

539.12.01

**ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППОЙ****Л. В. Прохоров, С. В. Шабанов**(Ленинградский государственный университет,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл.)**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	13
2. Калибровочные системы с одной физической степенью свободы	16
2.1. Простейшая модель (калибровочная группа $SO(2)$). 2.2. Гармонический осциллятор (калибровочная группа $SO(n)$). 2.3. Остаточная дискретная группа и выбор физических переменных («выбор калибровки»),	
3. Модели с произвольной простой калибровочной группой	28
3.1. Классическая теория. Общий анализ. 3.2. Гармонический осциллятор.	
4. Калибровочные системы с грассмановыми переменными	34
4.1. Минимальная модель с абелевой калибровочной группой. Классическая теория. 4.2. Минимальная модель. Квантовая теория. 4.3. Модель с произвольной калибровочной группой. Присоединенное представление.	
5. Гамильтонов континуальный интеграл для систем с редуцированным фазовым пространством	37
5.1. Гармонический осциллятор. Дискретная калибровочная группа $\mathbb{Z}_2$. 5.2. Гармонический осциллятор с калибровочной группой $SO(3)$. 5.3. Модель с произвольной калибровочной группой. Присоединенное представление.	
5.4. Модель с грассмановыми переменными. 5.5. Гамильтонов континуальный интеграл в произвольной калибровке (калибровочная группа $SO(2)$). 5.6. Оператор $\hat{Q}$ и гамильтонов континуальный интеграл в произвольной калибровке (произвольная калибровочная группа).	
6. Редукция фазового пространства и квазиклассическое описание	52
6.1. Метод ВКБ. 6.2. Квантовомеханические инстантоны.	
7. Более сложные механические системы. Особенности динамики	54
7.1. Две частицы в двумерном пространстве. 7.2. Система с бозевскими и фермиевскими степенями свободы.	
8. Заключение	59
9. Приложение	60
9.1. Фазовое пространство в полярных координатах. 9.2. Формализм первого порядка и гамильтонова механика. 9.3. Динамические системы с грассмановыми переменными. 9.4. Квантовое описание систем с грассмановыми переменными. 9.5. Квантование динамических систем со связями. 9.6. Свойства меры $\kappa^2(h)$ (п. 5.3). 9.7. Инвариантные координаты для групп ранга 2. 9.8. Оператор $\hat{Q}$ для произвольной группы.	
Примечания	73
Список литературы	74

1. Введение. Калибровочные теории заняли центральное место в современной физике микромира. Судя по их успехам, они, вероятно, сохранят свои позиции и в ближайшие десятилетия. По этой причине, а также по ряду других, связанных с их внутренними достоинствами (элегант-

ность, относительная простота, ясная геометрическая интерпретация и т. п.), они интенсивно изучаются, причем квантовая электродинамика (КЭД) — система с абелевой калибровочной группой — исследуется уже более полувека [1]. Между тем вплоть до последнего времени в этих теориях открываются новые, подчас неожиданные аспекты, ранее не привлекавшие внимания или просто остававшиеся незамеченными. Сказанное относится как к полям с неабелевой калибровочной группой, полям Янга — Миллса [2], так и к электродинамике. Имеются в виду, в частности, феномен Хиггса [3—8], асимптотическая свобода [9, 10], проблема фиксации калибровки в теории Янга — Миллса [11].

Сюда же можно отнести и вопрос о структуре фазового пространства (ФП) калибровочных теорий, т. е. вопрос об особенностях гамильтоновой динамики физических переменных. Известно, что динамические системы с калибровочной симметрией обладают нефизическими переменными, закон изменения которых со временем не содержится в уравнениях движения. Исключение этих переменных означает переход от первоначального ФП к физическому ФП меньшей размерности, которое обычно считается локально-евклидовым ⁽¹⁾ ●. Выяснилось, однако, что это еще не конец. Изучение простейших моделей показало, что в пространстве уже физических переменных действует остаточная дискретная калибровочная группа, осуществляющая дальнейшую редукцию ФП [12, 13] ⁽²⁾ ●. Эта группа, в простейших случаях совпадающая с группой Вейля [13, 14], не может уменьшить размерность физического ФП, но может изменить его «объем». Существо дела заключается в хорошо известном факте физической неразличимости точек конфигурационного или фазового пространства, связанных калибровочным преобразованием. Остаточная дискретная группа отождествляет некоторые точки пространства физических переменных, что и ведет к его редукции, превращая, например, фазовую плоскость в развертываемый в полуплоскость конус [12]. Указанное обстоятельство влечет изменение динамики системы.

Так, в случае двумерного изотропного осциллятора с калибровочной группой $SO(2)$ удваивается частота осцилляции (по сравнению с таким же осциллятором без калибровочной симметрии). Результат легко понять: если калибровочная группа есть группа поворотов в плоскости, то все точки окружности на плоскости физически неразличимы, и единственной физической переменной является r — расстояние до начала координат. Движение материальной точки выглядит теперь так: после прохождения частицей точки $r = 0$ ее последующее движение неотлично от попятного, т. е. от движения по только что пройденному пути (см. раздел 2). В результате для возвращения частицы в исходную точку требуется вдвое меньшее время — отсюда удвоение частоты.

Плодотворна и другая формулировка данного феномена: исключая как нефизическую одну из двух декартовых переменных (полагая ее равной нулю), приходим к движению по оси, точки которой, симметричные относительно начала координат (точки пересечения прямой с калибровочной орбитой, т. е. с окружностью), физически неразличимы. Отождествление этих точек обеспечивается остаточной калибровочной группой $\mathbb{Z}_2$; ее нетривиальный элемент — отражение относительно начала координат. Весьма важно, что такой подход легко обобщается на произвольные группы, причем в неабелевом случае роль группы $\mathbb{Z}_2$ играет группа Вейля [13, 15]. Эта особенность проявляется и в квантовой теории: так как физические состояния фиксируются требованием исчезновения на них связей, то часть векторов состояний исходного пространства исклю-

чаются. Остаются лишь таковые, инвариантные относительно остаточной калибровочной группы, т. е. с удвоенными расстояниями между уровнями энергии (удвоенными частотами). Данное обстоятельство имеет место не только для обычных (коммутирующих), но и для грассмановых (антикоммутирующих) переменных [15, 16]. Переход к произвольной группе усложняет структуру ФП, не меняя существа дела.

Самостоятельный интерес представляет вопрос о формулировании подобных теорий в рамках метода гамильтоновых континуальных интегралов (ГКИ). Задача однотипна задачам, требующим учета в континуальном интеграле нулевых граничных условий (частица в «ящике») или топологии конфигурационного пространства [17, 18]. Ее принципиальная особенность в том, что здесь нужно учитывать структуру ФП. Подчеркнем, что речь идет только о физических переменных. Задача эта, довольно тривиальная в случае трехмерного изотропного осциллятора (группа $SO(3)$) [19], заметно усложняется при переходе к произвольной простой группе Ли [13, 15, 20, 21].

Каковы следствия изменения структуры фазового пространства? Выше отмечалось, что уже в случае абелевой калибровочной группы (или более сложных групп, но для представлений с единственной физической переменной) имеет место удвоение расстояния между уровнями энергии гармонического осциллятора. Переход к группам старшего ранга, вообще говоря, увеличивает число физических степеней свободы, и спектр усложняется. Так, для присоединенного представления простой компактной группы ранга l он идентичен спектру совокупности невзаимодействующих осцилляторов с частотами $r_\alpha \omega$, $\alpha = 1, 2, \dots, l$, где ω — частота, фигурирующая в лагранжиане, а r_α — степени независимых операторов Казимира в группе [13]. Редукция физического ФП ведет к модификации ГКИ. Следовательно, можно ожидать изменения квазиклассического описания. Впрочем, последнее ясно уже из анализа задачи об осцилляторе с калибровочной симметрией, для которого квазиклассическое описание является точным. В работе [22] на примере квантовомеханических инстантонов [23–27] было показано, что редукция ФП физических переменных влечет изменение структуры θ -вакуума [26, 27].

Обзор посвящен кругу вопросов, связанных с феноменом редукции фазового пространства физических степеней свободы в теориях с калибровочной симметрией. В статье изучаются механические системы с конечным числом переменных, что является необходимым этапом для перехода к калибровочным теориям поля. Эти последние весьма сложны, и, не прояснив особенности и следствия редукции ФП на простейших моделях, мы не сможем выяснить и оценить ее роль в теории поля (структура ФП полей Янга — Миллса, а также следствия изменения ФП для некоторых полевых систем рассмотрены в [12, 15, 22, 28]). Впрочем, эти модели представляют интерес и сами по себе как простейшие примеры механических систем, встречающихся в природе, но не попавших в учебники по теоретической механике.

В разделе 2 изучаются модели с одной физической степенью свободы. В разделе 3 исследуются модели с произвольной калибровочной группой и несколькими степенями свободы, а в разделе 4 — модели с грассмановыми (антикоммутирующими) переменными, встречающимися при описании ферми-полей. Раздел 5 посвящен анализу гамильтоновых континуальных интегралов для моделей с редуцированным ФП физических переменных. В разделе 6 рассмотрено влияние редукции ФП на квазиклассическое описание. Наконец, в разделе 7 изучаются системы с несколькими

степенями свободы и более сложной структурой ФП. Эти модели позволяют лучше уяснить роль нефизических переменных. В статье рассматриваются только компактные калибровочные группы. В заключении (раздел 8) подводятся итоги проведенных исследований и обсуждаются перспективы их применения в теории поля. В приложение (раздел 9) вынесен материал, имеющий вспомогательный характер. Наше рассмотрение систем со связями основано на схеме Дирака [29] (подробнее см. п. 9.5).

2. Калибровочные системы с одной физической степенью свободы.

2.1. Простейшая модель (калибровочная группа $SO(2)$).

2.1.1. *Классическая теория* [12]. Рассмотрим динамическую систему, заданную функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} - yT \right) \mathbf{x} \right]^2 - V(\mathbf{x}^2), \quad (2.1)$$

где двумерный вектор $\mathbf{x}$ и скаляр y — динамические переменные, $T = -i\tau_2$ (τ_2 — матрица Паули), $(T\mathbf{x})_i = T_{ij}x_j$. Лагранжиан (2.1) описывает нерелятивистскую частицу единичной массы в двумерном пространстве. Если перейти к комплексным величинам $\varphi = (x_1 + ix_2)/\sqrt{2}$, то L переписывается в виде

$$L(\varphi, \varphi^*, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}^*, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} - iy \right) \varphi \left[\left(\frac{d}{dt} - iy \right) \varphi \right]^* - V(2\varphi\varphi^*), \quad (2.2)$$

из которого явствует, что (2.2) есть лагранжиан скалярной электродинамики в пространстве-времени $(1+0)$, причем $y = A_0(t)$ — нулевая компонента вектор-потенциала A_μ . Лагранжиан (2.1) инвариантен относительно группы калибровочных преобразований

$$\delta\mathbf{x} = \varepsilon T\mathbf{x}, \quad \delta y = \dot{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — бесконечно малая произвольная функция времени. Переход к гамильтонову формализму определяется равенствами: $p^i = \partial L / \partial \dot{x}_i$, $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$, а гамильтониан модели дается функцией

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}^2) + y\mathbf{p}T\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Легко убедиться, что (2.1) задает механическую систему с двумя связями первого рода [29]: $\pi = 0$, $\sigma \equiv \mathbf{p}T\mathbf{x} = 0$, причем $\sigma = x_1p_2 - x_2p_1$ есть генератор поворотов в двумерном пространстве [12]. Из трех степеней свободы y , x_1 , x_2 — лишь одна физическая. Есть два способа перейти к описанию системы с использованием только физических переменных. Первый — явно инвариантный. Совершая каноническое преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{p} \rightarrow \theta, r, p_r, p_\theta$, где $r = (\mathbf{x}^2)^{1/2}$ и θ — полярные координаты, $p_r = (\mathbf{p}, \mathbf{n}_r)$, $p_\theta = (\mathbf{p}, \mathbf{n}_\theta)r$ — сопряженные им импульсы, $\mathbf{n}_r = \mathbf{x}/r$, $\mathbf{n}_\theta$ — единичные орты, убеждаемся, что r, p_r — калибровочные инварианты; они могут быть взяты в качестве физических переменных. Второй — неинвариантный способ — таков. Благодаря калибровочной инвариантности ⁽³⁾ ● точки окружности $\mathbf{x}^2 = \text{const}$ физически неразличимы. В качестве представителя от каждой окружности можно взять какую-нибудь ее точку, общую с некоторой линией, пересекающей каждую окружность лишь один раз, например, с полуосью $x_2 = 0$, $x_1 \geq 0$. Удобнее, однако, считать, что физическая переменная x_1 пробегает всю вещественную ось, на которой отожд-

дествлены точки x_1 и $-x_1$. Это эквивалентно утверждению о переходе к динамической системе с калибровочной группой $\mathbb{Z}_2$, состоящей из двух элементов ⁽⁴⁾ ●: 1, $\hat{P}$, где $\hat{P}x_1 = -x_1$. Равноправность обеих формулировок очевидна. В случае более сложных групп и представлений связь между указанными подходами уже не столь проста.

Вопрос о структуре ФП модели решается следующим образом. В инвариантном подходе $r \geq 0$, $-\infty < p_r < \infty$, так что физическое ФП есть полуплоскость. Более тщательное исследование [12] показывает, что нужно отождествить точки p_r и $-p_r$ на прямой $r = 0$. Проще всего в этом убедиться, рассмотрев траектории в ФП (r, p_r) для какого-нибудь простого потенциала, например, положив в (2.4) $V = \mathbf{x}^2/2$ (у играет роль множителя Лагранжа). Легко проверить, что решения соответствующих гамильтоновых уравнений движения и связи $\sigma = 0$ имеют вид

$$\mathbf{x}(t) = \cos t \cdot \exp \left(T \int_0^t d\tau y(\tau) \right) \mathbf{x}(0)$$

и $\mathbf{p}(t) = -(\operatorname{tg} t) \mathbf{x}(t)$. Тогда $r(t) = |\cos t| r(0)$ и $p_r(t) = -\operatorname{tg} t |\cos t| r(0)$. Видно, что в момент времени $t = \pi/2$ ($r = 0$) траектория на плоскости (r, p_r) претерпевает разрыв и p_r меняется скачком. Из физических соображений ясно, однако, что никаких скачков в ФП данной механической системы быть не может (потенциал регулярен). Поэтому точки $(r = 0, p_r)$ и $(r = 0, -p_r)$ в ФП следует отождествить. Это означает, что ФП системы есть развертываемый в полуплоскость конус. В неинвариантном подходе данный результат получается автоматически. Из уравнения $\sigma = 0$ следует $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{x}$, где λ — некоторая функция времени. Поэтому если $x_2 = 0$, то $p_2 = 0$. Поскольку законы калибровочных преобразований для $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ совпадают, то p_1 также меняет знак под действием группы $\mathbb{Z}_2$, т. е. калибровочная группа $\mathbb{Z}_2$ действует в ФП согласно правилу

$$(x_1, p_1) \rightarrow (-x_1, -p_1).$$

Следовательно, точки фазовой плоскости (x_1, p_1) и $(-x_1, -p_1)$ физически неразличимы, т. е. физическое ФП есть развертываемый в полуплоскость конус. Для модели (2.1) оба метода (инвариантный и неинвариантный с группой $\mathbb{Z}_2$) выглядят равноправными. Преимущество неинвариантного подхода выявляется в случае более сложных групп или представлений (см. разделы 3 и 7).

Может показаться, что ФП полярных переменных r, p_r есть полуплоскость и в отсутствие калибровочной симметрии, ибо $r \geq 0$. Анализ показывает, что это не так. Вопрос о структуре ФП переменных в полярной системе координат рассмотрен в Приложении (п. 9.1).

2.1.2. Квантовая теория. Переход к квантовому описанию системы (2.1) осуществляется переходом к операторам $\mathbf{x}, \mathbf{p}, y, \pi \rightarrow \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{y}, \hat{\pi}$ в гамильтониане и связях (проблемы упорядочения операторов здесь нет). При этом следует фиксировать калибровку [30], добавив к лагранжиану, например, член $\dot{y}^2/2$; тогда $H \rightarrow H + (\pi^2/2)$. В соответствии с общепринятым рецептом квантования подобных систем [29] физические состояния выделяются условиями

$$\hat{\pi}\Phi = 0, \quad \hat{\sigma}\Phi = \hat{\mathbf{p}}T\hat{\mathbf{x}}\Phi = 0. \quad (2.5)$$

Первое из условий (2.5) означает, что физические векторы состояний не зависят от y . В дальнейшем мы будем игнорировать эту переменную ⁽⁵⁾ ●

(например, не будем по ней интегрировать при нормировке состояний). Второе условие (2.5) означает, что Φ инвариантно относительно группы поворотов плоскости, т. е. в координатном представлении не зависит от угла θ , и, следовательно, $\Phi = \Phi(\mathbf{x}^2)$, так как $\mathbf{x}^2$ есть единственный инвариант, который можно образовать из вектора $\mathbf{x}$. Состояния нормируются согласно

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2x |\Phi|^2 = \int_0^\infty dr r |\Phi(r^2)|^2 = 1. \quad (2.6)$$

Отметим, что хотя теория и одномерная, интегрирование ведется с нетривиальной мерой. Фактически это есть инвариантный подход. Переходя в гамильтониане (2.4) к операторам и переписывая его в полярных координатах $\hat{H} + (\hat{\pi}^2/2) = \{[\hat{p}_r^2 + r^{-2}\hat{p}_\theta^2 - (4r^2)^{-1}]/2\} + (\hat{\pi}^2/2) + yp_\theta + V(r^2)$, находим оператор энергии, действующий в физическом подпространстве ($\hat{p}_\theta\Phi = \hat{\pi}\Phi = 0$):

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + V(r^2) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 - \frac{1}{4r^2} \right) + V(r^2); \quad (2.7)$$

здесь $p_r = -ir \sim^{1/2} \partial r^{1/2} / \partial r$ и волновые функции нормируются согласно (2.6).

Избавиться инвариантным образом от нефизических переменных можно и до квантования. В переменных r, p_r и θ, p_θ гамильтониан (2.24) с учетом связи $p_\theta = \sigma = 0$ имеет простой вид $(1/2) p_r^2 + V(r^2)$. Но тогда оператор Гамильтона, полученный из него заменой $p_r \rightarrow \hat{p}_r = -i\partial_r$, не совпадает с (2.7). Такой подход априори приемлем (см. п. 9.5). Однако ему присущ ряд принципиальных недостатков. Первое: теория формулируется на полуоси $r \geq 0$, оператор $\hat{p}_r = -i\partial_r$ на полуоси не самосопряжен и не расширяется до самосопряженного. Второе: чтобы уравнение Шрёдингера имело смысл, его необходимо дополнить граничным условием в точке $r = 0$, т. е. требуется привлечение посторонних соображений. И третье: выбор инвариантных переменных неоднозначен. Вид гамильтониана зависит от этого выбора (см. п. 2.3.2). Если теперь при квантовании канонический импульс в этом гамильтониане заменить на соответствующий оператор дифференцирования, то квантовые теории, отвечающие различным выборам инвариантных переменных, будут различны (унитарно неэквивалентны; «квантовать» можно лишь в декартовых координатах) (см. п. 2.3.2).

Схема Дирака [29] не содержит указанных недостатков (см. опять же п. 2.3.2 и 9.5). Это позволяет считать ее эталоном при сопоставлении различных схем квантования.

Неинвариантное рассмотрение связано с переходом в (2.4) к $x_2 = p_2 = 0$. Однако прямолинейный подход здесь недопустим. Нельзя, решив связь $x_1 p_2 = x_2 p_1$ относительно p_2 и подставив p_2 в (2.4), положить затем $x_2 = 0$, после чего перейти к квантовому описанию. Нужно учесть, что связи выполняются только на физических состояниях. Поэтому, согласно [17] замену $p_2 = (x_2/x_1) p_1$ в члене p_2^2 формулы (2.4) можно совершить лишь для одного импульса: $p_2^2 \Phi = p_2 (x_2/x_1) p_1 \Phi$, поскольку получающееся состояние $(x_2/x_1) p_1 \Phi$ уже не будет физическим. Второй импульс p_2 следует сперва перенести направо к Φ и только затем совершить указанную замену с последующим исключением x_2 : $x_2 = 0$. В итоге член p_2^2 превратится в $(-i/x_1) p_1$; искомый гамильтониан есть

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_1^2 - \frac{i}{x_1} \hat{p}_1 \right) + V(x_1^2). \quad (2.8)$$

Оператор (2.8) определен на всей оси, и мы должны учесть остаточную калибровочную инвариантность, связанную с группой $\mathbb{Z}_2$, т. е. подчинить физические состояния калибровочному условию

$$\hat{P}\varphi(x_1) = \varphi(-x_1) = \varphi(x_1), \quad \hat{P}\hat{x}_1 = -\hat{x}_1\hat{P}. \quad (2.9)$$

(Напомним, что $\hat{P}$ — единственный нетривиальный элемент группы $\mathbb{Z}_2$). Из (2.9) заключаем, что физические векторы φ есть четные функции x_1 , т. е. $\varphi = \varphi(x_1^2)$. При этом, однако, нормировка φ отличается от нормировки волновой функции одномерной задачи с гамильтонианом (2.8). В соответствии с (2.6) имеем

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 |x_1| |\Phi(x_1^2)|^2 = 1. \quad (2.10)$$

Выбор нормировочного условия в (2.10) требует пояснения. Интегрирование по всей вещественной оси отвечает постановке задачи; x_1 принимает любые вещественные значения; но физическая область изменения x_1 есть полуось $x_1 \geq 0$, отсюда появление множителя $1/2$ и $|x_1|$ (вместо x_1) в (2.10). Идентичность гамильтонианов (2.7), (2.8) ($x_1 \leftrightarrow r$) и соответствующих задач очевидна. Отметим, что в инвариантном подходе при выборе нормировочного условия пришлось обращаться к инвариантной формулировке.

Из (2.6), (2.9), (2.10) становится ясной роль дискретной калибровочной группы; благодаря ей: 1) отбрасывается часть собственных функций гамильтониана, 2) меняется нормировочное условие (множитель $1/2$ в (2.10)). И еще одна особенность. Если нефизические переменные исключить до квантования, то получится квантовая теория с гамильтонианом $(1/2)p_1^2 + V(x_1^2)$. Очевидно, она отличается от теории, задаваемой (2.8), (2.10). Все сказанное при обсуждении инвариантного подхода относится и к неинвариантному методу, за исключением того, что оператор $\hat{p}_1 = -i\partial_1$, в отличие от $\hat{p}_r$, самосопряжен, ибо $x_1 \in \mathbb{R}$. Здесь, как и в инвариантном подходе, чтобы избежать зависимости квантовой теории от калибровки, следует обратиться к схеме Дирака (неинвариантный подход).

Разобранный пример иллюстрирует тезис о непрерывности операций квантования и исключения нефизических переменных в системах со связями [12, 17, 32–35]. Результирующие теории могут различаться, во-первых, гамильтонианом, во-вторых, — нормировочным условием. Разумеется, в частных случаях эти операции могут оказаться перестановочными (исключение u в модели (2.1) можно произвести на любом этапе после перехода к гамильтоновой динамике). Указанная непрерывность существенна для полей Янга — Миллса [32, 36].

2.2. Гармонический осциллятор (калибровочная группа $SO(n)$).

2.2.1. Координатное представление. Исключение нефизических переменных в классике для модели из раздела 2.1 не представляет труда. Разрешая связь $p_x x_1 - x_p p_1 = 0$ относительно p_2 , подставляем решения в (2.4) и, полагая затем $x_2 = 0$, получаем гамильтониан $(p_1^2/2) + V(x_1^2)$. Следствия калибровочной инвариантности учитываются отождествлением точек фазового пространства (x_1, p_1) и $(-x_1, -p_1)$. В случае гармонического осциллятора ($V = x_1^2/2$) это приводит к удвоению частоты осцилляции, ибо в конфигурационном пространстве после прохождения частицей

точки $x_1 = 0$ фактически происходит обратное движение (тождественность точек x_1 и $-x_1$), и возвращение в исходное положение совершается за вдвое меньшее время. Данное обстоятельство должно проявляться и в квантовой теории, т. е. должны удваиваться расстояния между уровнями энергии осциллятора.

Продemonстрируем это утверждение на примере n -мерного изотропного осциллятора с калибровочной группой $SO(n)$, когда калибровочные преобразования суть вращения n -мерного вектора x [12]. Соответствующий лагранжиан является очевидным обобщением (2.1) ($yT \rightarrow y_a T_a$, $V = x^2/2$, где T_a^{ij} — антисимметричные матрицы, генераторы $SO(n)$, $a = 1, 2, \dots, n(n-1)/2$). Вторичные связи теперь есть генераторы группы $SO(n)$

$$\sigma_a = p_i T_a^{ij} x_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.11)$$

где p_i — импульсы, канонически сопряженные x_i . Так как стационарная подгруппа n -вектора есть $SO(n-1)$, то из $n(n-1)/2$ связей лишь $n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$ независимых, а физические состояния — это функции, не зависящие от угловых переменных.

Уравнение Шрёдингера для радиальных функций в n -мерной сферической системе координат записывается в виде [12]

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+n-2)}{r^2} + r^2 \right] \Phi(r) = 2E\Phi(r), \quad (2.12)$$

где $l = 0, 1, \dots$, откуда подстановкой $\Phi = r^l \exp(-r^2/2) f(r)$ получаем для $z(t) = f(r)$, $t = r^2$ следующее уравнение

$$tz'' + (\alpha - t)z' - \beta z = 0, \quad (2.13)$$

в котором $\alpha = l + (n/2)$, $\beta = (\alpha - E)/2$. Его регулярное в нуле решение дается вырожденной гипергеометрической функцией

$$z(t) = {}_1F_1(\beta, \alpha; t). \quad (2.14)$$

Из условия убывания $\Phi(r)$ на бесконечности (из условия, что $z(t)$ — полином, т. е. при $\beta = -k$) находим спектр энергии

$$E_k = 2k + l + \frac{n}{2}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.15)$$

Учитывая связь ${}_1F_1$ с полиномами Лагерра $L_k^\alpha({}_1F_1(-k, \alpha + 1; t) = L_k^\alpha(t) \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha+1)/\Gamma(k+\alpha+1)$ [37, с. 189], получаем искомого решение уравнения (2.12)

$$\Phi_{kl}(r) = \text{const} \cdot r^l L_k^{l-1+(n/2)}(r^2) e^{-r^2/2}. \quad (2.16)$$

Физические решения даются сферически-симметричными функциями Φ_{k0} . Из (2.15), (2.16) явствует, что при $l = 0$ расстояния между уровнями удваиваются, а физические состояния есть четные функции r . Последнее обстоятельство означает, в частности, что в инвариантной формулировке регулярные в нуле собственные функции гамильтониана (2.8) ($V = x_1^2/2$) автоматически удовлетворяют условию (2.9).

В заключение обсудим смысл переменной x_1 . С самого начала было ясно, что x_1 — «не вполне» физическая переменная, ибо она меняется при калибровочных преобразованиях ($x_1 \rightarrow -x_1$). Из (2.9), (2.10) следует, что все матричные элементы x_1 между физическими состояниями равны нулю

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 |x_1| \Phi_1^*(x_1^2) x_1 \Phi_2(x_1^2) = 0. \quad (2.17)$$

Равенство (2.17) эквивалентно следующему утверждению: состояние с определенным ненулевым значением x_1 не может принадлежать физическому гильбертовому пространству $\mathcal{H}_{ph}$, т. е.

$$\hat{x}_1\psi = x_1\psi \rightarrow \psi \notin \mathcal{H}_{ph}, \quad (2.18)$$

ибо в этом случае $\hat{P}\psi \neq \psi$. Действительно, операторы $\hat{P}$ и $\hat{x}_1$ не коммутируют ($\hat{P}\hat{x}_1 = -\hat{x}_1\hat{P}$), поэтому не могут иметь общие собственные состояния, кроме $x_1\psi = 0$. Физический смысл имеют лишь четные степени x_1 , т. е. переменные вида $|x_1| = x_1 \text{sign } x_1$, x_1^2 , x_1^4 , . . . ($|x_1|$ дается фактически рядом четных степеней x_1). Данное обстоятельство существенно для квантовой теории поля [12, 15, 16, 22, 28].

Подведем итоги. После исключения нефизических переменных имеются две эквивалентные формулировки изучаемой особенности динамической системы: 1) система обладает коническим фазовым пространством, 2) система инвариантна относительно дискретной калибровочной группы (в данном случае — группы $\mathbb{Z}_2$). Первая формулировка полезна при изучении классической гамильтоновой механики, тогда как вторая удобна в лагранжевом подходе, в квантовой механике, в методе континуального интегрирования. Физическим следствием данного обстоятельства является изменение спектра гамильтониана, в частности, удвоение частоты колебаний осциллятора, редукция гильбертова пространства. Подчеркнем, впрочем, что условие (2.9) начинает играть важную роль лишь при исключении нефизических переменных (при переходе к одномерному движению в задаче (2.1)). В рамках общего подхода Дирака [29] вся информация о физических состояниях содержится в условиях (2.5).

