

530.162

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

С. Л. Соболев

(Отделение Института химической физики им. Н. Н. Семенова АН СССР,
Черноголовка, Московская обл.)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Пределы применимости локально-равновесных теорий процессов переноса	6
2. Уравнения переноса в локально-неравновесных системах	7
2.1. Уравнения переноса в средах с памятью. 2.2. Среда с дискретной структурой. 2.3. Двухкомпонентные системы.	
3. Общие свойства бегущих волн в локально-неравновесных системах	16
3.1. Условия во фронте волны. 3.2. Распределения температуры и теплового потока в бегущей волне. 3.3. Особенности механизма распространения автоволн в релаксирующих средах.	
4. Структура бегущих волн в локально-неравновесных системах	19
4.1. Бесконечно узкая зона тепловыделения. 4.2. П-образный источник тепловыделения. 4.3. Ступенчатая функция тепловыделения.	
5. Скорость и критические условия распространения автоволн в локально-неравновесных средах	23
5.1. Волны горения. 5.2. Волны перехода сверхпроводник — нормальный металл (S — N).	
Заключение	26
Примечания	27
Список литературы	28

Введение. В последние годы возрос интерес к изучению различного рода локально-неравновесных систем и процессов переноса (энергии, массы, импульса или их аналогов) в них. Это связано, с одной стороны, с естественным направлением развития науки — от равновесных в целом систем к локально-равновесным и далее к локально-неравновесным. С другой стороны, интенсификация технологических процессов, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), широкое распространение лазерной техники, возможность достижения сверхвысоких или сверхнизких температур и давлений объясняют с практической точки зрения интерес к системам в экстремальных, локально-неравновесных условиях.

Изучение таких систем может быть основано на различных версиях локально-неравновесной термодинамики [1—7], кинетических [8—12], молекулярно-динамических [13, 14], феноменологических и некоторых других методах (см. ссылки в [3—5, 28, 29, 44, 45, 52]). Экспериментально

эффекты локальной неравновесности чаще всего наблюдаются при низких температурах [3—5, 15], при облучении вещества сверхкороткими импульсами энергии [16—20], в ударных волнах [13, 211 и дисперсных системах [22—261, так как именно в этих случаях время релаксации системы к локальному равновесию сравнимо с характерным временем самого процесса. В настоящей статье будут рассмотрены две модели локально-неравновесных систем — системы с памятью и дискретные системы, причем наибольшее внимание будет уделено соответствующим уравнениям переноса и их различным предельным случаям. Далее, на основе уравнения переноса гиперболического типа, которое может быть получено как из обобщенного уравнения переноса для систем с памятью, так и из дискретного уравнения переноса, будет дан анализ некоторых общих свойств бегущих волн в локально-неравновесных системах и приведены конкретные примеры.

1. Пределы применимости локально-равновесных теорий процессов переноса. Классическая теория процессов переноса опирается на приближения локального термодинамического равновесия и сплошной среды. Приближение локального термодинамического равновесия означает, что в каждом малом элементе среды существует состояние локального равновесия, для которого локальная энтропия является той же функцией макроскопических переменных, что и для равновесной системы. Локальное термодинамическое равновесие может установиться в системе, если скорость изменения ее макропараметров за счет внешних воздействий, т. е. скорость разрушения равновесия, много меньше скорости установления равновесия. Кроме того, приближение локального термодинамического равновесия справедливо для моментов времени t_0 , значительно превышающих характерное время релаксации системы к локальному равновесию τ [2, 3, 52]. Приближение сплошной среды, подразумевающее отсутствие у нее внутренней структуры, означает, что в интегральных законах сохранения для этой среды можно совершать предельный переход при стремлении объема интегрирования к нулю. Такой предельный переход позволяет получить уравнение сохранения энергии (массы и т. д.) в дифференциальной форме. С физической точки зрения эта процедура некорректна, так как среда всегда состоит из отдельных элементов (атомов, молекул, клеток, отдельных особей и т. д.) и имеет свою внутреннюю дискретную структуру. Однако если характерный макромасштаб системы L много больше характерного размера ее микроструктуры h , то можно пренебречь дискретностью вещества и рассматривать такую систему в приближении сплошной среды. Таким образом, условия справедливости приближений локального термодинамического равновесия и сплошной среды (т. е. пространственной локальности) можно записать в следующем виде:

$$t_0 \sim \Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^{-1} \gg \tau, \quad (1.1)$$

$$L \sim \Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^{-1} \gg h, \quad (1.2)$$

где Ψ — потенциал переноса (температура, концентрация и т. д.), x — координата. При распространении бегущей волны с постоянной скоростью V характерный размер ее фронта $L = a/V$, а характерное время $t_0 = a/V^2$, где a — коэффициент переноса (температуропроводности, диффузии и т. д.). Учитывая, что время релаксации τ связано со скоростью распространения возмущений ⁽¹⁾ ● в среде $v = (a/\tau)^{1/2}$ [3, 41] и характерным микромасштабом $h = \tau v$, получим, что (1.1) и (1.2) эквивалентны следую-

щему неравенству:

$$v \gg V. \quad (1.3)$$

Таким образом, классическая теория переноса справедлива, если характерная скорость данного процесса много меньше скорости распространения возмущений в таких средах ⁽²⁾ ●. В этом случае процессы переноса описываются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа с бесконечно большой скоростью распространения возмущений от мгновенного точечного источника [3, 4, 52], что с физической точки зрения неприемлемо. Однако для достаточно медленных процессов, когда бесконечно большая скорость распространения возмущений понимается в смысле неравенства (1.3), такое приближение можно считать достаточно оправданным. В противном случае, т. е. при высокоскоростных процессах, когда неравенства (1.1) — (1.3) не выполняются, классическая локально-равновесная теория процессов переноса становится несправедливой и следует пользоваться локально-неравновесными методами описания таких систем. Этому вопросу и посвящен следующий раздел.

2. Уравнения переноса в локально-неравновесных системах. Для описания локально-неравновесных систем могут быть использованы различные термодинамические, кинетические, феноменологические и некоторые другие методы [1—12]. Рациональная термодинамика, отказываясь от принципа локально-термодинамического равновесия, вводит понятие тепловой памяти [1, 2]. В рамках рациональной термодинамики рассмотрены среды с внутренними степенями свободы, среды скоростного типа и среды с памятью. Расширенная необратимая термодинамика [3], волновая теория Дьярмати [6, 7] и некоторые другие варианты локально-неравновесных теорий [3—5] основаны на предположении, что удельная энтропия является одновременно функцией равновесных экстенсивных параметров и их потоков — «скоростных переменных», описывающих инерционные свойства системы при установлении локального равновесия [27]. Уравнения переноса в локально-неравновесных средах могут быть получены также из уравнения Больцмана, молекулярно-кинетическими методами, при помощи теории случайных блужданий и др. [1—12, 28, 29, 44, 45, 52].

При рассмотрении локально-неравновесных систем встает вопрос о том, что понимать под температурой локально-неравновесного состояния. В классической термодинамике температура определяется только для равновесных или локально-равновесных систем. Различные версии неравновесной термодинамики вводят понятия локально-неравновесных энтропии η и внутренней энергии E , что и дает основания в рамках этих теорий определить локально-неравновесную температуру, как $T^{-1} = -\partial\eta/\partial E$ [3]. Для сред скоростного типа, когда состояние системы зависит от скорости изменения температуры, абсолютная температура может быть заменена «термодинамической» температурой [2]. Термодинамическая температура является функцией абсолютной температуры и скорости ее изменения. Эти обе температуры совпадают, когда скорость изменения абсолютной температуры равна нулю. Поэтому термодинамическая температура может быть представлена как разложение в ряд Тейлора по степеням абсолютной температуры и скорости ее изменения [2]. Величина отклонения термодинамической температуры от абсолютной, пропорциональная скорости изменения последней, характеризует степень локальной неравновесности системы. Такая трактовка термодинамической темпера-

туры может быть, по-видимому, использована и для сред другого типа. В молекулярной динамике вводят понятие «кинетической» температуры как меру средней кинетической энергии молекул, определяемую по локально-неравновесной функции распределения [13, 14]. Результаты молекулярно-динамических расчетов по распространению тепловых импульсов в твердых телах с использованием кинетической температуры [14] поразительно совпадают с данными теории и эксперимента, полученными на основе понятия обычной абсолютной температуры [41]. Более того, в [12] показано, что при небольших отклонениях от локального равновесия, когда разность между локально-неравновесной функцией распределения и локально-равновесной по абсолютной величине много меньше последней, энергия системы в каждый момент времени и в каждой точке пространства определяется локально-равновесной функцией распределения и, следовательно, локально-равновесной абсолютной температурой. Неравновесность системы в этом случае влияет только на величину теплового потока, которая при этом уже не определяется законом Фурье, а зависит от времени релаксации системы к локальному термодинамическому равновесию.

2.1. Уравнение переноса в средах с памятью. Если система не находится в локальном термодинамическом равновесии, то связь между тепловым потоком q и градиентом температуры, а также между внутренней энергией системы и температурой T имеет интегральную форму [28, 29]:

$$q = - \int_0^{\infty} K(z) \nabla T(t-z) dz, \quad (2.1)$$

$$E = C\rho T + \int_0^{\infty} \beta(z) T(t-z) dz, \quad (2.2)$$

где $K(z)$ и $\beta(z)$ — функции релаксации теплового потока и внутренней энергии соответственно. Выражения (2.1), (2.2) учитывают тот факт, что вдали от локального равновесия тепловой поток и внутренняя энергия не зависят от мгновенных значений градиента и температуры, а определяются всей предысторией процесса теплопереноса в рассматриваемом пространственном элементе. О таких средах говорят как о «средах с памятью» [1, 2]. Из (2.1), (2.2) и закона сохранения энергии можно получить уравнение переноса в среде с памятью [5, 30, 31]:

$$\begin{aligned} (\tau\beta(0) + C\rho) \frac{\partial T}{\partial t} + \tau C\rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \int_0^{\infty} (\tau K'(z) + K(z)) \Delta T(t-z) dz = \\ = \tau K(0) \Delta T + \int_0^{\infty} (\tau\beta'(z) + \beta(z)) \frac{\partial T(t-z)}{\partial t} dz + W + \tau \frac{\partial W}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где τ — константа, физический смысл которой будет определен ниже, $W(x, t)$ — интенсивность распределенных в системе источников энергии, C — теплоемкость, ρ — плотность. Уравнение переноса в активной среде с памятью (2.3) гиперболического типа, что указывает на волновой характер распространения тепла в таких системах [4, 28]. В (2.3) содержится как сама функция интенсивности распределенных источников энергии TV , что соответствует классической теории переноса, так и ее производ-

