рис. 5 одна из диаграмм (отвечающая $\hat{S}^+$ или $\hat{S}$) описывает процесс, запрещенный законом сохранения 4-импульса: так, первая диаграмма на рис. 5 представляет процесс излучения свободным электроном фотона и т. д.

Резюмируя, можно сказать, что учет в третьем порядке первого члена ($\hat{P}$) в (13) привел к необходимости проведения перенормировки, после которой все радиационные поправки свелись к аномальному магнитному моменту электрона.

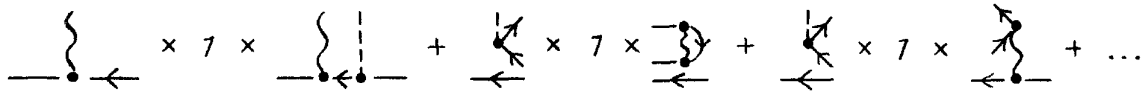


Рис. 5

Нетрудно понять, почему сила радиационного трения не могла возникнуть от слагаемого $\hat{P}$ в (21). В самом деле, сила радиационного трения описывает дополнительную «отдачу», которую испытывает электрон, излучающий фотон, под действием внешнего поля. Но в диаграммах типа рис. 3 фотон является промежуточным, виртуальным, и отсутствует в конечном состоянии; в диаграммах же типа рис. 5 реальный фотон может присутствовать в конечном состоянии $\hat{S} | \Phi_0 \rangle$, но такие процессы запрещены законом сохранения 4-импульса. Обратимся теперь к вкладам δF_A , возникающим в δF от третьего члена $-e\hat{A}$ в (21) (графически изображаемого волнистой линией). Как и при учете члена $\hat{P}$, при подстановке (34) в (21) возникают вклады двух видов — типа изображенных на рис. 6 и типа изображенных на рис. 7.

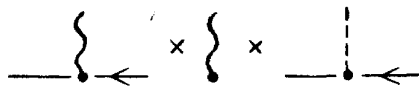


Рис. 6



Рис. 7

Процессы, соответствующие рис. 6, запрещены законом сохранения 4-импульса; следовательно, сила радиационного трения может возникнуть лишь от вкладов типа диаграмм на рис. 7, к изучению которых мы и перейдем.

Выпишем в явном виде результат подстановки (34) в (21), соответствующий рис. 7. Возникающая в третьем порядке по e сила $\delta F_A = \delta F_1 + \delta F_2$, причем

$$\delta F_1 = e \langle \Phi_0 | \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (\hat{A}(t) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_1) \hat{\mathcal{L}}_A(t_2) + \hat{\mathcal{L}}_A(t_2) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_1) \hat{A}(t) + \hat{A}(t) \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_2) + \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_2) \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) \hat{A}(t)) | \Phi_0 \rangle, \quad (38)$$

$$\delta F_2 = e \langle \Phi_0 | \int_{-\infty}^t dt_1 (\hat{A}(t) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t) \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) + \hat{\mathcal{L}}_A(t_1) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t) \hat{A}(t) + \hat{A}(t) \hat{\mathcal{L}}_A(t) \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_1) + \hat{\mathcal{L}}_\varphi(t_1) \hat{\mathcal{L}}_A(t) \hat{A}(t)) | \Phi_0 \rangle. \quad (39)$$

Подставляя в (38), (39) выражения для лагранжианов и опуская промежуточные громоздкие выкладки, находим (без учета несвязных диа-