2.2.2. «Представление вторичного квантования». Квантовомеханическую задачу п. 2.1 для осцилляторного потенциала полезно представить во «вторично квантованном» виде. Переходя в (2.4) с $V = x^2/2$ к новым переменным $\mathbf{a} = (\mathbf{p} - i\mathbf{x})/\sqrt{2}$, $\mathbf{a}^+ = (\mathbf{p} + i\mathbf{x})/\sqrt{2}$, записываем оператор Гамильтона в виде

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}} + 1 + i\hat{y}\hat{\mathbf{a}}^+T\hat{\mathbf{a}}, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}. \quad (2.19)$$

Учитывая, что базис гильбертова пространства дается состояниями $(\hat{a}_1^+)^m (\hat{a}_2^+)^n |0\rangle$, $m, n = 0, 1, \dots$, из условия исчезновения связей $\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{a}}^+T\hat{\mathbf{a}}$ на физических состояниях $\hat{\sigma}|\Phi\rangle = 0$ находим базисные векторы физического подпространства

$$|\Phi_k\rangle = (2^k k!)^{-1} [(\hat{\mathbf{a}}^+)^2]^k |0\rangle. \quad (2.20)$$

Результат (2.20) очевиден: так как $\hat{\sigma}$ есть генератор поворотов в плоскости, $[\hat{\sigma}, \hat{\mathbf{a}}^+] = -T\hat{\mathbf{a}}^+$, $[\hat{\sigma}, \hat{\mathbf{a}}] = -T\hat{\mathbf{a}}$, причем $\hat{\sigma}|0\rangle = 0$, что физический базис исчерпывается векторами, которые получаются применением к $|0\rangle$ инвариантных полиномов от $\hat{\mathbf{a}}^+$. Имеется лишь один независимый инвариантный полином — это $(\hat{\mathbf{a}}^+)^2$, что и доказывает (2.20). Ввиду соотношения

$$[\hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}, (\hat{\mathbf{a}}^+)^2] = 2(\hat{\mathbf{a}}^+)^2 \quad (2.21)$$

расстояния между уровнями энергии удваиваются. В случае n -мерного осциллятора, физические состояния которого подчиняются условиям $\hat{\sigma}_a|\Phi\rangle = 0$ (см. (2.11)), имеем [15, с. 74, 38]

$$|\Phi_k\rangle = \left(\frac{4^k k! \Gamma(k + n/2)}{\Gamma(n/2)} \right)^{-1/2} [(\mathbf{a}^+)^2]^k |0\rangle, \quad (2.22)$$

и в силу (2.21) частота осцилляции также удваивается.

Отметим, что в физическом состоянии возбуждены все n осцилляторов и что физическая картина не сводится к одномерному осциллятору с удвоенной частотой. Исключение составляет случай $n = 3$, когда нормировочный множитель в (2.22) $[(2k)!]^{1/2}$ допускает такую интерпретацию. Последнее также видно из (2.16) при $l = 0$, $n = 3$, $rL_k^{1/2}(r^2) \sim H_{2k+1}(r)$ [37, с. 193].

Данное представление оказывается весьма полезным в случае присоединенных представлений более сложных групп (см. п. 3.2, 9.8).

2.3. Остаточная дискретная группа и выбор физических переменных («выбор калибровки»)

2.3.1. Неинвариантный подход. Вышеизложенное может создать впечатление, что остаточная дискретная группа $\mathbb{Z}_2$, будучи подгруппой калибровочной группы, есть объективная характеристика динамической системы (наряду, скажем, с размерностью физического пространства). В определенном смысле это верно. Точное же утверждение таково: остаточная группа целиком определяется выбором калибровки [39], а группа $\mathbb{Z}_2$ есть простейшая из возможных, как следствие того, что калибровочное условие $x_2 = 0$ есть простейший способ устранения нефизической переменной. Неудачный выбор физических переменных может сильно усложнить остаточную калибровочную группу. По своей природе это обстоятельство родственно проблеме неоднозначности фиксации калибровки, обнаруженной при изучении полей Янга — Миллса [11]. Обратимся к деталям.

Допустим, что в модели (2.1) физическая переменная определена не прямой $x_2 = 0$, а некоторой линией на плоскости (x_1, x_2) . Имеется несколько принципиально различных возможностей, изображенных на рис. 1 кривыми 1—3. Концентрические окружности на нем — это орбиты. Выбор калибровки $x_2 = f_1(x_1)$ (кривая 1) вообще неприемлем, ибо исключается физическая область $0 \leq r < r_0$ ($r = |\mathbf{x}|$) (кривая 1 касается окружности $S(r_0)$ с радиусом r_0). Выбор $x_2 = f_2(x_1)$ (кривая 2) означает, что орбиты с $r < r_1$ и $r > r_2$ пересекаются дважды, а орбиты с радиусами $r_1 < r < r_2$ — четырежды. В отличие от случая $x_2 = 0$ преобразования, связывающие точки кривой 2, лежащие на одной орбите, не образуют подгруппы калибровочной группы. Действительно, преобразование поворота точка x_2 на окружности $S(r)$ (см. рис. 1) может быть переведена в точку x_1 , однако при таком повороте точка x_3 не переходит в x_2 , x_4 — в x_3 и x_1 — в x_4 . Поэтому композиция двух остаточных преобразований, вообще говоря, не дает новое остаточное калибровочное преобразование. Более замысловатые кривые могут еще более усложнить структуру остаточной калибровочной группы. В проекции на ось x_1 траектории могут иметь разрывы; примером служит кривая 3 после исключения дважды проходимого участка $BB'C$ ($BB' \sim B'C$). Ясно, что со всеми такими возможностями необходимо считаться при изучении более реалистических систем.

Данная модель служит хорошей иллюстрацией проблемы неоднозначности при фиксации калибровки. Видно, что неудачный выбор калибровочного условия может лишить задачу смысла (кривая 1), а может ее и неимоверно усложнить (продолжение кривой 2 с увеличивающейся амплитудой осцилляции). Отметим, что предложенный в [11] рецепт устранения неоднозначности калибровки в континуальном интеграле (интегрирование по области, где $\Delta > 0$, Δ — детерминант Фаддеева — Попова) по меньшей мере не следует рассматривать как общий, годный для любого выбора калибровки. В рассматриваемой модели фиксируем, например, ка-

мерных остаточных калибровочных групп [40]. Это означает, что релятивистски-инвариантное калибровочное условие не является естественным для подобных систем (см. также [41]).

З а м е ч а н и я . 1) Определитель Δ не позволяет судить о допустимости калибровочного условия. Для прямой DD' на рис. 1 ($x_2 = x_1 + b$, $\Delta = 2x_1 + b$, $b > 0$) $\Delta > 0$ при $x_1 > -b/2$, хотя это вообще негодный способ фиксации калибровки. 2) В данной модели случай $\Delta = \text{const}$ отвечает недопустимой калибровке. Пусть $\Delta = x_1 + f'f = c$. Тогда $f = \pm [R^2 - (x_1 - c)^2]^{1/2}$ или $x_2 \mp [R^2 - (x_1 - c)^2]^{1/2} = 0$; это есть уравнение окружности, что недопустимо (например, при $0 < c < R$ исключается полуось $r > c + R$). Утверждение, по-видимому, справедливо для любой компактной калибровочной группы. Чтобы решить вопрос о допустимости калибровочного условия, обратимся к схеме Дирака и инвариантному подходу.

2.3.2. Инвариантный подход [39]. Мы знаем (п. 2.1), что калибровка $x_2 = 0$ непосредственно связана с инвариантным описанием в терминах $r = (\mathbf{x}^2)^{1/2} = \text{inv}$. Как выглядят нетривиальные калибровочные условия типа условий, задаваемых кривыми 2, 3 на рис. 1, в инвариантном подходе? Перейдем от переменных x_1, x_2 к θ, u по правилу [39, 42]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\theta T} \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

где $f_i(u)$, $i = 1, 2$ — некоторые функции параметра u . Случай $f_1(u) = u$, $f_2 = 0$ отвечает переходу к полярным координатам $u^2 = \mathbf{x}^2$; матрица $e^{\theta T}$ в (2.23) вращает луч $x_2 = 0$, $x_1 = r > 0$, так, что он заметает всю плоскость. При произвольных f_i равенства $x_1 = f_1(u)$, $x_2 = f_2(u)$ задают некоторую линию l на плоскости x_1, x_2 , причем параметр u есть инвариант калибровочных преобразований ($f_1^2(u) + f_2^2(u) \equiv r^2(u) = \mathbf{x}^2$).

Отображение (2.23), вообще говоря, не обязательно определяет замену переменных для всех $(u, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Но это отображение будет заменой переменных, если определить такую область $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^2$, что оно задает взаимнооднозначное соответствие между $(u, \theta) \in \tilde{K}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Это накладывает определенные ограничения на кривую l . В частности, она должна проходить через начало координат и уходить на бесконечность при некотором u . Поэтому мы всегда можем выбрать параметр u так, что при движении вдоль кривой l он монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, причем $f_i(0) = 0$ и $r^2(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Мы также будем предполагать, что l — непрерывная кривая.

Чтобы определить область $\tilde{K}$, нужно изучить группу симметрии $\tilde{S}$ отображения (2.23), т. е. группу таких преобразований плоскости $(u, \theta) \rightarrow (u_s, \theta_s)$, при которых $\mathbf{x}$ в (2.23) не изменяется. Например, для полярной системы координат ($f_1 = u \equiv r$, $f_2 = 0$) эта группа состоит из двух подгрупп $\tilde{S} = S_\theta \times S$, где $S_\theta: \theta \rightarrow \theta + 2\pi n$, $r \rightarrow r$, n — целое, и $S: r \rightarrow -r$, $\theta \rightarrow \theta + \pi$. Точки плоскости $(r, 0) \in \mathbb{R}^2$, связанные преобразованиями из $\tilde{S}$, соответствуют одной и той же точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, $\tilde{K}$ есть фундаментальная область плоскости $\mathbb{R}^2$ $(r, 0)$ относительно действия группы $\tilde{S}$; любая точка $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ может быть получена из точки $(r, \theta) \in \tilde{K}$ действием подходящего элемента из $\tilde{S}$. Поэтому $\tilde{K} = \mathbb{R}^2/\tilde{S}$ есть полоса, например, $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, \infty)$. Аналогично, для переменных u, θ (2.23) определим $\tilde{S} = S_\theta \times S$, где $S_\theta: \theta \rightarrow \theta + 2\pi n$, $u \rightarrow u$; n — целое и $S: u \rightarrow u_s = u_s(u)$, $\theta \rightarrow \theta + \theta_s(u)$. Общий случай отличается от рассмотренного тем, что преобразования из S есть функции u , т. е. при различных u могут быть различные группы S . Вид этих функций определя-

ется условиями пересечения кривой l с окружностями. Действительно, по определению S имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\theta T} \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = e^{(\theta+\theta_s)T} e^{-\theta_s T} \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = e^{(\theta+\theta_s)T} \begin{pmatrix} f_1(u_s) \\ f_2(u_s) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Последнее равенство означает, что точка $x \in \mathbb{R}^2$ не изменяется при замене (u, θ) на $(u_s, \theta + \theta_s)$; это есть признак принадлежности преобразования к S . Очевидно, что для преобразований из S выполнены аксиомы группы, т. е. композиция двух преобразований из S принадлежит S и для каждого преобразования из S существует обратное преобразование, принадлежащее S .

Предпоследнее равенство в (2.24) показывает, что точки $f_i(u)$ и $f_i(u_s)$ лежат на одной окружности и переходят друг в друга при повороте на угол θ_s . Следовательно, преобразование $u \rightarrow u_s$ связывает между собой все точки пересечения кривой l с окружностью радиуса $r(u)$. В частности, все функции u , могут быть найдены из решения уравнения

$$r^2(u_s(u)) = r^2(u), \quad (2.25)$$

где $r^2(u) = f_i^2(u) = x^2(u)$.

При данном u уравнение (2.25) может иметь несколько решений. Более того, структура решений (2.25) может оказаться чрезвычайно сложной. Например, кривая l может иметь самопересечения, может пересекать какую-либо окружность счетное число раз и т. п. Мы не будем здесь разбирать эти случаи. Потребуем лишь простоты ради, чтобы уравнение (2.25) имело конечное число решений при каждом $u \in \mathbb{R}$, т. е. чтобы кривая l пересекала каждую окружность с центром в начале координат конечное число раз.

Разобьем прямую $u \in \mathbb{R}$ на отрезки $\mathbb{R}_\alpha$ так, что при изменении u в пределах $\mathbb{R}_\alpha$ число N_α решений (2.25) $u_s(u)$ фиксировано; тогда, ввиду непрерывности $f_i(u)$, $u_s(u)$ непрерывно зависят от $u \in \mathbb{R}_\alpha$. Группу преобразований из S , действующих на $\mathbb{R}_\alpha$, обозначим S_α . Очевидно, $S = \prod S_\alpha$.

Фундаментальная область K для замены (2.23) состоит из $\theta \in [0, 2\pi]$ и $u \in K$, причем $K = \bigcup_{\alpha} K_\alpha$, где $K_\alpha = \mathbb{R}_\alpha / S_\alpha$ есть фундаментальная область в $\mathbb{R}_\alpha$ относительно действия группы S_α .

Например, для кривой 2 на рис. 1 вся ось $u \in \mathbb{R}$ распадается на три области $\mathbb{R}_1 = (u_{-1}, 0) \cup (0, u_1)$, $\mathbb{R}_2 = (u_{-2}, u_{-1}) \cup (u_1, u_2) \cup (u_2, u_3) \cup (u_3, u_4)$ и $\mathbb{R}_3 = (-\infty, u_{-2}) \cup (u_4, \infty)$ (точки кривой l $f_i(u_a)$, $a = -2, -1, \dots, 4$, помечены на рис. 1 точками u_a), различающиеся по числу пересечений этой кривой с окружностями: $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 2$ ⁽⁶⁾ ●. При $u \in \mathbb{R}_{1,3}$ уравнение (2.25) имеет единственное нетривиальное решение, т. е. $u_s \neq u$. По определению функция $u_s(u) \in S_1$ задает взаимно-однозначное отображение $u_s: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$. Согласно (2.25) она состоит из взаимно-однозначного отображения $(0, u_1) \rightarrow (0, u_{-1})$ при $u \in (0, u_1)$ и обратного отображения $(0, u_{-1}) \rightarrow (0, u_1)$ при $u \in (0, u_{-1})$ так, что $u_s(u)$ непрерывна в точке $u = 0$ ($u_s(0) = 0$). Аналогично определяется функция $u_s(u) \in S_3$. Поэтому группы $S_{1,3}$ изоморфны $\mathbb{Z}_2$. При $u \in \mathbb{R}_2$ (2.25) имеет три нетривиальных решения при данном u . Преобразования из S_2 устанавливают взаимнооднозначное соответствие между точками отрезков (u_{-2}, u_{-1}) , (u_1, u_2) , (u_2, u_3) и (u_3, u_4) . Здесь функции $u_s: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ являются всевозможными композициями четырех взаимнооднозначных отображений: отрезка (u_{-2}, u_{-1}) в любой другой, входящий в $\mathbb{R}_2$, при $u \in$

$\in (u_{-2}, u_{-1})$, отрезка (u_1, u_2) в любой другой, входящий в $\mathbb{R}_2$, при $u \in \in (u_1, u_2)$ и аналогичных преобразований для (u_2, u_3) и (u_3, u_4) . Очевидно, функции u_s образуют группу перестановок четырех отрезков, входящих в $\mathbb{R}_2$, т. е. S_2 изоморфна P_4 — группе перестановок. Поэтому в качестве K_1 можно взять любой из двух отрезков $(u_{-1}, 0)$, $(0, u_1)$; в качестве K_3 — любую из полуосей в $\mathbb{R}_3$; наконец, любой из четырех отрезков, составляющих $\mathbb{R}_2$, можно отождествить с K_2 . Таким образом, здесь имеется $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ способов выбора фундаментальной области K . Зафиксировав один из них и положив $u \in K$, мы однозначно определим функции $u_s(u): K \rightarrow \mathbb{R}$ из уравнения (2.25) или определения (2.24). Отметим, что вид функций $f_i(u)$ однозначно определяет вид $u_s(u)$ и наоборот.

Замена переменных (2.23), вообще говоря, не имеет глобальной координатной сетки на плоскости $x \in \mathbb{R}^2$. Однако эту плоскость можно разбить на кольца так, что внутри каждого кольца такая координатная сетка будет существовать, т. е. координатная сетка замены переменных (2.23) получается склейкой конечного, а вообще говоря, счетного числа карт (колец в данном случае). Для примера обратимся опять к кривой 2 на рис. 1. Возьмем $K_1 = (0, u_1)$, $K_2 = (u_1, u_2)$ и $K_3 = (u_4, \infty)$. Тогда внутри окружности $S(r_1)$ координатная сетка строится из окружностей с центром в начале координат и веера кривых $l_1(\theta)$, которые получаются из куска кривой l , $u \in K_1$ одновременным поворотом всех его точек, на углы $\theta \in [0, 2\pi)$. Координатная сетка в кольце между окружностями $S(r_1)$ и $S(r_2)$ состоит также из окружностей с центром в начале координат и кривых $l_2(\theta)$, которые получаются одновременным поворотом всех точек куска кривой l , $u \in K_2$ на углы $\theta \in [0, 2\pi)$. Аналогично определяется координатная сетка вне окружности $S(r_2)$.

Изменив способ выбора K , можно изменить координатную сетку. Например, если в нашем примере заменить $K_2 = (u_1, u_2)$ на отрезок (u_3, u_2) , то кривые $l_2(\theta)$ новой координатной сетки получаются вращением куска кривой l , $u \in (u_2, u_3)$. Однако при этом меняется только способ склейки локальных координатных сеток, существующих для $u \in K_\alpha$, т. е. задание координатной линии $\theta = \text{const}$ как непрерывной функции u . Существование такой склейки гарантируется определением областей $\mathbb{R}_\alpha$. Так, для разобранного примера $K = (0, u_1) \cup (u_1, u_2) \cup (u_4, \infty)$, линия $\theta = \text{const}$ получается склейкой кусков кривой l , $u \in (0, u_2)$ и $u \in (u_4, \infty)$, причем точки u_4 и u_2 на рис. 1 совмещаются поворотом второго куска.

Теперь мы готовы к анализу динамики в переменных (2.23). Для этого введем импульсы, канонически сопряженные переменным θ, u :

$$p_\theta = \mathbf{p} T \mathbf{x} = \sigma, \quad p_u = \frac{1}{2} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{d}{du} \ln \mathbf{x}^2. \quad (2.26)$$

Легко проверить, используя (2.23), что $\{p_\theta, p_u\} = 0$, $\{\theta, p_\theta\} = \{u, p_u\} = 1$ (для получения последнего равенства следует определить производную du/dx_i , учитывая равенство $\mathbf{x}^2 = f_1^2(u) + f_2^2(u)$). Из (2.26) следует, что θ — нефизическая переменная, ибо $p_\theta = \sigma$, а σ есть вторичная связь, тогда как u — физическая степень свободы.

Точки фазовой плоскости (u, p_u) , связанные преобразованиями из S : $u \rightarrow u_s$, $p_u \rightarrow p_{u_s} = (du_s/du)^{-1} p_u$ (в (2.26) $d/du_s = (du_s/du)^{-1} d/du$) отвечают состояниям системы, которые различаются значениями угла $\theta \rightarrow \theta + \theta_s(u)$, подобно тому, как в полярных координатах состояния (r, p_r) и $(-r, -p_r)$ отличаются значениями угла, $\theta \rightarrow \theta + \pi$ (см. п. 9.1). В калибровочной теории θ — нефизическая переменная, поэтому точки фазовой плоскости (u_s, p_{u_s}) физически неразличимы и должны быть отождеств-

лены. Данную особенность ФП (u, p_n) следует учитывать при описании системы. Последнее замечание фактически устанавливает связь между инвариантным и неинвариантным способами описания классической динамики. Оба способа совпадают, если при неинвариантном способе учитывать еще и редукцию физического ФП: ведь действие группы S на инвариантную переменную $(u \rightarrow u_s)$ совпадает с действием остаточной дискретной калибровочной симметрии (ОДКС), редуцирующей физическое ФП при неинвариантном описании. Действительно, в калибровке $x_i = f_i(u)$ точки $x_i^s = f_i(u_s)$ лежат на одной орбите (см. (2.25)), т. е. они связаны преобразованиями ОДКС, при этом по построению u и u_s связаны преобразованием из S . Подчеркнем, однако, что природа ОДКС и S различна. ОДКС — остаточная симметрия в неинвариантном подходе, которая не всегда образует подгруппу калибровочной группы, а S — подгруппа группы симметрии отображения $\tilde{S}$. Группа S может индуцировать действие ОДКС только для специальной замены переменных в инвариантном подходе, когда поверхности уровней физических переменных образуют орбиты калибровочной группы, а поверхностями уровней для нефизических переменных служат поверхности, задаваемые калибровочными условиями в полном конфигурационном пространстве. Такую замену переменных назовем согласованной с законом калибровочного преобразования и калибровкой.

Последнее замечание позволяет решить вопрос о допустимости калибровочного условия в неинвариантном подходе. Именно, данная калибровка допустима, если существует согласованная с ней и законом калибровочного преобразования замена переменных.

Перейдем теперь к квантовой теории. Мы покажем, в частности, что физические амплитуды не зависят от выбора функций f_i , если при квантовании учитывать криволинейную природу физической переменной u и редукцию физического ФП. Первое достигается квантованием до исключения нефизической переменной θ , второе — определением скалярного произведения физических векторов состояний в соответствии с правилами замены переменных.

После квантования системы (см. (2.5)) перейдем к криволинейным координатам (2.23). Второе равенство в (2.5) эквивалентно уравнению $-i\partial\Phi/\partial\theta = 0$, т. е. $\Phi = \Phi(u)$. Тогда, вычисляя оператор Лапласа — Бельтрами в координатах (2.23) и отбрасывая в нем слагаемые, содержащие $\partial/\partial\theta$, получим уравнение Шрёдингера в $\mathcal{H}_{ph}^f$ (индекс f указывает на выбор функций в (2.23))

$$\left[-\frac{1}{2\mu(u)} \frac{d}{du} \circ \frac{r^2(u)}{\mu(u)} \frac{d}{du} + V(r^2(u)) \right] \Phi_E(u) = E\Phi_E(u), \quad (2.27)$$

где $\mu(u) = (1/2) (d/du) r^2(u) = f_i(u) f_i(u)$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}_{ph}^f$ имеет вид

$$\sum_{\alpha} \int_{K_{\alpha}} du |\mu(u)| \Phi_E^*(u) \Phi_{E'}(u) = \delta_{EE'}; \quad (2.28)$$

здесь мы учли, что $dx_1 dx_2 = \mu(u) du d\theta$. В $\mathcal{H}_{ph}^f$ интегрирование по θ дает фактор 2π , который мы включили в нормировку Φ_E . Вообще говоря, K можно выбрать так, что на некоторых K_{α} $\mu(u) < 0$, поэтому в (2.28) поставлен модуль ⁽⁷⁾ $|\mu|$.

Докажем, что $\mathcal{H}_{\text{ph}}^f$ при различных f_i изоморфны между собой. Заменим в (2.27)

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du} \frac{d}{dr} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr},$$

тогда гамильтониан в уравнении (2.27) превращается в (2.7). Так как (2.23) есть замена переменных, то в равенстве (2.28)

$$\sum_{\alpha} \int_{K_{\alpha}} |\mu(u)| du$$

переходит в

$$\int_0^{\infty} r dr,$$

т. е. (2.28) эквивалентно (2.6). Отсюда следует, что все $\mathcal{H}_{\text{ph}}^f$ изоморфны между собой, так как они изоморфны гильбертову пространству теории (2.7), (2.6). Далее отсюда следует, что согласно анализу п. 2.2.1 Φ_E в уравнении (2.27) есть регулярные функции от $r^2 = f_i^2(u)$. Следовательно, скалярные произведения (амплитуды) в $\mathcal{H}_{\text{ph}}^f$ не зависят от f_i , так как

$$\Phi_E(u) = \tilde{\Phi}_E(r^2(u)) = \tilde{\Phi}_E(x^2). \quad (2.29)$$

Из равенства (2.29) вытекает S -инвариантность физических векторов состояний

$$\Phi(u) = \Phi(u_s), \quad \Phi \in \mathcal{H}_{\text{ph}}^f. \quad (2.30)$$

Все эти особенности нужно принимать во внимание при формулировании континуального интеграла. Простой переход в классическом гамильтониане (2.4) к новым переменным (2.23) и (2.26) при $p_{\theta} = 0$ с последующим квантованием путем замены $p_u \rightarrow -i\partial_u$ их не учитывает (квантовые теории, соответствующие различным f_i , унитарно неэквивалентны). Именно такой процедуре квантования соответствует исключение нефизических переменных в функциональном интеграле с помощью лишь δ -функций от связей и дополнительных условий без перехода к H^{eff} . Корректный способ построения ГКИ при произвольном выборе физических переменных см. в п. 5.5 и 5.6.

3. Модели с произвольной простой калибровочной группой. Несмотря на свою простоту, рассмотренная в п. 2.1 модель содержит все основные черты, присущие моделям как с более сложными группами, так и с большим числом степеней свободы (например, полевым). В данном разделе изучаются динамические особенности простейших систем с произвольной калибровочной группой. Задача важна в связи с тем, что прежде чем изучать динамику физических переменных какой-либо системы, нужно уметь выделять эти переменные, а это непросто в случае произвольной группы. Впрочем, трудности здесь связаны не столько со сложностью группы, сколько с нетривиальностью представления. Так, в п. 2.2 была рассмотрена модель с группой произвольного ранга $SO(n)$, а пример попал в разряд простейших. Это произошло потому, что динамические переменные принадлежали элементарному представлению группы, в котором имелась лишь одна физическая переменная. Мы будем изучать в основном

случай, когда переменные преобразуются по присоединенному представлению, что важно для исследования полей Янга — Миллса.

3.1. Классическая теория. Общий анализ.

3.1.1. Выделение физических переменных. Рассмотрим модель, заданную лагранжианом [13, 21]

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(D_t x)^2 - V(x), \quad (3.1)$$

где $D_t = \partial_t + [y, \cdot]$, x, y — элементы алгебры Ли X некоторой простой компактной группы G , $x = x_a \lambda_a$ (аналогично для y), λ_a образуют базис в X , $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}$, $[\lambda_a, \lambda_b] = F_{ab}^c \lambda_c$, $a, b, c = 1, 2, \dots, N = \dim G$. Лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$x \rightarrow \Omega x \Omega^{-1}, \quad y \rightarrow \Omega y \Omega^{-1} + \Omega \partial_t \Omega^{-1}, \quad (3.2)$$

если $V(\Omega x \Omega^{-1}) = V(x)$. Положим далее для простоты обозначений $\text{Tr} x^2 = x^2$ (и вообще $px \equiv \text{Tr} px$). Функция L задает систему с N первичными связями $\partial L / \partial \dot{y}^a = \pi_a = 0$, гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 + V(x) + y_a p T_a x \quad (3.3)$$

(здесь $p = \lambda_a p_a$, $p_a = \partial L / \partial \dot{x}_a$) и N вторичными связями $\sigma_a = p T_a x = \text{Tr} \lambda_a [p, x] = F_{bc}^a p_b x_c = 0$. Все связи первого рода [29]. Из N переменных x_a требуется выделить физические и найти их как функции времени. Здесь также возможны два подхода — инвариантный и неинвариантный.

Прежде всего зададимся вопросом, сколько всего имеется физических переменных. В инвариантном подходе ответ прост: достаточно найти все независимые калибровочные инварианты — они и определяют совокупность физических переменных. Их число, в свою очередь, дается числом независимых инвариантных симметричных тензоров в присоединенном представлении, т. е. равно рангу группы l . Следовательно, в задаче имеется l физических степеней свободы. Это означает, в частности, что среди N связей $\sigma_a = 0$ только l независимых. Однако формулировка теории в терминах лишь инвариантных физических величин затруднена, ибо инварианты суть полиномы от x различных степеней, и совсем непросто сформулировать теорию в новых переменных (для групп ранга 2 это сделано в [21, 15]). Еще более непросто исследовать затем динамические особенности системы (см. п. 9.7, 3.2.2).