водная по времени $\partial W/\partial t$ — следствие инерционности процесса теплопередачи в локально-неравновесных системах. Рассмотрим случай, когда подинтегральное выражение в левой части (2.3) равно нулю:

$$\tau K'(z) + K(z) = 0.$$

Тогда функция релаксации теплового потока будет иметь экспоненциальный вид:

$$K(z) = K(0) \exp\left(-\frac{z}{\tau}\right). \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что τ можно рассматривать как характерное время релаксации системы к локальному равновесию. Подставляя (2.4) в (2.1), получаем

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -\tau K(0) \nabla T.$$

При $\tau K(0) = \lambda$ это соотношение эквивалентно закону Максвелла — Каттанео (см. [3, 4, 8]):

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \nabla T. \quad (2.5)$$

Закон Максвелла — Каттанео (2.5), связывающий между собой тепловой поток и градиент температуры в среде с тепловой релаксацией, обобщает классический закон Фурье $q = -\lambda \nabla T$, справедливый в предположении локального равновесия, т. е. $\tau = 0$. Физический смысл (2.5) заключается в том, что процесс теплопереноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: система реагирует на тепловое воздействие (или тепловой поток откликается на изменение градиента температуры) не в тот же момент времени t , как в классическом локально-равновесном случае, а на время релаксации τ позже:

$$q(t + \tau) = -\lambda \nabla T(t). \quad (2.6)$$

Разложив левую часть (2.6) в ряд Тейлора по степеням τ , в нулевом приближении получим классический закон Фурье, а в первом — закон Максвелла — Каттанео (2.5).

Из закона сохранения энергии и закона Максвелла — Каттанео следует уравнение теплопереноса «телеграфного» типа [3, 4] с распределенными источниками [5, 31–34]

$$C_p \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + W + \tau \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Уравнение переноса (2.7) является уравнением гиперболического типа с конечной скоростью распространения теплового сигнала (тепловой волны) $v = (a/\tau)^{1/2}$, где $a = \lambda/C_p$. Оно сочетает в себе свойства волнового уравнения, описывающего распространение незатухающих волн постоянной амплитуды (первый член в левой части (2.7)), и диффузионного уравнения, соответствующего диссипативному способу передачи энергии. Из решения (2.7) в инертной среде ($W = 0$) следует, что тепловой импульс распространяется с постоянной скоростью v , а его амплитуда экспоненциально затухает со временем [33, 35–37]. Такой импульс полностью отражается от теплоизолированной границы [33, 36], а при падении на границу раздела двух сред частично отражается и частично проходит в другую среду [37]. По-видимому, следует ожидать, что в системах с релаксацией тепловой импульс будет обладать и другими волновыми свойствами,

например преломляться при падении на границу раздела двух сред под некоторым углом с показателем преломления $n = v_1/v_2$, где v_1 и v_2 — скорости распространения теплового импульса в этих средах.

Аналогичным способом можно получить уравнение для теплового потока в среде с релаксацией, которое, так же как и (2.7), гиперболического типа с конечной скоростью распространения теплового сигнала:

$$\tau \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\partial q}{\partial t} = a \nabla \operatorname{div} q - a \nabla W. \quad (2.8)$$

Процессы, распространяющиеся в виде бегущих волн (автоволны, -волны фазовых переходов, волны детонации, разрушения и т. д.), обычно изучаются при помощи автомодельной переменной $x \rightarrow x - Vt$, где V — скорость распространения бегущей волны [38—41]. В этом случае уравнения (2.7) и (2.8) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям [5, 34]

$$\lambda \left(1 - \frac{V^2}{v^2} \right) \frac{d^2 T}{dx^2} - C_p V \frac{dT}{dx} + W + \tau V \frac{dW}{dx} = 0, \quad (2.9)$$

$$a \left(1 - \frac{V^2}{v^2} \right) \frac{dq}{dx} - Vq = W. \quad (2.10)$$

При $\tau \rightarrow 0$, когда $v \rightarrow \infty$, уравнения (2.9) и (2.10) редуцируются в классические уравнения переноса для бегущих волн в локально-равновесных системах, а при $\tau > 0$ имеют существенные особенности. Во-первых, в (2.9) содержится производная от функции источника по координате, которую можно рассматривать как дополнительный источник тепла, точнее как «псевдоисточник», интенсивность которого зависит не только от вида функции тепловыделения TV , но и от величины (и направления) скорости движения волны V . Во-вторых, количество и направление передаваемого диффузией тепла в волне (см. первые члены в (2.9) и (2.10)) зависят от соотношения между скоростями бегущей волны V и теплового сигнала v [5, 34, 56]. Если $V < v$, то диффузия тепла в бегущей волне направлена, так же как и в классическом локально-равновесном случае, в сторону движения волны, обеспечивая тем самым прогрев среды перед ее фронтом. По мере увеличения V диффузия тепла в бегущей волне уменьшается, ж при $V = v$ направление диффузии тепла меняет знак — тепло распространяется в сторону обратную движению волны. Поэтому при $V > v$ среда перед фронтом бегущей волны остается непрогретой.

Вернемся теперь к обсуждению обобщенного уравнения переноса в среде с тепловой памятью (2.3). Как уже отмечалось выше, (2.3) уравнение гиперболического типа, что отражает волновой характер распространения тепла в локально-неравновесных средах. В предельном переходе (2.3) редуцируется в известные частные случаи. Если функция релаксации теплового потока имеет экспоненциальный вид (2.4), что при $\tau K(0) = \lambda$ соответствует закону Максвелла — Каттанео (2.5), и, кроме того, $\beta(z) \equiv 0$, то (2.4) эквивалентно уравнению переноса «телеграфного» типа (2.7). Заметим, что в этом случае значения τ и $K(0)$ имеют конечные величины. Если $\tau \rightarrow 0$ и $K(0) \rightarrow \infty$, так что $\tau K(0) = \lambda$, то функция релаксации теплового потока $K(z) = \lambda \tau^{-1} \exp(-z/\tau) \rightarrow \lambda \delta(z)$, где $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. В этом случае закон Максвелла — Каттанео (2.5) и интегральное соотношение (2.1) редуцируются в классический закон Фурье, а обобщенное уравнение переноса (2.3) — в классическое уравнение переноса параболического типа (при $\beta(z) \equiv 0$). Этот факт, на наш взгляд, говорит в пользу уравнения (2.3) по сравнению с другими типами урав-

нений переноса в средах с памятью, которые в предельном переходе не дают хорошо известные простейшие частные случаи [28, 29].

2.2. Среда с дискретной структурой. Один из вариантов локально-неравновесных подходов к изучению процессов переноса может быть основан на модели случайных блужданий [о, 44, 45]. Эта модель предполагает, что процесс переноса имеет дискретную пространственно-временную структуру. Для простоты рассмотрим одномерную среду, состоящую из частиц, совершающих случайные блуждания влево или вправо (рис. 1). Расстояние, на которое частица (фонon) переносит энергию за один переход, h — микромасштаб, характеризующий дискретную пространственную структуру процесса теплопереноса. Время между двумя последовательными переходами 2τ — масштаб временной дискретности (ниже будет показано, что τ можно рассматривать как время релаксации системы к локальному равновесию). Обозначим вероятность перехода частицы в положительном направлении оси x через P_1 , а в отрицательном P_2 , причем $P_1 + P_2 = 1$. Если вероятность того, что частица в момент времени $t + 2\tau$ находится в пределах некоторого элемента среды x , равна $u(x, t + 2\tau)$, то [44]

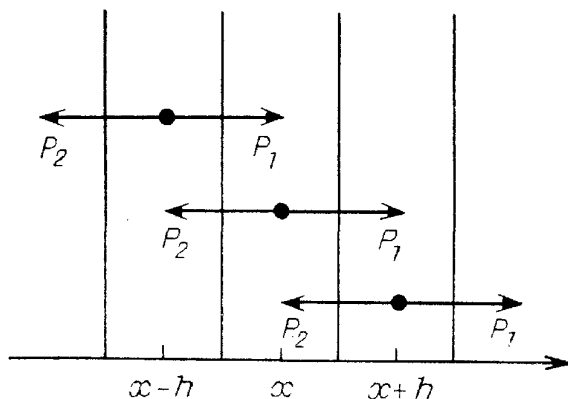


Рис. 1. К модели случайных блужданий. P_1 и P_2 — вероятности перехода частицы (переноса энергии) в соседние элементы среды

$$u(x, t + 2\tau) = P_1 u(x - h, t) + P_2 u(x + h, t). \quad (2.11)$$

Далее, предполагая, что локальная внутренняя энергия среды пропорциональна числу частиц (фононов) в данном дискретном элементе среды [44] и интенсивности распределенных в ней источников [5], из (2.11) получаем

$$T(x, t + 2\tau) = P_1 T(x - h, t) + P_2 T(x + h, t) + \frac{2\tau}{c\rho} W(x, t + \tau). \quad (2.12)$$

Рассматриваем достаточно гладкие функции интенсивности источника W , такие, что

$$\int_t^{t+2\tau} W(x, t) dt = 2\tau W(x, t + \tau).$$

Таким образом, выражение (2.12) представляет собой уравнение теплопереноса в пространственно-временной дискретной среде с распределенными в ней источниками энергии. Заметим, что структура уравнения (2.12) определяет конечную скорость распространения тепловых возмущений $v = h/2\tau$. Аналогичным образом можно получить для таких систем взаимосвязь между тепловым потоком и температурой (аналог закона Фурье) в дискретной форме:

$$q(x, t + \tau) = -\frac{h c \rho}{8\tau} (T(x + h, t) - T(x - h, t)). \quad (2.13)$$

Здесь и далее предполагаем, что среда изотропна, т. е. $P_1 = P_2 = 1/2$.

Заметим, что в (2.12) и (2.13) интенсивность источника тепловыделения TV и тепловой поток q рассматриваются в средний момент времени $t + \tau$ между двумя последовательными актами теплообмена в моменты времени t и $t + 2\tau$, что связано с интегральным характером этих величин.