грамм типа рис. 8):

$$\begin{aligned}
 \delta F_1^i = e^3 \int dq^0 d\mathbf{q} \varphi_\mu(q^0, \mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} c(\mathbf{p}) c^*(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \frac{4\pi(\delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2)}{8k(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}})^{1/2}} \times \\
 \times \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}_0 + i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q^0)t] \times \\
 \times \left\{ \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^+ \gamma_j)}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \left[\frac{-ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k - q_0 - i0)} + \right. \right. \\
 + \left. \frac{ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - q_0 - i0) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - k - q_0 - i0)} \right] + \\
 + \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma_j \Lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ \gamma^\mu)}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \times \\
 \times \left[\frac{ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - k) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - k - q_0 - i0)} + \right. \\
 + \left. \frac{-ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q_0 - i0) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k - q_0 - i0)} \right] - \\
 - \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^- \gamma_j)}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \times \\
 \times \left[\frac{-ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} + k) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k - q_0 - i0)} + \right. \\
 + \left. \frac{ik}{-i(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + q_0 + i0) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - k - q_0 - i0)} \right] - \\
 - \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma_j \Lambda_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^- \gamma^\mu)}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \times \\
 \times \left[\frac{ik}{-i(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + k) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - k - q_0 - i0)} + \right. \\
 + \left. \frac{-ik}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - q_0 - i0) i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k - q_0 - i0)} \right] \Big\}, \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta F_2^i = e^3 \int dq^0 d\mathbf{q} \varphi_\mu(q^0, \mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} c(\mathbf{p}) c^*(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \frac{4\pi(\delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2)}{8k(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}})^{1/2}} \times \\
 \times \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}_0 + i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q^0)t] \times \\
 \times \left\{ \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^+ \gamma_j)}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \left[\frac{1}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k)} + \frac{1}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - q_0 - i0)} \right] + \right. \\
 + \frac{\text{Tr}(M(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \gamma_j \Lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ \gamma^\mu)}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \times \\
 \times \left[\frac{1}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - k)} + \frac{1}{i(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q_0 - i0)} \right] - \dots \Big\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в δF_1 (40) соответствуют случаю, когда виртуальная частица на диаграмме на рис. 7 является электроном: последние два слагаемых отвечают виртуальному позитрону. В выражении (41) для δF_2 выписаны только электронные вклады, а соответствующие позитронные заменены многоточием (поскольку в дальнейшем δF_2 нам не понадобится).

Можно показать, что четность подынтегральных выражений в (40), (41) приводит к тому, что вклад от вещественных частей энергетических знаменателей $\text{Re } 1/(E - i0) = \mathcal{P}(1/E)$ равен нулю. В силу этого возникает



Рис. 8

необходимость учитывать мнимые части $\text{Im} \frac{1}{E - i0} = \pi \delta(E)$ (знак мнимой добавки в знаменателях (40), (41) выбирается в соответствии с принципом причинности). В связи с этим необходимо отметить, что фактически достаточно приписывать мнимую добавку только к частоте внешнего поля: $q^0 \rightarrow q^0 + i0$. Знаменатели же, не содержащие q^0 (например, $\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k$), никогда не обращаются в нуль (вследствие невозможности излучения свободным электроном фотона), и поэтому их мнимые части равны нулю.

Рассмотрим подробнее, какие резонансы могут описывать знаменатели выражений (40), (41). Резонансы типа $\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k = 0$ исключаются законом сохранения 4-импульса, как уже было упомянуто выше. Анализ остальных возможных резонансов удобнее всего проводить в системе отсчета, связанной с движущимся электроном. В этой системе $p = \delta p \ll m$, $q \ll m$; как будет показано ниже, k имеет тот же порядок, что и q^0 , поэтому и $k \ll m$. В первом приближении поэтому $\varepsilon_{\mathbf{x}} \approx m$ при любом аргументе $\mathbf{x}$ (принимая значения $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} - \mathbf{k}$, $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}$). Поэтому резонансы типа $\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + k - q^0 = 0$ сводятся в этом приближении к условию $k = q^0$, что с физической точки зрения оказывается совершенно естественным: электрон колеблется во внешнем поле, имеющем частоту q^0 , и излучает при этом фотон с той же частотой $k = q^0$. Такие резонансы возникают в знаменателях выражения (40), и, как мы увидим ниже, (40) действительно описывает силу радиационного трения.