Выручает неинвариантный подход. Пусть x — заданный элемент алгебры X ; ключевой для дальнейшего является формула [14, с. 459]

$$x = S(z) h S^{-1}(z), \quad (3.4)$$

в которой $h = h_i \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, $\{\lambda_i\}$ — максимальная совокупность взаимнокоммутирующих генераторов (т. е. h — элемент подалгебры Картана H [14]), а $S(z) \in G$ получается экспоненциальным отображением элемента $z = z_\alpha \lambda_\alpha \in X \ominus H$ в группу G ($\alpha = l+1, l+2, \dots, N$), h_i, z_α — вещественные числа (или функции времени). Переменные h_i аналогичны x_i из п. 2.1, а z_α могут быть исключены калибровочным преобразованием. Действительно, так как переменные x преобразуются согласно (3.2), то в соответствии с (3.4) подходящим калибровочным преобразованием x всегда можно превратить в элемент подалгебры Картана:

$$h = \Omega x \Omega^{-1}, \quad \Omega = S^{-1}(z). \quad (3.5)$$

Итак, любой элемент алгебры X калибровочно эквивалентен некоторому элементу подалгебры Картана [43, с. 305]. Размерность l максимальной коммутативной подалгебры H и определяет число физических переменных, каковыми могут быть взяты функции $h_i(t)$. Формула (3.4) позволяет исключить $N - l$ нефизических переменных. Хотя формально имеется N вторичных связей, независимыми из них будут только $N - l$; это следует хотя бы из инвариантности h относительно l -параметрической подгруппы преобразований (3.4) с $z \in H - l$ генераторов (связей) тождественно обращаются в нуль на элементах H . Сказанное можно пояснить и по-другому: как известно, генераторы группы λ_i в присоединенном представлении имеют l нулевых собственных значений [44, с. 197], т. е. на l линейно независимых векторах l из них тождественно обращаются в нуль (в примере из п. 2.2 с калибровочной группой $SO(n)$ в нуль обращалось $(n - 1)(n - 2)/2$ генераторов стационарной подгруппы вектора [12], так как там изучалось не присоединенное представление). Итак, подпространство физических переменных выделено. Перейдем к изучению его структуры.

3.1.2. Структура физического подпространства. Хотя калибровочными преобразованиями мы уже не можем уменьшить размерность физического подпространства, возможна дальнейшая его редукция. Как известно [14, с. 469], любая группа Ли содержит дискретную конечную подгруппу W (группа Вейля), порождаемую зеркальными отражениями относительно гиперплоскостей в H , ортогональных корням группы (алгебра X есть линейное пространство [44]). Группа W изоморфна группе перестановок корней, т. е. группе, сохраняющей систему корней. Наличие этой калибровочной дискретной группы и ведет к дальнейшей редукции пространства. Если группа $\mathbb{Z}_2$ из п. 2.1 отождествляла зеркально-симметричные точки прямой x_1 , т. е. по множеству $x_1 > 0$ «восстанавливала» всю вещественную ось x_1 , то группа Вейля по некоторому подпространству $K^+ \subset H$ (именуемому камерой Вейля [14, с. 470] восстанавливает все пространство H (за вычетом границ камеры — множества меры нуль)⁽⁸⁾●. В дальнейшем под камерой Вейля будем понимать пересечение всех положительных полупространств, ограниченных гиперплоскостями, ортогональными простым корням («положительность» определяется направлением корней; «камера Вейля — открытый выпуклый конус» [45, с. 104], т. е. для всякого $h \in K^+$ справедливо $(h, \omega) = h_i \omega_i > 0$, где ω принадлежит множеству простых корней).

Итак, остаточные калибровочные преобразования, действующие в H и образующие группу Вейля, позволяют отождествить некоторые подобласти линейного пространства H . Ясно, что это влечет редукцию фазового пространства. Действительно, фазовое пространство в нашем случае можно определить как четномерное пространство $M_{2l}(h_i, p_i) = \Gamma^{2l}$ (см. п. 9.5)), наделенное симплектической структурой [46]. Так как $p_i = \partial L / \partial \dot{h}_i$ и L есть калибровочный инвариант, то p_i также является объектом представления группы Вейля, и физическое фазовое пространство редуцируется, ибо некоторые его точки отождествляются. Именно, в $M_{2l}(h_i, p_i)$ точки (h, p) и (whw^{-1}, wpw^{-1}) , где $p = \lambda_i p_i$, $w \in W$, калибровочно эквивалентны. При их отождествлении M_{2l} превращается в $2l$ -мерной гиперконус, развертываемый после надлежащего разреза в $K^+ \otimes \mathbb{R}^l$ [13]. Как и в случае простейших систем, редукция физического ФП радикально меняет динамику системы. Нередко случается, что исследование квантовой теории оказывается более легким делом, чем классической. Данная задача подтверждает это наблюдение. Поэтому изучение особенностей

простейшей механической системы — гармонического осциллятора — начнем с квантовой механики.

3.2. Гармонический осциллятор.

3.2.1. Квантовая теория. Квантовое описание модели не представляет труда. Ввиду антисимметрии матриц T_a (т. е. структурных констант) при переходе к операторам проблемы их упорядочения не возникает ни в связях, ни в гамильтониане. В соответствии с рецептом Дирака [29] физическое гильбертово подпространство выделяется условиями

$$\hat{\pi}_a \Phi = 0, \quad \hat{\sigma}_a \Phi = 0, \quad \Phi \in \mathcal{H}_{\text{ph}}, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

Первая совокупность условий не интересна — она эквивалентна утверждению о независимости Φ от y^a (см. п. 9.5). Вторая совокупность более содержательна, ибо связана с криволинейными координатами. Переход к «радиальным» (трансверсальным [43]) и угловым (орбитальным) переменным в операторе кинетической энергии $\hat{p}_a^2$ (т. е. переход к инвариантным и неинвариантным переменным) — отдельная, достаточно сложная задача [43] (см. пп. 5.3, 9.6), поэтому для уяснения существа дела ограничимся задачей о гармоническом осцилляторе. Переходя к операторам $\hat{a}_b = (\hat{p}_b - i\hat{r}_b)/\sqrt{2}$ и $\hat{a}_b^+$, записываем гамильтониан (3.3) с $V = x_a^2/2$ и связи σ_b в виде

$$\hat{H} = \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{N}{2} + iy_b \hat{a}^+ T_b \hat{a}, \quad \hat{\sigma}_b = \hat{a}^+ T_b \hat{a}, \quad (3.7)$$

где $\hat{a} + \hat{a} \equiv \sum \hat{a}_b^+ \hat{a}_b$. Состояния

$$(\hat{a}_1^+)^{n_1} \dots (\hat{a}_N^+)^{n_N} |0\rangle, \quad (\hat{a}_b |0\rangle \equiv 0), \quad n_i = 0, 1, \dots, \quad (3.8)$$

образуют базис гильбертова пространства. Для операторов $\hat{\sigma}_a$ имеют место коммутационные соотношения

$$[\hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_b] = F_{ab}^c \hat{\sigma}_c, \quad (3.9)$$

т. е. $\hat{\sigma}_a$ есть генераторы калибровочной группы, поэтому из (3.6) и равенства $\hat{\sigma}_a |0\rangle = 0$ следует, что базис физического подпространства строится применением к $|0\rangle$ инвариантных полиномов от $\hat{a}_b^+$. Число независимых инвариантных полиномов равно рангу группы l [14, с. 573], следовательно, физические базисные векторы исчерпываются состояниями [13]

$$P_{r_1}^{n_1}(\hat{a}^+) \dots P_{r_l}^{n_l}(\hat{a}^+) |0\rangle, \quad (3.10)$$

где P_{r_i} — инвариантные однородные полиномы степеней $r_1, \dots, r_l$ (r_i — степени операторов Казимира), $n_i = 0, 1, \dots$. Степени r_i для всех простых групп выписаны в п. 9.8 (см. таблицу). Из однородности полиномов следует

$$[\hat{a}^+ \hat{a}, P_{r_i}(\hat{a}^+)] = r_i P_{r_i}(\hat{a}^+), \quad (3.11)$$

откуда находим спектр энергии физических состояний

$$E = \sum_{i=1}^l r_i n_i + \frac{N}{2}. \quad (3.12)$$

Ясно, что спектр (3.12) вырожден. В некалибровочной теории ($y^a = 0$)

в (3.1) и (3.3)) спектр давался бы формулой

$$E = \sum_{i=1}^N n_i + \frac{N}{2},$$

т. е. картина уровней энергии меняется радикально. Так как r_i — целые положительные числа, то кратность вырождения для заданного E определяется числом решений диофантова уравнения (3.12) при фиксированном целом $E - N/2$. Чтобы лучше представить себе структуру возбужденных состояний, возьмем в (3.10) простейший инвариантный полином $P_2(\hat{a}^+) = \sum \hat{a}_a^{+2}$, являющийся оператором Казимира для всех групп. Видно, что и в случае произвольной группы физические состояния отвечают возбуждению всех осцилляторов.

3.2.2. Классическая теория. Анализ динамики для групп ранга 2. Из формулы (3.12) видно, что спектр системы определяется достаточно тонкими характеристиками калибровочной группы (степенями инвариантных полиномов). Благодаря калибровочной инвариантности число физических степеней свободы системы (3.1) сократилось с N ($= \dim G$) до

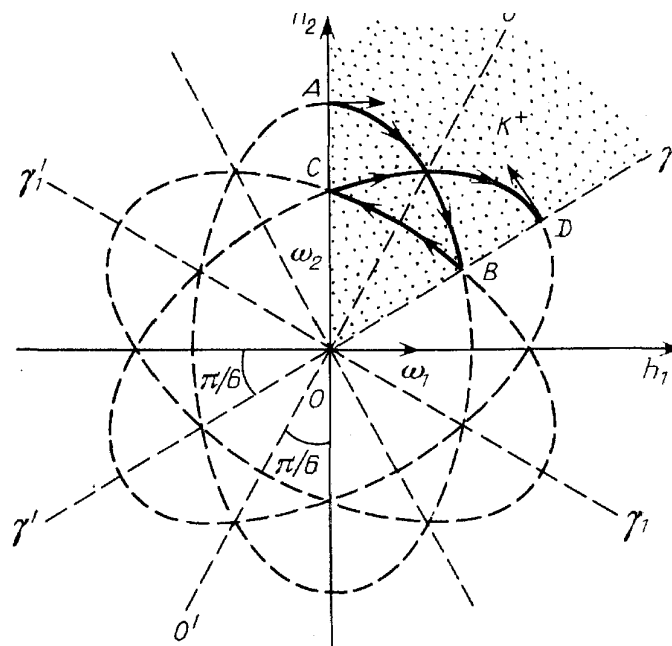


Рис. 2

$l (= \dim \mathcal{H})$ — ранга группы. Судя по базису физических состояний (3.10) и спектру энергии (3.12) результирующую систему можно представить как совокупность независимых подсистем, каждая из которых имеет спектр $E_i = nr_i + \text{const}$, $n = 0, 1, \dots$, расстояния между уровнями энергии у них увеличены в n_i раз (по сравнению с нормальным осциллятором). О чем свидетельствует этот факт?

Чтобы ответить на вопрос, проанализируем динамику в случае групп ранга 2, когда осциллятор имеет всего две физические степени свободы h_1 и h_2 . Физическое конфигурационное пространство, т. е. камера Вейля, есть сектор на плоскости (h_1, h_2) . Для групп $SU(3)$, $SO(5) \sim Sp(4)$ и G_2 углы раствора сектора α равны соответственно $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$. На рис. 2 изображена траектория материальной точки в физическом конфигурационном пространстве для группы $SU(3)$. Простоты ради начальные

условия выбраны так, что решения уравнений движения есть $h_2(t) = A_2 \cos t$, $h_1(t) = A_1 \sin t$ и $A_2 > A_1$. Камера Вейля на рисунке заполнена точками. Луч $O'O''$ является ее осью симметрии. В момент времени $t = 0$ частица находится в точке A . Затем она перемещается по эллипсу, вытянутому вдоль оси h_2 , и в момент времени $t = \pi/6$ достигает точки B , т. е. границы ∂K^+ . Дальнейшее движение по эллипсу в секторе между лучами $O\gamma$ и $O\gamma_1$ калибровочно-эквивалентно траектории $B \rightarrow C$ в K^+ . Частица как бы отражается от ∂K^+ , движется по траектории $B \rightarrow C$ и достигает точки C при $t = \pi/3$. Отметим, что никакого реального «удара» о стенку (т. е. силового воздействия) частица не испытывает (потенциал осциллятора не имеет сингулярностей на ∂K^+ !), хотя на первый взгляд кажется, что при отражении от границы ∂K^+ импульс меняется скачком. Суть дела в том, что импульсы до «удара» и после него калибровочно-эквивалентны (связаны преобразованием из группы Вейля (см. п. 3.1.2)), поэтому никакого катастрофического изменения физического состояния частицы в момент достижения границы не происходит. При анализе квантовой теории в рамках континуального интеграла (раздел 5) мы увидим, что поведение фазы волновой функции при подобном отражении от границы физического конфигурационного пространства отличается от такового при отражении частицы от непроницаемого барьера (как, например, в задачах: частица в ящике, на полуоси и т. п.). Продолжим анализ. В точке C частица испытывает повторное отражение и движется по участку эллипса $C \rightarrow D$ в K^+ . Наконец, в момент времени $t = \pi$ она достигает точки D , отражается от границы и проходит траекторию в обратном направлении $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, оказываясь снова в точке A в момент $t = 2\pi$.

Посмотрим, как происходит увеличение частот физических колебаний. По определению угловой частотой называется величина $2\pi/T$, где T — время, за которое система возвращается в исходное состояние. Состояние определяется значениями координаты и импульса изучаемой степени свободы. Разложим движение осциллятора $h_{1,2}$ на колебания вдоль оси $O'O''$ и вращения вокруг начала координат O . После прохождения участков $A \rightarrow B \rightarrow C$ угловая степень свободы возвращается в исходное состояние, так как углы $O''OC$ и $O''OA$ совпадают, а совпадение канонически сопряженного импульса в этих точках следует из закона его сохранения. Из точки C угловая переменная еще раз проходит «путь», эквивалентный рассмотренному ($C \rightarrow D \rightarrow C$), после чего возвращается в точку A по пути $C \rightarrow B \rightarrow A$. Таким образом, частота осцилляции угловой переменной втрое больше исходной. Для колебаний же вдоль оси $O'O''$ из рис. 2 видно, что в точках A и D состояния радиальной степени свободы одинаковы. Следовательно, частота радиальных колебаний вдвое больше исходной.

Аналогично можно было бы рассмотреть группы $SO(5) \sim Sp(4)$ и G_2 ; при этом мы получили бы, что частота радиальных колебаний (вдоль оси симметрии K^+) всегда увеличивается в два раза, тогда как частоты колебаний угловых переменных (они определяются степенями вторых операторов Казимира для этих групп) увеличиваются в 4 и 6 раз соответственно (см. таблицу в п. 9.6). Ясно, что подобное рассмотрение можно обобщить на случай группы любого ранга, однако это не меняет качественной картины. В п. 9.7 даны явные решения классических и квантовых уравнений движения для только что описанного случая, установлена связь изучавшихся здесь переменных с операторами Казимира.

Итак, в классике редукция физического ФП проявляется как феномен отражения траектории частицы от границы физического конфигурацион-

ного пространства. В разделе 5 мы увидим, что этот факт необходимо учитывать при построении континуального интеграла: отраженные траектории также дают вклад в квазиклассическую амплитуду перехода.

4. Калибровочные системы с гассмановыми переменными.

4.1. Минимальная модель с абелевой калибровочной группой. Классическая теория. Калибровочные теории с ферми-полями столь же употребительны, сколь и теории с бозе-полями, поэтому обратимся к моделям с гассмановыми переменными. Рассмотрим сначала систему с минимальным числом антикоммутирующих степеней свободы, обладающую нетривиальной динамикой. Пусть

$$L(\psi, \dot{\psi}, \psi^+, \dot{\psi}^+, y, \dot{y}) = \frac{i}{2} [\psi^+ (\partial_t - iy\Gamma) \psi - (\partial_t + iy\Gamma) \psi^+ \psi] - V(\psi^+ \psi), \quad (4.1)$$

где столбец $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — двухкомпонентный комплексный элемент гассмановой алгебры, $\psi_\alpha = \theta_1^\alpha + i\theta_2^\alpha$, θ_j^α — «вещественные» образующие, $(\theta_j^\alpha)^+ = \theta_j^\alpha$, $(\theta_j^\alpha)^2 = 0$, $\alpha, j = 1, 2$; Γ — оператор «электрического заряда», $\Gamma \equiv \tau_3$ (матрица Паули), а ψ^+ означает, что в комплексно сопряженном элементе ψ^* мы перешли от столбца к строке. Лагранжиан (4.1) инвариантен относительно калибровочных преобразований $\psi \rightarrow \exp(i\varepsilon\Gamma)\psi$, $y \rightarrow y + \dot{\varepsilon}$, где ε — произвольная функция времени. Вопрос о том, как с точки зрения гамильтонова формализма следует трактовать линейные в скоростях лагранжианы («формализм первого порядка»), обсуждается в п. 9.2. Из проведенного там анализа следует, в частности, что к модели, заданной лагранжианом (4.1), можно относиться как к динамической системе с двумя первичными связями второго рода [29] (связи не в инволюции). Легко видеть, что помимо них имеется еще и первичная связь первого рода: $\pi_0 = \partial L / \partial \dot{y} = 0$. Переход к гамильтоновому формализму сводится к разрешению связей второго рода и исключению части переменных (фактически — к отождествлению $\psi^+ \rightarrow \pi$; см. п. 9.3) с заменой скобок Пуассона на скобки Дирака [29]. Прделав все это, придем к гамильтониану

$$H = V(\psi^+ \psi) - y \psi^+ \Gamma \psi, \quad (4.2)$$

из которого следует существование вторичной связи первого рода

$$\sigma \equiv \dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H\} = \psi^+ \Gamma \psi = 0 \quad (4.3)$$

(скобки Пуассона определяются формулой (9.10)). Функция V в (4.2) задана разложением $V = V_0 + \omega \psi^+ \psi + \Omega (\psi^+ \psi)^2$, где V_0 , ω , Ω — некоторые постоянные. Так как $\sigma = \psi_1^+ \psi_1 - \psi_2^+ \psi_2$, имеем $(\psi^+ \psi)^2 = -\sigma^2$. Полагая $V_0 = 0$, переписываем (4.2) в виде

$$H = \omega \psi^+ \psi - y(t) \psi^+ \Gamma \psi - \Omega (\psi^+ \Gamma \psi)^2. \quad (4.4)$$

Ввиду равенства (4.3) квадратичный по связям член в гамильтониане не сказывается на уравнениях движения, которые при $\Omega = 0$ имеют вид

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\}_D = i(y\Gamma - \omega)\psi, \quad \dot{\psi}^+ = -i(y\Gamma - \omega)\psi^+ \quad (4.5)$$

и интегрируются элементарно

$$\psi(t) = \exp\left(-i\omega t + i\Gamma \int_0^t y(t') dt'\right) \psi(0). \quad (4.6)$$

Выбирая $y(t) = -\omega$, находим

$$\psi_1(t) = e^{-2i\omega t} \psi_1(0), \quad \psi_2(t) = \psi_2(0), \quad (4.7)$$

откуда заключаем, что степень свободы ψ_2 имеет тривиальную динамику, а ψ_1 осциллирует с удвоенной частотой. Мы знаем, что это признак редукции ФП (о понятии ФП для грассмановых переменных см. в 9.3). Отметим, что выбором калибровки здесь нельзя обратить в нуль нефизическую переменную. Отличие заключается в том, что калибровочный произвол связан с умножением $\psi_{1,2}$ на обычные комплексные функции, равные по модулю единице, а такие преобразования не могут изменить размерность грассмановой алгебры. Именно поэтому нефизическая переменная проявляется как переменная с тривиальной (или любой наперед заданной, не определяемой гамильтонианом) динамикой.

К выводу о редукции ФП физической переменной в модели (4.1) можно прийти другим путем. Выбором калибровки и начальных условий можно добиться равенства $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ ($y = 0$, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ в (4.6)) ⁽⁹⁾ ●; не нарушая его, в любой момент времени можно изменить знак физической компоненты $\psi_1 \rightarrow -\psi_1$ ($y(t') \rightarrow y(t') + \pi\delta(t-t')$). Отсюда в соответствии с определением ФП заключаем: ФП $(\psi_1, \psi_1^+) = \text{con}(\pi)$, ибо пары (ψ_1, ψ_1^+) , $(-\psi_1, -\psi_1^+)$ калибровочно-эквивалентны. Между прочим, отсюда следует, что в выражении $\psi(t) = z(t) \psi(0)$, где z — диагональная матрица, $\arg z(t)$ для физической переменной определен лишь по $\text{mod}(\pi)$ (см. также [47]).

4.2. Минимальная модель. Квантовая теория. Квантование модели (4.1) не представляет труда. Согласно (9.11), от $\psi_\alpha, \psi_\alpha^+$ переходим к операторам

$$[\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta^+]_+ = i\{\psi_\alpha, \psi_\beta^+\}_D = \delta_{\alpha\beta}; \quad (4.8)$$

скобки $\{, \}_D$ определены согласно (9.2). Как всегда, связь $\pi_0 = 0$ можно игнорировать. Основное состояние системы с гамильтонианом (4.4) («вакуум» $|0\rangle$) фиксируется условием $\hat{\psi}_\alpha |0\rangle = 0$. Произвольное состояние $|\chi\rangle$ определяется как

$$\chi(\hat{\psi}^+) |0\rangle \equiv (\chi_0 + \chi_\alpha \hat{\psi}_\alpha^+ + \chi_3 \hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+) |0\rangle = |\chi\rangle; \quad (4.9)$$

сопряженное ему есть

$$\langle\chi| = \langle 0| \chi(\hat{\psi}^+)^+ = \langle 0| (\chi_0^* + \chi_\alpha^* \hat{\psi}_\alpha + \chi_3^* \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_1), \quad (4.10)$$

причем

$$\langle\Phi|\chi\rangle = \sum_{a=0}^3 \Phi_a^* \chi_a. \quad (4.11)$$

Физические состояния $|\Phi\rangle$ подчиняются условию исчезновения на них связи

$$\hat{\sigma} |\Phi\rangle = \hat{\psi}_1^+ \Gamma \hat{\psi} |\Phi\rangle = 0. \quad (4.12)$$

Тогда среди собственных векторов $|0\rangle$, $\hat{\psi}_\alpha^+ |0\rangle$, $\hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+ |0\rangle$ оператора Гамильтона

$$\hat{H} = \omega (\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - 1) \quad (4.13)$$

(при квантовании мы заменили $\psi^+ \psi \rightarrow (1/2) (\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - \hat{\psi} \hat{\psi}^+) = \hat{\psi}^+ \hat{\psi} - 1$, чтобы учесть непостоянность операторов) требованию (4.12) удовлетворяет только $|0\rangle$ и $\hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+ |0\rangle$. Действительно, $\hat{\sigma} \hat{\psi}_\beta^+ |0\rangle = (\hat{\psi}^+ \Gamma)_\beta |0\rangle \neq 0$, $\hat{\sigma} \hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+ |0\rangle = (\hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+ + \hat{\psi}_2^+ \hat{\psi}_1^+) |0\rangle = 0$. Расстояние между уровнями энергий физических состояний равно $E_2 - E_0 = 2\omega$ в точном соответствии с классической картиной.

4.3. Модель с произвольной калибровочной группой. Присоединенное представление. В теории элементарных частиц системы с антикоммутирующими переменными играют не менее важную роль, чем с коммутирующими. Это предопределяет важность изучения калибровочных моделей с грассмановыми переменными и неабелевой калибровочной группой. Трудности здесь связаны не столько со сложностью группы, сколько со сложностью представления. Анализ элементарных [48] представлений, как мы убедились на примере группы $SO(n)$ (см. п. 2.2), достаточно прост. Задача становится нетривиальной уже для присоединенного представления. Изучение его для фермионов может показаться излишним, ибо ферми-поля обычно преобразуются по элементарным представлениям. Возражение отпадает, если мы вспомним о суперсимметрии. Вместе с тем системы с грассмановыми переменными в присоединенном представлении оказываются достаточно содержательными и интересны сами по себе.

Итак, рассмотрим лагранжиан (4.1), в котором положим $V = \omega \psi^+ \psi$, $\psi = \psi_a \lambda_a$, $\psi^+ = \psi_a^+ \lambda_a^+$, где λ_a — базис в алгебре Ли группы G из п. 3.1, а ковариантную производную $\partial_t \psi - i y \Gamma \psi$ заменим на $\partial_t \psi + [y, \psi]$ ($y = \lambda_a y_a$). Так же как и в п. 3.1, считаем: $\text{Tr } \psi \psi^+ = \psi_a \psi_a^+ \equiv \psi \psi^+$. Переход к гамильтонову формализму осуществляется по тем же правилам, что и в п. 4.2, с той лишь разницей, что теперь будет $2N$ ($N = \dim G$) связей первого рода (см. п. 3.1)

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_a} = 0, \quad \sigma_a = \psi^+ T_a \psi = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (4.14)$$

Обратимся сразу к квантовому описанию. Вместо (4.13) имеем

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - \frac{N}{2} \right); \quad (4.13')$$

Здесь $[\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b^+]_+ = \delta_{ab}$, а физические векторы подчиняются условиям, аналогичным (4.12). Как и в модели с коммутирующими переменными (см. п. 3.2), физические состояния получаются применением к «вакууму» инвариантных однородных полиномов $P(\hat{\psi}^+)$. Так как операторы $\hat{\psi}^+$ антикоммутируют, полиномы P определяются инвариантными *антисимметричными* тензорами, которые выражаются через структурные постоянные и симметричные тензоры. Искомые полиномы имеют вид

$$P_k = \text{Tr}(\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_k}) \hat{\psi}_{a_1}^+ \dots \hat{\psi}_{a_k}^+. \quad (4.15)$$

Из (4.15) вытекает, что при четных k $P_k \equiv 0$ (ибо $\text{Tr}(\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_k}) = \text{Tr}(\lambda_{a_2} \dots \lambda_{a_k} \lambda_{a_1})$ тогда, как $\hat{\psi}_{a_1}^+ \dots \hat{\psi}_{a_k}^+ = -\hat{\psi}_{a_2}^+ \dots \hat{\psi}_{a_k}^+ \hat{\psi}_{a_1}^+$). В слу-

чае нечетных k преобразуем (4.15) следующим образом. Положим $\hat{\psi}_a^+ \hat{\psi}_b^+ \lambda_a \lambda_b = 1/2 F_{ab}^c \lambda_c \hat{\psi}_a^+ \hat{\psi}_b^+ \equiv \lambda_c B_c = B$; тогда

$$P_{2m+1} = \text{Tr} (\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_m} \lambda_a) B_{a_1} \dots B_{a_m} \hat{\psi}_a^+. \quad (4.16)$$

Величины B_a коммутируют между собой, поэтому след в (4.16) можно симметризовать по $a_1, \dots, a_m$. Сделаем замену в (4.16) $\lambda_{a_m} \lambda_a = \lambda_a \lambda_{a_m} + F_{a_m a}^b \lambda_b$; слагаемое $F_{a_m a}^b B_{a_m} \hat{\psi}_a^+ = (1/2) F_{a_m a}^b F_{cd}^a \hat{\psi}_a^+ \hat{\psi}_c^+ \hat{\psi}_d^+ = 0$ обращается в нуль в силу тождества Якоби для структурных констант [14]

$$-F_{[ab}^c F_{a']^{b'}} = F_{ab}^c F_{ca'}^{b'} + F_{ba'}^c F_{ca}^{b'} + F_{a'a}^c F_{cb}^{b'} = 0,$$

где по индексам в квадратных скобках проведена антисимметризация. Поэтому след в (4.16) можно симметризовать по всем индексам $a_1, \dots, a_m, a$, т. е. включая a . Этот след представляет из себя симметричный инвариантный тензор; он выражается через неприводимые симметричные инвариантные тензоры $C_{a_1 \dots a_r}$, определяющие полиномы Казимира C_r .