В дискретных средах уравнение переноса (2.12) и взаимосвязь между тепловым потоком и температурой (2.13) (обобщенный закон Фурье) нелокальны, т. е. связывают между собой термодинамические переменные не в точке, а в некоторой пространственно-временной области. Причем пространственная нелокальность симметрична — при замене h на $-h$ вид этих уравнений не изменяется. Временная нелокальность этих уравнений такой симметрии не содержит, что отражает необратимый характер релаксационных процессов. Уравнение переноса (2.12) и взаимосвязь между тепловым потоком и температурой (2.13) можно использовать для анализа локально-неравновесных систем непосредственно в дискретной форме. Это особенно удобно при численном счете (так как (2.12) и (2.13) не требуют перевода на язык дискретной математики), анализе хаотической динамики различных объектов, изучении систем со сложной структурой и т. д.

Для того чтобы перейти от уравнений в дискретной форме (2.12) и (2.13) к уравнениям в частных производных, следует разложить функции T , q и W в ряд Тейлора по степеням τ и h . Эти разложения содержат бесконечное число членов с двумя малыми параметрами. Для того чтобы перейти к уравнениям с конечным числом членов, необходимо задать закон предельного перехода, т. е. взаимосвязь между τ и h при $\tau, h \rightarrow 0$. Закон предельного перехода определяется характером процессов, происходящих в данной системе. Рассмотрим два наиболее типичных случая [51].

2.2.1. «Диффузионный» закон предельного перехода. При разложении дискретного уравнения переноса в модели случайных блужданий [441] предполагают, что коэффициент переноса (диффузии) $a = h^2/4\tau$ остается конечной величиной при $\tau, h \rightarrow 0$. Назовем такой закон предельного перехода «диффузионным». Сразу же заметим, что «диффузионный» закон предельного перехода предполагает бесконечно большую скорость распространения возмущений v , так как в этом случае $v = h/2\tau = 2a/h \rightarrow \infty$.

В нулевом приближении по τ при «диффузионном» законе предельного перехода их (2.12) и (2.13) следуют классические соотношения локально-равновесной термодинамики — уравнение переноса параболического типа и закон Фурье.

В первом приближении по τ из (2.12) и (2.13) получим [51]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{a^2 \tau}{3} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{W}{C\rho} + \frac{\tau}{C\rho} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\lambda a \tau}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}. \quad (2.15)$$

В этом случае уравнение переноса (2.15) и аналог закона Фурье (2.15), так же как и в классическом приближении, являются уравнениями в частных производных параболического типа с бесконечно большой скоростью распространения возмущений. Последующие приближения дискретных уравнений (2.12) и (2.13), содержащие члены разложения с более высокими степенями τ , в соответствии с «диффузионным» законом предельного перехода также будут уравнениями в частных производных с бесконечно большой скоростью распространения возмущений (теплового сигнала).

2.2.2. «Волновой» закон предельного перехода. Рассмотрим теперь случай, когда скорость распространения возмущений $v = h/2\tau$ остается ко-

нечной величиной при $\tau, h \rightarrow 0$. Такой закон предельного перехода будем называть «волновым».

В первом приближении по τ при «волновом» законе предельного перехода из дискретных уравнений (2.12) и (2.13) получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 \tau \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{W}{C\rho} + \frac{\tau}{C\rho} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.16)$$

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -C\rho v^2 \tau \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.17)$$

Уравнение переноса (2.16) и аналог закона Фурье (2.17) представляют собой уравнения в частных производных гиперболического типа с конечной скоростью распространения возмущений, что соответствует «волновому» закону предельного перехода. При $\lambda = C\rho v^2 \tau$ (2.16) совпадает с уравнением переноса в среде с экспоненциальной релаксацией (памятью) теплового потока (2.7), а (2.17) — с законом Максвелла — Каттанео (2.5). Последующие приближения дискретных уравнений (2.12) и (2.13) при «волновом» законе предельного перехода также будут давать уравнения в частных производных с конечной скоростью распространения теплового сигнала.

Таким образом, при переходе от дискретных уравнений переноса к их приближениям различной точности в виде уравнений в частных производных следует задавать закон предельного перехода, т. е. связь между пространственным и временным масштабами и внутренней структуры системы. Закон предельного перехода определяет тип уравнений в частных производных и некоторые фундаментальные свойства их решений. Строго говоря «волновой» закон предельного перехода представляется более оправданным, так как он дает конечную скорость распространения возмущений, что соответствует свойствам модели случайных блужданий и физическому смыслу процессов переноса. Однако если процесс протекает достаточно медленно, так что его характерная скорость много меньше скорости распространения возмущений, то можно пользоваться и «диффузионным» законом предельного перехода. Пространственно-временная нелокальность дискретного уравнения переноса (2.12) и дискретного аналога закона Фурье (2.13) имеет ясный физический смысл: энергия (масса и т. д.) из одной области пространства в некоторый момент времени переносится в другую область пространства и попадает туда в другой момент времени. Как уже отмечалось выше, для анализа процессов переноса в ряде случаев более удобно использовать уравнения (2.12) и (2.13) непосредственно в дискретной форме.

2.3. Двухкомпонентные системы. Уравнения переноса в локально-неравновесных средах, рассмотренные в предыдущих разделах, могут быть использованы для анализа сложных многокомпонентных систем, состоящих из двух или нескольких взаимодействующих подсистем с различными свойствами. В этом случае математическая модель состоит из соответствующего количества уравнений переноса, записанных для каждой отдельно взятой подсистемы с учетом обмена между ними энергией, массой и т. д. Тип уравнений переноса определяется соотношением между характерным временем процесса и временами релаксации к локальному равновесию в подсистемах. Рассмотрим два примера.

2.3.1. Двухтемпературная модель. В настоящее время широкое распространение получили двухтемпературные модели диффузионного типа, представляющие собой систему двух параболических уравнений теплопро-

водности [16, 46—48]. Такие модели описывают теплоперенос в системах со сложной структурой, состоящих из подсистем, каждой из которых можно приписать свою собственную температуру. Введение двухтемпературной модели необходимо в случае, если время установления равновесия между подсистемами сравнимо с характерным временем процесса переноса в целом. Такие условия реализуются, например, при облучении металлов сверхкороткими импульсами энергии, когда на определенной стадии процесса температура электронного газа может значительно превышать температуру решетки [16—20]. В ударных волнах роль подсистем со своей собственной температурой играют различные степени свободы молекул [21]. В гетерогенных системах разные температуры могут иметь газовая и твердая фазы [22, 46—48]. Двухтемпературная (или многотемпературная) модель процессов переноса, по-видимому, может найти применение и в других системах со сложной структурой, состоящих из различных подсистем, обмен энергией (веществом и т. д.) между которыми затруднен»

Существующие двухтемпературные модели диффузионного типа справедливы при условии, что время установления равновесия в подсистемах много меньше времени установления равновесия между ними [16]. В более общем случае, учитывающем процессы релаксации внутри каждой подсистемы, Двухтемпературная модель должна состоять из системы уравнений переноса гиперболического типа

$$C_1 \rho_1 \tau_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + C_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \Delta T_1 + W_1 + \tau_1 \frac{\partial W_1}{\partial t} + g(T_2 - T_1) + g \tau_1 \frac{\partial (T_2 - T_1)}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$C_2 \rho_2 \tau_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + C_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \Delta T_2 + W_2 + \tau_2 \frac{\partial W_2}{\partial t} + g(T_1 - T_2) + g \tau_2 \frac{\partial (T_1 - T_2)}{\partial t}, \quad (2.19)$$

где T_1 и T_2 — температуры каждой из подсистем, g — коэффициент теплообмена между ними, τ_1 и τ_2 — время релаксации к локальному равновесию подсистемы 1 и 2 соответственно. Как уже отмечалось выше, из решения уравнения переноса гиперболического типа следует, что тепловая волна (тепловой сигнал) распространяется с конечной скоростью $v = (a/\tau)^{1/2}$, где $a = \lambda/C\rho$. В двухкомпонентной системе (2.18)—(2.19) тепловая волна будет распространяться по каждой из подсистем со своей собственной скоростью: $v_1 = (a_1/\tau_1)^{1/2}$ и $v_2 = (a_2/\tau_2)^{1/2}$.

Рассмотрим двухтемпературную модель (2.18)—(2.19) применительно к процессу теплообмена между электронным газом и решеткой при облучении поверхности металлов сверхкороткими импульсами энергии. В этом случае обычно предполагают, что энергию лазерного импульса поглощает только электронный газ, а теплопередачей по решетке можно пренебречь [16—20]. При таких предположениях система (2.18)—(2.19) примет следующий вид (индекс 1 относится к электронному газу, 2 — к решетке, W — интенсивность поглощаемой электронным газом энергии):

$$\frac{a_1}{v_F^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + \frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \Delta T_1 + W + \tau_1 \frac{\partial W}{\partial t} + g(T_2 - T_1) + g \tau_1 \frac{\partial (T_2 - T_1)}{\partial t}, \quad (2.20)$$

$$\frac{a_2}{v_c^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + \frac{\partial T_2}{\partial t} = g(T_1 - T_2) + g \tau_2 \frac{\partial (T_1 - T_2)}{\partial t}; \quad (2.21)$$

здесь учтено, что электроны в металле, вносящие основной вклад в процесс теплопереноса, движутся со скоростями порядка фермиевской v_F , т. е. $v_1 = (a_1/\tau_1)^{1/2} \approx v_F$, а $v_2 = (a_2/\tau_2)^{1/2} \approx v_c$, где v_c — скорость звука в металле. Из (2.20) следует, что тепловая волна распространяется по электронному газу со скоростью v_F (см. первый член в левой части (2.20)). Этот вывод совпадает с результатами эксперимента [17], где исследовался теплоперенос в тонких металлических пленках. Вообще говоря, в толстых металлических образцах распространение тепловой волны по электронному газу также происходит со скоростью $v = v_F$, однако вследствие диссипативных эффектов (см. второй член в левой части (2.20)) амплитуда теплового сигнала экспоненциально затухает, что и затрудняет его экспериментальное наблюдение. Производная по времени от интенсивности источника излучения $\partial W/\partial t$ в (2.20), хотя и не изменяет суммарного энергетического баланса системы, однако существенно влияет на форму эффективного импульса поглощаемой электронным газом энергии, т. е. $\partial W/\partial t$. Это может привести к более резкому в сравнении с рассчитанным по классической диффузионной модели скачкообразному росту температуры электронного газа в начальный момент времени. Более детальный анализ системы (2.20)—(2.21) или ее частных случаев позволит глубже изучить механизм взаимодействия между электронным газом и решеткой в металлах и дать надежную интерпретацию имеющимся экспериментальным результатам.