Знаменатели типа $\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q^0 = 0$, имеющиеся как в (40), так и в (41), приводят к черепковскому условию $\mathbf{q}\mathbf{v} - q^0 = 0$, когда частица непрерывно ускоряется внешним полем $\varphi^\mu(q)$. В данном случае мы не интересуемся этим процессом, не имеющим отношения к реакции излучения на движущийся заряд, поэтому исключим такие резонансы из рассмотрения (можно считать, что поле $\varphi^\mu(q)$ не удовлетворяет условию черенковского резонанса).

Вышеизложенные рассуждения показывают, что сила радиационного трения содержится лишь в выражении (40). Перейдем теперь в (40) к классическому пределу, используя для $\varepsilon(\mathbf{p})$ уравнение (16) и разлагая (40) по степеням q до второго порядка включительно. Разложение, как и в п. 3 при вычислении магнитного момента электрона, следует проводить после замены $\mathbf{p} = \mathbf{f} - [(\mathbf{q} - \mathbf{k})/2]$, положив затем $\mathbf{f} = 0$ (индекс 0 у величины $\mathbf{r}_0$ далее опускаем).

Проведем вначале анализ выражения (40) для неполяризованной M из (19).

Рассмотрим в (40) отдельно вклады от скалярного φ^0 и векторного φ потенциалов. При $\varphi^\mu = \varphi^0$ имеем с нужной степенью точности: $\text{Tr} [M (-(\mathbf{q} - \mathbf{k})/2, (\mathbf{q} - \mathbf{k})/2) \gamma^0 \Lambda_{(\mathbf{q}+\mathbf{k})/2}^+ \gamma_j] = 2mq_j + o(k; q)$; $\text{Tr} [M (-(\mathbf{q} - \mathbf{k})/2, (\mathbf{q} - \mathbf{k})/2) \gamma_j \Lambda_{(\mathbf{q}+\mathbf{k})/2}^+ \gamma^0] = -2mq_j + o(k; q)$; $\varepsilon_{(\mathbf{q}-\mathbf{k})/2} = m + o(k; q) = \varepsilon_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})/2}$; и, следовательно, вклад $\delta F_1^{(\text{scal-el})}$ от скалярного потенциала в электронных членах в (40) составит

$$\begin{aligned} \delta F_1^{i(\text{scal-el})} = e^3 \int dq^0 d\mathbf{q} \varphi^0(q^0, \mathbf{q}) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \times \\ \times \exp[i(\mathbf{q} - \mathbf{k})\mathbf{r}_0] \frac{4\pi}{8km} \left(\delta^i - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0 - iq_0 t) \times \\ \times \left\{ \frac{-2mq_j}{m} \left[\frac{(-ik) i\pi \delta(k - q^0)}{iki} + \frac{iki\pi \delta(k + q^0)}{i(-q_0)i} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2mq_j}{m} \left[\frac{iki\pi \delta(k + q^0)}{i(-k)i} + \frac{(-ik) i\pi \delta(k - q^0)}{i(-q_0)i} \right] \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

Суммирование по $\mathbf{f}$ выполнено аналогично тому, как это было сделано в п. 3; $\sum_{\mathbf{k}}$ заменено на $\int d\mathbf{k}/(2\pi)^3$. Вычисляя

$$\int d\mathbf{n} (\delta^{ij} - n^i n^j) = \frac{8\pi}{3} \delta^{ij}$$

(где $|\mathbf{n}| = 1$ и интегрирование проводится по единичной сфере),

$$\int_0^{+\infty} k^2 dk [\delta(k - q^0) + \delta(k + q^0)] = (q^0)^2$$

(как при $q^0 \geq 0$, так и при $q^0 < 0$), учитывая также $q_j = -q^j$, имеем, согласно (42),

$$\begin{aligned} \delta F_1^{(\text{scal} \cdot \text{el})} &= -\frac{2e^3}{3m} \int dq^0 d\mathbf{q} q^0 \varphi^0(q^0, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0 - iq^0 t) = \\ &= -\frac{2e^3}{3m} \frac{\partial^2 \varphi^0(t, \mathbf{r})}{\partial t \partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Вклад же $\delta F_1^{(\text{scal} \cdot \text{pos})}$ позитронных членов при $\varphi^\mu = \varphi^0$ с той же степенью точности обращается в нуль, поскольку вместо малых k или q^0 в знаменателях (40) фигурируют величины, равные $2m + o(1)$, а числители в том же приближении:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[M \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{k}), \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{k}) \right) \gamma^0 \Lambda_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})/2} \gamma_j \right] &= \\ &= \text{Tr} \left[\frac{m(\gamma^0 + 1)}{2} \gamma^0 m(\gamma^0 - 1) \gamma_j \right] = 0 + o(1). \end{aligned}$$