Любое разбиение совокупности индексов $(a_1, \dots, a_m, a)$ в (4.16) на подмножества, содержащие не менее двух элементов a_i, a (двух, ибо $r \geq 2$), обязательно порождает полиномы Казимира вида $P_{2r}(\hat{\psi}^+) = C_r(B)$, $r = 2, \dots, r, l = \text{rank } G$. Но мы установили, что четные инвариантные полиномы от $\hat{\psi}^+$ равны нулю, т. е. $C_r = 0$. Остается единственная возможность: $\text{Tr} (\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_m} \lambda_a)$ есть неприводимый симметричный тензор (Казимира) ранга $r = m + 1$. Следовательно, базис гильбертова пространства порождается полиномами вида $P_{2m+1}(\hat{\psi}^+) = P_{2r-1}(\hat{\psi}^+)$:

$$[\text{Tr} (\hat{\psi}^+)^{2r_1-1}]^{n_1} \dots [\text{Tr} (\hat{\psi}^+)^{2r_l-1}]^{n_l} |0\rangle, \quad (4.17)$$

где $n_i = 0, 1$ (нечетные элементы грасмановой алгебры нильпотентны). Инвариантные антисимметричные тензоры согласно (4.16) и определению B имеют вид

$$C_{a_1 \dots a_{r-1}} [a_r F_{b_1 c_1}^{a_1} \dots F_{b_{r-1} c_{r-1}}^{a_{r-1}}] \mathbf{1}. \quad (4.18)$$

Простейший из тензоров (4.18) совпадает со структурным тензором F_{bc}^a . Базис (4.17) отвечает следующему спектру гамильтониана (4.13'):

$$E = \omega \sum_{i=1}^l (2r_i - 1) n_i - \frac{N\omega}{2}, \quad n_i = 0, 1. \quad (4.19)$$

В практически интересных случаях (т. е. в теории поля) задача отыскания инвариантных полиномов выглядит несколько иначе, поскольку операторы $\hat{\psi}$ могут иметь дополнительные индексы, символизирующие наличие других квантовых чисел (например, спина). Их также нужно учитывать в процессе антисимметризации при построении инвариантных полиномов. Этот вопрос, однако, выходит за рамки статьи.

5. Гамильтонов континуальный интеграл для систем с редуцированным фазовым пространством. В современной квантовой физике практически невозможно избежать метода континуального интегрирования. Достаточно часто используется гамильтонов континуальный интеграл, в котором интегрируется по путям в ФП, например, при изучении

систем со связями. Ясно, что редукция фазового пространства изменит ГКИ, поэтому важно выяснить — как? Это особенно актуально для квантовой теории поля, ибо континуальный интеграл представляет естественную возможность для выхода за рамки теории возмущений (квазиклассика). Но прежде чем переходить к полевым системам, необходимо изучить простейшие модели. Этим мы и займемся.

5.1. Гармонический осциллятор. Дискретная калибровочная группа $\mathbb{Z}_2$. Чтобы выяснить существо дела, возьмем простейшую модель (одномерный гармонический осциллятор), в которой дискретная калибровочная группа $\mathbb{Z}_2$ постулируется, т. е. выступает в качестве одной из характеристик ФП при построении гамильтонова формализма. Данная задача решается элементарно. Основным и простейшим объектом гамильтоновых континуальных интегралов является ядро инфинитезимального оператора эволюции $U_t(x, x') = \langle x | \exp(-i\hat{H}t) | x' \rangle = \langle x | \hat{U}_t | x' \rangle$, $t = \varepsilon \rightarrow 0$. В случае гармонического осциллятора для него имеет место формула (при любых t) [49, с. 218]

$$U_t(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 H_n(x) H_n(x') e^{-(x^2+x'^2)/2} e^{-iE_n t}, \quad (5.1)$$

где $E_n = n + 1/2$ — спектр оператора энергии, $H_n(x)$ — полиномы Эрмита, а координаты x, x' пробегают всю вещественную ось; c_n — нормировочные константы. Как мы выяснили в разделе 2, наличие калибровочной группы $\mathbb{Z}_2$ меняет спектр гамильтониана, поскольку физическому подпространству принадлежат лишь четные функции. Следовательно, в случае конического ФП (следствие существования группы $\mathbb{Z}_2$) базис в физическом гильбертовом пространстве образуют функции

$$\psi_{2n}(x) = \tilde{c}_{2n} H_{2n}(x) e^{-x^2/2}, \quad \tilde{c}_{2n} = \sqrt{2} c_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

Изменение нормировки $c_{2n} \rightarrow \tilde{c}_{2n}$ связано с переходом в нормировочном интеграле к интегрированию по полуоси $[0, \infty)$. Следовательно, вместо (5.1) мы имеем для $\tilde{U}_t^c$ (индекс c означает: ядро в задаче с коническим ФП)

$$\begin{aligned} U_t^c(x, x') &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{2n}^2 H_{2n}(x) H_{2n}(x') \exp \left[-\frac{1}{2}(x^2 + x'^2) - iE_{2n}t \right] = \\ &= U_t(x, x') + U_t(x, -x'); \end{aligned} \quad (5.3)$$

x, x' в (5.3) пробегают положительную полуось. Отсюда заключаем:

$$\psi_t(x) = \int_0^{\infty} dx' U_t^c(x, x') \psi_0(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' U_t(x, x') \Psi_0(x'), \quad (5.4)$$

где

$$\Psi_0(x) = \int_0^{\infty} dx' Q(x, x') \psi_0(x'), \quad Q(x, x') = \delta(x - x') + \delta(x + x'), \quad (5.5)$$

а $\psi_t(x) = \psi(x, t)$ — волновая функция в момент времени t . Отметим: ψ_t нормирована на единицу на всей оси только в том случае, если это верно для Ψ_0 . Из (5.5) ясно, что Ψ_0 есть функция ψ_0 , четным образом продолженная в нефизическую область отрицательных x : $\Psi_0(x) \equiv \psi_0(x)$, $x > 0$, $\Psi_0(x) \equiv \psi_0(-x)$, $x < 0$, т. е. Ψ_0 определена на всей оси и оператор $\hat{Q}$ с ядром (5.5) доопределяет ψ_0 при $x < 0$. Из формул (5.4), (5.5) вытекает

представление

$$U_t^c(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' U_t(x, x'') Q(x'', x'), \quad (5.6)$$

для которого становится ясно, как модифицируется гамильтонов континуальный интеграл для ядра оператора эволюции гармонического осциллятора

$$U_t(x, x') = \int \prod_{\tau=0}^t \left(\frac{dp(\tau) dx(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \left[p\dot{x} - \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \right] \right\}, \quad (5.7)$$

где $x = x(t)$, $x(0) = x'$. Сделаем несколько замечаний.

1. Формулы (5.6), (5.7) дают полное решение задачи. Полезно убедиться в их самосогласованности. Известно, что представление оператора $\hat{U}_t$ континуальным интегралом базируется на формуле $\hat{U}_{t+t'} = \hat{U}_t \hat{U}_{t'}$ [49]. Для операторов $\hat{U}_t$, задаваемых (5.1), она очевидна, тогда как для $\hat{U}_t^c$ требуется проверка: должно выполняться равенство

$$U_{t+t'}^c(x, x') = \int_0^{\infty} dx'' U_t^c(x, x'') U_{t'}^c(x'', x'), \quad (5.8)$$

справедливость которого нужно еще доказать. На операторном языке задача формулируется как самосогласованность условий

$$\hat{U}_t^c = \hat{U}_t \hat{Q} \text{ и } \hat{U}_{t+t'}^c = \hat{U}_t^c \hat{U}_{t'}^c;$$

комбинируя их, имеем $\hat{U}_{t+t'} \hat{Q} = \hat{U}_t \hat{Q} \hat{U}_{t'} \hat{Q} = \hat{U}_t \hat{U}_{t'} \hat{Q}$, т.е. должно выполняться условие

$$\hat{Q} \hat{U}_t \hat{Q} = \hat{U}_t \hat{Q}. \quad (5.9)$$

Приведенные операторные равенства требуют пояснений. Дело в том, что второй аргумент ядра $Q(x, x')$ меняется в пределах положительной полуоси, тогда как первый — в пределах всей оси. И так как смысл оператора $\hat{Q}$ — в доопределении функции четным образом на всей оси, то на четные функции $\hat{Q}$ действует как единичный оператор, поэтому содержание (5.9) заключается в требовании четности ядра $\hat{U}_t \hat{Q}$ по первому аргументу. Отсюда, учитывая четность ядра $Q(x, x')$ по первому аргументу, находим достаточное условие для $\hat{U}_t$: $U_t(-x, x') = U_t(x, -x')$. В действительности самосогласованность аппарата континуальных интегралов гарантируется более слабым условием

$$U_\varepsilon(-x, x') = U_\varepsilon(x, -x') + O(\varepsilon^2), \quad (5.10)$$

которым и будем пользоваться в дальнейшем.

2. Из формул (5.1), (5.3), (5.6) ясно, что оператор $\hat{Q}$ исключает вклад в ядро $U_t^c(x, x')$ нефизических состояний, связанных с нечетными функциями. В этом его смысл.

3. Поучительно сравнить роль $\hat{Q}$ в (5.6) с ролью аналогичного оператора в задаче о частице на полуоси (с нулевым граничным условием) [17, 18], где он задается ядром $\hat{Q}(x, x') = \delta(x - x') - \delta(x + x')$. Ядро $\hat{Q}$ обеспечивает выполнение граничного условия в нуле; смысл второй δ -функции в учете, наряду с прямой траекторией, также и отраженной от границы (при аппроксимации траектории прямыми для $\hat{U}_\varepsilon$). Разница в знаках перед второй δ -функцией в Q и $\hat{Q}$ отвечает изменению физики задачи. В рас-

смаатриваемой модели движение при $x < 0$ неотличимо от движения при $x > 0$ в обратном направлении; в точке $x = 0$ как бы происходит отражение, но без изменения фазы, тогда как в задаче о частице на полуоси [17, 18] при отражении от границы фаза меняется на π . Это можно интерпретировать следующим образом. В случае непроницаемой стенки сумма вкладов прямой и отраженной от стенки траекторий для инфинитезимального ядра U_ε равна сумме вкладов траекторий (прямых) из x' и $-x'$ в точку x , причем второй вклад берется с отрицательным знаком. Это обеспечивает выполнение нулевых граничных условий. В рассматриваемой модели также нужно взять сумму вкладов траекторий из точек x' и $-x'$ в x , но с одинаковыми знаками. Это обеспечивает четность волновой функции, т. е. ее инвариантность относительно калибровочной группы $\mathbb{Z}_2$.

4. Несмотря на редукцию ФП, мера в ГКИ (5.6), (5.7) не приобрела множителя $1/2$, как это можно было бы ожидать. Причина в том, что изменилась область интегрирования в нормировочном интеграле: физическая переменная x пробегает не всю ось, а лишь полуось. Именно поэтому в (5.2), (5.3) произведена замена $c_n \rightarrow \tilde{c}_n = \sqrt{2}c_n$.

В заключение обратим внимание на следующее. При переходе к полярным координатам в континуальном интеграле также появляется некоторый оператор $\hat{Q}$ с ядром [50]

$$Q(r, \varphi, r', \varphi') = \delta(r - r') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - \varphi' + 2\pi n) + \\ + \delta(r + r') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - \varphi' + \pi + 2\pi n).$$

Согласуется ли это с формулой (5.5) для модели (2.1)? Легко видеть, что согласуется. Так как физические функции в силу (2.5) не зависят от угловой переменной, интегрированием по φ' в

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dr' r' Q(r, \varphi, r', \varphi') \psi_0(r')$$

избавляемся от δ -функций под знаком суммы. Получающееся ядро идентично ядру (5.5) (с точностью до обозначений). Фактически это есть другой способ вывода соотношений (5.4), (5.5)⁽¹⁰⁾ ●, подчеркивающий то обстоятельство, что найденные формулы полностью эквивалентны следствиям стандартных условий на физические векторы состояний (2.5) в схеме квантования Дирака [29] (см. конец п. 2.2.1).

5.2. Гармонический осциллятор с калибровочной группой $SO(3)$. Из педагогических соображений в п. 5.1 была рассмотрена модель, в которой дискретная калибровочная группа $\mathbb{Z}_2$ постулировалась. Выясним, как обстоит дело в моделях, заданных калибровочно-инвариантным лагранжианом. Рассмотрим лагранжиан (2.1), в котором $yT \rightarrow y^a T_a$, T_a — генераторы группы $SO(8)$, $a = 1, 2, 3$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — трехмерные векторы. Так как связи (2.11) $\sigma_a = \mathbf{p} T_a \mathbf{x}$ есть компоненты углового момента ($F_{bc}^a = i\varepsilon_{abc}$, см. п. 3.1), то гамильтониану (3.3) с $V = r^2/2$ отвечает оператор [51 с. 168] (для удобства читателя сделаем выкладки явно, без ссылок на п. 2.2)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(-\partial_r^2 - \frac{2}{r} \partial_r + \frac{\hat{\mathbf{g}}^2}{r^2} + r^2 \right) + \mathbf{y} \hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{\mathbf{g}}^2}{r^2} + r^2 \right) + \mathbf{y} \hat{\mathbf{g}}, \quad (5.11)$$

где $\hat{p}_r = -ir^{-1} \partial_r \circ r$. Поскольку физические состояния подчиняются ус-

ловию $\hat{\sigma}\Phi = 0$, задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}(\hat{p}_r^2 + r^2)\Phi = E\Phi; \quad (5.12)$$

нас интересуют решения, регулярные в нуле (см. п. 2.1.2). Функции Φ , ведущие себя в нуле как $\sim 1/r$, хотя и нормируемы (напомним, что интегрирование по полубесконечному интервалу ведется с весом r^2), удовлетворяют неоднородному уравнению Шрёдингера с δ -функцией $\delta(\mathbf{x})$ в правой части [52, с. 219]. Переходя от Φ к $\psi = r\Phi$, находим, что ψ есть собственные функции гамильтониана одномерного осциллятора, т. е. $\psi_n = c_n H_n(r) \exp(-r^2/2)$. Из условия регулярности Φ в нуле заключаем, что физический базис образуют состояния с нечетными n , т. е.

$$\Phi_{2k+1} = \tilde{c}_{2k+1} \frac{H_{2k+1}(r)}{r} e^{-r^2/2}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.12')$$

и спектр энергии дается формулой $E_k = 2k + 3/2$, в согласии с (3.12). Обращаясь опять к формуле (5.1), обнаруживаем, что оператор эволюции задачи дается разностью [19]

$$U_t^c(r, r') = \frac{1}{rr'} (U_t(r, r') - U_t(r, -r')); \quad (5.13)$$

$U_t(r, r')$ — ядро (5.1) оператора эволюции одномерного гармонического осциллятора. В итоге приходим к формулам, аналогичным (5.4), (5.5):

$$\begin{aligned} \psi_t(r) &= \int_0^\infty dr' r'^2 U_t^c(r, r') \psi_0(r') = \int_{-\infty}^\infty dr' \frac{r'}{r} U_t(r, r') \Psi_0(r'), \\ \Psi_0(r) &= \int_0^\infty dr' Q(r, r') \psi_0(r'), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где Q задано (5.5). Разница по сравнению с (5.4), (5.5) связана с изменением меры интегрирования. Так, в пространстве физических переменных пропечатываются особенности исходного пространства, включающего физические и нефизические переменные. Нефизические степени свободы не исчезают бесследно (следствие того, что они связаны с криволинейными координатами, см. также п. 5.6).

Отметим в заключение, что в случае произвольной группы $SO(n)$ (см. п. 2.2) решение не сводится к одномерному гармоническому осциллятору [19, 21]. В уравнение (5.12) к $r^2/2$ добавляется «квантовый потенциал» $(n-1)(n-3)/8r^2$ ($\sim \hbar^2$), который необходимо принимать во внимание в формуле (5.7). Изменится и мера интегрирования в (5.14): $(r')^2 \rightarrow (r')^{n-1}$.

5.3. Модель с произвольной калибровочной группой. Присоединенное представление. Полезно рассмотреть случай произвольной простой калибровочной группы, изучавшейся в разделе 3. С этой целью в задаче с лагранжианом (3.1) выделим физические переменные, т. е. перейдем от x к h, z (3.4), где h согласно п. 3.1.1 играет роль физической переменной и принадлежит подалгебре Картана H , а z включает все нефизические переменные, $z \in X \ominus H$. Математически задача сводится к записи оператора Гамильтона (3.3)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \text{Tr } \hat{p}^2 + V(\hat{x}) + y_a \hat{\phi}_a \quad (5.15)$$

в криволинейных координатах h, z , а фактически (так как $-i\partial/\partial x_a \equiv \hat{p}_a$) — к записи в переменных h, z N -мерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_a^2$. Для этого нужно найти метрический тензор в новых переменных, т. е. вычислить квадрат элемента длины $ds^2 = \text{Tr } dx^2$. Используя (3.4), находим $dx = dShS^{-1} + SdhS^{-1} + ShdS^{-1}$. Возводя dx в квадрат и используя формулу $dS^{-1} = -S^{-1}dSS^{-1}$, находим

$$ds^2 = \text{Tr} \{ (dh)^2 + 2 [(hS^{-1}dS)^2 - h^2 (S^{-1}dS)^2] + [S^{-1}dS, h] dh \} = \\ = \text{Tr} [(dh)^2 + [h, S^{-1}dS]^2] = dh_i^2 + \tilde{g}_{\alpha\beta}(h, z) dz_\alpha dz_\beta \quad (5.16)$$

(след последнего члена в фигурных скобках равен нулю). Искомый метрический тензор имеет блочную структуру $g_{ab} = (\delta_{ij}, \tilde{g}_{\alpha\beta}), i, j = 1, 2, \dots, l; \alpha, \beta = l+1, \dots, N$. Представляя $S^{-1}dS = \lambda_\alpha F_\alpha^u(z) dz_\alpha$, где $F_\alpha^u(z)$ — неизвестные функции, и учитывая, что $[\lambda_i, \lambda_j] = 0, [\lambda_i, \lambda_\alpha] \equiv H$, имеем $[h, S^{-1}dS] = \lambda_\gamma h_i F_{\delta\gamma}^i F_\alpha^\delta dz_\alpha$, т. е.

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = F_\alpha^\gamma(z) g_{\gamma\delta}(h) F_\beta^\delta(z), \quad g_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} \omega_{\beta\gamma}, \quad \omega_{\alpha\beta}(h) = h_i F_{\alpha\beta}^i. \quad (5.17)$$

Следовательно, оператор Бельтрами — Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{g^{1/2}} \partial_a \circ g^{1/2} g^{ab} \partial_b = \kappa^{-2} \partial_i \circ \kappa^2 \partial_i + \frac{1}{g^{1/2}} \partial_\alpha \circ g^{1/2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\beta, \quad (5.18)$$

где $g^{1/2} = \det \omega(h) \det F(z) \equiv \mu(h) \tilde{\mu}(z)$, $\mu(h) \equiv \kappa^2(h)$, $g^{ac} g_{cb} = \delta_b^a$, $\partial_i = \partial/\partial h_i$, $\partial_\alpha = \partial/\partial z_\alpha$. Имеет место тождество $\kappa^{-2} \partial_i \circ \kappa^2 \partial_i \equiv \kappa^{-1} \partial_i^2 \circ \kappa - \kappa^{-1} \partial_i^2 \kappa$; в п. 9.6 показано, что $\kappa(h) = \prod_{\alpha>0} (h, \alpha)$ ($\alpha > 0$ символизирует произведение по положительным корням), откуда вытекает, что «квантовый потенциал» $V_q = \kappa^{-1} \partial_i^2 \kappa / 2 = 0$ (см. 9.25)). С учетом сказанного приходим к следующему выражению для гамильтониана в физическом подпространстве:

$$\hat{H}_{\text{ph}} = -\frac{1}{2} \kappa^{-1} \partial_i^2 \circ \kappa + V(h) \quad (5.19)$$

(согласно (3.6) физические состояния не зависят от z : независимые связи являются генераторами сдвигов по z_α). Скалярное произведение физических векторов состояния дается формулой

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int_{K^+} dh \mu_i^*(h) \Phi_1^*(h) \Phi_2(h), \quad (5.20)$$

в которой K^+ указывает, что интегрирование ведется внутри камеры Вейля [44 с. 470]. Здесь и ниже под h разумеется вектор в $\mathbb{R}^l$ с компонентами $(h_1, \dots, h_l)$ в ортогональном базисе: вместо $d'h$ или $d\mathbf{h}$ будем писать dh , вместо $\psi(\mathbf{h})$ — писать $\psi(h)$ и т. д. Вес $\mu(h)$ пропорционален объему калибровочной орбиты. Сужение области изменения переменных h_i с $H = \mathbb{R}^l$ до K^+ в (5.20) связано, как разъяснялось в п. 3.1, с действием в H остаточной калибровочной группы Вейля ⁽¹¹⁾ ●.

Итак, мы пришли к квантовомеханической задаче о частице в l -мерном пространстве с необычной нормировкой векторов состояния. Необходимо выяснить, как меняется ядро оператора эволюции системы с гамильтонианом (5.19) и скалярным произведением (5.20), но без значка K^+ (интегрирование по всему пространству $\mathbb{R}^l$) при включении калибровочной группы Вейля, т. е. при переходе к скалярному произведению (5.20) со знаком K^+ . Хотя гамильтониан (5.19) выражен через физические пере-

менные, не все решения уравнения $\hat{H}_{ph}\psi = E\psi$ будут физическими. Иллюстрацией служит п. 5.2, в котором показано, что физическому гильбертову подпространству $\mathcal{H}_{ph}$ принадлежат лишь четные по r (регулярные в нуле) решения уравнения (5.12) (инварианты группы Вейля $\mathbb{Z}_2$).

Группа Вейля W есть подгруппа калибровочной группы G , поэтому из стационарности физических состояний относительно G ($\hat{g}\Phi = \Phi$, $\hat{g} \in G$ и генерируется операторами σ_a ; см. п. 3.2.1) вытекает их стационарность относительно W ($\hat{w}\Phi = \Phi$, $\hat{w} \in W$). Если имеется произвольная функция $\psi(h)$, нормированная во всем пространстве, то ее физическая (инвариантная) компонента есть

$$\Phi = N_W^{-1/2} \sum_w \hat{w}\psi(h) = N_W^{-1/2} \sum_w \psi(h_w). \quad (5.21)$$

Поясним обозначения и смысл (5.21). Преобразование $h \rightarrow \bar{w}h\tilde{w}^{-1} = h_w$ будем записывать $h_w = wh$ (здесь w — матрица $l \times l$). В силу калибровочной инвариантности исходного лагранжиана в теории отсутствуют какие-либо постоянные неинвариантные тензоры; отсюда следует равенство $\hat{w}\psi(h) = \psi(h_w)$, использованное в (5.21). Суммирование в этой формуле ведется по всем элементам группы Вейля. Нормировочный множитель выбран из следующих соображений. Предполагается, что Φ нормировано согласно (5.20), т. е.

$$\int_{K^+} dh_\mu |\Phi|^2 = 1, \quad \text{причем} \quad \int_{\mathbb{R}^l} dh_\mu |\psi|^2 = 1. \quad (5.22)$$

Но группа W действует в $\mathbb{R}^l$ просто транзитивно на множестве камер Вейля [45], поэтому для числа элементов этой группы N_W имеет место символическое равенство $N_W = V_{\mathbb{R}^l}/V_{K^+}$, где $V_{\mathbb{R}^l}$ и V_{K^+} — «объемы» $\mathbb{R}^l$ и K^+ (они бесконечны; отметим заодно, что [14, с. 568] $N_W = r_1 \dots r_l$). Этим и объясняется выбор множителя $N_W^{-1/2}$ перед знаком суммы в (5.21). Ясно, что Φ есть инвариант: $\hat{w}\Phi = \Phi$, ибо W есть группа.

Отсюда вытекает рецепт построения ядра физического оператора эволюции U_t^c . Из ядра U_t , построенного с участием всех собственных функций $\psi_{(n)}$ оператора (5.19) (аналог (5.1)), нужно выделить слагаемое, содержащее лишь физические функции $\Phi_{(n)}$ (аналог (5.3); здесь (n) символизирует полный набор квантовых чисел, фиксирующих Φ). Используя (5.21), имеем

$$U_t^c(h, h') = \sum_{(n)} \Phi_{(n)}(h, t) \Phi_{(n)}^*(h', t) = N_W^{-1} \sum_{w, w'} U_t(h_w, h'_w), \quad h, h' \in K^+, \quad (5.23)$$

где $U_t(h, h')$ — ядро оператора эволюции в задаче с гамильтонианом (5.19) и нормировкой во всем пространстве $\mathbb{R}^l$. Непосредственно убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$U_\varepsilon(h, h') = (\kappa\kappa')^{-1} \int \frac{dp}{(2\pi)^l} \exp \left\{ i \left[p(h - h') - \varepsilon \left(\frac{p^2}{2} + V(h) \right) \right] \right\}, \quad \kappa' \equiv \kappa(h'); \quad (5.24)$$

появление множителя $(\kappa\kappa')^{-1}$ в (5.24) связано с тем обстоятельством, что собственные функции гамильтониана $\hat{H}' = -(1/2) \partial_i^2 + V$ есть, согласно (5.19), $\kappa\psi_{(n)}$. Несложно установить, что ядро (5.24) обладает свойством

$$U_\varepsilon(h_w, h') = U_\varepsilon(h, h'_w) + O(\varepsilon^2) \quad (5.25)$$

при любом потенциале $V(h)$; если же потенциал инвариантен $V(h_w) =$

$= V(h)$, то в (5.25) член $O(\varepsilon^2)$ можно опустить. Это утверждение проверяется путем замены переменных в интеграле $p \rightarrow wp$ с учетом инвариантности dp и p^2 , вытекающей из ортогональности матриц w . С учетом (5.25) переписываем ядро (5.23) при $t = \varepsilon$ в виде

$$U_\varepsilon^c(h, h') = \sum_w U_\varepsilon(h, h'_w) = \int dh'' U_\varepsilon(h, h'') Q(h'', h'), \quad (5.26)$$

$$Q(h, h') = \sum_w \delta(h - h'_w); \quad (5.27)$$

всюду, где не оговорено, интегрируется по всему пространству. Формула (5.26) есть обобщение (5.6) на случай произвольной группы. Как и в (5.6), ядро Q здесь играет двоякую роль: с одной стороны, Q исключает вклад нефизических состояний в U_t^c , с другой, если обратиться к формулам, аналогичным (5.4)–(5.5), доопределяет начальную функцию $\Phi_0(h)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^l$. Так как

$$Q(h_w, h') = Q(h, h') \quad (5.28)$$

(следствие (5.27) и очевидного равенства $\delta(h_w) = \delta(h)$, вытекающего из ортогональности преобразования w), то Q доопределяет Φ_0 вне K^+ симметричным образом. Выпишем соответствующие формулы явно

$$\Phi_\varepsilon(h) = \int_{K^+} dh' \mu(h') U_\varepsilon^c(h, h') \Phi_0(h') = \int dh' \mu(h') U_\varepsilon(h, h') \Phi_0(h'), \quad (5.29)$$

$$\Phi_0(h) = \int_{K^+} dh' Q(h, h') \Phi_0(h'). \quad (5.30)$$

При получении (5.30) мы воспользовались (5.26) и инвариантностью $\mu(h)$ относительно группы Вейля. Очевидно, $\Phi_0(h \in K^+) = \Phi_0(h)$; первый аргумент Q меняется во всем пространстве, второй — в пределах K^+ . В силу (5.25), (5.27) имеет место аналог формулы (5.9) для U_ε . Тогда многократное применение U_ε^c сведется к оператору $\bar{U}_t^c = \bar{U}_t \bar{Q}$, в котором ядро U_t задается континуальным интегралом

$$U_t(h, h') = (\kappa \kappa')^{-1} \int \prod_{\tau=0}^t \frac{dp(\tau) dq(\tau)}{(2\pi)^l} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \left[p\dot{q} - \frac{p^2}{2} - V(q) \right] \right\}, \quad (5.31)$$

где $h \equiv q(t)$, $h' \equiv q(0)$, $\kappa' = \kappa(h')$. Соотношения (5.26), (5.27), (5.29), (5.31) вместе с равенством $\bar{U}_t^c = \bar{U}_t \bar{Q}$ и определением скалярного произведения (5.20) решают задачу.

В приведенных формулах интегрирование по h ведется с весом $g^{1/2} \rightarrow \mu = \kappa^2$. Исключение составляет интеграл (5.30) (или (5.26)). Легко видеть, что, переопределяя $Q \rightarrow Q_\kappa = (\kappa \kappa')^{-1} \bar{Q}$, мы достигаем полного единообразия:

$$\int_{K^+} dh' Q(h, h') \Phi_0(h') = \int_{K^+} dh' \mu(h') Q_\kappa(h, h') \Phi_0(h'). \quad (5.32)$$

Явный вид ядра $\bar{Q}$ определяется трансформационными свойствами функции κ относительно группы Вейля (ср. (5.5) и запись с помощью $\bar{Q}$ (5.13); см. также п. 9.6).

5.4. Модель с грассмановыми переменными.

Выясним, как меняется континуальный интеграл при включении калибровочной группы в моделях с грассмановыми переменными.