Таким образом, при анализе высокоскоростных процессов, характерное время которых сравнимо с временами релаксации к локальному равновесию в подсистемах, следует пользоваться двухтемпературной моделью гиперболического типа (2.18)—(2.19). Решения такой модели могут иметь не только количественные, но и качественные отличия от решений двухтемпературной модели параболического типа.

2.3.2. Системы с теплопроводностью и диффузией. Существует большое число систем, в которых могут одновременно протекать процессы переноса энергии и массы. Если такой процесс происходит в локально-равновесных условиях, то для его описания можно пользоваться уравнениями теплопроводности и диффузии параболического типа. В противном случае, когда приближение локального равновесия не выполняется ни для теплопереноса, ни для массопереноса, т. е. когда характерное время процесса сравнимо с временами релаксации температуры τ_T и концентрации τ_Y к своим локально-равновесным значениям, математическая модель будет состоять из системы уравнений гиперболического типа (см. раздел 2)

$$\begin{aligned} C\rho \frac{\partial T}{\partial t} + C\rho\tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \lambda\Delta T + W_1(T, Y) + \tau_T \frac{\partial W_1}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \rho\tau_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= D\Delta Y + W_2(T, Y) + \tau_Y \frac{\partial W_2}{\partial t}, \end{aligned}$$

где Y — концентрация, $W_1(T, Y)$ и $W_2(T, Y)$ — источники тепла и массы соответственно, D — коэффициент диффузии. Такая система уравнений определяет как конечную скорость распространения тепловой волны (возмущения температуры) $v_T = (a/\tau_T)^{1/2}$, так и конечную скорость распространения концентрационной волны (возмущения концентрации) $v_Y = (D/\tau_Y)^{1/2}$. Для газов, например, $v_T \approx v_Y$, а для капиллярно-пористых сред $v_T \gg v_Y$ [23]. В последнем случае, если характерная скорость процесса переноса сравнима по порядку величины с v_Y , эффекты локальной неравновесности будут оказывать заметное влияние только на массопере-

нос, а теплоперенос будет протекать в локально-равновесных условиях. Тогда система уравнений тепломассопереноса будет состоять из классического уравнения теплопроводности параболического типа и уравнения массопереноса гиперболического типа [5, 23]

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + W_1(T, Y),$$

$$\rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \rho \tau_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = D \Delta Y + W_2(T, Y) + \tau_Y \frac{\partial W_2}{\partial t}.$$

Эта система уравнений может быть полезна для анализа высокоинтенсивных процессов тепломассопереноса в капиллярно-пористых средах при гетерогенном катализе, в химических реакторах, фильтрационном горении и т. д.

3. Общие свойства бегущих волн в локально-неравновесных системах.

3.1. Условия во фронте волны. С учетом релаксационных процессов температура и тепловой поток в бегущей волне описываются законом сохранения энергии и законом Максвелла — Каттанео (2.5), которые в системе координат, связанной с фронтом волны, имеют следующий вид:

$$C\rho V \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial q}{\partial x} + W, \quad (3.1)$$

$$\tau V \frac{\partial q}{\partial x} + q = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где V — скорость распространения бегущей волны. Интегрируя (3.1) и (3.2) в пределах бесконечно узкой зоны, включающей в себя фронт волны, можно получить разности значений T и q до и после фронта (т. е. скачки температуры и теплового потока во фронте волны), которые будем обозначать квадратными скобками $[T]$ и $[q]$.

3.1.1. Если во фронте волны скрытая теплота фазового перехода равна нулю и теплофизические параметры системы постоянны, то из (3.1) и (3.2) следует, что $[q] = [T] = 0$ при $V \neq v$, где $v = (a/\tau)^{1/2}$ — скорость распространения теплового сигнала в релаксирующей среде. Градиент температуры при этом ведет себя в соответствии с функцией тепловыделения W : если $[W] = 0$, то градиент температуры непрерывен, а если функция тепловыделения во фронте волны изменяется скачком, т. е. $[W] \neq 0$, то и градиент температуры изменяется скачком. В последнем случае фронт волны представляет собой поверхность слабого разрыва. Если $v = V$, то из (3.1) и (3.2) следует, что $[q] \sim [T] \sim [W]$ и при $[W] \neq 0$ фронт волны представляет собой поверхность сильного разрыва.

3.1.2. Если во фронте волны скрытая теплота фазового перехода не равна нулю, то из (3.1) и (3.2) следует

$$[T] = - \tau V Q \lambda^{-1} \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)^{-1}, \quad [q] = Q \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)^{-1}.$$

Таким образом, фронт волны в релаксирующей среде с фазовым переходом (или бесконечно узкой зоной тепловыделения) представляет собой поверхность сильного разрыва. Значения скачков температуры и теплового потока во фронте волны пропорциональны теплоте фазового перехода и меняют свой знак при $V = v$. Наличие скачка температуры во фронте

волны следует учитывать также и при рассмотрении задачи Стефана в релаксирующих средах: классическое условие непрерывности температуры в зоне фазового перехода в данной ситуации неприемлемо.

3.1.3. В некоторых случаях фронт волны может представлять собой поверхность раздела между состояниями среды с различными теплофизическими свойствами [5, 49, 50]. Например, при фазовом переходе He I — He II в его фронте скачком изменяется коэффициент теплопроводности [49, 51]. Тогда из (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned}\tau V [q] &= - [\lambda T], \\ C\rho V [T] &= - [q].\end{aligned}\tag{3.3}$$

При заданном значении V отсюда следует, что $[T] \sim [\lambda]$, т. е. фронт волны является поверхностью сильного разрыва.

Учитывая, что коэффициент теплопроводности в He II много больше, чем в He I [51], из (3.3) приближенно получим $[T] \sim [q]^2$, т. е. скачок температуры во фронте фазового перехода He I — He II пропорционален квадрату плотности теплового потока через его поверхность, что находится в качественном соответствии с результатами эксперимента [49].

Аналогичным способом можно показать, что сильный разрыв температурного поля во фронте бегущей по релаксирующей среде волне может быть вызван скачкообразным изменением времени релаксации или степенной зависимостью теплофизических параметров (τ , λ , C) от температуры [5, 34, 52].

Таким образом, процессы релаксации в некоторых случаях приводят к образованию сильных и слабых разрывов во фронте бегущей волны — тепловых ударных волн. Появление таких разрывов можно ожидать при распространении волн переключения «сверхпроводник — нормальный металл» [40, 50, 57, 63], волн взрывной кристаллизации аморфных веществ [41], волн низкотемпературных химических реакций [53], в волнах горения [5, 30, 38], в системах, описываемых задачами Стефана [54, 55], и т. д.

3.2. Распределения температуры и теплового потока в бегущей волне. В релаксирующей среде температура и тепловой поток в бегущей волне описываются уравнениями (2.9) и (2.10), которые в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$(1 - \varphi^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - \varphi \frac{d\theta}{dx} + \omega + \varphi \frac{d\omega}{dx} = 0,\tag{3.4}$$

$$(1 - \varphi^2) \frac{dj}{dx} - \varphi j - \omega = 0,\tag{3.5}$$

где $\theta = (T - T_0) (T_m - T_0)^{-1}$ — безразмерная температура, T_0 и T_m — начальная и масштабная температуры соответственно, $\varphi = V/v$ — безразмерная скорость распространения бегущей волны, $j = q/C\rho v (T_m - T_0)$; $\omega = W\tau/C\rho (T_m - T_0)$. Решения (3.4) и (3.5) можно получить методом преобразования Фурье [34, 31]:

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - iu\varphi) \exp(-iux)}{(1 - \varphi^2)u^2 - iu\varphi} \mu(u) du,\tag{3.6}$$

$$j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-iux)}{(1 - \varphi^2)iu + \varphi} \mu(u) du,\tag{3.7}$$

где

$$\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \exp(iux) dx.$$

Выражения (3.6) и (3.7) дают распределения температуры и теплового потока в волне для произвольного типа источника ω , если только его можно представить как функцию координаты x . Модели такого рода широко используются для описания различных типов автоволновых явлений [5, 38—41], отдельные примеры которых будут рассмотрены ниже. Преобразовав (3.6) и (3.7) с использованием теоремы о свертке, легко получить, что если $\varphi \geq 1$, то $\theta(x) = 0$ и $j(x) = 0$ при $x < 0$, т. е. среда перед фронтом волны остается непрогретой. Это свойство бегущих волн связано с конечной скоростью распространения теплового сигнала (теплового возмущения) и является причиной ограниченности сверху ($\varphi < 1$) скоростей распространения автоволновых процессов [34, 56, 57]. Более подробно этот факт будет прокомментирован ниже.

3.3. Особенности механизма распространения автоволн в релаксирующих средах. Под автоволнами принято понимать самоподдерживающийся за счет распределенных в системе источников энергии устойчивый волновой процесс в нелинейных неравновесных средах [5, 38—41]. Скорость распространения автоволны, ее форма и амплитуда не зависят от начальных условий в достаточно широком диапазоне их изменения, а определяются локальными свойствами самой среды. Автоволновой механизм распространения какого-либо процесса подразумевает наличие связи (например, диффузионной) между соседними элементами среды. Эта связь обеспечивает послойное инициирование распределенных в системе источников, поддерживая тем самым распространение автоволнового процесса. Такой механизм распространения отличает автоволны от других типов бегущих волн, например волн детонации, где послойное инициирование осуществляется за счет ударного сжатия вещества. Характерный масштаб связи между соседними элементами среды, необходимый для существования автоволнового режима, будем обозначать l^* . Величина l^* определяется механизмом инициирования распределенных в системе источников и для каждой конкретной системы имеет свой физический смысл. Например, в волне перехода сверхпроводник — нормальный металл [40, 50] за l^* можно принять наименьший размер сверхпроводящей области, окруженной нормальной зоной, т. е. длину когерентности. В газах l^* зависит от кинетических особенностей данного автоволнового процесса, но в любом случае не может быть меньше средней длины свободного пробега молекул.

В дискретных средах l^* ограничена снизу характерным масштабом структуры среды h (см. раздел 2.2). Очевидно, что автоволны с характерной глубиной прогрева перед фронтом волны l , меньшей чем l^* , существовать не могут, так как в этом случае отсутствует связь между соседними элементами среды, необходимая для поддержания автоволнового режима. Отсюда следует, что, поскольку при $\varphi \geq 1$ среда перед фронтом волны остается непрогретой, т. е. $l = 0$ (см. предыдущий раздел), спектр возможных значений скоростей автоволн ограничен сверху скоростью распространения возмущений $\varphi = 1$ [5, 56, 57]. Подчеркнем, что это свойство характерно только для автоволновых процессов. Другие типы бегущих волн, например волны детонации, фазовые волны, волны воспламенения, могут распространяться с любой скоростью [5, 38, 52].