Вклад в (40), связанный с векторным потенциалом φ , также удобно разбить на электронные и позитронные составляющие $\delta F_1^{(\text{vect} \cdot \text{el})}$ и $\delta F_1^{(\text{vect} \cdot \text{pos})}$. В том же приближении, в котором подсчитано (42), можно найти, что $\text{Tr} [M \gamma_l \Lambda^- \gamma_j] = 4m^2 \delta_{jl} + o(1) = \text{Tr} [M \gamma_j \Lambda^- \gamma_l]$, $\text{Tr} [M \gamma_l \Lambda^+ \gamma_j] = 0 + o(k; q)$, откуда $\delta F_1^{(\text{vect} \cdot \text{el})} = 0$, а

$$\begin{aligned} \delta F_1^{(\text{vect} \cdot \text{pos})} &= -e^3 \int dq^0 d\mathbf{q} \varphi^l(q^0, \mathbf{q}) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp[i(\mathbf{q} - \mathbf{k})\mathbf{r}_0] \times \\ &\quad \times \frac{4\pi}{8km} \left(\delta^i - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \exp(ik\mathbf{r}_0 - iq_0 t) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{4m^2 \delta_{jl}}{m} \left[\frac{(-ik) i\pi \delta(k - q^0)}{i \cdot 2mi} + \frac{iki\pi \delta(k + q^0)}{(-i) \cdot 2mi} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m^2 \delta_{jl}}{m} \left[\frac{iki\pi \delta(k + q^0)}{(-i) \cdot 2mi} + \frac{(-ik) i\pi \delta(k - q^0)}{i \cdot 2mi} \right] \right\} = \\ &= \frac{2e^3}{3m} \int dq^0 d\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0 - iq^0 t) (q^0)^2 \varphi^i(q^0, \mathbf{q}) = -\frac{2e^3}{3m} \frac{\partial^2 \varphi^i(t, \mathbf{r})}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Собирая вместе (43) и (44), получаем

$$\delta F_1 = \frac{2e^3}{3m} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \varphi^0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{2e^3}{3m} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (45)$$

совпадающее с классическим выражением (2) для силы радиационного трения.

Теперь, после того как получен результат (45), можно восстановить релятивистскую инвариантность полученного выражения для реакции излучения на движущийся заряд. Релятивистски-инвариантная формула, соответствующая (45), имеет вид $\delta F^\mu = (2e^3/3m) (\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\lambda) u_\nu u^\lambda$, где $F_{\mu\nu} = \partial \varphi_\nu/\partial x^\mu - \partial \varphi_\mu/\partial x^\nu$, что совпадает, естественно, с первым членом в (3).

Нетрудно проверить, что использование поляризованного состояния (18) вместо неполяризованного (19) при анализе силы радиационного трения (40) приведет к тем же результатам (43)—(45). Так и должно быть, поскольку в исследуемом приближении—третий порядок по e , первый порядок по внешнему полю и максимальная степень производных внешнего поля — первая (что при квантовом рассмотрении отвечает квадратичным по переданному импульсу выражениям),—в классической электродинамике появление у частицы магнитного момента также не приводит к возникновению новых членов в силе радиационного трения, и действующая на частицу сила реакции излучения дается в этом приближении тем же выражением (первый член в (2)), что и для заряженной частицы без магнитного момента.