По определению матричный элемент оператора эволюции есть

$$\langle \varphi | e^{-i\hat{H}t} | \chi \rangle = \int d\theta d\theta' \langle \varphi | \theta \rangle \langle \theta | e^{-i\hat{H}t} | \theta' \rangle \langle \theta' | \chi \rangle \quad (5.33)$$

(см. п. 9.4; переменную ξ^* мы обозначили θ и оперируем с ней как с вещественной), причем

$$U_t(\theta, \theta') = \langle \theta | e^{-i\hat{H}t} | \theta' \rangle = \sum_E \langle \theta | E \rangle e^{-iEt} \langle E | \theta' \rangle; \quad (5.34)$$

в (5.34) суммируется по спектру гамильтониана. Найдем ядро $U_t^c(0, \theta')$ для модели п. 4.1 ($\theta = (\theta_1, \theta_2)$; см. п. 4.1). Спектр гамильтониана (4.4) при условии (4.12) состоит из двух точек; 0, 2ω (энергию отсчитываем от энергии «вакуума»: $E \rightarrow E - E_0$):

$$U_t^c(\theta, \theta') = \langle \theta | 0 \rangle \langle 0 | \theta' \rangle + e^{-2i\omega t} \langle \theta | 2\omega \rangle \langle 2\omega | \theta' \rangle. \quad (5.35)$$

Выберем представление, введенное в п. 9.4: $|\chi\rangle \rightarrow \langle \theta | \chi \rangle$; $\hat{\psi}_\alpha^+ \rightarrow \theta_\alpha$, $\hat{\psi}_\alpha \rightarrow \partial/\partial\theta_\alpha$. Тогда, согласно п. 9.4 (см. (9.17)) $\langle \theta | 0 \rangle = 1$, $\langle \theta | \omega \rangle_1 = \theta_1$, $\langle \theta | \omega \rangle_2 = \theta_2$, $\langle \theta | 2\omega \rangle = \theta_1\theta_2$ и, в соответствии с (9.17б), (9.19),

$$\langle 0 | \theta \rangle = \theta_1\theta_2, \quad \langle \omega | \theta \rangle_1 = \theta_2, \quad \langle \omega | \theta \rangle_2 = \theta_1, \quad \langle 2\omega | \theta \rangle = 1.$$

В результате имеем

$$U_t^c(\theta, \theta') = \theta_1'\theta_2' + e^{-i2\omega t}\theta_1\theta_2. \quad (5.36)$$

Для модели без калибровочной симметрии (т. е. без условия (4.12)) в правую часть (5.36) добавились бы члены

$$e^{-i\omega t}(\langle \theta | \omega \rangle_1 \langle \omega | \theta' \rangle_1 + \langle \theta | \omega \rangle_2 \langle \omega | \theta' \rangle_2),$$

т. е. мы имели бы

$$U_t(\theta, \theta') = \theta_1'\theta_2' + e^{-i\omega t}(\theta_2\theta_1' - \theta_1\theta_2') + e^{-2i\omega t}\theta_1\theta_2. \quad (5.37)$$

Оказывается, что, как и в п. 5.1, ядра U_t и U_t^c связаны формулой

$$U_t^c(\theta, \theta') = \int d\theta_2'' d\theta_1'' U_t(\theta, \theta'') Q(\theta'', \theta'), \quad (5.38)$$

где

$$Q(\theta, \theta') = \frac{1}{2}(\delta(\theta - \theta') + \delta(\theta + \theta')), \quad (5.39)$$

причем $\delta(\theta) = \theta_1\theta_2$, т. е. $Q(\theta, \theta') = \theta_1\theta_2 + \theta_1'\theta_2'$ (о δ -функциях от грассмановых переменных см. [53—56]). Справедливость рецепта (5.38), (5.39) устанавливается непосредственно, например,

$$\int d\theta_2'' d\theta_1'' e^{-i\omega t}(\theta_2\theta_1'' - \theta_1\theta_2'')(\theta_1''\theta_2'' + \theta_1'\theta_2') = 0.$$

Отметим появление множителя $1/2$ в (5.39) по сравнению с аналогичной формулой для обычных переменных (5.5), где его отсутствие связано с переходом к интегрированию по полуоси. Для грассмановых переменных понятия «полуоси», очевидно, не существует; это и объясняет появление «половинки» в (5.39).

Легко проверить, что ядро (5.36) обладает необходимым свойством

$$\int d^2\theta'' U_t^c(\theta, \theta'') U_{t'}^c(\theta'', \theta') = U_{t+t'}^c(\theta, \theta'). \quad (5.40)$$

Формулы (5.37)–(5.39) по существу решают задачу, поскольку континуальный интеграл для U_t строится стандартно.

Приведем выражение ГКИ в голоморфном представлении. Голоморфное представление для фермионов введено в п. 9.4 (см. (9.13)). Физические состояния в этом представлении, подчиняющиеся условию (4.12), есть $\langle \Psi^* | 0 \rangle = 1$, $\langle \Psi^* | 2\omega \rangle = \psi_1^* \psi_2^*$. Повторяя рассуждения, приведшие к формулам (5.37)–(5.39), найдем

$$U_t^c(\Psi^*, \Psi) = \int \prod_{\alpha=1}^2 (d\tilde{\Psi}_\alpha^* d\tilde{\Psi}_\alpha) \exp(-\tilde{\Psi}^* \tilde{\Psi}) U_t(\Psi^*, \tilde{\Psi}) Q(\tilde{\Psi}^*, \Psi), \quad (5.41)$$

где

$$Q(\Psi^*, \Psi) = \frac{1}{2} (e^{\Psi^* \Psi} + e^{-\Psi^* \Psi}) = \text{ch } \Psi^* \Psi, \quad (5.42)$$

а $U_t(\Psi^*, \Psi)$ — ядро оператора эволюции без учета калибровочной симметрии, для которого справедливо стандартное представление ГКИ

$$U_t(\Psi^*(t), \Psi(0)) = \int \prod_{\tau=0}^t (d\Psi^*(\tau) d\Psi(\tau)) \exp\left(\frac{1}{2}\phi\right) \times \\ \times \exp\left\{i \int_0^t d\tau \left[\frac{1}{2i}(\Psi^* \Psi - \Psi^* \Psi) - V(\Psi^* \Psi)\right]\right\}, \quad (5.43)$$

в котором $\phi = \Psi^*(t) \Psi(t) + \Psi^*(0) \Psi(0)$. Ядро Q в голоморфном представлении для бозевских переменных найдено в п. 9.8.

В соответствии с правилом (9.16) ядра операторов (5.34) и (5.43) связаны следующим соотношением

$$U_t(\theta, \theta') = P \int \exp(-\Psi'^* \Psi') U_t(\Psi^*, \Psi') d\psi_1' d\psi_2' \Big|_{\substack{\Psi'^* \equiv \theta' \\ \Psi^* \equiv \theta}}, \quad (5.44)$$

которое справедливо также и для других операторов (например, для $\bar{Q}$).

5.5. Гамильтонов континуальный интеграл в произвольной калибровке (калибровочная группа $SO(2)$) [39]. В п. 2.3 было показано, что дискретная калибровочная группа, действующая в ФП физических степеней свободы, может иметь довольно сложную структуру при неудачном выборе калибровки (физических переменных). В реалистических теориях калибровку обычно фиксируют, сообразуясь не со структурой орбит калибровочной группы, а с другими требованиями, например, с требованием лоренц-ковариантности, что порождает известную проблему неоднозначности [11, 41].

Покажем, как выглядит ГКИ при произвольном выборе физических переменных. Мы дадим решение этой задачи для не слишком сложных, но достаточно представительных калибровочных условий на примере п. 2.3. Обобщение рецепта на произвольную группу рассмотрено в следующем пункте.

Ядро единичного оператора $\langle u | u' \rangle_{ph}$ в квантовой теории, заданной уравнением Шредингера (2.27) и скалярным произведением (2.28), определено при $u, u' \in K$. Однако, благодаря свойству S -инвариантности (2.30) физических волновых функций это ядро допускает аналитическое продолжение в нефизическую область $u \in \mathbb{R}$ (в полной аналогии с (5.5), (5.6)

и (5.13) или (5.27)):

$$\langle u | u' \rangle_{\text{ph}} = \sum_E \Phi_E(u) \Phi_E^*(u') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du''}{(\mu(u)\mu(u''))^{1/2}} \delta(u - u'') Q(u'', u'), \quad (5.45)$$

где $u, u' \in \mathbb{R}$, $u' \in K$ и

$$Q(u, u') = \sum_s \delta(u - u'_s). \quad (5.46)$$

Функции $u'_s \equiv u'_s(u')$ определены в п. 2.3.2.

Применим стандартную процедуру вывода ГКИ для инфинитезимального оператора эволюции. В нашем случае соответствующие формулы выглядят так:

$$U_\varepsilon^{\text{ph}}(u, u') = \langle u | e^{-i\hat{H}\varepsilon} | u' \rangle_{\text{ph}} = (1 - i\varepsilon \hat{H}(u)) \langle u | u' \rangle_{\text{ph}} + O(\varepsilon^2), \quad (5.47)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, гамильтониан $\hat{H}(u)$ задан в (2.27). Подставим в (5.47) выражение (5.45), заменив в нем δ -функцию интегралом $(2\pi)^{-1} \int dp \exp[ip(u - u'')]$. При расписывании (5.47) нужно учесть порядок следования операторов в $H(u)$ [17, 39]. С этой целью перепишем гамильтониан в (2.27) через эрмитовы операторы импульса $\hat{p}_u = -i\mu^{-1/2}\partial_u \circ \mu^{1/2}$ [17, 39], а затем выполним дифференцирование в (5.47). В полученном выражении можно заменить $u - u''$ на $\dot{u}''\varepsilon$. В результате с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ имеем

$$U_\varepsilon^{\text{ph}}(u, u') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du''}{(\mu(u)\mu(u''))^{1/2}} U_\varepsilon^{\text{eff}}(u, u'') Q(u'', u'), \quad (5.48)$$

где

$$U_\varepsilon^{\text{eff}}(u, u'') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp[i\varepsilon(p\dot{u}'' - H^{\text{eff}}(u, p))]. \quad (5.49)$$

Эффективный гамильтониан H^{eff} получается из гамильтониана в (2.27) заменой всех производных $-i\partial_u$ на p и добавлением слагаемых, учитывающих порядок следования операторов. В итоге V заменяется на $V + V_q$, где [39]

$$V_q = \frac{i}{2} p (\partial_u \gamma) + \frac{1}{2\mu^{-1/2}} \partial_u (\gamma \partial_u \mu^{1/2}). \quad (5.50)$$

Здесь $\gamma = r^2(u)/\mu^2(u)$.

Если в (2.27) $f_1 = u$, $f_2 = 0$, то $V_q = -(8r^2)^{-1}$, где u совпадает с $r = |x|$ в полярной системе координат.

При построении ГКИ вместо ядер (5.48) можно использовать ядра (5.49). Ввиду инвариантности уравнения (2.27) относительно группы S можно, как и в п. 5.1, доказать [39], что $U_\varepsilon^{\text{ph}} U_\varepsilon^{\text{ph}} = U_\varepsilon^{\text{eff}} \hat{Q} U_\varepsilon^{\text{eff}} \hat{Q} = U_\varepsilon^{\text{eff}} U_\varepsilon^{\text{eff}} \hat{Q} = U_{2\varepsilon}^{\text{eff}} \hat{Q}$, причем

$$U_{2\varepsilon}^{\text{eff}}(u, u') = \int_{-\infty}^{\infty} du'' U_\varepsilon^{\text{eff}}(u, u'') U_\varepsilon^{\text{eff}}(u'', u') \quad (5.51)$$

(ср. (5.8)–(5.10)). Композиция ядер U_ε^{p} определена в соответствии со скалярным произведением (2.28). В результате получаем, что формула

(5.48) справедлива для конечного промежутка времени t с ядром $U_t^{\text{eff}}(u, u')$, заданным стандартным ГКИ

$$U_t^{\text{eff}}(u, u') = \int \prod_{\tau=0}^t \left(\frac{dp(\tau) du(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left[i \int_0^t d\tau (p\dot{u} - H^{\text{eff}}(p, u)) \right], \quad (5.52)$$

где $u(0) = u'$, $u(t) = u$.

Из (5.48), (5.51) и (5.52) следует, что учет так называемых «копий», т. е. калибровочно-эквивалентных точек на оси $u \in \mathbb{R}$, сводится не к редукции области интегрирования в функциональном интеграле [11], а к симметризации ядра $U_t^{\text{eff}}(u, u')$, определяемого ГКИ с обычной мерой, по остаточной калибровочной группе S в точке u' или u .

В заключение отметим, что в соответствии с выводами п. 2.3.2 учет криволинейности физических переменных и редукции их ФП гарантирует явную калибровочную инвариантность всех физических амплитуд (независимость их от f_i). Амплитуда $U_i^{\text{ph}}(u, u')$ не составляет исключения. Действительно, представим ее в виде спектральной суммы по ортонормированным решениям уравнения (2.27). Тогда согласно (2.29) заключаем, что $U_i^{\text{ph}}(u, u')$ является аналитической функцией двух переменных $f_i^2(u) = x^2$ и $f_i^2(u') = x'^2$, т. е. она явно калибровочно-инвариантна.

5.6. Оператор $\hat{Q}$ и гамильтонов континуальный интеграл в произвольной калибровке (произвольная калибровочная группа). Редукция ФП физических переменных учитывается в ГКИ оператором $\hat{Q}$, который симметризует ядро оператора эволюции по остаточной дискретной калибровочной группе. Явный вид $\hat{Q}$, вообще говоря, зависит от способа выбора физических переменных (см. п. 5.5). С другой стороны, на примере простой модели в п. 2.3.2 было показано, что амплитуды (скалярные произведения) не зависят от выбора физических переменных, поскольку векторы физических состояний суть функции инвариантов исходных переменных.

Ниже мы покажем, что оператор $\hat{Q}$ не зависит от динамики системы и полностью определяется калибровочной группой, ее представлением и выбором физических переменных. Используя это свойство $\hat{Q}$, мы дадим рецепт построения ГКИ при произвольном выборе физических переменных, согласующийся со схемой квантования Дирака (с учетом криволинейности физических переменных и структуры их ФП) [39, 42].

Рассмотрим квантовую теорию, задаваемую уравнением Шрёдингера

$$\left(-\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + V(x) \right) \psi_E = E \psi_E \quad (5.53)$$

и нормировочным условием

$$\int d^N x \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta_{EE'}, \quad (5.54)$$

Здесь x реализует некоторое линейное представление компактной группы G ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

— инвариантное скалярное произведение в пространстве представления, где x_i, y_i вещественные, т. е. интегрирование в (5.54) ведется по $\mathbb{R}^N$, V — G -инвариантный потенциал.

Квантовая теория с калибровочной симметрией получается из (5.53), (5.54) требованием [29], чтобы $\hat{\sigma}_a \Phi(x) = 0$ (аналогично (3.6)); эти условия выделяют физическое подпространство состояний $\mathcal{H}_{\text{ph}}$. Операторы $\hat{\sigma}_a$ генерируют калибровочные преобразования из группы G : $\exp(\omega_a \hat{\sigma}_a) \psi(x) = \psi(T(\omega)x)$, где $T(\omega)$ — элемент представления группы G . Ввиду $\hat{\sigma}_a \Phi = 0$ имеем:

$$\Phi(T(\omega)x) = \Phi(x), \quad (5.55)$$

т. е. $\Phi(x)$ есть калибровочные инварианты. Соотношения (5.53)—(5.55) задают квантовую калибровочную теорию в полном конфигурационном пространстве.

Операция усреднения по группе

$$\bar{P}_G \psi(x) = \frac{1}{V_G} \int_G dg(\omega) \psi(T(\omega)x), \quad (5.56)$$

где V_G — объем группового пространства, $dg(\omega)$ — инвариантная мера на G , $\bar{P}_G$ — проектор на $\mathcal{H}_{\text{ph}}$. Рассмотрим теперь ядро единичного оператора в полном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\langle x | x' \rangle = \sum_E \Phi_E(x) \Phi_E^*(x') + \sum_{\tilde{E}} \psi_{\tilde{E}}(x) \psi_{\tilde{E}}^*(x') = \delta^N(x - x'), \quad (5.57)$$

где Φ_E и $\psi_{\tilde{E}}$ образуют базисы физического $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ и нефизического $\mathcal{H}_{\text{nph}} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{\text{ph}}$ подпространств соответственно ⁽¹²⁾ ●. Первое слагаемое в (5.57) — ядро единичного оператора в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$. Поскольку $\bar{P}_G$ есть проектор на $\mathcal{H}_{\text{ph}}$, то, действуя им на равенство (5.57), получаем ядро единичного оператора в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$

$$\langle x | x' \rangle_{\text{ph}} = \langle x | \bar{P}_G | x' \rangle = V_G^{-1} \int_G dg(\omega) \delta^N(x - T(\omega)x'). \quad (5.58)$$

Ядро (5.58) явно калибровочно-инвариантно.

Формула (5.58) позволяет записать калибровочно-инвариантное ядро оператора эволюции, не прибегая к явному выделению физических переменных. Ядро оператора эволюции для задачи (5.53), (5.54), представляется интегралом

$$U_t(x, x') = \int \prod_{\tau=0}^t \left(\frac{d^N p(\tau) d^N x(\tau)}{(2\pi)^N} \right) \exp \left[i \int_0^t d\tau \left(\langle p, \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \langle p, p \rangle - V(x) \right) \right], \quad (5.59)$$

где $x(0) = x'$, $x(t) = x$. С другой стороны, по определению имеем

$$U_t(x, x') = \sum_E \Phi_E(x) \Phi_E^*(x') e^{-iEt} + \sum_{\tilde{E}} \psi_{\tilde{E}}(x) \psi_{\tilde{E}}^*(x') e^{-i\tilde{E}t}, \quad (5.60)$$

где первая сумма есть ядро оператора эволюции $U_t^{\text{ph}}(x, x')$ в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$. В силу проекционных свойств оператора $\bar{P}_G$ получаем

$$U_t^{\text{ph}}(x, x') = \int d^N x'' U_t(x, x'') \langle x'' | \bar{P}_G | x' \rangle. \quad (5.61)$$

Аналогичные формулы получены в п. 9.8 для голоморфного представления, там же явно вычислены ядра (5.58) для моделей из пп. 2.2, 3.1 и 7.1 (см. также [39, 42, 57]).

Формула (5.58) показывает, что ядро $\langle x | x' \rangle_{\text{ph}}$ имеет универсальную структуру, т. е. зависит только от группы G и ее представления. Установим связь (5.58) с оператором $\bar{Q}$. Для этого нужно задать физические переменные и перейти от описания в полном конфигурационном пространстве к описанию в его физическом подпространстве. Пусть число физических переменных M , тогда число независимых связей $N - M$. Введем криволинейные координаты

$$x = T(\theta) \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \tilde{x}(u), \quad (5.62)$$

причем компоненты $\tilde{x}$ тождественно удовлетворяют дополнительным $N - M$ условиям $\chi_a(\tilde{x}) = 0$, т. е. все N компонент элемента $\tilde{x}$ являются функциями $u \in \mathbb{R}^M$ такими, что $\chi_a(x(\tilde{u})) \equiv 0$ (аналогично (2.23)). Дополнительные условия χ_a следует выбирать так, чтобы равенство (5.62) задавало отображение $(\theta, u) \in \mathbb{R}^{N-M} \otimes \mathbb{R}^M \rightarrow x \in \mathbb{R}^N$ (см. п. 2.3.2 о допустимости калибровочного условия). Тогда в $\mathbb{R}^N$ существует область $\tilde{K}$ такая, что отображение (5.62) $(\theta, u) \in \tilde{K} \rightarrow x \in \mathbb{R}^N$ определяет замену переменных. В новых переменных физические волновые функции $\tilde{\Phi}(x(u, \theta)) = \Phi(u, \theta) = \Phi(u)$ не зависят от θ , так как $\hat{\sigma}_a$ — генераторы трансляций в.

Базис $\Phi_E(u)$ в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ строится из решений уравнения (5.53) в криволинейных координатах (5.62). Так как (5.62) есть замена переменных, то состояния из $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ нормированы согласно (5.54) с мерой

$$\int d^N x = |V_G V_H^{-1}| \int_K d^M u \mu(u),$$

где V_G — объем группового пространства, V_H — объем группового пространства стационарной подгруппы H элемента $\tilde{x}$ (фактически $V_G V_H^{-1} \mu(u)$ есть объем орбиты G для элемента $\tilde{x}$ [58]). Такое представление следует из очевидного соотношения $\tilde{K} = G/H \cup K$, где $\theta \in G/H$, $u \in K$. Если замена (5.62) такова, что $H = 1$, то $V_H = 1$.

Чтобы определить K , изучим группу симметрии отображения (5.62) $\tilde{S} = S_\theta \times S$, где S_θ состоит из сдвигов θ на величины, кратные периодам компактного многообразия G/H , и не меняет u . Группа S состоит из преобразований $\theta \rightarrow \theta'_s$, $u \rightarrow u_s$ таких, что x в (5.62) не изменяется. Тогда аналогично (2.24) имеем $T(\theta'_s) = T(\theta) T^{-1}(\theta_s)$, где преобразование $T(\theta_s)$ должно удовлетворять условию $\chi_a(\tilde{x}) = \chi_a(T(\theta_s) \tilde{x}) = 0$, т. е. оно не нарушает дополнительных условий $\chi_a = 0$. Следовательно, такие преобразования $\tilde{x}$ индуцируют преобразования $u \rightarrow u_s$: $T(\theta_s) \tilde{x}(u) = \tilde{x}(u_s)$, $u_s = u_s(u)$, $u \in \mathbb{R}^M$. Они образуют группу, изоморфную группе перестановок точек u_s в $\mathbb{R}^M$. По определению группы $\tilde{S}$ имеем равенство $\tilde{K} = \mathbb{R}^N / \tilde{S} = \mathbb{R}^{N-M} / S_\theta \cup \mathbb{R}^M / S = G/H \cup K$, т. е. K есть фундаментальная область в $\mathbb{R}^M(u)$ относительно действия группы S : $u \rightarrow u_s(u)$ ($u_s: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$).

Напомним также, что группа S может зависеть от точки u , т. е. при различных u иметь различное число элементов. В этом случае $\mathbb{R}^M(u)$ следует разбить на $\mathbb{R}_\alpha^M$ так, что при $u \in \mathbb{R}_\alpha^M$ число элементов $S(u) = S_{\alpha(u)}$ фиксировано, т. е. $S = \prod_\alpha S_\alpha$ и $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$, где $K_\alpha = \mathbb{R}_\alpha^M / S_\alpha$.

Итак, скалярное произведение в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ дается формулой (2.28), в которой $du \rightarrow d^M u$ и множитель $V_G V_H^{-1}$ включен в нормировку $\Phi_E(u)$. Если $\psi_E(x)$ — базис в $\mathcal{H}$, то базис $\Phi_E(u)$ в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ можно определить как инду-

цированный, используя проекционную формулу (5.56) и разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ph}} \oplus \mathcal{H}_{\text{nph}}$, т. е.

$$\Phi_E(u) = \hat{P}_G \Psi_E(x) = \hat{P}_G \Psi_E(T(\theta) \tilde{x}(u)) = \hat{P}_G \Psi_E(\tilde{x}(u)). \quad (5.63)$$

Последнее равенство (5.63) вытекает из свойства инвариантности меры $dg(\omega)$ в (5.56). Благодаря инвариантности меры $dg(\omega)$ и определению $\tilde{x}(u_s) = T(\theta_s) \tilde{x}(u)$ из (5.63) следует S -инвариантность физических состояний $\Phi_E(u_s) = \Phi_E(u)$, т. е. равенство (2.30) справедливо в общем случае; оно позволяет определить аналитическое продолжение ядра единичного оператора $\langle u | u' \rangle_{\text{ph}}$ в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ в нефизическую область $u \in \mathbb{R}^M$ аналогично (5.45), где du'' и $\delta(u - u'')$ следует заменить соответственно на $d^M u''$ и $\delta^M(u - u'')$. Оператор $\bar{Q}$ также имеет вид (5.46). Если мера $\mu(u) = \kappa^2(u)$, где $\kappa(u)$ — вещественно-аналитическая функция в $\mathbb{R}^M$, то в (5.45) $(\mu\mu'')^{1/2} \rightarrow (\kappa\kappa'')$ (пример подобной теории представлен в п. 5.3). Используя метод п. 5.5, можно построить ГКИ в физическом ФП. Гамильтониан $\hat{H}(u)$ в (5.47) вычисляется переходом в (5.53) к криволинейным координатам (5.62) и отбрасыванием членов, содержащих производные $\partial/\partial\theta_a$ ($\Phi(u, \theta) = \Phi(u)$). Полученный ГКИ имеет вид (5.52). Эффективная квантовая добавка V_q к потенциалу будет иметь более сложный вид, нежели (5.50) [39]. Усложнение связано с тем, что в общем случае система содержит несколько физических степеней свободы. Однако метод вычисления V_q не изменяется.

Ядро оператора $\bar{Q}$ можно также определить из проекционной формулы (5.58), подставив вместо x и x' соответственно $T(\theta) \tilde{x}(u)$ и $T(\theta') \tilde{x}(u')$ и выполнив интегрирование по группе. В результате

$$\langle u | u' \rangle_{\text{ph}} = V_H^{-1} \int_G dg(\omega) \delta^N(\tilde{x}(u) - T(\omega) \tilde{x}(u')); \quad (5.64)$$

ввиду инвариантности меры $dg(\omega)$ зависимость от θ и θ' устраняется групповым сдвигом. Множитель V_H^{-1} в (5.64) связан с различием нормировок ядер (5.58) и (5.64). Ядро (5.64) нормировано в физическом конфигурационном пространстве с мерой

$$\int_K d^M u \mu(u)$$

подобно (2.28). Поэтому оно получается из ядра (5.58) умножением последнего на объем нефизического конфигурационного пространства $V_G V_H^{-1}$. Сопоставляя (5.45) (определение оператора $\bar{Q}$) и (5.64), находим универсальное выражение для ядра оператора $\bar{Q}$, пригодного для любой группы и любой (в пределах разумного) калибровки

$$Q(u, u') = \frac{|\mu(u)|}{V_H} \int_G dg(\omega) \delta^N(\tilde{x}(u) - T(\omega) \tilde{x}(u')), \quad (5.65)$$

где $u \in \mathbb{R}^M$, $u' \in K$. Отметим, что вычисление интеграла в (5.65) автоматически воспроизводит сумму (5.46), т. е. определяет группу S .

Формула (5.65) показывает, что оператор $\bar{Q}$ не зависит от динамики калибровочной системы, а полностью определяется калибровочной группой, ее представлением и выбором физических переменных.

Каков же итог? Мы констатируем, что при неудачном выборе калибровки корректное описание системы в рамках ГКИ может оказаться задачей неимоверной сложности. Как известно, инвариантные калибровки типа калибровки Ферми не адекватны физике системы в теории полей

Янга — Миллса (в силу их неоднозначности [11, 41]), поэтому задача корректного неконструктивного формулирования этой теории с помощью явно лоренц-инвариантных континуальных интегралов является, по-видимому, безнадежной.

6. Редукция фазового пространства и квазиклассическое описание. Формализм интегрирования по путям позволяет естественным образом определить квазиклассическую амплитуду перехода. Задача сводится к вычислению континуального интеграла методом стационарной фазы в окрестности классической траектории.

В п. 2.2.1, 3.2.2, 5.1 мы видели, что классическая траектория чувствительна к структуре ФП, поэтому можно ожидать, что квазиклассическое описание будет зависеть от структуры ФП.

Обычно в квазиклассическом подходе различают две задачи [27]: определение спектра системы путем использования периодических классических решений (ВКБ-квантование) и описание эффектов туннелирования с помощью решений евклидовых уравнений движения (классические траектории во мнимом времени — инстантоны). Мы рассмотрим эти вопросы для систем с $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$. Более сложные системы обсуждаются в [15, 20, 22].

6.1. Метод ВКБ. Пусть потенциал системы V таков, что существует периодическое решение классических уравнений движения. Очевидно, период $T = T(E)$ есть функция энергии системы E .

Согласно правилу квантования Бора — Зоммерфельда, квантовые уровни энергии можно определить, решая уравнение

$$W(E) \equiv \oint p \, dq = \int_0^T p \dot{q} \, dt = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.1)$$

относительно E . Интеграл в (6.1) берется вдоль классической траектории.

Что изменится, если $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$? Легко видеть, что период колебаний системы T^c с $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$ вдвое меньше периода системы с $\Phi\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$ и с той же энергией E :

$$T^c(E) = \frac{1}{2} T(E). \quad (6.2)$$

Причина проста. Поскольку потенциал-четная функция $V(q) = V(-q)$ (следствие $\mathbb{Z}_2$ -инвариантности (см. п. 2.1)), время нахождения частицы в области $q < 0$ равно времени нахождения ее в области $q > 0$. Ввиду коничности ФП движение с $q < 0$ неотличимо от такового с $q > 0$. Отсюда сразу же следует уменьшение физического периода вдвое, и, следовательно, для $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$ имеем

$$W^c(E) = \int_0^{T/2} p \dot{q} \, dt = \frac{1}{2} W(E). \quad (6.3)$$

Из условия квантования $W^c(E) = 2\pi(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$, вытекает, что квазиклассический спектр системы с $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$ содержит уровней вдвое меньше, чем спектр системы с $\Phi\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$. Физические уровни энергии в (6.1) отвечают только четным n .