4. Структура бегущих волн в локально-неравновесных системах.

4.1. Бесконечно узкая зона тепловыделения. При распространении волн фазовых переходов [39, 41], некоторых типов волн горения [38], в задаче Стефана [54, 55] и т. д. предполагают, что зона тепловыделения имеет бесконечно малую толщину. В этом случае источник тепловыделения можно представить в виде дельта-функции Дирака: $\omega(x) = \bar{\omega} \delta(x)$, где $\bar{\omega} = \text{const}$. Тогда из (3.6) можно получить распределение температуры в бегущей по релаксирующей среде волне с бесконечно узкой зоной тепловыделения [5, 30]

$$\theta(x) = \frac{\bar{\omega}}{(1-\varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)} \times (1 + \gamma_1 \varphi) \exp(\gamma_1 x), \quad x < 0, \quad \varphi < 1, \\ \times (1 + \gamma_2 \varphi) \exp(\gamma_2 x), \quad x > 0, \quad (4.1)$$

$$\theta(x) = \frac{\bar{\omega}}{(1-\varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)} \times 0, \quad x < 0, \quad \varphi > 1, \\ \times (1 + \gamma_1 \varphi) \exp(\gamma_1 x) - (1 + \gamma_2 \varphi) \exp(\gamma_2 x), \quad x > 0, \quad (4.2)$$

где

$$2\gamma_{1,2} = \varphi(1+B)(1-\varphi^2)^{-1} \pm [\varphi^2(1+B)^2(1-\varphi^2)^{-2} + 4B(1-\varphi^2)^{-1}]^{1/2},$$

$B = \tau/t_\alpha$ — безразмерный критерий, представляющий собой отношение времени релаксации τ к характерному времени теплоотдачи t_α в окружающую среду [5, 31, 56, 57]. Графики зависимостей (4.1) и (4.2) представлены

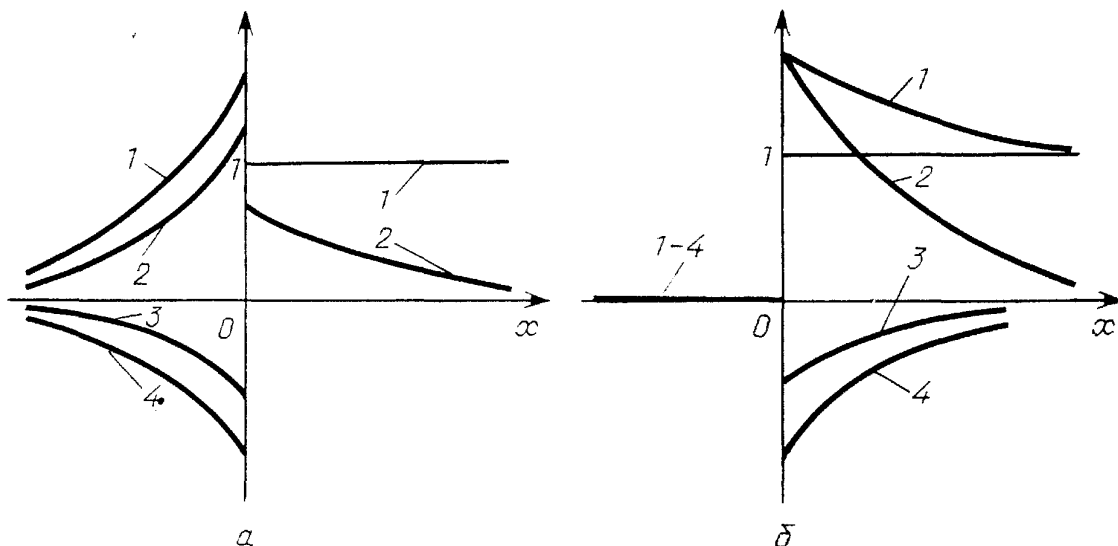


Рис. 2. Зависимости температуры $\theta(x)$ (кривые 1 и 2), теплового потока $j(x)$ (3) и градиента температуры $d\theta/dx$ (4) в волне при бесконечно узкой зоне тепловыделения [Кривые 1, 3, 4 — адиабатический случай] ($B = 0$), 2 — $B > 0$ а: $\varphi < 1$. б: $\varphi > 1$

на рис. 2 (кривые 1 и 2). Температура в зоне тепловыделения $x = 0$ в соответствии с общими выводами раздела 3.1.2 изменяется скачком, т. е. фронт волны представляет собой поверхность сильного разрыва. Вблизи зоны тепловыделения температура $\theta(x)$ может значительно превышать адиабатическую $\theta_a = 1$ (см. рис. 2). Этот эффект вызван тем, что при $\varphi \sim 1$ система находится в локально-неравновесном состоянии, температура которого, поддерживаемая распределенными источниками энергии, может

быть больше равновесной адиабатической температуры ⁽³⁾ ●. Другими словами, когда скорость движения волны V сравнима со скоростью распространения тепловых возмущений v , тепло от источника не успевает распространяться на значительное расстояние, и поэтому температура вблизи него может превышать адиабатическую.

Если $\varphi > 1$, то температура перед фронтом волны равна нулю, так как тепло диффундирует в направлении, обратном движению фронта, а за ним постепенно релаксирует к адиабатической при $B = 0$ или к температуре окружающей среды при $B > 0$. Структура волны с $\varphi > 1$ (рис. 2, б) позволяет рассматривать ее как тепловую ударную волну [5, 34, 30]. Аналогичный результат, т. е. образование тепловой ударной волны при движении точечного источника тепла, получен в работах [42, 43] в случае двумерного поля температур.

При $\varphi < 1$ характерный размер прогретого слоя перед фронтом волны l определяется следующим соотношением (см. (4.1)):

$$l = \frac{1}{\gamma_1}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что $l \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 1$. Этот результат принципиально отличается от классического локально-равновесного случая, когда $l \rightarrow 0$ только при $\varphi \rightarrow \infty$.

Плотность теплового потока $j(x)$ и градиент температуры $d\theta/dx$ не равны друг другу с точностью до знака, как это следует из классического закона Фурье, а могут существенно отличаться (см. рис. 2).

4.2. П-о б р а з н ы й источник тепловыделения.
В ряде случаев для моделирования процесса распространения бегущих

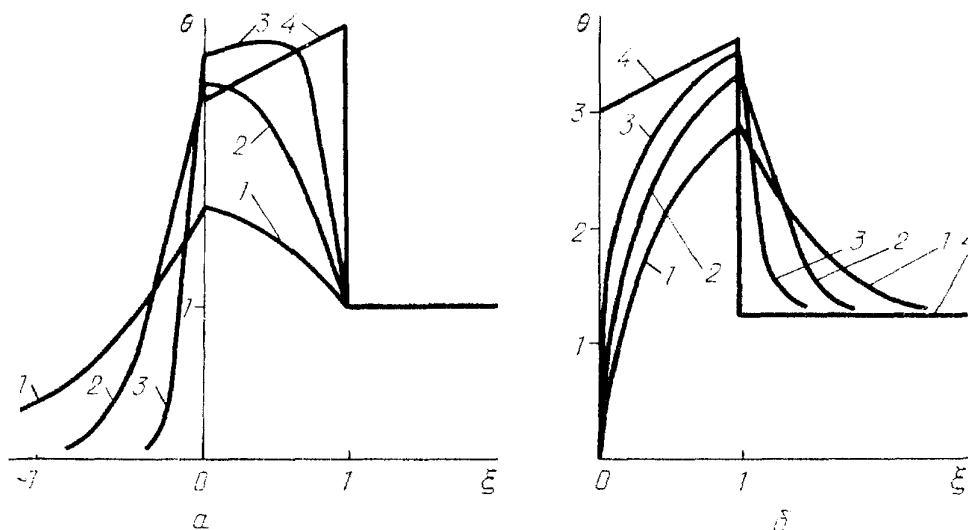


Рис. 3. Зависимости температуры в волне $\theta(\xi)$ при различных значениях безразмерной скорости ее распространения φ и $\bar{\omega} = 3$. а — Кривая 1 — $\varphi = 0,8$; 2 — $\varphi = 0,95$; 3 — $\varphi = 0,98$; 4 — $\varphi = 1$. б — Кривая 1 — $\varphi = 1,1$; 2 — $\varphi = 1,05$; 3 — $\varphi = 1,02$; 4 — $\varphi = 1$

волн следует пользоваться функцией источника конечной ширины x_0 с постоянной интенсивностью $\bar{\omega}$ [5, 53]

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \bar{\omega} = \text{const}, & 0 < x < x_0, \\ &= 0, & x < 0, \quad x > x_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (3.6), нетрудно получить распределение температуры в бегущей волне с такой П-образной функцией тепловыделения. Эти распределения представлены на рис. 3. Так же как и в предыдущем случае, температура в зоне тепловыделения ($0 < \xi < 1$, где $\xi = x/x_0$ — новая безразмерная переменная) и вблизи нее может значительно превышать адиабатическую равновесную температуру. При $\varphi < 1$ релаксационные процессы протекают внутри и перед зоной тепловыделения ($\xi < 1$), а за ней $\theta(\xi) = \theta_a = 1$. Если $\varphi > 1$, то среда перед фронтом волны остается не прогретой, а за ним постепенно релаксирует к адиабатической, т. е. $\theta(\xi) \rightarrow \theta_a$ при $\xi \rightarrow \infty$ (см. рис. 3, б) (4) 3.