Не вдаваясь в детальные расчеты, отметим здесь, что следующий член в разложении (40) по степеням q имел бы по отношению к (43)—(45) относительный порядок малости $\sim q^2 \lambda \ll 1$ (напомним, что $\lambda \sim \langle (\delta p)^2 \rangle^{-1} \sim \langle (\delta r)^2 \rangle$). После обратного преобразования Фурье этот член привел бы к появлению в правой части (45) дополнительного слагаемого вида $\text{const} \cdot (e^3/m) \langle (\delta r)^2 \rangle \ddot{\mathbf{E}}$. Действительно, такое слагаемое в (45) отвечает первому, отличному от нуля члену в разложении силы радиационного трения по степеням «малого параметра» $(\delta r \cdot \partial/\partial t)$ (отдельно в каждом порядке по e). Подобный результат возникает и в классической электродинамике при рассмотрении силы реакции излучения в случае протяженной заряженной частицы с «характерным радиусом» L . В таких условиях вместо «обычного» выражения $(2/3)e^2 \ddot{\mathbf{r}}$ в правой части (5) возникает бесконечный ряд $(2/3)e^2(\ddot{\mathbf{r}} - (2/3)L \dddot{\mathbf{r}} + (1/3)L^2 \ddddot{\mathbf{r}} - \dots)$ (см. [4]), что также есть разложение по степеням $(L\partial/\partial t)$. В [4] этот ряд был суммирован; при этом уравнение, описывающее движение протяженной заряженной частицы, становилось дифференциально-разностным.

5. Заключение. Проведенный анализ показывает, что с помощью стандартных методов теории возмущений в квантовой электродинамике можно получить выражение для радиационной силы в третьем порядке по e , соответствующее первому члену в (2), (3). Аналогичным образом с помощью развитых методов можно вывести выражение для действующей на электрон силы в следующем порядке e^4 (которое, естественно, должно соответствовать последней части (2), (3)), а также радиационные поправки более высоких порядков.

Отметим наконец, что все предыдущее рассмотрение было основано на спинорной электродинамике; таким образом, справедливость результата (45) доказана лишь для частиц со спином $s = 1/2$. Но естественно ожидать, что классический предел выражения для силы реакции излучения не должен зависеть от спина частицы. Действительно, для скалярной частицы со спином $s = 0$ можно развить соответствующую технику, которая оказывается аналогичной вышеизложенным методам. Единственное отличие состоит в том, что лагранжиан скалярного поля квадратичен по оператору 4-импульса $P_\mu = i\partial_\mu$, в то время как лагранжиан спинорного поля линеен по P_μ . При включении калибровочного взаимодействия с внешним электромагнитным полем это обстоятельство приводит к появлению диаграммы со сходящимися в одной вершине четырьмя внешними линиями (две линии соответствуют заряженной частице, а две линии — электромагнитному полю — A_μ или φ_μ) в дополнение к диаграммам на рис. 1, дающим разложение S-матрицы. Таким образом, при ис-

следовании силы радиационного трения мы должны теперь рассматривать, кроме диаграммы на рис. 7, еще одну диаграмму, содержащую одну штриховую и одну волнистую линии (рис. 9). В том же приближении, в котором мы проводили вычисления выше, можно найти, что для скалярной частицы вклад диаграммы на рис. 7 сводится к (43), вклад новой диаграммы на рис. 9 равен выражению (44), и, таким образом, их сумма равна (45). Итак, классический предел выражения для силы реакции излучения, действующей на скалярную и спинорную частицы, совпадает.

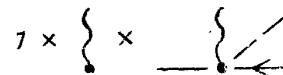


Рис. 9

Авторы выражают глубокую признательность В. Л. Гинзбургу за интерес к работе, критические замечания и полезные обсуждения проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
2. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
3. Клепиков Е. П. // УФН. 1985. Т. 146. С. 317.
4. Moniz E. J., Sharp D. H. // Phys. Rev., Ser. D. 1977. V. 15. P. 2850.
5. Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. 1938. V. 167. P. 148.
6. Dalibard J., Dupont-Roc J., Cohen-Tannoudji C. // J. de Phys. 1982. Т. 43. P. 1617.
7. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей.— М.: Наука, 1984.

Статья поступила 31.10.90 г.