В случае систем с несколькими физическими степенями свободы трудности учета редукции ФП в методе ВКБ связаны с выделением незави-

симых мод колебаний. Как было показано в п. 3.2.2, это далеко не простая задача. Существо дела, однако, не меняется, усложняются лишь технические детали. Например, в [15, 22] найден спектр внутренних возбуждений квантового солитона, ФП которого есть $\cos(\pi)$. Результат согласуется с (6.3).

6.2. К в а н т о в о м е х а н и ч е с к и е и н с т а н т о н ы . Мы рассмотрим простейший пример влияния редукции ФП на инстантонные вычисления. Напомним, что инстантоны используют в квантовой теории для вычисления туннельных эффектов [26, 27, 58]. Например, пусть имеется одномерная квантовая система с периодическим потенциалом [27]. Тогда основное состояние в окрестности каждого локального минимума потенциала оказывается вырожденным. Вырождение снимается вследствие туннельных эффектов, причем основное состояние превращается в зону. Оказывается, что знание решений евклидовых уравнений движения (уравнения движения с мнимым временем $t \rightarrow -i\tau$), позволяет вычислить уровни энергии в зоне и приближенно найти соответствующие волновые функции (θ -вакуумы).

Возьмем модель из раздела 3 с группой $SO(3) \sim SU(2)$ и периодическим потенциалом $V(x^2) = 1 - \cos(x^2)^{1/2}$. Аналогичная одномерная модель многократно изучалась (см. [27] и цитированную там литературу), т. е. с ФП $= \mathbb{R}^2$. В нашем случае ФП единственной физической переменной $r = (x^2)^{1/2}$ есть $\cos(\pi)$.

Рассмотрим евклидов вариант теории: $t \rightarrow -i\tau$, $y \rightarrow iy$ в (3.1), тогда $L \rightarrow L_E = (1/2)(D_\tau x)^2 + V(x^2)$. Решения классических уравнений движения

$$\partial_\tau \frac{\partial L_E}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial L_E}{\partial x}, \quad \dot{x} = \partial_\tau x, \quad (6.4)$$

возьмем в виде [15, 22] $x_{\text{inst}}(\tau) = r_{\text{inst}}(\tau) \lambda_1$, где

$$r_{\text{inst}}(\tau) = 4 \arctg \exp(\tau - \tau_c) + 2\pi m. \quad (6.5)$$

Здесь m — целое число, $y(\tau) \in H$ и λ_1 — (единственный) базисный элемент в H , $\tau_c = \text{const}$. Решение (6.5) определено с точностью до калибровочного преобразования (3.2). Оно связывает локальные минимумы потенциала: $x_{\text{inst}}^2 \rightarrow (2\pi m)^2$, $\tau \rightarrow \infty$ и $\rightarrow (2\pi(m-1))^2$, $\tau \rightarrow -\infty$.

Отметим, что, полагая в (6.4) $x = \lambda_1 r \in H$ и $y = 0$, мы получим уравнение для r , которое идентично уравнению движения для аналогичной системы с ФП $= \mathbb{R}^2$; его решение дается (6.5). Для одномерной модели с плоским ФП схема вычислений такова [27]. Методом перевала вычисляют амплитуду перехода $U_\tau(2\pi m, 2\pi m')$ между двумя локальными минимумами потенциала, причем стационарной точкой служит инстантонное решение ⁽¹³⁾ $\bullet$. В пределе $\tau \rightarrow \infty$ основной вклад в эту амплитуду дают состояния из нижней зоны (состояния с более высокой энергией дают экспоненциально малый вклад):

$$\begin{aligned} U_\tau(2\pi m, 2\pi m') &\equiv \langle 2\pi m | \exp(-\tau \hat{H}) | 2\pi m' \rangle \approx \\ &\approx \int_0^{2\pi} d\theta \langle 2\pi m | \theta \rangle \langle \theta | 2\pi m' \rangle \exp(-\tau E_\theta), \quad \tau \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где параметр θ нумерует уровни энергии E_θ в нижней зоне. Амплитуда $\langle 2\pi m | \theta \rangle$ получается вычислением функционального интеграла методом перевала. Соответствующие вычисления подробно проделаны в [27];

найдено

$$U_{\tau}(2\pi m, 2\pi m') = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi^{3/2}} e^{-i(m-m')\theta} e^{-\tau E_{\theta}}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{2} - e^{-S_0} S_0^{1/2} K \cos \theta, \quad (6.7)$$

где S_0 — действие на решении (6.5), K — некоторое число, не зависящее от θ (инстантонный детерминант [27]). Величина $\langle 2\pi m | \theta \rangle \sim \exp(-im\theta)$ дает значение волновой функции θ -вакуума $\langle r | \theta \rangle$ в окрестности локального минимума потенциала $r = 2\pi m$, поэтому приближенное выражение для $\langle r | \theta \rangle$ имеет вид [27]

$$\langle r | \theta \rangle = \text{const} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \langle r | 2\pi m \rangle, \quad (6.8)$$

где $\langle r | 2\pi m \rangle \sim \exp[-(1/2)(r - 2\pi m)^2]$ — волновая функция основного состояния в окрестности каждого локального минимума потенциала.

Как модифицируются вычисления, если $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$? Очевидно, что теперь вместо амплитуды $U_{\tau}(2\pi m, 2\pi m')$ нужно взять амплитуду $U_{\tau}^c(2\pi m, 2\pi m')$. Связь между этими амплитудами задана формулой (5.13) с заменой $t \rightarrow -i\tau$, согласно которой получаем

$$U_{\tau}^c(2\pi m, 2\pi m') = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi^{3/2}} \frac{\sin m\theta \cdot \sin m'\theta}{(2\pi)^2 m m'} e^{-\tau E_{\theta}}. \quad (6.9)$$

Следовательно, энергия уровней в нижней зоне не меняется при редукции $\Phi\mathbb{P}$. Однако вид коэффициентов $\langle 2\pi m | \theta \rangle$ изменился, поэтому меняется и вид волновой функции (6.8) θ -вакуума:

$$\langle r | \theta \rangle^c = \text{const} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\theta}{2\pi m} \langle r | 2\pi m \rangle. \quad (6.10)$$

Ввиду очевидного равенства $\langle -r | 2\pi m \rangle = \langle r | -2\pi m \rangle$ функция (6.10) в отличие от (6.8) четна $\langle -r | \theta \rangle^c = \langle r | \theta \rangle^c$, т. е. $\mathbb{Z}_2$ — инвариантна. Отметим также, что (6.10) нормируется согласно (5.20), а (6.8) — как в одномерной теории с $\Phi\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$.

Независимость уровней E_{θ} от структуры $\Phi\mathbb{P}$, вообще говоря, имеет место только для непрерывного спектра. Здесь уместна аналогия со случаем свободной частицы. Редукция $\Phi\mathbb{P} \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{con}(\pi)$ не меняет спектра системы. Напротив, дискретный спектр (например, осцилляторный) чувствителен к редукции. Это справедливо и для инстантонов, в чем легко убедиться, рассмотрев модель с потенциалом $V = (x^2 - a^2)^2/4!$ и калибровочной группой $\text{SO}(3) \sim \text{SU}(2)$ (одномерный аналог рассмотрен в [26]). В данной модели вакуум двукратно вырожден: $x = r\lambda_1 \in H$ и $r = \pm a$. Зона содержит два уровня, причем нижнему отвечает нечетная волновая функция, а верхнему — четная ⁽¹⁴⁾ ●. Учет структуры $\Phi\mathbb{P}$ ($\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\pi)$) исключает вклад $\mathbb{Z}_2$ -нечетного состояния.

7. Более сложные механические системы. Особенности динамики. До сих пор мы рассматривали системы, в которых все физические переменные имели редуцированное $\Phi\mathbb{P}$. Увеличение числа степеней свободы при сохранении числа калибровочных параметров приводит к новому типу

моделей, в которых, казалось бы, одни физические переменные должны иметь плоское ФП, а другие — редуцированное. Ситуация, однако, оказывается более сложной. Калибровочная группа порождает специфическую взаимосвязь между физическими степенями свободы, имеющую чисто кинематический характер и препятствующую столь простой интерпретации строения ФП [39].

7.1. Две частицы в двумерном пространстве. Рассмотрим систему из двух частиц в двумерном пространстве. Если взять в качестве лагранжиана сумму лагранжианов вида (2.1)

$$L' = \frac{1}{2} [(\partial_t - y_1 T) \mathbf{x}_1]^2 + \frac{1}{2} [(\partial_t - y_2 T) \mathbf{x}_2]^2 - V_1(\mathbf{x}_1) - V_2(\mathbf{x}_2), \quad (7.1)$$

где y_1, y_2 меняются при калибровочных преобразованиях независимо, то несложный анализ свидетельствует, что ФП каждой из частиц конус $\text{con}(\pi)$, а энергия системы есть сумма энергий каждой из подсистем. Сузим калибровочную группу лагранжиана (7.1) $SO(2) \times SO(2)$ до $SO(2)$, отождествив $y_1 \equiv y_2 = y$, т. е. перейдем к лагранжиану [39]

$$L = \frac{1}{2} [(\partial_t - y T) \mathbf{x}_1]^2 + \frac{1}{2} [(\partial_t - y T) \mathbf{x}_2]^2 - V_1(\mathbf{x}_1) - V_2(\mathbf{x}_2), \quad (7.2)$$

инвариантному относительно калибровочных преобразований

$$\delta \mathbf{x}_i = \varepsilon T \mathbf{x}_i, \quad \delta y = \dot{\varepsilon}, \quad \delta V_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7.3)$$

Стандартный анализ показывает, что (7.2) задает систему с одной первичной и одной вторичной связями

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \sigma = \mathbf{p}_1 T \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 T \mathbf{x}_2 = 0 \quad (7.4)$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) + V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2) - y(t) \sigma \equiv H_1 + H_2, \quad (7.5)$$

где каждый из H_i идентичен (2.4). Связь σ генерирует калибровочные преобразования $\mathbf{x}_i$. Что можно сказать о физическом фазовом пространстве каждой из переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$? Если выбрать калибровку $x_i^{(2)} = 0$ ($\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$), то ввиду остающегося калибровочного произвола, связанного с дискретной группой $\mathbb{Z}_2$ (см. п. 2.1.1), казалось бы, естественно заключить, что ФП $(x_1^{(1)}) = \text{con}(\pi)$, тогда как фазовое пространство двух оставшихся физических степеней свободы — плоское: ФП $(\mathbf{x}_2) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Однако вместо $x_1^{(2)}$ мы могли бы исключить $x_2^{(2)}$ и сделать вывод о том, что ФП $(x_2^{(1)}) = \text{con}(\pi)$. Следовательно, хотя ввиду (7.5) $H = H_1 + H_2$ и $\{H_1, H_2\} = 0$, т. е., хотя системы, описываемые гамильтонианами H_i , казалось бы, динамически независимы, вопрос о структуре физического ФП каждой из них в отдельности не имеет смысла. Мы можем говорить лишь о строении ФП системы в целом. Таким образом, лагранжиан (7.2) дает еще один пример необычности свойств теорий с калибровочной симметрией: динамические характеристики двух по стандартным меркам несвязанных систем оказываются взаимозависимы, причем влияние одной независимой подсистемы на другую осуществляется через посредство «не имеющей физического смысла» степени свободы y (формально — через связь $\sigma = 0$ в (7.4)).

Перейдем к квантовому описанию [39]. Как и ранее, ограничимся случаем осцилляторных потенциалов $V_i = \omega_i^2 x_i^2/2$, $\omega_1 \neq \omega_2$. В представлении вторичного квантования оператор Гамильтона $\hat{H}$ и связь $\hat{a}$ (см. (7.4), (7.5)) записываются в виде

$$\hat{H} = \sum_{j=1,2} [\omega_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + y (\hat{a}_j^+ T \hat{a}_j) + \omega_j], \quad (7.6)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{a}_1^+ T \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ T \hat{a}_2, \quad (7.7)$$

где $\hat{a}_j = (\mathbf{p}_j - i\mathbf{x}_j)/\sqrt{2}$, $\hat{a}_j^+ = (\mathbf{p}_j + i\mathbf{x}_j)/\sqrt{2}$. Физические состояния порождаются инвариантами группы вращения, составленными из векторов $\hat{a}_1^+$, $\hat{a}_2^+$:

$$\hat{b}_1 = (\hat{a}_1^+)^2, \quad \hat{b}_2 = (\hat{a}_2^+)^2, \quad \hat{b}_3 = (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+), \quad \hat{b}_4 = \varepsilon_{ij} \hat{a}_1^{(i)+} \hat{a}_2^{(j)+}; \quad (7.8)$$

ε_{ij} — единичный антисимметричный тензор, $\varepsilon_{12} = 1$. Здесь необходимо обратить внимание на следующее. Операторы (7.8) инвариантны относительно группы 80(2). Все они, кроме $\hat{b}_4$, инвариантны относительно более широкой группы $O(2) \equiv SO(2) \times \mathbb{Z}_2$ (нетривиальный элемент $\mathbb{Z}_2$ отвечает отражению одной из осей координат; оператор $\hat{b}_4$ при этом меняет знак). Вопрос: следует ли включать в число операторов, порождающих базис гильбертова пространства, оператор $\hat{b}_4$? Другими словами, какова калибровочная группа модели (7.2), $SO(2)$ или $O(2)$? Формально вся информация о динамике и связях системы заложена в лагранжиане (7.2). Стандартный анализ [29] дает связи — генераторы калибровочной группы. Но генераторы позволяют восстановить лишь связную компоненту единицы группы [14, 44], поэтому можно говорить лишь о калибровочной группе $SO(2)$. Существование дискретной калибровочной группы для лагранжиана (7.2) установить не удастся [39]. Согласно разделу 5.1 требование подобной симметрии может формулироваться лишь в виде независимого условия, не содержащегося в лагранжиане. Другая возможность — рассматривать данную задачу как результат редукции более широкого конфигурационного пространства, а группу $O(2)$ — как подгруппу более широкой группы, например, $SO(3)$. Последняя содержит элементы, меняющие направления любой из осей плоскости. Во всяком случае, переход к дискретным калибровочным преобразованиям требует дополнительных предположений. Этой точки зрения мы и будем придерживаться, т. е. в число порождающих операторов включим $\hat{b}_4$.

Благодаря тождеству $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ оператор $\hat{b}_4^2$ выражается через остальные $\hat{b}_i$ ($i = 1, 2, 3$), поэтому базис физического пространства $\mathcal{H}_{ph} = \mathcal{H}_{ph}^0 \oplus \mathcal{H}_{ph}'$ дается векторами

$$\hat{b}_1^{n_1} \hat{b}_2^{n_2} \hat{b}_3^{n_3} |0\rangle \in \mathcal{H}_{ph}^0, \quad \hat{b}_1^{n_1} \hat{b}_2^{n_2} \hat{b}_3^{n_3} \hat{b}_4 |0\rangle \in \mathcal{H}_{ph}', \quad (7.9)$$

$$n_i = 0, 1, \dots; \quad i = 1, 2, 3,$$

а спектр энергии определяется формулой

$$E = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2 + n_3(\omega_1 + \omega_2) + n_1(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1 + \omega_2, \quad (7.10)$$

$$n_1 = 0, 1.$$

Структура спектра не дает оснований для приписывания какой-либо степени свободы определенного ФП. Например, нельзя сказать, что ФП одной

переменной есть $\text{con}(\pi)$, а остальных — плоскости. Речь может идти лишь о структуре ФП в целом.

Рассмотренный пример показывает, как наличие нефизических переменных влияет на физические: в результате меняется такая фундаментальная характеристика динамической системы, как фазовое пространство. Напротив, влияние друг на друга физических степеней свободы не столь драматично: в результате меняются лишь уравнения движения. Так, если в (7.1) добавить член $V(x_1, x_2)$, инвариантный относительно группы $SO(2) \times SO(2)$, то ФП каждой из подсистем x_1, x_2 остается прежним, хотя они и будут оказывать друг на друга силовое воздействие.

Какова же роль остаточной дискретной калибровочной группы (или соответствующей группы S) в подобных системах? Формула (5.65) позволяет вычислить S в любой теории. В частности, если в рассматриваемой системе физические переменные выделяются условием $x_1^{(2)} = 0$, то, как показывают вычисления (9.46)–(9.49) (см. п. 9.8), $S = \mathbb{Z}_2$, причем S действует на все физические переменные одновременно: $x_1^{(1)}, x_2^{(i)} \rightarrow -x_1^{(1)}, -x_2^{(i)}$ (аналогично для канонически сопряженных импульсов). Поэтому физическое ФП есть $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_2$. Очевидно, оно не совпадает с $\text{con}(\pi) \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, где $\text{con}(\pi) = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$. Данный факт имеет общий характер [39, 42], т. е. остаточная дискретная калибровочная группа действует одновременно на все физические переменные. Поэтому физическое ФП редуцируется как целое, обеспечивая тем самым специфическую чисто кинематическую взаимосвязь физических степеней свободы.

7.2. Система с бозевскими и фермиевскими степенями свободы. Поучительно рассмотреть смешанную систему, включающую наряду с обычными и гассмановы переменные. Простейшая модель этого типа задается лагранжианом (более сложные системы рассмотрены в [42])

$$L = \frac{1}{2} \{[(\partial_t - yT)x]^2 - \omega_1^2 x^2\} + \psi^+ (i\partial_t + y\Gamma)\psi - \omega_2 \psi^+ \psi, \quad (7.11)$$

представляющим из себя по существу сумму лагранжианов (2.1) и (4.1) с конкретизированными потенциалами V . Анализ, аналогичный проделанному в разделах 2 и 4, показывает, что (7.11) задает систему с одной первичной связью $p_y = \partial L / \partial \dot{y} = 0$, гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_1^2 x^2) + \omega_2 \psi^+ \psi + y(t)(pTx - \psi^+ \Gamma \psi) \quad (7.12)$$

и одной вторичной связью

$$\sigma = pTx - \psi^+ \Gamma \psi = 0. \quad (7.13)$$

Своеобразие модели в том, что связь σ есть четный элемент гассмановой алгебры. Равенство таких элементов нулю эквивалентно нескольким равенствам (подобно тому, как равенство нулю вектора означает исчезновение всех его компонент), т. е. в классической механике (7.13) эквивалентно двум условиям

$$\sigma_1 = pTx = 0, \quad \sigma_2 = \psi^+ \Gamma \psi = 0. \quad (7.14)$$

Возникает вопрос: означает ли это появление новых независимых связей? На первый взгляд ответ зависит от того, рассматривается ли классическая теория или квантовая. В классике гамильтониан («энергия») подобных си-

стем есть четный элемент грассмановой алгебры; согласно (7.12) обычные и грассмановы переменные в процессе движения не перемешиваются, т. е. обе подсистемы развиваются со временем независимо. Поэтому условия (7.14) можно как будто трактовать как признак редукции фазового пространства в обеих подсистемах, ибо, например, равенство $\sigma_2 = \psi_1^+ \psi_1 - \psi_2^+ \psi_2 = 0$ невозможно для независимых переменных ψ_1 и ψ_2 . В квантовой же теории, напротив, канонические переменные обоих типов есть операторы, и условие $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) \Phi = 0$ не влечет равенств $\hat{\sigma}_i \Phi = 0$, $i = 1, 2$ ввиду того, что собственные значения $\hat{\sigma}_i$ есть с-числа.

Сказанное согласуется с определением δ -функций от четных элементов грассмановой алгебры [56], в данном случае функции $\delta(\sigma)$. Ее появление неизбежно при формулировании квантовой теории в рамках гамильтонова континуального интеграла (когда нефизические переменные исключаются). Но в ГКИ фигурируют классические переменные, поэтому обращение к нему может прояснить ситуацию в классике. В [56] показано, что $\delta(\sigma)$ следует понимать как ряд Тэйлора

$$\delta(\sigma_1 - \sigma_2) = \delta(\sigma_1) + \sum_{n=1}^k \delta^{(n)}(\sigma_1) (-\sigma_2)^n, \quad (7.15)$$

который обрывается на члене с таким номером k , что $\sigma_2^{k+1} = 0$. Так определенная δ -функция обладает необходимым свойством

$$\int f(\hat{\xi}) \delta(\hat{\xi} - \hat{\xi}_0) d\hat{\xi} = f(\hat{\xi}_0),$$

где $\hat{\xi}$ — четный элемент грассмановой алгебры (определение интегралов по четным элементам грассмановой алгебры и более общих интегралов на ней см. в [56, 59]). Из (7.15) ясно, что появление δ -функции $\delta(\sigma_1 - \sigma_2)$, где $\sigma_{1,2}$ — классические величины (7.14), не означает почленного выполнения равенства $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 0$ в процессе эволюции системы. Итак, в квантовой теории имеется лишь одна вторичная связь, а поскольку классическая картина получается из квантовой в результате предельного перехода, последняя также будет отвечать динамике, характеризуемой одной вторичной связью. Этот вывод становится очевидным, если учесть, что реальный калибровочный произвол определяется числом независимых произвольных параметров (функций времени) перед генераторами калибровочных преобразований. В функцию Гамильтона (7.12), содержащего всю информацию о динамике системы, входит лишь один такой параметр $y(t)$. Фиксация его, например, условием $x_2 = 0$ исчерпывает калибровочный произвол (с точностью до дискретной подгруппы; остаточная калибровочная подгруппа $\mathbb{Z}_2$ не может изменить размерность $\Phi\Pi$).

Теперь можно найти спектр гамильтониана (7.12). Запишем его во вторично квантованном виде

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{a}^+ \hat{a} + \omega_2 \hat{\psi}^+ \hat{\psi} + y(t) (i \hat{a}^+ T \hat{a} - \hat{\psi}^+ \Gamma \hat{\psi}) + (\omega_1 - \omega_2) \equiv \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (7.16)$$

где $\hat{H}_1$ при $\omega_1 = 1$ идентичен (2.19), а $\hat{H}_2$ совпадает с (4.4), если в последнем положить $\omega = \omega_2$, $\Omega = 0$. Очевидно, $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$, т. е. по обычным критериям подсистемы динамически независимы. Базисные калибровочно-инвариантные операторы, порождающие физическое гильбертово пространство, даются формулами

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= (\hat{a}^+)^2, & \hat{b}_2 &= \hat{a}^+ \hat{\psi}^+, & \hat{b}_3 &= \hat{\psi}^+ T \hat{\psi}^+, \\ \hat{b}_4 &= \hat{a}^+ T \hat{\psi}^+ & (\psi &= (\psi_1, \psi_2)). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Причина появления оператора $\hat{b}_4$ здесь та же, что и в (7.8): расширение калибровочной группы до $O(2)$ его исключает. Заметим, что такое расширение исключило бы и оператор $\hat{b}_3$ — это служит еще одним аргументом в пользу группы $SO(2)$ ⁽¹⁵⁾ ●. Векторы состояний, полученные применением всевозможных целых неотрицательных степеней операторов (7.17) к основному состоянию, образуют базис физического гильбертова пространства (аналогично (7.9)). Все они являются собственными векторами оператора $\hat{H}$. Это позволяет выписать спектр энергий

$$E = 2n_1\omega_1 + n_2(\omega_1 + \omega_2) + 2n_3\omega_2 + n_4(\omega_2 + \omega_1) + \omega_1 - \omega_2. \quad (7.18)$$

В отличие от (7.10) здесь лишь n_1 пробегает ряд натуральных чисел $n_1 = 0, 1, 2, \dots$, тогда как n_i , $i = 2, 3, 4$ принимают значения 0,1, поскольку для этих значений $i \hat{b}_i^2 = 0$; вклады состояний $\hat{b}_2\hat{b}_4|0\rangle$ и $\hat{b}_{2,4}\hat{b}_3|0\rangle$ нужно исключить ввиду тождеств для операторов (7.17): $\hat{b}_2\hat{b}_4 = \hat{b}_1\hat{b}_3$ и $\hat{b}_{2,4}\hat{b}_3 = 0$. Отметим, что при $\omega_1 = \omega_2$ энергия основного состояния равна нулю (суперсимметрия). Из структуры спектра (7.18) заключаем, что, как и в модели (7.2), здесь нельзя выделить степень свободы, возбуждения которой не зависели бы от остальной подсистемы, а спектр свидетельствовал бы о коническом или плоском ФП.

8. Заключение. Подведем итоги. В статье дан обзор результатов исследования феномена редукции фазового пространства физических переменных в теориях с калибровочной симметрией. Данное явление изучается на простейших моделях с конечным числом степеней свободы. Выяснена причина редукции ФП (существование — после исключения нефизических переменных — остаточной дискретной калибровочной группы, изоморфной подгруппе Вейля полной калибровочной группы), установлены некоторые ее следствия (изменения спектра энергии осцилляторов, модификация гамильтонова континуального интеграла). Это явление носит общий характер и имеет место как в теориях с обычными (коммутирующими), так и с грассмановыми (антикоммутирующими) переменными.

В статье рассмотрены лишь простейшие механические системы. Мы сознательно не касались теории калибровочных полей, с прицелом на которые и писалась работа. Эта тема составляет предмет самостоятельного и более обширного исследования, которое еще далеко от своего завершения. Однако уже полученные в этом направлении результаты позволяют говорить о важности изучаемого явления для теории элементарных частиц. Еще в работе [12], в которой изучалась скалярная электродинамика, в частности, феномен Хиггса, был сделан вывод о редукции ФП поля Хиггса. В статьях [15, 20, 22] исследовалась модель sine-Gordon с включением электромагнитного взаимодействия. Было показано, что наличие дискретной калибровочной группы меняет спектр возбуждений бризера. В работах [15, 28] изучалось ФП полей Янга — Миллса. Показано, что остаточная группа Вейля меняет ФП физических компонент калибровочного, а также взаимодействующего с ним полей. Наиболее важные следствия, вытекающие из перечисленных исследований, касаются природы поля Хиггса и проблемы конфайнмента. В работах [15, 16, 28] из факта редукции ФП поля Хиггса (в стандартном подходе) сделан вывод о его составной природе, т. е. вывод о том, что это поле не может быть элементарным. В препринтах [60, 61] указано на важность феномена редукции ФП для понимания конфайнмента. Казалось бы, исключив в квантовой хромодинамике все нефизические

зические степени свободы («фиксируя калибровку»), мы приходим к обычной полевой теории с нормальными каноническими переменными, и тогда со всей остротой встает вопрос: что мешает разлетаться соответствующим частицам (возбуждениям этих полей)? Оказывается, запрещает им распространяться именно наличие остаточной калибровочной симметрии, действующей в пространстве физических переменных. Только составные объекты, инвариантные относительно этих остаточных калибровочных преобразований, могут рассматриваться как полноправные физические объекты [60, 61].

Многие вопросы остались не рассмотренными. Обширное поле для исследований открывается при обращении к проблеме о структуре фазового пространства полевых систем, особенно систем с несколькими полями, включая спинорные и скалярные. Остаются неисследованными и некоторые другие вопросы, например, связанные с квазиклассическими вычислениями. Это дело будущего. Нам представляется, что решение затронутых проблем позволит не только лучше понять природу динамических систем с калибровочной симметрией, но и продвинуться в описании свойств и взаимодействия так называемых «элементарных частиц».

Авторы искренне признательны рецензентам И. А. Баталину, Б. Л. Воронову, И. В. Тютину, а также М. А. Соловьеву, прочитавшему рукопись, за полезное обсуждение и ценные замечания.

9. Приложение.

9.1. Фазовое пространство в полярных координатах. При движении частицы в плоскости ФП каждой из двух ее степеней свободы в декартовых координатах есть плоскость: $\text{ФП}(x_i, p_i) = \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$. В полярных координатах каждая из переменных r и θ принимает значения, лежащие лишь на части вещественной оси. Каковы же тогда ФП соответствующих степеней свободы? Ввиду того, что r меняется на полуоси $r \geq 0$, а θ — на отрезке $[0, 2\pi)$, напрашивается вывод, что $\text{ФП}(r, p_r)$ есть полуплоскость, а $\text{ФП}(\theta, p_\theta)$ — полоса шириной 2π , так как p_r, p_θ меняются в бесконечных пределах. Более внимательное рассмотрение показывает, что ФП в обоих случаях фактически есть полные плоскости.