На рис. 4 представлены зависимости теплового потока $j(\xi)$ и градиента температуры $d\theta/d\xi$. Скачкообразное изменение градиента температуры в

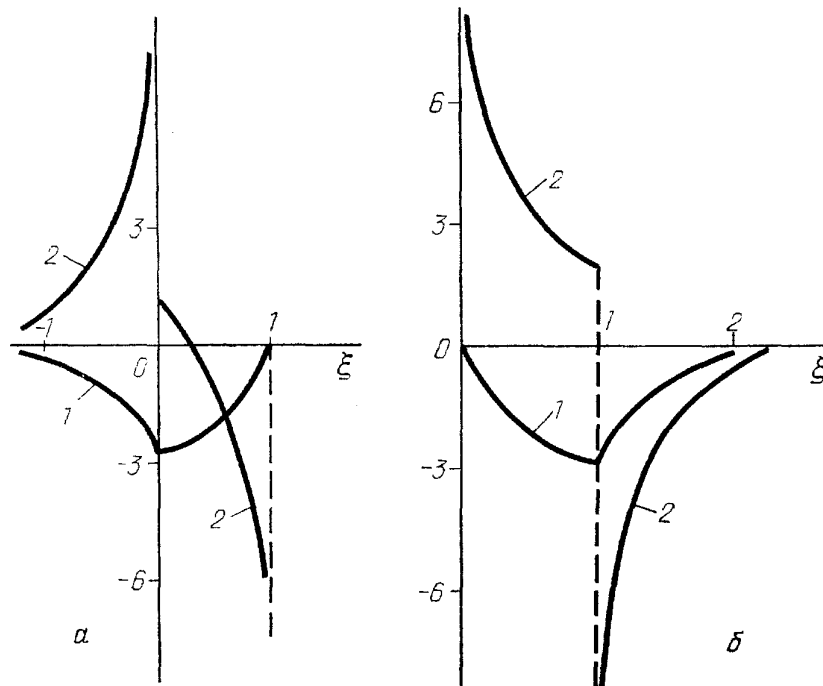


Рис. 4. Зависимости теплового потока $j(\xi)$ (1) и градиента температуры $d\theta/d\xi$ (2) при $\bar{\omega} = 3$. а: $\varphi < 1$. б: $\varphi > 1$

точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ обусловлено наличием в системе процессов релаксации и видом функции тепловыделения (4.4). Тепловой поток при этом остается непрерывным (см. рис. 4). При $\varphi = 1$ не только градиент, но также температура и тепловой поток во фронте волны изменяются скачком. В этом случае отсутствует «диффузия» тепла в волне, которая при $\varphi \neq 1$ сглаживает зависимости температуры и теплового потока.

4.3. Ступенчатая функция тепловыделения. Рассмотрим теперь источник тепловыделения следующего вида:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \bar{\omega} = \text{const}, & x > 0, \\ &= 0, & x < 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Такая ступенчатая функция тепловыделения используется при анализе распространения волн переключений однородных стационарных состояний системы, например волн перехода сверхпроводник — нормальный металл [40, 50], полупроводник — металл [58], диффузионный — кинетический режим в гетерогенном катализе [59] и т. д. Подставляя (4.5) в (3.6), получаем распределение температуры в волне переключения с учетом

процессов релаксации [5, 31, 56, 57]:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= B\kappa_1 \exp(\gamma_1 x), & x < 0, \\ \varphi < 1 \\ &= 1 - B\kappa_2 \exp(\gamma_2 x), & x > 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 0, & x < 0, \\ \varphi = 1 \\ &= 1, & x > 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 0, & x < 0, \\ \varphi > 1 \\ &= 1 + B\kappa_2 \exp(\gamma_2 x) - B\kappa_1 \exp(\gamma_1 x), & x > 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\kappa_{1,2} = \bar{\omega} (1 + \varphi \gamma_{1,2}) [(1 - \varphi^2) (\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_{1,2}]^{-1}.$$

Графики зависимостей $\theta(x)$ (4.6)–(4.8) представлены на рис. 5. При $x \rightarrow \pm\infty$ температура системы определяется ее однородными устойчивыми состояниями с $\theta_1 = 1$ и $\theta_0 = 0$. Как и в предыдущих случаях, прогретый слой перед фронтом волны существует только при $\varphi < 1$ (кривая 1

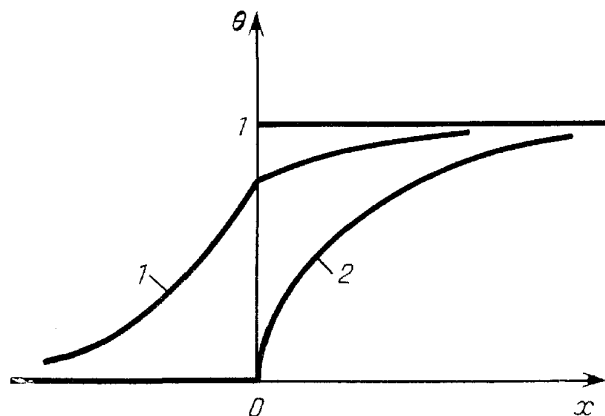


Рис. 5. Зависимости температуры $\theta(x)$ в волне переключения при различных значениях φ : для 1 $\varphi < 1$, для 2 $\varphi > 1$

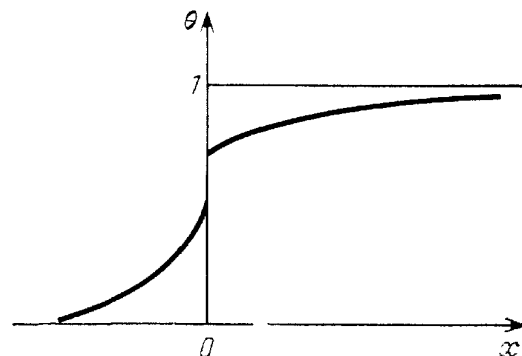


Рис. 6. Зависимость температуры $\theta(x)$ в волне переключения с фазовым переходом ($\varphi < 1$, $\omega_1 < 0$)

на рис. 5), а если $\varphi > 1$, то $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ (кривая 2 на рис. 5). При $\varphi = 1$ «диффузия» тепла в волне отсутствует и ее температура определяется балансом между теплоприходом за счет источника тепловыделения и теплоотводом в окружающую среду. Если теплоотвод подчиняется закону Ньютона $\propto (T - T_0)$, как это и предполагалось ранее, а функция тепловыделения имеет вид ступеньки (4.5), то температура ведет себя соответствующим образом — во фронте волны изменяется скачком (4.7).

Если во фронте волны переключения существует фазовый переход, как это может быть, например, в волне сверхпроводник — нормальный металл [50], то источник тепловыделения можно представить в виде суммы дельта-функции (см. раздел 4.1) и источника (4.4). В этом случае распределение температуры также определяется интегральным соотношением (3.6). На рис. 6 представлена зависимость $\theta(x)$ при $\varphi < 1$. Наличие фазового перехода во фронте волны приводит к появлению в нем скачка температуры (см. разделы 3.1.2 и 4.1). Этот эффект, связанный с релаксационными свойствами системы, следует учитывать при определении скоростей распространения бегущих волн. Если $\varphi > 1$, то во фронте волны также будет скачок температуры, а перед ним среда остается непрогретой;

поэтому такую волну также можно рассматривать как тепловую ударную волну.

Таким образом, процессы релаксации приводят к существенным особенностям температурного поля в бегущих волнах по сравнению с классическим локально-равновесным случаем. Во-первых, температура в зоне тепловыделения и вблизи нее может значительно превышать равновесную адиабатическую температуру. Во-вторых, если скорость бегущей волны больше, чем скорость распространения возмущений (теплового сигнала), то среда перед фронтом волны остается непрогретой. В-третьих, при наличии в волне бесконечно узкого источника тепловыделения (например, при фазовых переходах) температура во фронте волны изменяется скачком, т. е. фронт волны представляет собой поверхность сильного разрыва.

5. Скорость и критические условия распространения автоволн в локально-неравновесных средах.

5.1. Волны горения. В приближении бесконечно узкой зоны химической реакции скорость волны горения определяется температурой ее фронта T^* следующим образом [38]:

$$V = A \exp\left(-\frac{E^*}{2RT^*}\right), \quad (5.1)$$

где $A = \text{const}$, E^* — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная. В свою очередь температура в зоне реакции зависит от скорости движения волны (см. (4.1)). Поэтому стационарная скорость распространения волн горения определяется следующим трансцендентным соотношением [5, 30]:

$$\frac{\varphi(1 + \gamma_1\varphi) \exp(-\gamma_1 l^*)}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)} = \theta_E \left(\frac{\ln \bar{A}}{\varphi}\right)^{-1}, \quad (5.2)$$

где $\theta_E = E^* / (2R(T_a - T_0))$, $\bar{A} = A/v$. Графики зависимостей левой (кривые 1–4) и правой (кривая 5) частей уравнения (5.2) представлены на рис. 7. Абсциссы точек их пересечения равны скоростям автоволновых режимов горения φ . Как уже отмечалось ранее, эти скорости ограничены сверху скоростью распространения тепловых возмущений $\varphi = 1$. Из (5.2) следует, что параметр B , равный отношению времени релаксации к характерному времени теплоотдачи в окружающую среду, определяет не только значения скоростей волны φ , но и число автоволновых режимов. При $B = B_1 = 0$ (кривая 1 на рис. 6), когда теплотери в окружающую среду отсутствуют, может быть три автоволновых режима горения с различными скоростями распространения; при $B = B_2 > 0$ (кривая 2) — четыре, при $B = B_3 > B_2$ (кривая 3) — два; при $B = B_4 > B_3$ (кривая 4) — ни одного автоволнового режима. Решения с меньшими скоростями (одно на кривой 1

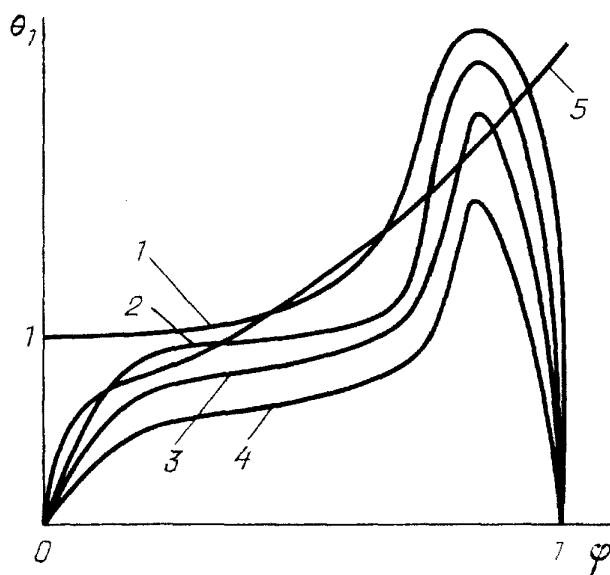


Рис. 7. Зависимости левой (кривые 1–4) и правой (5) частей уравнения (5.2) от φ . Кривые: 1 — $B_1 = 0$; 2 — $B_2 > 0$; 3 — $B_3 > B_2$; 4 — $B_4 > B_3$

и два на кривой 2) соответствуют классическим решениям уравнений параболического типа [38], когда релаксационными процессами можно пренебречь. Автоволновые режимы с большими скоростями возможны только в средах с релаксацией. Таким образом, наличие эффектов релаксации приводит к появлению дополнительных автоволновых режимов. Более того, в релаксирующих средах возможно существование автоволновых режимов в таких условиях, в которых классических (локально-равновесных) решений вообще нет (см. кривую 3 на рис. 7). В этом случае равновесная температура за фронтом волны, определяемая начальным теплосодержанием системы, не достигает значений, необходимых для протекания химической реакции горения и, следовательно, послойного инициирования распределенных источников. Поэтому классические автоволновые режимы с $\varphi \ll 1$, когда температура в зоне реакции не превышает адиабатическую (равновесную), распространяться не могут. Однако при высоких скоростях волны ($\varphi \sim 1$) локально-неравновесная температура в ее фронте значительно превышает равновесную (см. рис. 2) и может быть достаточной для активации реакции горения и поддержания автоволнового режима ее распространения. Аналогичный эффект, т. е. существование автоволн в релаксирующих системах, когда классических локально-равновесных решений нет, возможен, по-видимому, и для других типов автоволновых процессов.

Режим с наименьшей скоростью на кривой 2 неустойчив [38]: его скорость растет с увеличением тепловых потерь. Из этих же соображений следует ожидать неустойчивость и режим с меньшей скоростью из пары релаксационных решений (см. кривые 1—3 на рис. 7). Однако этот вопрос требует специального рассмотрения.

Таким же способом может быть учтено влияние процессов релаксации на автоволновые режимы распространения фазовых переходов различных типов, например фронта взрывной кристаллизации аморфных веществ [41]. Для этого вместо (5.1) следует использовать соответствующее макрокинетическое уравнение.

В этом разделе учитывалось влияние локальной неравновесности на автоволновые режимы горения через процессы переноса. Вместе с тем высокие температуры и градиенты во фронте волны горения могут привести к неравновесному протеканию химических реакций, т. е. кинетической неравновесности [60]. В общем случае следует учитывать оба этих эффекта как для волн горения, так и для волн других типов, распространяющихся в релаксирующих средах.

5.2. Волны перехода сверхпроводник — нормальный металл (S—N). Одним из самых распространенных типов автоволновых процессов являются волны переключения однородных состояний в бистабильных системах [39, 40, 50, 59]. Волны переключения описывают переходы сверхпроводник (S) — нормальный металл (N) [40, 50], диффузионно-кинетический режим в гетерогенном катализе [59], а также волновые процессы в термоэлектрических системах [61] и нейристорах [62]. Последние могут быть использованы для создания логических схем, линий задержки, элементов памяти вычислительной техники и т. д. [62, 63]. Кроме того, нейристоры, созданные на основе сверхпроводящих систем, моделируют нервные волокна [62, 64]. Интерес к конструктивным элементам, принцип работы которых основан на переключении однородных состояний бистабильной системы в автоволновом режиме, вызван их «био-подобностью», простотой и высокой скоростью срабатывания. Так, на-

пример, скорость волны перехода может достигать 10^6 см/с [50, 63]. Теория распространения волн переключения, основанная на классических уравнениях переноса параболического типа [40], при таких скоростях становится неприменимой [50]. В этом случае следует пользоваться уравнениями переноса, учитывающими релаксацию системы к локальному равновесию (см. раздел 2). Дальнейшее изложение посвящено волнам S—N-перехода в релаксирующих средах [5, 31, 56, 57], однако общность математической модели позволяет переносить полученные результаты и на волны переключения других типов.

5.2.1. Интенсивность тепловыделения в волне S—N-перехода можно моделировать ступенчатой функцией (4.5) [40, 50, 63]. В этом случае скорость распространения волн S—N-перехода подчиняется следующему уравнению [5, 31, 56, 57]:

$$\theta^* = \frac{B(1 + \gamma_1 \varphi) \exp(-\gamma_1 \bar{\xi}_0)}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1} \equiv f(\varphi), \quad (5.3)$$

где θ^* — температура промежуточного неустойчивого состояния системы ($0 < \theta^* < 1$), определяющая переход одного устойчивого состояния в другое; $\bar{\xi}_0$ — безразмерная длина когерентности. Правая часть (5.3), обозначенная $f(\varphi)$, представляет собой

температуру во фронте волны. Графики зависимости $f(\varphi)$ при различных значениях параметра B представлены на рис. 8. Если $B < 1$ (кривая 1 на рис. 8), то $f(\varphi)$ — монотонно убывающая функция. Тогда существует только одна точка пересечения $f(\varphi)$ с $\theta^* = \text{const}$ и, следовательно, единственный автоволновой режим S—N-перехода. При $B > 1$ кривая $f(\varphi)$ имеет локальные минимум f_{\min} и максимум f_{\max} (кривая 3 на рис. 8). Если $\theta^* > f_{\max}$ или $\theta^* < f_{\min}$, то, как и в предыдущем случае, S—N-переход в автоволновом режиме возможен только с одной скоростью.

При $f_{\min} < \theta^* < f_{\max}$ точек пересечения $f(\varphi)$ и $\theta^* = \text{const}$ три. Им соответствуют автоволновые режимы с различными скоростями распространения $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ (см. рис. 8). Неединственность автоволновых режимов волны переключения при $B > 1$ обусловлена наличием в системе процессов релаксации. Бифуркационное значение параметра B , определяющее перестройку качественной структуры решения, равно единице. При этом $f_{\min} = f_{\max}$ (кривая 2 на рис. 8). Скорости распространения S—N-переходов, так же как и всех других типов автоволн, ограничены $|\varphi| = 1$ (см. рис. 8). Помимо этого общего ограничения существует другое, связанное с особенностями S—N-перехода. Поскольку глубина прогрева системы перед фронтом волны $l \rightarrow 0$ при $|\varphi| \rightarrow 1$, а l ограничена снизу минимальной переходной зоной, т. е. длиной когерентности $\bar{\xi}_0$, то скорости автоволновых режимов S—N-перехода будут ограничены $\varphi_{\text{cr}} < 1$, значение которой определяется из условия

$$\gamma_1(\varphi_{\text{cr}}) \bar{\xi}_0 = 1.$$

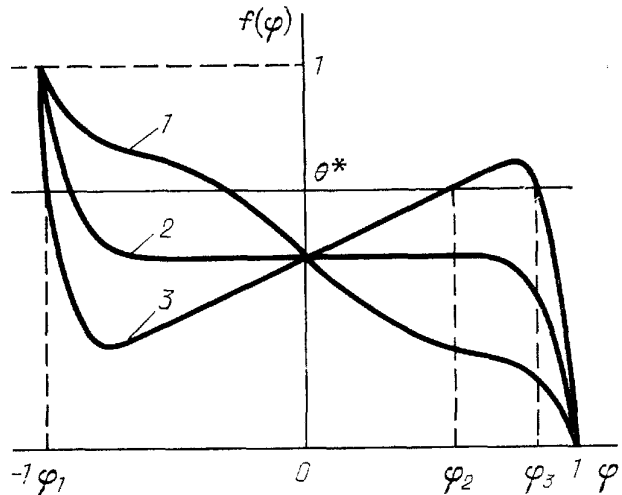


Рис. 8. Зависимость температуры во фронте волны переключения при различных значениях B . Для 1 $B < 1$, для 2 $B = 1$, для 3 $B > 1$

5.2.2. В некоторых случаях скрытая теплота S—N-перехода может оказывать существенное влияние на автоволновые режимы его распространения [50]. В предположении бесконечно узкой зоны S—N-перехода его фронт представляет собой поверхность сильного разрыва (см. рис. 6). При более детальном анализе S—N-волны следует учитывать, что зона S—N-перехода не может быть меньше длины когерентности $\bar{\xi}_0$. Поэтому изменение температуры во фронте волны, равное скачку температуры при бесконечно узкой зоне S—N-перехода, происходит на расстоянии порядка $\bar{\xi}_0$. Скорости распространения волны S—N-перехода в этом случае определяются следующим соотношением [5]:

$$\theta^* = \frac{(1 + \gamma_1 \varphi) \exp(-\gamma_1 \bar{\xi}_0)}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)} (B\gamma_1^{-1} - \varphi\omega_1) \equiv f_1(\varphi), \quad (5.4)$$

где ω_1 — безразмерная скрытая теплота фазового перехода. Так же, как и в предыдущем случае, существует бифуркационное значение параметра $B = B^*$, такое что при $B < B^*$ существует единственный автоволновой режим, а при $B > B^*$ — три (см. рис. 8). Значение $B = B^*$ определяется равенством (5.4) и условием

$$f_{1\min}(B^*) = f_{1\max}(B^*).$$

Из (5.4) следует, что при $\theta^* \rightarrow 0$ скорость S—N-волны стремиться к максимально возможной скорости φ_{\max} , значение которой кроме всего прочего зависит от скрытой теплоты фазового перехода ω_1 и определяется следующим соотношением:

$$B = \omega_1 \varphi_{\max} \gamma_1(\varphi_{\max}).$$

Скрытая теплота фазового перехода и его конечная ширина приводят к появлению предельных скоростей волны $\varphi_{\text{ср}}$ и φ_{\max} , значения которых, меньше скорости распространения тепловой волны $\varphi = 1$. В общем случае скорость S—N-волны будет ограничена минимальной из скоростей, соответствующих этим эффектам

$$|\varphi| \leq \min(\varphi_{\text{ср}}, \varphi_{\max}).$$

Если интенсивность тепловыделения в S—N-волне представляет собой не ступенчатую, а кусочно-линейную функцию [40], то распределения температуры и скорости распространения волны переключения можно найти методами, изложенными выше. При малом линейном участке тепловыделения выражение для скорости S—N-волны совпадает с (5.2), где под $\bar{\xi}_0$ следует понимать безразмерную ширину этого линейного участка [65].

Таким образом, локальная неравновесность системы оказывает заметное влияние на автоволновые процессы различных типов. Во-первых, она ограничивает спектр возможных скоростей автоволновых режимов скоростью распространения возмущений (см. примечание 1). В каждом конкретном случае могут быть и более сильные ограничения. Во-вторых, приводит к образованию во фронте волны поверхности сильных или слабых разрывов. В-третьих, допускает возможность существования сверхадиабатических температур во фронте волны и дополнительных по сравнению с классическим локально-равновесным случаем автоволновых режимов распространения.