Чтобы убедиться в справедливости сказанного относительно r и p_r , рассмотрим движение частицы через начало отсчета в декартовых и полярных координатах параллельно. Пусть движение происходит вдоль оси x_1 . Пока частица движется по положительной полуоси, выполняется равенство $x_1 = r$, и никаких парадоксов не возникает. При прохождении начала координат x_1 меняет знак, r знака не меняет, а θ и p_r меняются скачком: $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $p_r = |p| \cos \theta \rightarrow -p_r$. Хотя скачки и не связаны с воздействием каких-либо сил, они не противоречат уравнениям движения. Между тем кинематика системы допускает интерпретацию, позволяющую их избежать. В самом деле, формулы перехода к полярным координатам $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ инвариантны относительно замены $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $r \rightarrow -r$. Это означает, что движение со значениями полярных координат $\theta + \pi$, $r > 0$ неотличимо от движения со значениями их θ , $r < 0$. Фазовая траектория будет одинакова как в плоскости (r, p_r) , так и в плоскости (x_1, p_1) , что и следовало ожидать.

Скажем иначе, $\text{ФП}(r, p_r)$ есть сложенная пополам вдоль оси $r = 0$ плоскость; каждая из половинок плоскости отвечает значениям θ , различающимся на π , поэтому физические состояния на этих полуплоскостях

различны, причем вторая половинка $r < 0$ перед совмещением с первой $r > 0$ повернута на угол π вокруг оси $p_r = 0$ (ввиду скачка импульса $p_r \rightarrow -p_r$). Таким образом, каждой точке фазовой полуплоскости $r \geq 0$, $p_r \in \mathbb{R}$ соответствуют два различных физических состояния (они различаются значениями угла θ); следовательно, такая полуплоскость изоморфна фазовой плоскости $(r, p_r) \in \mathbb{R}^2$, каждой точке которой отвечает только одно физическое состояние системы, т. е. по определению фазового пространства именно эта плоскость и должна быть отождествлена с ФП (r, p_r) . При наличии калибровочной симметрии θ становится нефизической переменной (ненаблюдаемой), поэтому различие между двумя наложенными полуплоскостями исчезает и ФП $(r, p_r) = \text{сop}(\pi)$ (поворот на угол π второй половинки фазовой плоскости $r < 0$ перед совмещением с первой $r > 0$ как раз и обеспечивает их отождествление в согласии с идеологией калибровочной группы $\mathbb{Z}_2$, действующей в ФП физических переменных).

Изучая вращение частицы вокруг начала координат, убеждаемся, что для однозначной характеристики движения нужно допускать изменения угловой переменной в бесконечных пределах $\theta \in \mathbb{R}$, если учитывать число оборотов, совершенных частицей вокруг начала координат. Следовательно, ФП (θ, p_θ) также есть плоскость.

9.2. Формализм первого порядка и гамильтонова механика. В теориях с ферми-полями лагранжиан обычно линеен по скоростям. Чтобы выяснить содержание таких теорий с точки зрения гамильтонова формализма, рассмотрим модель с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \alpha^i \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - V(\xi), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n, \quad \alpha^{ij} = -\alpha^{ji}. \quad (9.1)$$

Существо дела не изменится, если мы положим для простоты $n = 1$, $\alpha^{12} = -1$. Тогда, переходя к гамильтонову формализму, имеем $\pi_1 = dL/d\dot{\xi}_1 = \xi_2/2$, $\pi_2 = \partial L/\partial \dot{\xi}_2 = -\xi_1/2$, т. е. имеем две первичные связи второго рода: $\Phi_1 = \pi_2 + \xi_1/2 = 0$, $\Phi_2 = \pi_1 - \xi_2/2 = 0$, $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 1$. По существу Φ_1, Φ_2 — пара канонически сопряженных переменных. Другая пара такова: $\xi = -(\pi_2 - \xi_1/2)$, $\pi = (\pi_1 + \xi_2/2)$, причем $\{\xi, \Phi_i\} = \{\pi, \Phi_i\} = 0$. Согласно Дираку [29] можно разрешить связи (исключить нефизические переменные), заменив одновременно скобки Пуассона $\{, \}$, на скобки Дирака

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{\Phi_i, \Phi_j\}^{-1} \{\Phi_j, g\}. \quad (9.2)$$

Имеем $\xi \approx \xi_1$, $\pi \approx \xi_2$ и $\{\xi_1, \xi_2\}_D = 1$ (знак $\approx$ символизирует равенство с учетом связей, $\{\Phi_i, \Phi_j\}^{-1}$ — матрица 2×2 , обратная матрице $\{\Phi_i, \Phi_j\}$). В итоге

$$H(\xi, \pi) = \pi_1 \dot{\xi}_1 + \pi_2 \dot{\xi}_2 - \frac{1}{2} (-\xi_1 \dot{\xi}_2 + \xi_2 \dot{\xi}_1) + V(\xi_1, \xi_2) \approx V(\xi_1, \xi_2), \quad (9.3)$$

т. е. (9.1) есть по существу «плотность» действия в гамильтоновой форме: действие $A = S_H = \int L dt$, а V есть гамильтониан. Итак, фактически ξ_1, ξ_2 — канонически сопряженные переменные. Все выкладки легко обобщаются на любое целое n , если учесть, что линейным преобразованием ξ матрица α может быть приведена к стандартной, блочно-диагональной форме с матрицами $\tau \equiv -i\tau_2$ на диагонали (τ_2 — матрица Паули). Вывод: формализм первого порядка есть по существу гамильтонов формализм; если матрица α приведена к стандартной, блочно-диаго-

вальной форме, то $\xi_{2i-1} = q_i$, $\xi_{2i} = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $V(\xi) = H(p, q)$, & действие $A = \int L(\xi, \dot{\xi}) dt$ есть действие в гамильтоновой форме:

$$A = S_H = \int dt \left[\frac{1}{2} (p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i) - H(p, q) \right];$$

уравнения движения в теории с лагранжианом (9.1) идентичны гамильтоновым уравнениям движения $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$.

9.3. Динамические системы с грассмановыми переменными. Лагранжиан системы обычно задается в виде ⁽¹⁶⁾. ●

$$L = \frac{i}{2} \theta_j \dot{\theta}_j - H(\theta). \quad (9.4)$$

Привычно выглядят уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} = \frac{\partial L}{\partial \theta_j}; \quad (9.5)$$

в них нужно еще уточнить тип производной (левая или правая [53, 54]). В статье используются левые производные. Взяв простейший случай, когда $j = 1, 2$, находим уравнения движения для «грассманова» гармонического осциллятора ⁽¹⁷⁾ ●.

$$\dot{\theta}_1 = \omega \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = -\omega \theta_1, \quad (9.6)$$

решение которых записывается в виде

$$\theta(t) = \exp(i\omega \tau_2 t) \theta(0), \quad (9.7)$$

где θ — столбец (θ_1, θ_2) . Более подробная запись решения (9.7):

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) \cos \omega t + \theta_2(0) \sin \omega t,$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) \cos \omega t - \theta_1(0) \sin \omega t$$

свидетельствует, что движение сводится к вращению двумерного «вектора» (θ_1, θ_2) с угловой скоростью ω .

Переход к гамильтонову формализму осуществляется как и для обычных переменных, рассмотренных выше. Скобки Пуассона определяются согласно [53]

$$\{f, g\} = -i \frac{\partial}{\partial \theta'_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(\theta) g(\theta')|_{\theta'=\theta}. \quad (9.8)$$

При этом уравнения движения записываются стандартно: $\dot{\theta}_j = \{\theta_j, H\}$. Имея в виду последующее квантование, в лагранжиане (9.4) удобно перейти к комплексным переменным $\eta = (\theta_1 + i\theta_2)/\sqrt{2}$ и $\eta^+ = (\theta_1 - i\theta_2)/\sqrt{2}$ (предполагается, что число образующих четно):

$$L = \frac{i}{2} (\eta^+ \dot{\eta} - \dot{\eta}^+ \eta) - \omega \eta^+ \eta. \quad (9.9)$$

Скобки Пуассона в новых переменных η_j , η_j^+ записываются в виде

$$\{f(\eta, \eta^+), g(\eta, \eta^+)\} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \eta'_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j^+} + \frac{\partial}{\partial \eta_j'^+} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right) f(\eta, \eta^+) g(\eta', \eta'^+) |_{\eta'=\eta}, \quad (9.10)$$

причем $\{\eta_i, \eta_j^+\} = -i\delta_{ij}$. Комплексные образующие η, η^+ , как несложно убедиться, играют роль канонических переменных и удобны для перехода к квантовому описанию [53, 54]

$$[\hat{\eta}_i, \hat{\eta}_j^+]_+ = i\{\eta_i, \eta_j^+\} = \delta_{ij}, \quad (9.11)$$

где $[\hat{A}, \hat{B}]_+$ — антикоммутатор операторов $\hat{A}, \hat{B}$. Уравнения движения для η, η^+ имеют вид

$$\dot{\eta} = -i\omega\eta, \quad \dot{\eta}^+ = i\omega\eta^+, \quad (9.12)$$

т. е. $\eta(t) = \exp(-i\omega t)\eta(0) \equiv z(t)\eta(0)$ ⁽¹⁸⁾ ●. Теперь можно ввести понятие ФП для гассманова осциллятора. Определим его как двумерную плоскость, в которой по одной оси откладывается $\operatorname{Re} z(t) = \cos t$, а по другой — $\operatorname{Im} z(t) = -\sin t$. Это согласуется с определением ФП для обычного осциллятора, где роль η, η^+ играют $a = (q + ip)/\sqrt{2}$, $a^* = (q - ip)/\sqrt{2}$ и $q = \operatorname{Re} a\sqrt{2}$, $p = \operatorname{Im} a\sqrt{2}$ (если $H = \omega a^*a$, то уравнения движения $\dot{a} = -i\omega a$, $\dot{a}^* = i\omega a^*$, их решения $a(t) = \exp(-i\omega t)a(0) = (q(t) + ip(t))/\sqrt{2}$ и $a^*(t)$; по осям q и p откладываем, $\cos \omega t$ и $-\sin \omega t$, если $p(0) = 0$, $q(0) = 1$).

9.4. Квантовое описание систем с гассмановыми переменными. Помимо описания в «бескоординатном» (дираковском) формализме, приведенном в п. 4.2, полезно иметь конкретную реализацию алгебры (9.11), необходимую для построения континуального интеграла. Естествен и удобен следующий выбор. Пусть $\xi_\alpha, \xi_\alpha^*, \alpha = 1, 2, \dots, n$, — образующие комплексной гассмановой алгебры, $\xi_\alpha = \theta_1^\alpha + i\theta_2^\alpha$, $\xi_\alpha^* = \theta_1^\alpha - i\theta_2^\alpha$, $(\theta_i^\alpha)^* = \theta_i^\alpha$ ($i = 1, 2$). Тогда произвольному состоянию $|\chi\rangle$ сопоставляется элемент гассмановой алгебры

$$\langle \xi | \chi \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{\{\alpha\}} \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \xi_{\alpha_1}^* \dots \xi_{\alpha_k}^* = \chi(\xi^*),$$

а сопряженному состоянию χ — элемент

$$\langle \chi | \xi \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{\{\alpha\}} \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^* \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_k} = \langle \overline{\xi} | \chi \rangle \equiv \chi^*(\xi).$$

Оператор $\hat{\xi}_\alpha^+$ реализуется как оператор умножения $\hat{\xi}_\alpha^+ \chi(\xi^*) = \xi_\alpha^* \chi(\xi^*)$, а $\hat{\xi}_\alpha$, согласно (9.11), как оператор дифференцирования: $\hat{\xi}_\alpha \chi(\xi^*) = (\partial/\partial \xi_\alpha^*) \chi(\xi^*)$. Скалярное произведение определяется следующим образом:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \int e^{-\sum_\alpha \xi_\alpha^* \xi_\alpha} \varphi^*(\xi) \chi(\xi^*) \prod_\alpha (d\xi_\alpha^* d\xi_\alpha) = \varphi_0^* \chi_0 + \varphi_\alpha^* \chi_\alpha + \dots, \quad (9.13)$$

считая

$$\int d\xi = \int d\xi^* = 0, \quad \int \xi d\xi = \int \xi^* d\xi^* = 1, \quad \int \xi \xi^* d\xi^* d\xi = 1. \quad (9.14)$$

Данное определение есть конкретизация формул (4.9)—(4.11). В формуле (9.13) можно проинтегрировать по $\prod_\alpha d\xi_\alpha$. Тогда скалярное произведение

перепишется в виде

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \int \bar{\varphi}(\xi^*) \chi(\xi^*) \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha}^*, \quad (9.15)$$

где

$$\bar{\varphi}(\xi^*) = P \int e^{-\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^* \xi_{\alpha}} \varphi^*(\xi) \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha}, \quad (9.16)$$

и P — четность перестановки:

$$\prod_{\alpha} (d\xi_{\alpha}^* d\xi_{\alpha}) = P \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha} \prod_{\beta} d\xi_{\beta}^*.$$

Можно убедиться, что именно в смысле метрики (9.13) (или (9.15), (9.16)) операции умножения на ξ_{α}^* и дифференцирования $\partial/\partial \xi_{\alpha}^*$ сопряжены по Эрмиту. Операция (9.16) соответствует, очевидно, определению сопряжения по Мартину [53]. Например, для $n = 2$ имеем

$$\langle \xi | \chi \rangle = \chi(\xi^*) = \chi_0 + \chi_1 \xi_1^* + \chi_2 \xi_1^* \xi_2^*, \quad (9.17a)$$

$$\bar{\varphi}(\xi^*) = \varphi_0^* \xi_1^* \xi_2^* + \varphi_1^* \xi_2^* + \varphi_2^* \xi_1^* + \varphi_3^* \equiv \langle \varphi | \xi \rangle \quad (9.17b)$$

и

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \int \bar{\varphi}(\xi^*) \chi(\xi^*) d\xi_2^* d\xi_1^* = \sum_{a=0}^3 \varphi_a^* \chi_a. \quad (9.18)$$

Переменную ξ^* в формулах типа (9.15) можно считать вещественной грассмановой переменной θ , так как в формализме (9.15) используются только ξ^* и так как комплексное сопряжение превращает (9.15) в

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \chi \rangle^* &= \langle \chi | \varphi \rangle = \int \bar{\varphi}^*(\xi) \chi^*(\xi) \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha} = \int \bar{\varphi}^*(\xi^*) \chi^*(\xi^*) \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha}^* = \\ &= \int \bar{\chi}(\xi^*) \varphi(\xi^*) \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha}^*. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Второе равенство есть следствие (9.14) (одинаковость свойств алгебр $\{\xi\}$ и $\{\xi^*\}$), последнее вытекает из (9.15) и (9.16). Переменные ξ и ξ^* следует различать в алгебре с инволюцией, т. е. с образующими $\{\xi, \xi^*\}$.

9.5. К в а н т о в а н и е д и н а м и ч е с к и х с и с т е м с о с в я з я м и . Калибровочные теории являют собой типичный, хотя и не самый общий, пример динамических систем со связями. С проблемой их квантования впервые столкнулись при описании электромагнитного поля. Уже в двадцатых годах Гейзенберг и Паули [65] и Ферми [66] (подробнее см. [30]) сформулировали рецепт квантования подобных систем. В последующем эта проблема встала в полный рост при изучении гравитации и полей Янга — Миллса. Дирак [67, 29] и Баргман [68] изучили проблему в общем виде, дали классификацию связей и сформулировали общий рецепт их квантования. В дальнейшем этому вопросу была посвящена обширная литература (см. в частности [17, 18, 31—34, 69—78]).

Под квантованием мы понимаем переход к квантовому описанию динамической системы, т. е. к описанию ее эволюции с помощью амплитуды вероятности. В работе мы придерживаемся общепринятого рецепта квантования систем со связями, сформулированного Дираком в [29]. Изучение конкретных моделей в рамках общих правил [29] выдвинуло ряд

вопросов, не рассматривавшихся ранее. Мы сформулируем рецепт Дирака [29], обсудим связанные с ним вопросы и укажем конкретные способы (инвариантный и неинвариантный) реализации общей схемы).

В процессе перехода от лагранжева формализма к гамильтонову возможно появление связей, т. е. соотношений вида $\varphi(q, p) = 0$, связывающих канонические переменные (обобщенные координаты и импульсы). При переходе к квантовому описанию следует различать связи первого и второго рода. Скобки Пуассона (СП) последних — отличны от нуля (даже *слабо*, т. е. с учетом связей), тогда как СП первых в слабом смысле равны нулю. Несколько упрощая дело, можно рассматривать связи второго рода как условия на некоторые обобщенные координаты и импульсы $\hat{Q}_i = 0$, $\hat{P}_i = 0$, а связи первого рода — как условия на обобщенные импульсы [79]. При квантовании канонические переменные становятся операторами, которые подчиняются стандартным коммутационным соотношениям. Отсюда ясно, что условия связи нельзя превратить в операторные равенства (нарушается условие $[\hat{Q}_i, \hat{P}_j] = i\delta_{ji}$). Остается отобрать векторы состояний, на которых связи обращаются в нуль; соответствующее линейное пространство называют физическим гильбертовым подпространством. Но это допустимо лишь в отношении связей первого рода, ибо не существует состояний, которые были бы собственными для обоих канонически сопряженных переменных: $\hat{Q}_j\psi = 0$, $\hat{P}_j\psi = 0$ (противоречат соотношению неопределенностей). Поэтому для связей второго рода остается единственная возможность — их следует разрешить, т. е. исключить соответствующие нефизические переменные, до квантования. Итак, при квантовании связи первого и второго рода трактуются Дираком [29] по-разному, хотя те и другие относятся к нефизическим переменным.

Формулирование теории на языке гамильтоновых континуальных интегралов [69] создает впечатление (ложное [17; 54, с. 172]), что таким образом удастся избавиться от проблемы неперестановочности канонически сопряженных величин, проблемы их упорядочения и т. п., т. е. что как бы удастся работать целиком в рамках классического гамильтонова формализма. Но тогда теряется и всякое различие между нефизическими переменными, отвечающими связям первого или второго рода. Их исключение подстановкой в континуальный интеграл соответствующих δ -функций (в случае связей первого рода добавляют еще так называемые дополнительные условия [69]; при этом вся совокупность условий эквивалентна связям второго рода) ведет к квантовой теории, тождественной теории, получающейся переходом к квантованию после предварительного исключения нефизических переменных. Соответствующая квантовая картина может отличаться от таковой, даваемой рецептом Дирака [29]. Этот факт отмечен многими авторами [17, 32–35]; операции квантования и исключения нефизических переменных (связи первого рода), вообще говоря, не перестановочны. Причина несовпадения заложена в природе квантовой механики: каноническое квантование нельзя проводить в криволинейных координатах [51, 52], а именно к ним обычно приходится обращаться при переходе к физическим переменным (см. п. 2.1.2). Если же нефизические переменные связаны с декартовыми координатами (например, $y(t)$ в модели (2.1)), то упомянутые операции перестановочны.

Какой же подход правильный? Против схемы Дирака [29] выдвигается возражение, что она непригодна, так как физические состояния, удовлетворяющие условиям типа $\hat{p}_i\Phi = 0$, ненормируемы. Между тем

в альтернативном подходе такой проблемы не возникает. В [60] показано (см. также [31], с. 665), что подобное возражение против рецепта [29] неосновательно, по крайней мере, для калибровочных теорий. Прежде всего отметим, что совокупность связей первого рода как генераторов сдвигов следует разбить на два класса, связанных с компактными и некомпактными группами преобразований. Физические состояния, на которых обращаются в нуль генераторы компактных групп, в квантовой механике, нормируемы. Остаются генераторы с некомпактной областью действия. И те и другие встречаются в калибровочных теориях. Но в калибровочных теориях нефизические переменные с некомпактной областью определения (такие, как $u(t)$ в разделах 2, 3 или A_0 в теории Янга — Миллса) принадлежат подпространству евклидова пространства, ортогональному «физическому» (содержащему все физические переменные); в модели (2.1) это подпространство $\mathbb{R}^1$ переменной u в полном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$. Но в таком случае безразлично как их исключать — до квантования или после. Поэтому мы можем их игнорировать (не интегрировать по ним при нормировании векторов [31]), или исключить до квантования. Поскольку результаты не отличаются, можно использовать тот или иной подход в зависимости от желания или обстоятельств. В обоих случаях проблема ненормируемости не возникает. Общий случай динамических систем со связями, являющихся генераторами произвольных компактных и некомпактных групп, не изучен, и мы его не рассматриваем.

Мы показали состоятельность метода Дирака применительно к калибровочным теориям. А имеются ли соображения, свидетельствующие о его предпочтительности? Такие аргументы есть. Вспомним, что хотя нам обычно и приходится воссоздавать квантовую картину исходя из классической, истинной теорией является квантовая. Она по необходимости должна обладать явной релятивистской инвариантностью, следовательно, применительно к калибровочным полям она должна формулироваться с участием всех компонент векторных полей A_μ , включая и нефизические. Это означает, что требование явной лоренц-инвариантности влечет появление операторов, отвечающих нефизическим переменным. Их наличие делает неизбежной редукцию полного гильбертова пространства (переход к физическому подпространству). Последнее достигается требованием исчезновения на физических векторах связей (генераторов калибровочных преобразований). Необходимость применения схемы Дирака [29] в физике нам представляется бесспорной.

Два слова о применениях общих рецептов. В обеих схемах (дираковской и альтернативной) имеются два пути построения конкретных теорий — инвариантный и неинвариантный. В инвариантном подходе используются лишь явно калибровочно-инвариантные переменные, тогда как неинвариантный связан с использованием калибровочно-неинвариантных величин; неинвариантен он и по форме (внешне). Поскольку оба подхода являются различными по форме воплощениями одной и той же теории, физически (по своему содержанию) они должны быть неразличимы. К сожалению, в обеих схемах эти возможности не исследованы в общем виде, поэтому мы адресуем читателя к конкретным моделям. В альтернативной схеме оба подхода рассмотрены в п. 2.1 на примере модели (2.1). Там же указаны дополнительные условия, которые необходимо потребовать для того, чтобы оба подхода были физически идентичны. В рамках метода Дирака эти подходы реализуются в пп. 2.1.2, 3.2, 9.7.

В заключение дадим определение физического ФП в инвариантном и неинвариантном подходах. В первом физическое ФП системы получается из полного отождествлением всех точек, связанных калибровочным преобразованием, т. е. физическое ФП есть фактор-пространство полного (объемлющего) ФП по калибровочной группе. Имеется в виду *расширенная калибровочная группа* [29] $\tilde{G}$, генерируемая всеми связями первого рода (первичными и вторичными независимо). Во втором сперва осуществляется переход от исходного ФП $\Gamma^{2N} = \mathbb{R}_q^N \otimes \mathbb{R}_p^N$ к меньшему $\Gamma^{2M} = \mathbb{R}_q^M \otimes \mathbb{R}_p^M$, если $N - M$ — полное число независимых связей первого рода. В разделах 2, 3 показано, что, как правило, в этом редуцированном пространстве действует остаточная дискретная калибровочная группа S , ведущая к его дальнейшей редукции. Факторизация пространства Γ^{2M} по этой группе дает физическое ФП ⁽¹⁹⁾ $\bullet$. Символически сказанное можно записать в виде $(\Phi\Pi)_{ph} = \Gamma^{2N}/\tilde{G} = \Gamma^{2M}/S$.

9.6. Свойства меры $\kappa^2(h)$ (п. 5.3). Мера $\mu = \kappa^2$ может быть вычислена явно [13, 15, 43]. С этой целью введем в алгебре Ли X базис Картана — Вейля [14, 44]

$$[h, e_\alpha] = (h, \alpha) e_\alpha, [e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, \quad (9.20)$$

где $h, \alpha \in H$, $\alpha > 0$ — положительные корни, e_α — соответствующие им корневые векторы, $N_{\alpha\beta}$ — числа, отличные от нуля, если $\alpha + \beta$ является корнем алгебры; $(,)$ — форма Картана — Киллинга $(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y)$, где $\text{ad } x$ — оператор присоединенного представления для элемента x , действующий в X по правилу $\text{ad } x(y) = [x, y]$, $\forall x, y \in X$. Для компактных групп Ли нормировка структурных констант может быть выбрана так, что $(x, y) = x_a y_a$. Очевидно, в базисе (9.20) любой элемент $z \in X \ominus H$ записывается в виде $z = \sum_{\alpha > 0} (z_\alpha^+ e_\alpha + z_\alpha^- e_{-\alpha})$. Однако базис в $X \ominus H$, составленный из $e_\alpha, e_{-\alpha}$, не является ортогональным, так как квадрат вектора $x = h + z$, $h \in H$, $z \in X \ominus H$ в этом базисе есть [44 с. 217]

$$(x, x) = (h, h) + \sum_{\alpha > 0} z_\alpha^+ z_\alpha^-. \quad (9.21)$$

Чтобы вычислить $\det \omega$ в (5.17), в $X \ominus H$ следует ввести ортогональный базис

$$z = \sum_{\alpha > 0} (z_\alpha^c c_\alpha + z_\alpha^s s_\alpha), \quad (9.22)$$

где

$$c_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_\alpha + e_{-\alpha}), \quad s_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_\alpha - e_{-\alpha}). \quad (9.23)$$

Тогда второе слагаемое в правой части (9.21) заменится на

$$\sum_{\alpha > 0} [(z_\alpha^c)^2 + (z_\alpha^s)^2].$$

В базисе (9.23) легко найти матрицу $\omega_{\alpha\beta}(h)$. По определению (5.17) $[h, \lambda_\alpha] = \omega_{\alpha\beta}(h) \lambda_\beta$, где λ_α образуют ортогональный базис в $X \ominus H$. В качестве $\{\lambda_{l+1}, \lambda_{l+2}, \dots, \lambda_N\}$ возьмем набор $\{c_{\alpha_1}, s_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, s_{\alpha_2}, \dots\}$. Тогда из (9.23) и (9.20) вытекает $[h, c_\alpha] = (h, \alpha) s_\alpha$, $[h, s_\alpha] = (h, \alpha) c_\alpha$. Следовательно, в этом базисе матрица $\omega_{\alpha\beta}$ составлена из блоков $\tau_1(h, \alpha)$, τ_1 — матрица Паули, α пробегает множество всех положительных корней.

Следовательно, с точностью до знака имеем (в базисе Картана — Вейля $\omega_{\alpha\beta}$ вещественные)

$$\kappa(h) = (\det \omega)^{1/2} = \prod_{\alpha > 0} (\alpha, h), \quad (9.24)$$

т. е. $\kappa(h)$ полином h_i степени $(N - l)/2$. По построению (5.16), (5.17) величина $V_G V_H^{-1} \mu(h)$ есть объем орбиты калибровочной группы элемента h [58]. Здесь V_G — объем группового пространства, V_H — объем стационарной подгруппы элемента h , т. е. $V_H = (2\pi)^l$ (подгруппа Картана изоморфна $(\times U(1))^l$).

Используя (9.24), нетрудно проверить, что «квантовый потенциал» $V_q = \kappa^{-1} (\partial_i^2 \kappa)/2$ равен нулю:

$$V_q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta > 0} \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, h)(\beta, h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{плоскостям}}} \sum_{\substack{\alpha \neq \beta > 0, \\ \text{в одной} \\ \text{плоскости}}} \frac{(\alpha, \beta)}{(h, \alpha)(h, \beta)} = 0. \quad (9.25)$$

Здесь сумму по положительным корням $\alpha \neq \beta > 0$ мы разбили на сумму по положительным корням, лежащим в одной плоскости, и сумму по всем таким плоскостям. Сумма в одной плоскости может быть вычислена явно, так как взаимное расположение положительных корней в ней определяется четырьмя случаями $\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = (\alpha, \beta)^2 (\alpha, \alpha)^{-1} (\beta, \beta)^{-1} = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ [14, 44], т. е. фактически V_q для группы ранга l определяется V_q для групп с $l = 2$: $SU(3)$, $Sp(4) \sim SO(5)$ и G_2 . Можно проверить явным вычислением, что для них $V_q = 0$. Тот же результат может быть получен алгебраико-геометрическими методами [43] (теорема П.5.33).

Обсудим вопрос о полюсных особенностях физических волновых функций (5.21). Собственные функции оператора (5.19) представляются в виде $\psi = \kappa^{-1} \varphi$, где φ — решение уравнения Шредингера с гамильтонианом $-\partial_i^2/2 + V(h)$. Функции ψ могут иметь особенности в точках, где $\kappa(h) = 0$. Покажем, что физические функции (5.21) регулярны в этих точках. Мы опираемся на следующее утверждение [43, с. 403]: всякий полином $p(h)$, $h \in H$, обладающий свойством $p(wh) = \det w p(h)$, представим в виде

$$p(h) = \kappa(h) q(h), \quad (9.26)$$

где q есть инвариант группы W .