Заключение. Целью данной статьи было показать, что свойства бегущих волн, распространяющихся с высокими скоростями в локализо-

неравновесных условиях, когда следует учитывать релаксационные процессы, существенным образом отличаются от свойств медленных бегущих волны, описываемых классическими локально-равновесными уравнениями переноса. Основой для такого анализа могут служить различные теоретические методы описания динамики систем, не опирающиеся на принцип локального равновесия. Модели случайных блужданий и сред с памятью являются одним из наиболее наглядных примеров таких методов. Необходимость подобного рода исследований объясняется не только их теоретическим интересом, но и широким распространением локально-неравновесных систем и применением их на практике.

Экстремальные условия — низкие температуры, высокие градиенты и потоки, сверхкороткие импульсы энергии, большие характерные скорости или малые характерные времена процессов — приводят к локально-неравновесному характеру протекания различных явлений.

Уже первые результаты, полученные с учетом релаксационных эффектов, показывают, что бегущие волны, распространяющиеся в локально-неравновесных условиях, обладают рядом существенных особенностей. Во фронте волны могут существовать поверхности сильных и слабых разрывов, а при скоростях волн, больших чем скорость распространения возмущений (теплового сигнала), образуются тепловые ударные волны. В зоне тепловыделения и вблизи нее температура может значительно превышать равновесную адиабатическую температуру. В локально-неравновесных системах существуют дополнительные по сравнению с классическим локально-равновесным случаем автоволновые режимы распространения различных процессов, причем скорости всех автоволн ограничены сверху скоростью распространения возмущений.

Дальнейшие исследования процессов переноса в экстремальных ситуациях, на наш взгляд, будут не только более детально учитывать релаксацию системы к локальному равновесию, т. е. временную нелокальность, но и рассматривать пространственную нелокальность, являющуюся характерной особенностью процессов переноса в сложных дискретных системах. Соотношение между пространственным и временным масштабами системы задает некоторые фундаментальные свойства процессов переноса, например скорость распространения возмущений соответствующего потенциала переноса, и определяет тип уравнений переноса (см. раздел 2.2). Следует ожидать, что использование нелокальных уравнений для анализа различных физических, физико-химических, биологических, экологических и других неравновесных систем со сложной структурой в ближайшем будущем может привести к новым интересным результатам.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ Под скоростью распространения возмущений будем понимать скорость распространения возмущений потенциала переноса, соответствующего данному процессу. В случае теплопереноса это скорость распространения тепловой волны (теплового сигнала) [3, 4].

² В этом смысле локально-неравновесные теории процессов переноса могут рассматриваться как «релятивистские» по отношению к классической локально-равновесной теории.

³ Общий баланс энергии при этом, естественно, сохраняется: повышение температуры вблизи зоны тепловыделения компенсируется более узкой прогретой областью перед ней.

⁴ Аналогичные явления сверхравновесных температур во фронте волны и релаксации температуры к равновесному значению за ним наблюдаются при фильтрационном горении [46, 47] и при спутном движении тепловых волн в слое катализатора [48]. В [46—48] использована двухтемпературная модель (см. разделы 2, 3), подразу-

мевающая различие температур газовой и твердой фаз. Соответствие указанных эффектов дает основание для применения релаксационной модели к подобного рода системам, где под временем релаксации следует понимать характерное время межфазного теплообмена [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью.— М.: Мир, 1974.
2. Петров Н., Бранное И. Современные проблемы термодинамики.— М.: Мир, 1986.
3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. // Rep. Prog. Phys. 1988. V. 51. P. 1105.
4. Joseph D. D., Preziosi L. // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 41; 1990. V. 62. P. 375.
5. Соболев С. Л. Автоволны в локально-неравновесных средах (средах с памятью).— Препринт ОИХФ АН СССР.— Черногловка, 1989.
6. Gyarmati I. // J. Non-Equilib. Therm. 1977. V. 2. P. 233.
7. Fekete D. // Phys. State Sol. Ser. b. 1981. V. 105. P. 161.
8. Maxwell S. C. // Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1867. V. 157. P. 49.
9. Бубнов В. А. // ИФЖ. 1975. Т. 28. С. 670.
10. Бубнов В. А. // Intern. J. Heat and Mass Trans. 1970. V. 13. P. 175.
- [11] Mikic B. B. // Ibidem. 1967. V. 10. P. 1899.
12. Урушев Д., Борисов М., Ваврек А. // Болг. физ. ж. 1988. Т. 15. С. 564.
13. Черешнев С. Л., Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б. Эффекты поступательной неравновесности в ударных волнах в газах.— Препринт ОИХФ АН СССР.— Черногловка, 1988.
14. Mac Donald R. A., Tsai D. H. // Phys. Rep. 1978. V. 46. P. 1.
15. Гутфелд Р. // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона.— М.: Мир, 1973. — Т. 5. С. 267.
16. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы.— М.: Наука, 1970.
17. Bronson S. D., Fujimoto S. G., Ippen E. P. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1962.
18. Elsayed-Ali H. E., Norris T. B., Pessot M. A., Mourou G. A. // Ibidem. V. 58. P. 1212.
19. Schoenlein R. W., Lin W. Z., Fujimoto S. G. // Ibidem. P. 1680.
20. Corkum P. B., Brunei F., Sherman N. K. // Ibidem. 1988. V. 61. P. 2886.
- [21] Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах.— М.: Наука, 1965.
22. Антонишин Н. В., Геллер М. А., Парнас А. Л. // ИФЖ. 1974. Т. 26. С. 503.
23. Таганов И. Н. Моделирование процессов массо-и энергопереноса.— Л.: Химия, 1979.
24. Новиков И. А. // ИФЖ. 1988. Т. 55. С. 643.
25. Kaminski W. // Inz. Chem. Proc. 1988. Т. 9. S. 81.
26. Динариев О. Ю., Николаев О. В. // ИФЖ. 1990. Т. 58. С. 78.
27. Machlyp S., Onsager L. // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 1512.
28. Gurtin M. E., Pipkin A. C. // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1968. V. 31. P. 112.
29. Nunziato S. W. // Quart. Appl. Math. 1971. V. 29. P. 187.
30. Соболев С. Л. // Проблемы горения и взрыва: Материалы IX Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву. — Черногловка, 1989.
- [31] Соболев С. Л. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. С. 603.
32. Бричкин Л. А., Даринский Ю. В., Пустальников Л. М. // ИФЖ. 1974. Т. 26. С. 495.
33. Vick B., Ozisik M. N. // J. Heat. Trans. 1983. V. 105. P. 902.
34. Соболев С. Л. // ДАН СССР. 1988. Т. 303. С. 1184.
35. Баумейстер К., Хамилл Т. // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112.
36. Утерт Д. // Теплопередача. 1977. № 1. С. 35.
37. Frankel S. I., Vick B., Ozisik M. N. // Intern. J. Heat and Mass Trans. 1987. V. 30. P. 1293.
38. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
39. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы.— М.: Наука, 1987.
40. Гуревич А. В., Минц Р. Г. Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках.— М.: ИВТАН СССР, 1987.
- [41] Шкловский В. А., Кузьменко В. М. // УФН. 1989. Т. 157. С. 311.
42. Tzou D. Y. // Intern. J. Heat and Mass Trans. 1989. V. 32. P. 1979.
43. Tzou D. Y. // J. Heat Trans. 1990. V. 112. P. 21.

44. *Weymann H.D.* // *Am. J. Phys.* 1967. V. 35. P. 488.
45. *Faïtel G.* // *Intern. J. Heat and Mass Trans.* 1972. V. 15. P. 369.
46. *Потытняков С. И., Бабкин В. С., Лаевский Ю. М., Дробышев В. И.* // *Физ. гор. и взрыва.* 1985. № 2. С. 19.
47. *Алдушин А. П., Сеплярский В. С., Шкадинский К. Г.* // *Ibidem.* 1980. № 1. С. 36.
48. *Киселев О. В., Матрос Ю. Ш.* // *Ibidem.* № 2. С. 25.
49. *Пешков В. П.* // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 30. С. 581; 1958. Т. 35. С. 1350.
50. *Overton W. C.* // *J. Low Temp. Phys.* 1971. V. 5. P. 397.
- [51] *Немировский С. К.* // *ИФЖ.* 1982. Т. 43. С. 676.
52. *Леванов Е.И., Сотский Е.Н.* // Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики.— М.: Наука, 1987.— С. 155.
53. *Варелко В. В., Баркалов И. М., Ваганов Д. А., Занин А. М., Кирюхин Д. П.* // *ДАН СССР.* 1982. Т. 264. С. 99; *Хим. физика.* 1983. Т. 2. С. 980.
54. *Showalter R. E., Walkington N. S.* // *Quart. Appl. Math.* 1987. V. 45. P. 769.
55. *Шабловский О. Н.* // *ИФЖ.* 1988. Т. 55. С. 464.
56. *Соболев С. Л.* К теории распространения тепловых волн с учетом процессов релаксации.— Препринт ОИХФ АН СССР.— Черноголовка. 1988.
57. *Соболев С. Л.* // *ЖТФ.* 1989. Т. 59. С. 170; 1990. Т. 60. С. 16.
58. *Калафати Ю. Д., Сербинов И. А., Рябова Л. А.* // *Письма ЖЭТФ.* 1979. Т. 253. С. 330.
59. *Варелко В. В.* // Проблемы кинетики и катализа.— М.: Наука, 1981.— Вып. 18. С. 61.
60. *Манелис Г.Б., Струнин В.А., Лебедева Е. В.* // *Хим. физика.* 1986. Т. 5. С. 1269.
- [61] *Нефедов Б. А., Прибыткова К. В., Худяев С.И.* Математическое моделирование явлений самоорганизации в термоэлектрически неустойчивых системах.— Препринт ОИХФ АН СССР.— Черноголовка, 1987.
62. *Дубинин Ф. Д.* Оптоэлектронные модели однородных сред.— М.: Радио и связь, 1984.
63. *Broom R. F., Rhoderick E. H.* // *Sol.-State Electron.* 1960. V. 1. P. 314.
64. *Беркович С. Я.* // *Радиотехн. и электрон.* 1966. Т. 11. С. 353.
65. *Соболев С. Л.* // *ИФЖ.* 1990. Т. 58. С. 661.

Статья поступила в 4.12.89 г.,
после переработки 11.11.90 г.