Так как группа Вейля есть группа, порожденная отражениями корней, то $\mu = \kappa^2$ есть инвариант W (см. (9.24)), т. е.

$$\kappa(wh) = \pm \kappa(h) = \det w \kappa(h), \quad \det w = \pm 1. \quad (9.27)$$

Тогда для Φ (5.21) имеем

$$\Phi(h) = N_W^{-1/2} \kappa^{-1}(h) \sum_w \det w \varphi(wh) \equiv \kappa^{-1} \tilde{\varphi}(h). \quad (9.28)$$

Очевидно, $\tilde{\varphi}(wh) = \det w \tilde{\varphi}(h)$. Разложим $\tilde{\varphi}(h)$ в ряд по степеням h_i и сгруппируем члены ряда в однородные полиномы $p_n(h)$ с фиксированной суммарной степенью n , т. е.

$$\tilde{\varphi}(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n p_n(h).$$

Так как группа W действует однородно на h , то $p_n(wh) = \det wp_n(h)$. Согласно (9.26) $p_n(h) = \kappa(h)q_n(h)$, где $q_n(wh) = q_n(h)$ и $\tilde{\varphi}_n = 0$ при $n < (N - l)/2$ — степени полинома $\kappa(h)$. Следовательно, $\tilde{\varphi}(h) = \kappa(h)\chi(h)$, и

$$\chi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n q_n(h)$$

— W -инвариантная функция. Вывод: фактор $\kappa^{-1}(h)$ в (9.28) не может породить полюсные особенности у функций Φ .

9.7. Инвариантные координаты для групп ранга 2 [15, 21]. В разделе 3 отмечалось, что независимое возбуждение «декартовых» физических переменных h невозможно вследствие редукции их ФП. С другой стороны, в «представлении вторичного квантования» (см. п. 3.2.1) можно выделить независимые степени свободы. Они оказываются коллективными возбуждениями исходных степеней свободы. Подобные переменные можно ввести и в координатном представлении. Зависящие от них волновые функции явно калибровочно-инвариантны.

В гамильтониане (3.3) для групп ранга $l = 2$ введем калибровочно-инвариантные переменные

$$\Phi_1 = (\text{Tr } x^2)^{1/2}, \quad \Phi_2 = \Phi_1^{-r} \text{Tr } x^r, \quad (9.29)$$

где r — степень второго независимого оператора Казимира (см. таблицу в разделе 9.8) и канонически сопряженные им импульсы

$$\pi_i = \text{Tr } p e_i (\text{Tr } e_i^2)^{-1}, \quad i = 1, 2. \quad (9.30)$$

Прямым вычислением убеждаемся, что элементы

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_i \left(\frac{\partial}{\partial x} = \lambda_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right)$$

обладают двумя свойствами: $\text{Tr } e_1 e_2 = 0$ и $[e_1, e_2] = 0$. Поэтому они могут служить в качестве локального базиса в H . Можно показать, что $\text{Tr } e_1^2 = 1$, $\text{Tr } e_2^2 = r^2 \Phi_1^{-2} (c_2 + c_1 \Phi_2 - \Phi_2^2) \equiv r^2 \Phi_1^{-2} (\alpha - (\Phi_2 - \beta)^2)$, где $\beta = c_1/2$, $\alpha = c_2 + c_1^2/4$, а постоянные c_1, c_2 зависят от структурных констант и определяют разложение полинома $(\text{Tr } (\lambda_a x^{r-1}))^2 = (c_1 \Phi_2 + c_2) \Phi_1^{2(r-1)}$. Например, для $SU(3)$ $c_1 = 0$, $c_2 = 1/6$ ($r = 3$).

В новых переменных $p = \pi_i e_i + \tilde{p}$, где $\text{Tr } e_i \tilde{p} = 0$, поэтому решение уравнений связи $[p, x] = 0$ есть $\tilde{p} = 0$, так как e_i образуют базис в H . Тогда в случае осциллятора $V = (1/2)\Phi_1^2$ имеем физический гамильтониан

$$H_{\text{ph}} = \frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{r^2 \pi_2^2}{2\Phi_1^2} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2] + \frac{1}{2} \Phi_1^2, \quad (9.31)$$

причем из условия положительности нормы $\text{Tr } e_2^2 \geq 0$ вытекает $-1 \leq (\Phi_2 - \beta)/\sqrt{\alpha} \leq 1$. Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\pi}_1 = \{\pi_1, H_{\text{ph}}\} = -\Phi_1 + \frac{r^2 \pi_2^2}{\Phi_1^3} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2], \quad \dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H_{\text{ph}}\} = \pi_1, \quad (9.32)$$

$$\dot{\pi}_2 = \{\pi_2, H_{\text{ph}}\} = \frac{r^2 \pi_2^2}{\Phi_1^2} (\Phi_2 - \beta), \quad \dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H_{\text{ph}}\} = \frac{r^2 \pi_2}{\Phi_1^2} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2] \quad (9.33)$$

допускают осциллирующие решения независимо для каждой степени свободы:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \pi_2 = 0, \\ \Phi_1(t) &= A |\cos t|, \quad \pi_1(t) = -A \sin t \varepsilon(\cos t),\end{aligned}\tag{9.34}$$

где $A = \text{const}$, ε — знаковая функция, и

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= v = \text{const}, \quad \pi_1 = 0, \\ \Phi_2(t) &= \beta + \sqrt{\alpha} \cos rt, \quad \pi_2(t) = -\frac{v^2}{r\alpha^{1/2} \sin rt}.\end{aligned}\tag{9.35}$$

Модуль в (9.34) поставлен ввиду положительности Φ_1 . Из решений (9.34), (9.35) видно, что независимыми частотами являются 2 и r , как и было установлено в п. 3.2.1. Очевидно, $\arccos(\Phi_2 - \beta)/\sqrt{\alpha}$ можно связать с угловой переменной, введенной в п. 3.2.2.

Переменные (9.29) позволяют построить явно калибровочно-инвариантные волновые функции осциллятора. С этой целью в уравнении Шрёдингера с гамильтонианом (5.19) следует перейти к новым переменным $\Phi_1 = (\text{Tr } h^2)^{1/2}$, $\Phi_2 = (\text{Tr } h^r \Phi_1^{-r} - \beta)/\sqrt{\alpha}$. Путем явного вычисления убеждаемся, что $\mu = \kappa^2 = \text{const} \cdot \Phi_1^{2r} (1 - \Phi_2^2)$; после подстановки $\psi_E = \kappa^{-1} \varphi_E$ это уравнение принимает вид ($V = 1/2 \Phi_1^2$)

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{\Phi_1} \frac{\partial}{\partial \Phi_1} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} - \frac{r^2}{\Phi_1^2} (1 - \Phi_2^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \Phi_2} (1 - \Phi_2^2)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \Phi_2} + \Phi_1^2\right) \varphi_E = 2E \varphi_E.\end{aligned}\tag{9.36}$$

Решение ищем в виде $\varphi_E = F(\Phi_1) f(\Phi_2)$. Тогда (9.36) эквивалентно

$$-(1 - \Phi_2^2) f'' + \Phi_2 f' + c f = 0,\tag{9.37}$$

$$-F'' - \frac{1}{\Phi_1} F' - \left(\frac{r^2 c}{\Phi_1^2} - \Phi_1^2 + 2E\right) F = 0,\tag{9.38}$$

где c — постоянная разделения переменных. Поскольку ψ_E должна быть конечна на границе камеры Вейля (см. п. 9.5), необходимо потребовать выполнения граничных условий $f(\pm 1) = 0$ ($\mu = 0$ при $\Phi_2 = \pm 1$). Отсюда находим решение уравнения (9.37) $f = (1 - \Phi_2^2)^{1/2} U_m(\Phi_2) = \sin[(m + 1) \arccos \Phi_2]$, U_m — полиномы Чебышева второго рода, $m = 0, 1, \dots$; $c = -(m + 1)^2$. Уравнение (9.38) сводится к стандартному (2.13) подстановкой $F(\Phi_1) = \Phi_1^{r(m+1)} \exp(-\Phi_1^2/2) g(\Phi_1)$ и заменой $\Phi_1^2 = t$, причем в (2.13) следует положить $\alpha = r(m + 1) + 1$, $\beta = -(E - \alpha)/2$. В результате находим окончательное выражение для инвариантных относительно группы W волновых функций

$$\psi_{nm} = \text{const } \Phi_1^{rm} U_m(\Phi_2) L_n^{r(m+1)}(\Phi_1^2) \exp\left(-\frac{1}{2} \Phi_1^2\right).\tag{9.39}$$

Из выражения (9.39) видно, что ψ_{nm} зависят только от $p_{r_1}(h)$ и $p_{r_2}(h)$ ($r_1 = 2, r_2 = r$), т. е. выражение перед $\exp$ в (9.39) есть полином от $p_{r_1}(h)$. Последнее очевидно для G_2 и $\text{Sp}(4) \sim \text{SO}(5)$, так как $r = 6, 4$ соответственно. Для $\text{SU}(3)$ $r = 3$ и при нечетных m Φ_1^{3m} пропорционально $(\text{Tr } h^2)^{1/2}$. Однако выше отмечалось, что для $\text{SU}(3)$ $\beta = 0$, следовательно, в этом случае $\Phi_2 = \sqrt{6} \text{Tr } h^3 \Phi_1^{-3}$ и особенность в выражении $\Phi_1^{3m} U_m(\Phi_2)$ исчезает.

По теореме Шевалле [44] об аналитическом продолжении W -инвариантных полиномов в H заключаем, что явно калибровочно-инвариантные волновые функции в полном конфигурационном пространстве имеют вид (9.39), где $p_{r_i}(h)$ заменены на $p_{r_i}(x)$, $x \in X$.

9.8. Оператор $\hat{Q}$ для произвольной группы. При формулировке квантовой теории часто используют голоморфное представление, в котором векторы состояний суть функции комплексной переменной $a_j = (x_j + ip_j)/\sqrt{2}$ (j нумерует степени свободы), а операторы $\hat{a}_j = (\hat{x}_j + i\hat{p}_j)/\sqrt{2}$ и $\hat{a}_j^+$ есть соответственно оператор дифференцирования $\partial/\partial a_j$ и оператор умножения на a_j . В этом представлении также можно построить ядро проектора на физическое подпространство $P_G(a, a^*)$ и тем самым определить ГКИ без явного выделения физических переменных. Проще всего это сделать с помощью спектрального разложения для $\hat{P}_G$. Например, состояния (2.22) $\langle \mathbf{a} | \Phi_k \rangle = \Phi_k(\mathbf{a}) (\langle \mathbf{a} | \Phi_0 \rangle = 1)$ образуют базис в $\mathcal{H}_{ph}$; следовательно, [38]

$$P_G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\mathbf{a}) \Phi_k^*(\mathbf{a}) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \xi^{1-(n/2)} I_{(n/2)-1}(2\xi), \quad (9.40)$$

где $\xi = 1/2 (\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^{*2})^{1/2}$, $I_\nu(x) = J_\nu(ix)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Формула (9.40) показывает, что $\hat{P}_G$ является аналитической функцией инварианта теории $\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^{*2}$.

Законы калибровочных преобразований x_j и a_j совпадают, поэтому $\Phi(\mathbf{a}) \in \mathcal{H}_{ph}$ суть функции от инвариантных полиномов, построенных из a_j . Отсюда следует, что проекционная формула (5.56) справедлива и для голоморфного представления, если в ней заменить x на a . Особенностью голоморфного представления является то, что ядром единичного оператора вместо δ -функции служит $\exp \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle = \exp(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^*)$. Тогда, вместо (5.58) имеем

$$P_G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = \frac{1}{V_G} \int d\mathbf{g}(\omega) \exp \langle \mathbf{a}^*, T(\omega) \mathbf{a} \rangle. \quad (9.41)$$

Видно, что P_G не зависит от динамики и имеет универсальный характер.

В ряде случаев интегрирование по группе в (9.41) или в (5.58) можно выполнить явно. Например, для модели из п. 7.1 имеем $\langle \mathbf{a}^*, T(\omega) \mathbf{a} \rangle = \sum_i (\mathbf{a}_i^* \exp(\omega T) \mathbf{a}_i)$ ($i = 1, 2$), $V_G = 2\pi$ и

$$\int_G d\mathbf{g}(\omega) = \int_0^{2\pi} d\omega;$$

тогда (9.41) дает

$$P_G(a, a^*) = \frac{1}{2} (I_0(\xi_+) + I_0(\xi_-)), \quad (9.42)$$

где $\xi_{\pm} = \sum_i (\mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_i \pm \mathbf{a}_i T \mathbf{a}_i^*)$. Не лишены интереса и соответствующие формулы в координатном представлении. Для вычисления интеграла (5.58) составим матрицу $\tilde{x}$ из столбцов $\mathbf{x}_i$ ($\tilde{x}_{ij} = x_i^{(j)}$), тогда

$$P_G(\tilde{x}, \tilde{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \delta^4(\tilde{x} - e^{\omega T} \tilde{x}'); \quad (9.43)$$

здесь δ -функция от матрицы понимается как произведение δ -функций от ее элементов. После замены переменных $\tilde{x} = e^{\theta T} \rho$, $\tilde{x}' = e^{\theta' T} \rho'$, где ρ , ρ' — верхнетреугольные матрицы, интеграл легко вычисляется в результате [39] ⁽²⁰⁾ ●.

$$P_G(\tilde{x}, \tilde{x}') = P_G(\rho, \rho') = \frac{1}{\pi} |\det \rho| \delta^3(\rho^T \rho - \rho'^T \rho') \left(1 + \frac{\det \rho}{\det \rho'}\right) = \quad (9.44)$$

$$= \frac{1}{\pi} |\det \tilde{x} \det \tilde{x}'|^{1/2} \delta^3(\tilde{x}^T \tilde{x} - \tilde{x}'^T \tilde{x}') \left(1 + \frac{\det \tilde{x}}{\det \tilde{x}'}\right). \quad (9.45)$$

Равенство (9.44) позволяет найти ядро $Q(\rho, \rho')$. Учитывая различие нормировок $\langle \rho | \rho' \rangle_{\text{ph}}$ (см. (5.64)) и ядра P_G , находим

$$Q(\rho, \rho') = \delta^3(\rho - \rho') + \delta^3(\rho + \rho'), \quad (9.46)$$

что находится в полном соответствии с анализом п. 7.1. Остаточная калибровочная группа $S = \mathbb{Z}_2$ действует одновременно на все компоненты ρ . Отметим, что представление (9.45) для P_G позволяет вычислять $\tilde{Q}$ при любом способе задания физических переменных, т. е. вместо $\rho_{12} = 0$ можно использовать любое условие на компоненты ρ . Достаточно положить в (9.45) $\tilde{x} = \exp(T\theta)\rho$ (аналогично для $\tilde{x}'$), где компоненты ρ подчиняются выбранному условию, чтобы найти $\langle \rho | \rho' \rangle_{\text{ph}}$, по которому легко восстановить $\tilde{Q}$.

В случае произвольной группы (модель из раздела 3) ядро $P_G(x, x')$ $x, x' \in X$, X — алгебра Ли, определяется операторами Казимира. Чтобы установить это, построим аналитическое продолжение ядра единичного оператора для модели из п. 5.3

$$\langle h | h' \rangle_{\text{ph}} = \frac{1}{\kappa^2(h)} \sum_w \delta^l(h - wh'), \quad h \in H, \quad h' \in K^+ \quad (9.47)$$

в полное конфигурационное пространство X (отметим, что ядро (9.47) можно получить явным вычислением по формуле (5.64), если воспользоваться теоремой (П. 5.35) из [43] и учесть, что стационарной подгруппой

Группа:	$A_l \sim \text{SU} (l + 1)$	$B_l \sim \text{SO} (2l + 1)$	$C_l \sim \text{Sp} (2l)$	$D_l \sim \text{SO} (2l)$	
$i = \overset{r_i}{1, 2, \dots, l}$	$i + 1$	$2i$	$2i$	$2i, l (i \neq l)$	
Группа:	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$i = \overset{r_i}{1, 2, \dots, l}$	2, 6	2, 6, 8, 12	2, 5, 6, 8, 9, 12	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30

произвольного элемента $x \in X$ является подгруппа Картана, т. е. что $V_H = (2\pi)^l$ ($l = \text{rank } G$). Воспользуемся формулой (III.3.7) из [43]

$$\det \left\| \frac{\partial P_{r_i}(h)}{\partial h_j} \right\| = c \kappa(h), \quad c = \text{const}, \quad (9.48)$$

где $P_{r_i} = \text{Tr } h^{r_i}$, r_i — степени независимых операторов Казимира (см. таблицу), $\kappa(h)$ определено в (9.24). Используя правило замены аргумента

у многомерной δ -функции, представим (9.47) в следующем виде [57]

$$\langle h | h' \rangle_{\text{ph}} = c (\kappa^2(h) \kappa^2(h'))^{1/4} \prod_{i=1}^l \delta(P_{r_i}(h) - P_{r_i}(h')). \quad (9.49)$$

Здесь мы использовали инвариантность меры $\kappa^2(h)$ относительно группы Вейля W (см. п. 9.6) и определение $|\kappa(h)| = (\kappa^2(h))^{1/2}$. Полином $\kappa^2(h)$ выражается через полиномы $P_{r_i}(h)$, как всякий W -инвариантный полином в H [44]. Ввиду равенства $P_{r_i}(x) = P_{r_i}(S(z)hS^{-1}(z)) = P_{r_i}(h)$ (см. (3.4)) элементы $h, h' \in H$ в (9.49) можно заменить на x, x' соответственно. Теперь, чтобы получить ядро $P_G(x, x')$ для произвольной группы G , (9.49) нужно умножить на $V_H V_G^{-1} = (2\pi)^l V_G^{-1}$. Как видно из (9.49), ядро P_G определяется только характеристиками калибровочной группы — операторами Казимира — и не зависит от динамики.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ Точное определение понятия физического ФП см. в п. 9.5.

² Это явление было также обнаружено и интенсивно изучается в современной теории струн (см., например, [80]).

³ Под калибровочной группой, понимается полная группа, генерируемая и первичными, и вторичными связями [29].

⁴ Обычную (некалибровочную) динамику можно наделять дискретной калибровочной симметрией только «руками». Ее нельзя задать лагранжианом, не содержащим нефизических переменных. Здесь $\mathbb{Z}_2$ есть подгруппа калибровочной группы.

⁵ См. Приложение, п. 9.5, а также [31].

⁶ Вообще говоря, точки u_a не могут принадлежать какому-либо из множеств $\mathbb{R}_{1,2,3}$, так как при $u = u_a$ ($a \neq 0$) уравнение (2.25) имеет три решения (при $u = u_0 = 0$ оно вообще обращается в тождество $0 \equiv 0$). Множество $\bigcup u_a$ имеет меру нуль, поэтому оно не существенно для определения скалярного произведения физических векторов состояний. Формально его нельзя включить в множества $\mathbb{R}_\alpha$ (осуществить замыкание открытых множеств, входящих в $\mathbb{R}_{1,2,3}$), так как соответствующие функции $u_\alpha(u)$ не всегда могут быть непрерывно продолжены в $\bigcup_a u_a$ (см. ниже).

⁷ Впрочем это можно не делать, если договориться выбирать ориентацию K_{ℓ_i} в соответствии со знаком (я. Например, если положить $K_2 = (u_2, u_3)$ (см. кривую 2 на рис. 1), то $\mu(u) < 0$, но

$$\int_{u_2}^{u_3} du |\mu(u)| = \int_{u_3}^{u_2} du \mu(u).$$

⁸ Калибровку $x = h$ называют неполной глобальной калибровкой с остаточной группой симметрии $W \subset G$ (см. [40]).

⁹ Фактически равенство $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ вытекает из (4.3) после подстановки в него (4.6).

¹⁰ Особенности, связанные с криволинейностью физической переменной в модели п. 2.1, рассмотрены в п. 5.2.

¹¹ Равенство (3.4) определяет замену переменных при $x \in X \sim \mathbb{R}^N$ и $h \in K^+$, $S(z) \in G/G_H$, G_H — подгруппа Картана [43].

¹² Так как $[\hat{\sigma}_a, \hat{H}] = 0$, где $\hat{H}$ определен в (5.53), то $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ph}} \oplus \mathcal{H}_{\text{nph}}$.

¹³ Точнее, стационарной точкой служит линейная комбинация решений (6.5) такая, что τ_c отдельных инстантонов разделены достаточно большими интервалами,

и при $\tau \rightarrow \pm\infty$ эта комбинация стремится к $2\pi t$ и $2\pi t'$ соответственно. Это — приближение инстантонного газа [27].

¹⁴ В соответствующей одномерной модели [26] — наоборот. Различие связано с существованием меры $\mu(r) = r^2$, от которой зависят волновые функции (см. анализ уравнения (5.12)).

¹⁵ Состояние $\hat{b}_3 |0\rangle$ — единственное физическое состояние в модели из п. 4.2,

¹⁶ Вообще говоря, есть непротиворечивые теории с грассмановыми переменными, лагранжиан которых квадратичен по скоростям (см., например, [62]). В статье этот случай не рассматривается.

¹⁷ Общий случай систем с грассмановыми переменными рассмотрен в [63, 64].

¹⁸ Отметим, что переход $\theta_i \rightarrow \lambda\theta_i$, где λ произвольное вещественное число ($\lambda \neq 0$), не меняет алгебры Грассмана. В данном случае $z(t)$ — функция времени: она несет информацию о динамике системы.

¹⁹ Это справедливо также и в том случае, когда остаточные калибровочные преобразования не образуют подгруппы калибровочной группы.

²⁰ Здесь и в (9.45) δ -функция от симметричной матрицы 2×2 понимается как произведение δ -функций от трех независимых компонент этой матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1927. V. 114. P. 243.
2. Yang C. N., Mills R. L. // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191.
3. Higgs P. // Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 132.
4. Englert F., Brout R. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 321.
5. Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B. // Ibidem. P. 585.
6. Glashow S. L. // Nucl. Phys. 1961. V. 22. P. 579.
7. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1264.
8. Salam A. // Elementary Particle Theory/ Ed. N. Svartholm.— Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1968.— P. 367.
9. Politzer H. D. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1346.
10. Gross D. J., Wilczek P. // Ibidem. P. 1343.
- [11] Gribov V. N. // Nucl. Phys. Ser. B. 1978. V. 139. P. 1.
12. Прохоров Л. В. // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 229.
13. Prokhorov L. V., Shabanov S. V. // Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 216. P. 341.
14. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления.— М.: Наука, 1970.
15. Шабанов С. В. Структура фазового пространства в калибровочных теориях.— Лекции ОИЯИ № P2-89-533.— Дубна: ОИЯИ, 1989.
16. Прохоров Л. В., Шабанов С. В. // Вестн. ЛГУ. 1990. № 4. С. 3.
17. Прохоров Л. В. // Физ. ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 1094.
18. Прохоров Л. В. // Вестн. ЛГУ. 1983. № 4. С. 14.
19. Прохоров Л. В., Шабанов С. В. // Ibidem. 1988. № 4. С. 68.
20. Прохоров Л. В., Шабанов С. В. // Ibidem. № 11. С. 8.
- [21] Шабанов С. В. // ТМФ. 1989. Т. 78. С. 411.
22. Prokhorov L. V., Shabanov S. V. // Topological Phases in Quantum Theory/ Eds. B. Markovski, S. Vinitzky.— Singapore a. o.: World Scientific, 1989.— P. 354.
23. Polyakov A. M. // Nucl. Phys. Ser. B. 1977. V. 120. P. 429.
24. Gildener E., Patrascioiu A. // Phys. Rev. Ser. D. 1979. V. 16. P. 423.
25. Coleman S. The Whys of Subnuclear Physics.— New York: Plenum Press, 1977.
26. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А. // УФН. 1982. Т. 136. С. 553.
27. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.— М.: Мир, 1985.
28. Prokhorov L. V., Shabanov S. V. Phase Space of Yang-Mills Fields.— JINR preprint E2-90-207.— Dubna, 1990.
29. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике.— М.: Мир, 1968.
30. Прохоров Л. В. // УФН. 1988. Т. 154. С. 229.
- [31] Jackiw R. // Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 661.
32. Christ N. H., Lee T. D. // Phys. Rev. Ser. D. 1980. V. 22. P. 939.
33. Ashtekar A., Horowitz G. T. // Ibidem. 1982. V. 26. P. 3342.
34. Isham C. J. Imperial College preprint TP/85-86/39.— London: Imperial College, 1986.
35. Jackiw R. // Topics in planar physics.— Columbia University preprint.— New York: Columbia University, 1989.

36. Малышев Ю. П., Прохоров Л. В. // Вестн. ЛГУ. 1986. № 18. С. 99.
37. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2.— М.: Наука, 1974.
38. Shabanov S. V. Path integral in holomorphic representation without gauge fixation.— JINR preprint E2-89-687.— Dubna, 1989.
39. Shabanov S. V. Phase space reduction and the choice of physical variables in gauge theories.—JINR preprint E2-90-23.— Dubna, 1990; Intern. J. Mod. Phys. Ser. A 1991).
40. Соловьев М. А. // ТМФ. 1989. Т. 78. С. 163.
- [41] Singer I. M. // Commun. Math. Phys. 1978. V. 60. P. 7.
42. Shabanov S. V. Quantization of constrained systems and path integral in curvilinear supercoordinates.— JINR preprint E2-90-25.— Dubna, 1990 (to be published in J. Phys. Ser. A. 1991).
43. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.— М.: Мир, 1987.
44. Желобенко Д. П. Лекции по теории групп Ли.— Дубна: ОИЯИ, 1965.
45. Лоос О. Симметрические пространства.— М.: Мир, 1985.
46. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
47. Weinberg S. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1986. V. 86. P. 43.
48. Салам А. //Полупростые группы и систематика элементарных частиц. Т. 1.— Дубна: ОИЯИ, 1965.
49. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.
50. Прохоров Л. В. // ЯФ. 1984. Т. 39. С. 496.
- [51] Фок В. А. Начала квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
52. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики.— М.: Физматгиз, 1960.
53. Martin J. L. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1959. V. 251. Pp. 536, 543.
54. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1986.
55. Огиевецкий В. И., Мезинческу Л. // УФН. 1975. Т. 17. С. 637.
56. Прохоров Л. В. // ТМФ. 1981. Т. 47. С. 210.
57. Shabanov S. V. The role of gauge invariance in path integral construction.— JINR preprint E2-89-688.— Dubna, 1989.
58. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология.— М.: Наука, 1989.— С. 163.
59. Прохоров Л. В. // Вестн. ЛГУ. 1982. № 16. С. 66.
60. Prokhorov L. V. The Weyl group and confinement.— Carleton Univ. preprint 89-03.— Ottawa: Carleton University, 1989.
- [61] Shabanov S. V. Path integral for the Yang-Mills theory in a non-perturbative region.— JINR preprint E2-90-402. Dubna, 1990 (to be published in Phys. Lett. Ser. B. 1991); Nonperturbative Green functions in quantum gauge theories (to be published in Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991).
62. Finkelstein R., Villasante M. // Phys. Rev. Ser. D. 1986. V. 33. P. 1666.
63. Прохоров Л. В., Сазонов Е. А. // Вестн. ЛГУ. 1980. № 10. С. 12.
64. Прохоров Л. В., Сазонов Е. А. // Ibidem. 1981. № 4. С. 21.
65. Heisenberg W., Pauli W. // Zs. Phys. 1929. Bd 56. S.1; перевод:/ Паули В. Труды по квантовой теории. Т. 2.— М.: Наука, 1977.
66. Fermi E. // Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4. P. 87; перевод:/ Ферми Э. Научные труды. Т. 1.— М.: Наука, 1971.
67. Dirac P. A. M. // Can. J. Math. 1950. V. 2. P. 129.
68. Bergmann P. // Rev. Mod. Phys. 1961. V. 33. P. 510.
69. Фаддеев Л. Д. // ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3.
70. Fradkin E. S. // Proc. of the X Winter School of Theoretical Physics in Karpacs.— 1973. No. 207. P. 93.
- [71] Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. // Phys. Lett. Ser. B. 1975. V. 55. P. 224.
72. Batalin I. A., Vilkovisky G. A. // Ibidem. 1977. V. 69. P. 309.
73. Fradkin E. S., Fradkina T. E. // Ibidem. 1978. V. 72. P. 343.
74. Batalin I. A., Fradkin E. S. // Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 122. P. 157.
75. Batalin I. A., Fradkin E. S. // Riv. Nuovo Cimento. 1986. V. 8, No. 10. P. 1.
76. Henneaux M. //Phys. Rep. 1985. V. 126. P. 1.
77. Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C. Constrained Hamiltonian Systems.— Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
78. Гутман Д. М., Тютин И. В. Каноническое квантование полей со связями.— М.: Наука, 1986.
79. Maskawa T., Nakajima H. // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 56. P. 1295.
80. Organez I. L., Fielfeld G., Zwanziger J. // Phys. Rev. Ser. D. 1989. V. 42. P. 2237.